Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Р. Андриянова, Ф. Х. Мукминов, Стабилизация решения параболического уравнения с двойной нелинейностью, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 9, 3–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8184>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 17:07:02

УДК 517.956.45

Э. Р. Андриянова, Ф. Х. Мукминов

Стабилизация решения параболического уравнения с двойной нелинейностью

Методом галёркинских приближений доказывается существование глобального по времени сильного решения параболического уравнения с двойной нелинейностью в неограниченной области. Для галёркинских приближений устанавливается второе интегральное тождество, предельным переходом в котором получена оценка снизу скорости убывания нормы решения данного уравнения. Установленные в работе оценки, характеризующие убывание решения при $x \rightarrow \infty$, позволили доказать оценку сверху скорости убывания решения по времени, весьма близкую к оценке снизу.

Библиография: 18 наименований.

Ключевые слова: параболическое уравнение с двойной нелинейностью, скорость убывания решения, оценки снизу, существование глобального по времени сильного решения.

DOI: 10.4213/sm8184

§ 1. Введение

Пусть Ω – область пространства $R_n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n \geq 2$. В цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ для параболического уравнения с двойной нелинейностью рассматривается первая смешанная задача

$$(|u|^{\alpha-2}u)_t + A(u) = f(t, x), \quad \alpha > 1, \quad (t, x) \in D; \quad (1.1)$$

$$u(t, x)|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega; \quad (1.2)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad u_0(x) \in L_\alpha(\Omega).$$

Здесь

$$A(u) = - \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i})_{x_i}, \quad p > 1.$$

Вопросы существования и единственности решения задачи рассматривались в работах Ж.-Л. Лионса [1], П. А. Равьярта [2], О. Гранжа, Ф. Мигнота [3], А. Бамберже [4], Г. У. Ульта, С. Люкхауса [5], Ф. Берниса [6] и других. В основном задачи рассматривались в предположении ограниченности Ω и на ограниченном промежутке времени $[0, T]$ с произвольным $T > 0$. Сильное решение задачи при ограниченной области Ω было установлено П. А. Равьяртом путем

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 10-01-00118-а и № 13-01-00081-а).

замены эволюционной производной разностным отношением. Ф. Бернис доказал существование слабого решения задачи при неограниченной области Ω предельным переходом от решений, построенных для ограниченных областей O . Гранжем, Ф. Мигнотом. Однако работа со слабым решением вызывает затруднение в исследовании, например убывания решения при $t \rightarrow \infty$. А. Бамберже установил единственность сильного положительного решения задачи.

В работе предлагается обычный способ построения сильного решения задачи сразу на всем промежутке времени $[0, \infty)$ на основе галёркинских приближений (область Ω может быть неограниченной). На ограниченном промежутке $[0, T]$ такое решение было построено в [7] при любом $T > 0$. На основе идей этой работы в [8] было построено решение анизотропного параболического уравнения при $\alpha > 2$ на ограниченном промежутке времени.

Галёркинские приближения являются гладкими функциями, что облегчает доказательство для них необходимых оценок, которые затем предельным переходом распространяются на решение задачи (1.1), (1.2). В частности, в случае ограниченной области Ω при $p > \alpha$ для уравнения

$$(|u|^{\alpha-2}u)_t = \sum_{i=1}^n (|u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i})_{x_i} \quad (1.3)$$

будут установлены оценки

$$c(1+t)^{-1/(p-\alpha)} \leq \|u(t)\|_{\alpha} \leq Mt^{-1/(p-\alpha)}, \quad t > 0. \quad (1.4)$$

Эти результаты по сути являются продолжением начатых А. К. Гуциным исследований поведения решений линейных параболических уравнений при больших значениях времени t (см. [9]). Левая часть оценки (1.4) при $\alpha = 2$ получена Н. Алиакосом, Р. Ростманианом в [10] для задачи Коши. А. Ф. Тедеев в [11] получил аналогичные оценки для решения квазилинейного уравнения высокого порядка. Точные двусторонние оценки скорости убывания нормы решения линейного и квазилинейного параболического уравнения в неограниченной области установлены в работах Л. М. Кожевниковой [12] и Р. Х. Каримова, Л. М. Кожевниковой [13], а для анизотропного параболического уравнения при $\alpha = 2$ – в работе [14]. Близкие к точным оценки решения анизотропного параболического уравнения при $\alpha > 2$ получены в работе [8] (решение на ограниченном промежутке времени).

§ 2. Формулировка основных результатов

Определим пространство $\mathring{W}_{\alpha,p}^1(\Omega)$ как пополнение $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{W_{\alpha,p}^1} = \|v\|_{\alpha} + \|\nabla v\|_p,$$

где

$$\|v\|_\alpha = \|v\|_{\alpha, \Omega}, \quad \|v\|_{\alpha, Q} = \left(\int_Q |v|^\alpha dx \right)^{1/\alpha},$$

$$\|\nabla v\|_p = \left(\int_\Omega \sum_{k=1}^n |v_{x_k}|^p dx \right)^{1/p}.$$

Через $V(D^T)$, $D^T = D_0^T$, $D_a^b = (a, b) \times \Omega$, будем обозначать пополнение $C_0^\infty(D^T)$ по норме

$$\|v\|_V = \|v\|_{\alpha, D^T} + \|\nabla v\|_{p, D^T}, \quad \|\nabla v\|_{p, D^T} = \left(\int_{D^T} \sum_{k=1}^n |v_{x_k}|^p dx dt \right)^{1/p}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) назовем функцию u , принадлежащую при всех $T > 0$ пространству $V(D^T)$ и удовлетворяющую при всех $\varphi \in C_0^\infty(D_{-1}^T)$ равенству*

$$\begin{aligned} & \int_{D^T} \left(-|u|^{\alpha-2} u \varphi_t + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) dx dt \\ &= \int_\Omega |u_0|^{\alpha-2} u_0(x) \varphi(0, x) dx + (f, \varphi)_{D^T}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь и далее $(f, \varphi)_Q$ – значения обобщенной функции f на элементе $\varphi \in C_0^\infty(Q)$, где Q – область в $\mathbb{R}_n$ или в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_n$, но конкретно в формуле (2.1) предполагается, что $f \in (V(D^T))'$.

Мы будем записывать функцию $u(t, x)$ в виде $u, u(t)$ там, где это не вызывает двусмысленности.

Всюду в работе предполагается, что $u_0 \in \dot{W}_{\alpha, p}^1(\Omega)$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $f, f_t \in (V(D^T))'$ при каждом $T > 0$. Тогда существует обобщенное решение $u(t, x)$ задачи (1.1), (1.2), удовлетворяющее соотношениям*

$$u(t) \in L_{\infty, \text{loc}}([0, \infty); \dot{W}_{\alpha, p}^1(\Omega)), \quad (2.2)$$

$$|u|^{(\alpha-2)/2} u_t \in L_2(D^T), \quad \alpha > 1, \quad (2.3)$$

$$u_t \in L_\alpha(D^T), \quad u(t) \in C([0, \infty); L_\alpha(\Omega)) \quad \text{при } \alpha \in (1, 2), \quad (2.4)$$

$$|u|^{\alpha-2} u_t \in L_{\alpha'}(D^T), \quad |u|^{\alpha-2} u(t) \in C([0, \infty); L_{\alpha'}(\Omega)) \quad \text{при } \alpha \geq 2 \quad (2.5)$$

при каждом $T > 0$. Здесь $\alpha' = \alpha/(\alpha - 1)$.

В работе Бамберже [4] определяется понятие сильного решения задачи условием $(|u|^{\alpha-2} u)_t \in L_1(D^T)$. В ней, в частности, доказано, что при выполнении условий

$$\alpha \in (1, 2), \quad u_0 \in L_\infty(\Omega), \quad u_0 \in \dot{W}_p^1(\Omega), \quad u_0 \geq 0,$$

$$f \in L_\infty(D^T), \quad f_t \in L_{p'}(0, T; (\dot{W}_p^1(\Omega))'), \quad f \geq 0,$$

в случае ограниченной области Ω существует не более одного сильного решения задачи. Показано также, что это решение $u(t)$ становится нулем при $t \geq t_0$, если $p < \alpha < q$, $1/q = 1/p - 1/n$.

Легко видеть, что решение из теоремы 1 сильное.

В работе [10] имеется ряд утверждений (не все они приведены с полным обоснованием) о поведении решения задачи Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u). \quad (2.6)$$

В предположении, что $u_0 \in L_1(R_n) \cap L_2(R_n)$ и $\nabla u_0 \in L_p(R_n)$, для решения задачи Коши установлены оценки сверху и снизу.

Оценки сверху:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_2 &\leq \|u_0\|_2 (1 + ct)^{-1/\gamma}, \quad \gamma = \frac{2p(n+1) - 4n}{n}; \\ \|\nabla u(t)\|_p &\leq \|\nabla u_0\|_p (1 + c_1 t)^{-1/\beta}, \quad \beta = \frac{\gamma p}{\gamma + 2} \quad \text{при } p > \frac{2n}{n+1}; \\ \|u(t)\|_2 &\leq \|u_0\|_2 e^{-c_2 t} \quad \text{при } p = \frac{2n}{n+1}; \\ \|u(t)\|_2 &\leq \|u_0\|_2 (1 - c_3 t)^{-1/\gamma}, \quad p \leq \frac{2n}{n+1}, \quad p \geq \max\left[1, \frac{2n}{n+2}\right]. \end{aligned}$$

Оценки снизу:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_2 &\geq \|u_0\|_2 (1 + c_4 t)^{-1/(p-2)} \quad \text{при } p > 2; \\ \|u(t)\|_2 &\geq \|u_0\|_2 e^{-c_5 t} \quad \text{при } p = 2; \\ \|u(t)\|_2 &\geq \|u_0\|_2 (1 - c_6 t)^{1/(2-p)} \quad \text{при } p \in [1, 2), \quad t \leq \frac{1}{c_6}. \end{aligned}$$

В работе [15] при условии $u_0 \in L_{q_0}(R_n)$ установлена оценка решения задачи Коши для уравнения (2.6) при любом $q \in [q_0, \infty)$

$$\|u(t)\|_q \leq C(u_0, q) t^{-\lambda_q}, \quad t > 0, \quad \lambda_q = \frac{N(q - q_0)}{q(q_0 p + N(p - 2))}.$$

В работе [11] рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu + g|u|^{q-2}u = 0, \quad (2.7)$$

$$u(0) = u_0, \quad D^\beta u|_{\partial\Omega \times \{t>0\}} = 0, \quad |\beta| \leq m-1, \quad m \geq 1, \quad (2.8)$$

где

$$Lu = (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha (|D^m u|^{p-2} D^\alpha u).$$

(Фактически в [11] рассматриваются несколько более общие уравнения.) В предположении, что $u_0 \in \dot{W}_p^m(\Omega) \cap L_2(\Omega) \cap L_q(\Omega)$, рассматривается решение u

из пространства $L_p(0, T; \dot{W}_p^m(\Omega)) \cap C([0, T]; L_2(\Omega)) \cap L_q(D^T)$, $T > 0$. В частности, в случае ограниченной области Ω доказаны следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_2 &\geq \|u_0\|_2(1 + ct)^{-1/(p-2)}, & p > 2; \\ \|u(t)\|_\infty &\leq ct^{-1/(p-2)}, & p > 2, \quad n < mp, \quad g = 0; \\ \|u(t)\|_q &\leq ct^{-n(q-2)/((n(p-2)+2pm)q)}, & n \geq mp. \end{aligned}$$

Мы привели здесь лишь основные результаты о поведении решений уравнений (2.6), (2.7). Более полные сведения об этих результатах можно получить из монографии [16].

Другие утверждения настоящей работы устанавливаются в предположении, что $p > \alpha$. В теоремах 2–5 область Ω может быть как ограниченной, так и неограниченной. В случае неограниченной Ω предполагается, что начальная функция имеет ограниченный носитель

$$\text{supp } u_0 \subset \Omega^{R_0}, \quad R_0 > 0, \quad (2.9)$$

где $\Omega^r = \{x \in \Omega \mid |x| < r\}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $p > \alpha$, выполнено условие (2.9) и начальная функция u_0 ограничена. Тогда существуют положительное число $C = C(u_0, \alpha, p)$ и ограниченное решение $u(t, x)$ задачи (1.3), (1.2) такие, что для всех $t \geq 0$ выполнено неравенство

$$\|u(t)\|_\alpha \geq \|u(0)\|_\alpha(1 + Ct)^{-1/(p-\alpha)}. \quad (2.10)$$

Ниже будет использоваться характеристическая функция слоя между концентрическими сферами

$$\chi_a^b(x) = \begin{cases} 1, & a < |x| < b, \\ 0, & |x| \notin (a, b), \end{cases}$$

при этом значения $a = 0$, $b = \infty$ опускаются, т.е. $\chi^b = \chi_0^b$, $\chi_a = \chi_a^\infty$.

Доказательство оценки снизу в случае неограниченной области Ω существенно опирается на следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $p > \alpha$ и выполнено условие (2.9). Тогда обобщенное решение $u(t, x)$ задачи (1.3), (1.2) с ограниченной начальной функцией u_0 , обладающее свойствами (2.2)–(2.5), также ограничено, и для него найдутся положительные числа A и κ такие, что при всех $t > 0$, $r \geq 2R_0$ выполнено неравенство

$$\|\chi_r u(t)\|_\alpha \leq A \exp\left(-\kappa \left(\frac{r^p}{t}\right)^{1/(p-1)}\right). \quad (2.11)$$

При доказательстве этой теоремы используется принцип максимума (см. § 5).

Соотношение (2.11) при $r \sim t^\varepsilon$ становится тривиальным. Поэтому для оценки сверху скорости убывания решения вместо него потребуется другая оценка.

Будем предполагать, что начало координат лежит на границе области Ω , и обозначим $\gamma_r = \{x \in \Omega \mid |x| = r\}$, $r > 0$.

Рассмотрим следующую геометрическую характеристику неограниченной области Ω . Положим

$$\nu(r) = \inf \{ \|\nabla g\|_{p, \gamma_r} \mid g(x) \in C_0^\infty(\Omega), \|g\|_{p, \gamma_r} = 1 \}, \quad r > 0. \quad (2.12)$$

Будем считать, что область Ω удовлетворяет условию

$$\int_1^\infty \nu(\rho) d\rho = \infty. \quad (2.13)$$

Оно выполняется, например, для области, лежащей внутри некоторого конуса.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $p > \alpha$ и выполнены условия (2.9), (2.13). Тогда найдутся положительные числа $\kappa(p)$, $\mathcal{M}(p)$ и обобщенное решение $u(t, x)$ задачи (1.3), (1.2) такие, что при всех $t \geq 0$, $r \geq 2R_0$ выполнена оценка

$$\|\chi_r u(t)\|_\alpha \leq \mathcal{M} \exp \left(-\kappa \int_1^r \nu(\rho) d\rho \right) \|u_0\|_\alpha. \quad (2.14)$$

Пусть $r(t)$ – произвольная положительная функция, удовлетворяющая при всех $t > 0$ неравенству

$$r(t)^q \exp \left(\kappa \int_1^{r(t)} \nu(\rho) d\rho \right) \geq t^{1/(p-\alpha)}, \quad q = \frac{p}{p-\alpha} + \frac{n}{\alpha}. \quad (2.15)$$

Ясно, что такие функции всегда существуют.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $p > \alpha$ и выполнены условия (2.9), (2.15). Тогда найдутся положительное число M и решение $u(t, x)$ задачи (1.3), (1.2) в области Ω , лежащей внутри некоторого конуса (с углом при вершине, меньшим 2π), такие, что справедливо неравенство

$$\|u(t)\|_\alpha \leq M \frac{r(t)^q}{t^{1/(p-\alpha)}}, \quad t > 0. \quad (2.16)$$

Если для области Ω выполнено условие

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln r} \int_1^r \nu(\rho) d\rho = \infty, \quad (2.17)$$

то можно выбрать $r(t) = t^{\varepsilon_1}$, $t > 0$, и оценка (2.16) принимает вид

$$\|u(t)\|_\alpha \leq M t^{-(1-\varepsilon)/(p-\alpha)}, \quad \varepsilon = \varepsilon(\varepsilon_1) \in (0, 1), \quad t > 0,$$

причем ε можно сделать сколь угодно малым числом, выбирая малое ε_1 . Последняя оценка имеет показатель степени, близкий к показателю $-1/(p-\alpha)$ в оценке снизу (2.10).

В качестве примера рассмотрим область вращения

$$\Omega(g) = \{x \in R_n \mid x_1 > 0, |x'| < g(x_1)\},$$

$x' = (x_2, \dots, x_n)$, с положительной функцией $g(x_1) < \infty$. От функции g требуется только, чтобы множество $\Omega(g)$ было областью и выполнялось соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{g(r)}{r} = 0.$$

Для таких областей нетрудно установить соотношение

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r\nu(r) = \infty,$$

обеспечивающее условие (2.17).

§ 3. Доказательство теоремы существования

Условия на f влекут принадлежность

$$f \in C([0, \infty); (\dot{W}_{\alpha,p}^1(\Omega))').$$

В частности, $f(0) \in (\dot{W}_{\alpha,p}^1(\Omega))'$.

3.1. Случай $\alpha \geq 2$. Выберем последовательность $\omega_k \in C_0^\infty(\Omega)$ линейно независимых функций, линейная оболочка которых плотна в $\dot{W}_{\alpha,p}^1(\Omega)$. Положим $I_m = \bigcup_{k=1}^m \text{supp } \omega_k$. Галёркинские приближения к решению будем искать в виде

$$u_m(t, x) = \sum_{k=1}^m c_{mk}(t) \omega_k(x),$$

где функции $c_{mk}(t)$ определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\omega_j \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u_m}{b_m} + |u_m|^{\alpha-2} u_m \right) + \sum_{i=1}^n |u_{mx_i}|^{p-2} u_{mx_i} (\omega_j)_{x_i} \right) dx \\ = (f(t), \omega_j)_{\Omega}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Числа $b_m > 0$ выберем позже. Убедимся, что уравнения (3.1) разрешимы относительно производных c'_{mk} . Очевидно, что они имеют вид

$$A_{jk}(t) c'_{mk} = F_j(c_{m1}, c_{m2}, \dots, c_{mm}) + f_j(t).$$

Матрица коэффициентов

$$A_{jk}(t) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{b_m} + (\alpha - 1) |u_m|^{\alpha-2} \right) \omega_j \omega_k dx$$

при каждом t является матрицей Грама системы линейно независимых векторов ω_k , $k = 1, 2, \dots, m$, и поэтому имеет обратную. Из уравнений (3.1) при начальных условиях $c_{mk}(0)$, подобранных так, чтобы $u_m(0, x) \rightarrow u_0(x)$ в $\dot{W}_{\alpha,p}^1(\Omega)$, находим функции $c_{mk}(t)$. Сначала эти функции находятся на малом промежутке времени, но установленная ниже ограниченность галёркинских приближений позволяет определить их на бесконечном промежутке времени. Числа b_m выберем так, чтобы $\|u_m(0)\|_2^2/b_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Установим оценки для галёркинских приближений. Умножив уравнение (3.1) на $c_{mj}(t)$ и просуммировав, находим

$$\int_{\Omega} \left(u_m(t, x) \left(\frac{u_m}{b_m} + |u_m|^{\alpha-2} u_m \right)_t + \sum_{i=1}^n |u_{mx_i}|^p \right) dx = (f(t), u_m)_{\Omega}.$$

После интегрирования по t будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{u_m^2(t)}{2b_m} + \frac{\alpha-1}{\alpha} |u_m(t)|^{\alpha} \right) dx + \|\nabla u_m\|_{p, D_0^t}^p \\ &= (f, u_m)_{D_0^t} + \int_{\Omega} \left(\frac{u_m^2(0)}{2b_m} + \frac{\alpha-1}{\alpha} |u_m(0)|^{\alpha} \right) dx. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Последний интеграл в правой части ограничен постоянной, не зависящей от m , в силу выбранных выше сходимостей. Далее, при $t \in (0, T)$ имеем

$$\begin{aligned} |(f, u_m)_{D_0^t}| &\leq C(T) \|u_m\|_{V(D_0^t)} \\ &\leq c(\varepsilon, T) + \varepsilon \int_0^t (\|u_m(\tau)\|_{\alpha}^{\alpha} + \|\nabla u_m(\tau)\|_p^p) d\tau. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Поэтому из (3.2) и леммы Гронуолла следует ограниченность последовательности u_m в пространствах $C([0, T]; L_{\alpha}(\Omega))$ и $V(D^T)$ при всех $T > 0$ постоянной $C(T, f, \|u_0\|_{\alpha})$, которая не меняется при замене последовательности b_m на бóльшую $b'_m > b_m$.

Умножим теперь уравнения (3.1) на $c'_{mj}(t)$ и просуммируем:

$$\int_{\Omega} \left(u'_m(t, x) \left(\frac{u_m}{b_m} + |u_m|^{\alpha-2} u_m \right)_t + \sum_{i=1}^n |u_{mx_i}|^{p-2} u_{mx_i} u'_{mx_i} \right) dx = (f(t), u'_m)_{\Omega}.$$

После интегрирования по t получим

$$\begin{aligned} & \int_{D_0^T} \left(\frac{1}{b_m} + (\alpha-1) |u_m|^{\alpha-2} \right) (u'_m)^2 dx dt + \frac{1}{p} \|\nabla u_m(T)\|_p^p \\ &= \frac{1}{p} \|\nabla u_m(0)\|_p^p + (f, u'_m)_{D^T}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Преобразуем последнее слагаемое интегрированием по частям:

$$(f, u'_m)_{D^T} = (f(T), u_m(T))_{\Omega} - (f(0), u_m(0))_{\Omega} - (f', u_m)_{D^T}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} |(f(T), u_m(T))_{\Omega}| &\leq C(T) \|u_m(T)\|_{W_{\alpha, p}^1} \\ &\leq c(\varepsilon, T) + \varepsilon (\|u_m(T)\|_{\alpha}^{\alpha} + \|\nabla u_m(T)\|_p^p). \end{aligned}$$

Далее, в силу ограниченности u_m в пространстве $V(D^T)$ имеем

$$|(f', u_m)_{D^T}| \leq C(T).$$

Поэтому из равенств (3.4) устанавливаем ограниченность последовательности $|u_m|^{(\alpha-2)/2}u'_m$ в $L_2(D^T)$ и последовательности ∇u_m в пространстве $C([0, T]; L_p(\Omega))$ при каждом $T > 0$. Установленные факты позволяют диагональным процессом выбрать подпоследовательность u_{m_k} , слабо сходящуюся в указанных ниже пространствах. Для упрощения записи подындекс k будем опускать:

$$\begin{aligned} u_m &\rightarrow u \quad \text{слабо в } V(D^T); \\ A(u_m) &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (|u_{mx_i}|^{p-2} u_{mx_i}) \rightarrow \chi \quad \text{слабо в } (V(D^T))'; \\ (|u_m|^{(\alpha-2)/2} u'_m)' &\rightarrow \tilde{u} \quad \text{слабо в } L_2(D^T). \end{aligned}$$

Сходимость имеет место при каждом $T = 1, 2, \dots$, причем предельные функции совпадают в общей области определения. Тогда фактически сходимость имеет место при любом $T > 0$.

Ниже будет доказано, что $\tilde{u} = (|u|^{(\alpha-2)/2} u)'$, $\chi = A(u)$ и функция u является обобщенным решением задачи (1.1), (1.2). Соответствующие рассуждения разобьем на три шага, поскольку они понадобятся и в других ситуациях.

Шаг 1. Последовательность $u_m(t)$ ограничена в пространстве $\dot{W}_{\alpha,p}^1(\Omega)$ на любом конечном промежутке:

$$\|u_m(t)\|_{W_{\alpha,p}^1(\Omega)} \leq C(T), \quad t \in [0, T], \quad m = 1, 2, \dots$$

Зафиксируем счетное плотное подмножество $\{t_s\} \subset [0, \infty]$. Можно считать, что $t_0 = 0$. Для каждой ограниченной области $\Omega^r \subset \Omega$ с гладкой границей получаем компактность вложения $\dot{W}_1^1(\Omega^r) \subset L_1(\Omega^r)$. Поэтому диагональным процессом можно выделить подпоследовательность $u_{m_k}(t_s) \rightarrow h_s$ сильно в $L_1(\Omega^r)$ при всех натуральных s . Выбирая еще раз подпоследовательность, можно считать также (отбрасывая подындексы), что $u_m(t_s, x) \rightarrow h_s(x)$ почти всюду в Ω^r при каждом t_s . В частности, при $t_0 = 0$ имеем $u_m(0, x) \rightarrow u_0(x)$ почти всюду в Ω .

Для следующего шага докажем одно утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть последовательность $v_m(t) \in C([0, T]; L_2(\Omega))$ обладает следующими свойствами:

- 1) $v_m(t_s, x)$ сходится почти всюду в Ω^r при каждом t_s и некотором $r > 0$;
- 2) последовательность $v'_m(t)$ ограничена в $L_2(D^T)$ при каждом $T > 0$.

Тогда можно выделить подпоследовательность v_{m_k} , сходящуюся к функции v в пространстве $C([0, T]; L_1(\Omega^r))$, и $v_{m_k} \rightarrow v$ почти всюду в $(0, T) \times \Omega^r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Установим равностепенную непрерывность по t последовательности $v_m(t)$ в $L_2(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \|v_m(t_2) - v_m(t_1)\|_2 &\leq \left\| \int_{t_1}^{t_2} v'_m(t) dt \right\|_2 \\ &\leq \left(|t_2 - t_1| \int_{t_1}^{t_2} \|v'_m(t)\|_2^2 dt \right)^{1/2} \leq c |t_2 - t_1|^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Далее, последовательность $v_m(t)$ ограничена в пространстве $C([0, T]; L_2(\Omega))$. Тогда можно выделить подпоследовательность $v_{m_k}(t)$, слабо сходящуюся в $L_2(\Omega)$ при тех же t_s , что и выше. Вместе со сходимостью почти всюду в Ω^r это влечет сильную сходимость в $L_1(\Omega^r)$ при каждом t_s (см. [17; гл. 1, § 12.2]). Сохраним обозначение $v_m(t)$ вместо $v_{m_k}(t)$.

Для ограниченной области Ω^r из (3.5) нетрудно установить равномерную фундаментальность $v_m(t)$ по норме $L_1(\Omega^r)$:

$$\begin{aligned} \|v_n(t) - v_m(t)\|_{1, \Omega^r} &= \|v_n(t) - v_n(t_{s_k}) + v_n(t_{s_k}) - v_m(t_{s_k}) + v_m(t_{s_k}) - v_m(t)\|_{1, \Omega^r} \\ &\leq C(r)|t - t_{s_k}|^{1/2} + \|v_n(t_{s_k}) - v_m(t_{s_k})\|_{1, \Omega^r}. \end{aligned}$$

Выбрав конечный набор чисел t_{s_k} с малым шагом и затем увеличивая n, m , добиваемся равномерной по t малости правой части.

Итак, установлена сходимость $v_{m_k} \rightarrow v$ в $C([0, T]; L_1(\Omega^r))$ при каждом $T = 1, 2, \dots$. Сходимость будет также и в $L_1((0, T) \times \Omega^r)$, поэтому можно выделить подпоследовательность, сходящуюся в $(0, T) \times \Omega^r$ почти всюду. Лемма доказана.

Шаг 2. Применим лемму 1 к последовательности $v_m = |u_m|^{(\alpha-2)/2} u_m$. Благодаря произвольности $r > 0$ и $T = 1, 2, \dots$ диагональным процессом можно выделить подпоследовательность v_{m_k} , сходящуюся в D почти всюду. Тогда и последовательность u_{m_k} будет сходиться почти всюду в D к u (см. [17; гл. 1, § 1.4, лемма 1.3]). Приведем это утверждение.

ЛЕММА 2. Пусть Q – область в R_n или в R_{n+1} . Пусть последовательность g_m сходится к g почти всюду в Q и ограничена в $L_q(Q)$. Тогда $g_m \rightarrow g$ слабо в $L_q(Q)$.

Очевидно, что это утверждение, сформулированное в [17] для ограниченных областей, справедливо и в случае неограниченных областей.

Из леммы 2 следует также, что $v_{m_k} \rightarrow v = |u|^{(\alpha-2)/2} u$ слабо в $L_2(D^T)$ при каждом $T > 0$. Для фиксированного T сходимость $v_{m_k}(T) \rightarrow v(T)$ в пространстве $L_1(\Omega^r)$ позволяет выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду в Ω^r , при всех $r > 0$. Тогда

$$u_{m_k}(T, x) \rightarrow u(T, x) \quad \text{почти всюду в } \Omega. \quad (3.6)$$

Ограниченность последовательности $u_m(T)$ в пространстве $\dot{W}_{\alpha, p}^1(\Omega)$ позволяет выделить подпоследовательность такую, что

$$\begin{aligned} u_{m_k}(T) &\rightarrow u(T) \quad \text{слабо в } \dot{W}_{\alpha, p}^1(\Omega), \\ \|u(T)\|_{W_{\alpha, p}^1} &\leq C(T, f, \|u_0\|_{W_{\alpha, p}^1}), \end{aligned} \quad (3.7)$$

и если $f = 0$, то постоянная C зависит только от $\|u_0\|_\alpha$. Поскольку постоянная C монотонна по T , отсюда следует (2.2).

Далее,

$$(v'_m, \varphi)_{D^T} = -(v_m, \varphi')_{D^T}, \quad \varphi \in C_0^\infty(D^T).$$

Переходя к пределу, получим

$$(\tilde{u}, \varphi)_{D^T} = -(v, \varphi')_{D^T}.$$

Отсюда следует, что $\tilde{u} = v' = (|u|^{(\alpha-2)/2}u)'$.

Покажем, что последовательность $|u_m|^{\alpha-2}u'_m$ ограничена в $L_{\alpha'}(D^T)$. В самом деле,

$$\begin{aligned} |(|u_m|^{\alpha-2}u'_m, \varphi)_{D^T}| &= |(|u_m|^{(\alpha-2)/2}u'_m, \varphi|u_m|^{(\alpha-2)/2})_{D^T}| \\ &\leq C\|\varphi|u_m|^{(\alpha-2)/2}\|_{2,D^T} \\ &\leq C\|\varphi\|_{\alpha,D^T}\|u_m\|_{\alpha,D^T}^{(\alpha-2)/2} \leq C_1\|\varphi\|_{\alpha,D^T}. \end{aligned}$$

Тогда можно считать, что $|u_m|^{\alpha-2}u'_m \rightarrow |u|^{\alpha-2}u'$ слабо в $L_{\alpha'}(D^T)$. Следовательно, $|u|^{\alpha-2}u \in C([0, \infty); L_{\alpha'}(\Omega))$. При этом

$$|u(0)|^{\alpha-2}u(0) = |u_0|^{\alpha-2}u_0. \quad (3.8)$$

В самом деле, в шаге 1 отмечалась сходимость $u_m(0, x) \rightarrow u_0(x)$ почти всюду в Ω . Далее, по лемме 1 сходимость $v_m(0) \rightarrow v(0) = |u(0)|^{(\alpha-2)/2}u(0)$ в $L_1(\Omega^r)$, $r > 0$, обеспечивает равенство (3.8).

Шаг 3. Переходим к доказательству равенства $\chi = A(u)$. Для этого потребуются интегральные соотношения. Умножим уравнение (3.1) на гладкую функцию $d_j(t)$, проинтегрируем по t и перейдем к пределу при $m \rightarrow \infty$, обозначив $d_j(t)\omega_j(x)$ через φ в конечном выражении:

$$((|u|^{\alpha-2}u)', \varphi)_{D^T} + (\chi, \varphi)_{D^T} = (f, \varphi)_{D^T}. \quad (3.9)$$

Отметим, что

$$\left(\frac{u'_m}{b_m}, \varphi\right)_{D^T} = \frac{1}{b_m}(-(u_m, \varphi')_{D^T} + (u_m(T), \varphi(T))_{\Omega} - (u_m(0), \varphi)) \rightarrow 0$$

в силу ограниченности u_m в $C([0, T]; L_{\alpha}(\Omega))$ и того, что $b_m \rightarrow \infty$. Ясно, что любая функция из $V(D^T)$ может быть приближена линейными комбинациями

$$\sum_{j=1}^N d_j(t)\omega_j(x).$$

Поэтому (3.9) справедливо и для функций из пространства $V(D^T)$. Таким образом, в силу (3.8) u будет являться обобщенным решением задачи (1.1), (1.2), если будет установлено, что $\chi = A(u)$.

Отметим, что принадлежность $v, v' \in L_2(D^T)$ влечет принадлежность $v \in C([0, T]; L_2(\Omega))$ и $\|u(t)\|_{\alpha} \in C([0, T])$, $\alpha > 1$. Подставляя в (3.9) функцию $\varphi = u$, получаем

$$\begin{aligned} (f - \chi, u)_{D^T} &= ((|u|^{\alpha-2}u)', u)_{D^T} = \frac{\alpha-1}{\alpha} \int_0^T \frac{d}{dt} \|v(t)\|_2^2 dt \\ &= \frac{\alpha-1}{\alpha} (\|u(T)\|_{\alpha}^{\alpha} - \|u(0)\|_{\alpha}^{\alpha}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Далее используется монотонность оператора A . Легко проверить, что

$$X_m = \int_0^T (A(u_m(t)) - A(h(t)), u_m(t) - h(t))_{\Omega} dt \geq 0 \quad \forall h \in V(D^T). \quad (3.11)$$

Из уравнений (3.1) легко выводятся соотношения

$$\begin{aligned} (A(u_m), u_m)_{D^T} &= (f, u_m)_{D^T} + \frac{\alpha - 1}{\alpha} (\|u_m(0)\|_{\alpha}^{\alpha} - \|u_m(T)\|_{\alpha}^{\alpha}) \\ &\quad + \frac{1}{2b_m} (\|u_m(0)\|_2^2 - \|u_m(T)\|_2^2). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} X_m &= (f, u_m)_{D^T} + \frac{\alpha - 1}{\alpha} (\|u_m(0)\|_{\alpha}^{\alpha} - \|u_m(T)\|_{\alpha}^{\alpha}) \\ &\quad + \frac{1}{2b_m} (\|u_m(0)\|_2^2 - \|u_m(T)\|_2^2) - (A(u_m), h)_{D^T} - (A(h), u_m - h)_{D^T}. \end{aligned}$$

Отсюда (поскольку $\liminf \|u_m(T)\|_{\alpha} \geq \|u(T)\|_{\alpha}$ в силу (3.6)) получаем

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup X_m \\ &\leq (f, u)_{D^T} + \frac{\alpha - 1}{\alpha} (\|u_0\|_{\alpha}^{\alpha} - \|u(T)\|_{\alpha}^{\alpha}) - (\chi, h)_{D^T} - (A(h), u - h)_{D^T}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Применив (3.10), получим

$$(\chi - A(h), u - h) \geq 0.$$

Положим $h = u - \lambda\omega$, $\lambda > 0$, $\omega \in V(D^T)$; тогда

$$\lambda(\chi - A(u - \lambda\omega), \omega)_{D^T} \geq 0.$$

Устремляя λ к 0, будем иметь $(\chi - A(u), \omega) \geq 0$ для любого ω . Отсюда получаем $\chi = A(u)$.

3.2. Случай $\alpha < 2$. Галёркинские приближения к решению будем искать в прежнем виде, но функции $c_{mk}(t)$ определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\omega_j \frac{\partial}{\partial t} (v_m^{\alpha/2-1}(t, x) u_m(t, x)) + \sum_{i=1}^n |u_{mx_i}|^{p-2} u_{mx_i} (\omega_j)_{x_i} \right) dx \\ = (f(t), \omega_j)_{\Omega}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Здесь для регуляризации введены функции $v_m = u_m^2 + \varepsilon_m$, числа $\varepsilon_m > 0$ выберем позже. Убедимся, что уравнения (3.13) разрешимы относительно производных c'_{mk} . Очевидно, что они имеют вид

$$A_{jk}(t) c'_{mk} = F_j(c_{m_1}, c_{m_2}, \dots, c_{m_m}) + f_j(t).$$

Матрица коэффициентов

$$A_{jk}(t) = \int_{\Omega} ((\alpha - 1) u_m^2 + \varepsilon_m) v_m^{\alpha/2-2} \omega_j \omega_k dx$$

при каждом t является матрицей Грама системы линейно независимых векторов ω_k , $k = 1, 2, \dots$, и поэтому имеет обратную. Из уравнений (3.13) при начальных условиях $c_{mk}(0)$, подобранных так, чтобы $u_m(0, x) \rightarrow u_0(x)$ в пространстве $\dot{W}_{\alpha, p}^1$, находим функции $c_{mk}(t)$.

Установим теперь оценки для галёркинских приближений. Умножив уравнения (3.13) на $c_{mj}(t)$ и просуммировав, находим

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(u_m(t, x) ((\alpha - 1)v_m^{\alpha/2-1} - \varepsilon_m(\alpha - 2)v_m^{\alpha/2-2})u'_m + \sum_{i=1}^n |u_{mx_i}|^p \right) dx \\ & = (f(t), u_m(t))_{\Omega}. \end{aligned}$$

Поскольку $u_m u'_m = v'_m/2$ и $\text{supp } u_m \subset I_m$, то после интегрирования по t будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{I_m} \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} v_m(t)^{\alpha/2} - \varepsilon_m v_m(t)^{\alpha/2-1} \right) dx + \|\nabla u_m\|_{p, D_0^t}^p \\ & = (f, u_m)_{D_0^t} + \int_{I_m} \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} v_m(0)^{\alpha/2} - \varepsilon_m v_m(0)^{\alpha/2-1} \right) dx. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Отметим, что ограниченность множеств I_m позволяет выбором ε_m обеспечить справедливость неравенств

$$\int_{I_m} \varepsilon_m v_m(t)^{\alpha/2-1} dx \leq \int_{I_m} \varepsilon_m^{\alpha/2} dx \leq \varepsilon_m^{\alpha/4}. \quad (3.15)$$

Тогда последний интеграл в правой части (3.14) ограничен постоянной, не зависящей от m , в силу выбранных выше сходимостей. Как и ранее, выполнено неравенство (3.3). Поэтому из (3.14) и леммы Гронуолла следует равномерная ограниченность интегралов $\int_{I_m} v_m(t)^{\alpha/2} dx$ по t и m и, следовательно, последовательности u_m в пространствах $C([0, T]; L_{\alpha}(\Omega))$ и $V(D^T)$ при каждом $T > 0$.

Умножим теперь уравнения (3.13) на $c'_{mj}(t)$ и просуммируем:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left((u'_m)^2 ((\alpha - 1)u_m^2 + \varepsilon_m)v_m^{\alpha/2-2} + \sum_{i=1}^n |u_{mx_i}|^{p-2} u_{mx_i} u'_{mx_i} \right) dx \\ & = (f(t), u'_m(t))_{\Omega}. \end{aligned}$$

После интегрирования по t получим

$$\begin{aligned} & \int_{D_0^T} (u'_m)^2 ((\alpha - 1)u_m^2 + \varepsilon_m)v_m^{\alpha/2-2} dx dt + \frac{1}{p} \|\nabla u_m(T)\|_p^p \\ & = \frac{1}{p} \|\nabla u_m(0)\|_p^p + (f, u'_m)_{D^T}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Как и ранее, имеем $|(f, u'_m)_{D^T}| \leq C(T)$. Кроме того, $(\alpha - 1)u_m^2 + \varepsilon_m \geq (\alpha - 1)v_m$. Полагая

$$g_m(u) = \int_0^u (t^2 + \varepsilon_m)^{(\alpha-2)/4} dt,$$

из (3.16) устанавливаем ограниченность последовательности $v_m^{(\alpha-2)/4} u'_m = (g_m(u_m))'$ в $L_2(D^T)$ и последовательности ∇u_m в пространстве $C([0, T]; L_p(\Omega))$. Установленные факты позволяют выбрать подпоследовательность u_{m_k} , слабо сходящуюся в указанных ниже пространствах. Для упрощения записи подындекс k будем опускать:

$$\begin{aligned} u_m &\rightharpoonup u \quad \text{слабо в } V(D^T); \\ A(u_m) &\rightarrow \chi \quad \text{слабо в } (V(D^T))'; \\ (g_m(u_m))' &\rightarrow \tilde{u} \quad \text{слабо в } L_2(D^T). \end{aligned}$$

Ниже повторяются шаги 1–3, адаптированные к новой ситуации. Это позволит установить, что $\tilde{u} = |u|^{(\alpha-2)/2} u'$.

Действуя, как в шаге 1, можно считать (отбрасывая подындексы), что последовательность $u_m(t_s, x)$ сходится почти всюду в Ω^r при каждом t_s .

На шаге 2 лемма 1 применяется к последовательности $v_m = g_m(u_m)$ и выделяется подпоследовательность, сходящаяся в $(0, T) \times \Omega^r$ почти всюду. Благодаря произвольности $r > 0$, $T > 0$ диагональным процессом можно выделить подпоследовательность $g_m(u_{m_k})$, сходящуюся в D почти всюду. Последовательность обратных функций $g_m^{-1}(v)$ сходится поточечно. Тогда по лемме 2 последовательность u_{m_k} будет сходиться почти всюду в D к u . Итак, установлено, что

$$g_m(u_{m_k}) \rightarrow v = \frac{2}{\alpha} |u|^{(\alpha-2)/2} u.$$

При этом $\tilde{u} = |u|^{(\alpha-2)/2} u'$.

Как и в случае $\alpha \geq 2$, для фиксированного T справедливо (3.6) и (3.7).

При $\alpha < 2$ последовательность u'_m ограничена в $L_\alpha(D^T)$. Действительно, из (3.16) получаем, что

$$\begin{aligned} |(u'_m, \varphi)_{D^T}| &= |(v_m^{(\alpha-2)/4} u'_m, \varphi v_m^{(2-\alpha)/4})_{D^T}| \leq C \|\varphi v_m^{(2-\alpha)/4}\|_{2, D^T(m)} \\ &\leq C \|\varphi\|_{\alpha', D^T} \|v_m\|_{\alpha/2, D^T(m)}^{(2-\alpha)/4} \leq C_1 \|\varphi\|_{\alpha', D^T}, \\ D^T(m) &= (0, T) \times I_m. \end{aligned}$$

Поэтому можно считать, что $u'_m \rightharpoonup u'$ слабо в $L_\alpha(D^T)$, $T > 0$, и тогда $u \in C([0, \infty); L_\alpha(\Omega))$. Тем самым, (2.4) установлено.

На шаге 3 докажем равенство $\chi = A(u)$. Для этого потребуются интегральные соотношения. Умножим уравнения (3.13) на гладкую функцию $d_j(t)$, проинтегрируем по $t \in (0, T)$ и проинтегрируем по частям в первом члене. Тогда, обозначив $d_j(t)\omega_j(x)$ через φ , будем иметь

$$\begin{aligned} (v_m^{\alpha/2-1}(T)u_m(T), \varphi(T))_\Omega - (v_m^{\alpha/2-1}u_m, \varphi_t)_{D^T} + (A(u_m), \varphi)_{D^T} \\ = (f, \varphi)_{D^T} + (v_m^{\alpha/2-1}(0)u_m(0), \varphi(0))_\Omega. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$|v_m^{\alpha/2-1}u_m| \leq v_m^{\alpha/2-1}v_m^{1/2} \in C([0, T], L_{\alpha'}(\Omega^r)), \quad r > 0,$$

так как $(v_m^{(\alpha-1)/2})^{\alpha'} = v_m^{\alpha/2}$ – ограниченная последовательность в пространстве $C([0, T]; L_1(\Omega^r))$. Следовательно, можно выделить подпоследовательность так, чтобы обеспечивались слабые сходимости $v_m^{\alpha/2-1} u_m \rightarrow |u|^{\alpha-2} u$ в $L_{\alpha', \text{loc}}(D^T)$ и $v_m^{\alpha/2-1}(T) u_m(T) \rightarrow |u|^{\alpha-2} u(T)$ в $L_{\alpha', \text{loc}}(\Omega)$. То, что предельные функции будут именно такими, обосновывается установленной выше сходимостью подпоследовательности u_m почти всюду в D^T , а также почти всюду в Ω при $t = T$ (см. (3.6)). Тогда после предельного перехода $m \rightarrow \infty$ будем иметь (с учетом (3.8))

$$\begin{aligned} & (|u|^{\alpha-2}(T)u(T), \varphi(T))_{\Omega} - (|u|^{\alpha-2}u, \varphi_t)_{D^T} + (\chi, \varphi)_{D^T} \\ & = (f, \varphi)_{D^T} + (|u_0|^{\alpha-2}u_0, \varphi(0))_{\Omega}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Как и в случае $\alpha \geq 2$, устанавливается справедливость этого равенства для всех функций $\varphi \in C_0^\infty(D_{-1}^\infty)$. Соотношение (3.17) означает также, что u является обобщенным решением задачи (1.1), (1.2), если будет установлено, что $\chi = A(u)$.

Подставляя в (3.17) $\varphi = u$, получим

$$(f - \chi, u)_{D^T} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} (\|u(T)\|_\alpha^\alpha - \|u(0)\|_\alpha^\alpha). \quad (3.18)$$

Далее используется монотонность оператора A . Из уравнений (3.14) легко выводятся соотношения

$$\begin{aligned} (A(u_m), u_m)_{D^T} &= (f, u_m)_{D^T} + \int_{I_m} \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} v_m^{\alpha/2}(0) - \varepsilon_m v_m^{\alpha/2-1}(0) \right) dx \\ &\quad - \int_{I_m} \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} v_m^{\alpha/2}(T) - \varepsilon_m v_m^{\alpha/2-1}(T) \right) dx. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Воспользуемся неравенством (3.15); тогда из (3.19) следует

$$\begin{aligned} X_m &\leq (f, u_m)_{D^T} + \frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_{I_m} (v_m^{\alpha/2}(0) - v_m^{\alpha/2}(T)) dx + 2\varepsilon_m^{\alpha/4} \\ &\quad - (A(u_m), h)_{D^T} - (A(h), u_m - h)_{D^T}. \end{aligned}$$

Отсюда (поскольку $\liminf \|v_m^{\alpha/4}(T)\|_2 \geq \|u(T)\|_\alpha$ и $\varepsilon_m \rightarrow 0$) следует (3.12). Далее аналогично случаю $\alpha \geq 2$ доказывается, что $\chi = A(u)$.

Теорема 1 доказана.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Пусть теперь $\alpha < p$ и область Ω ограничена. Установим оценки снизу скорости убывания решения задачи (1.3), (1.2) при $t \rightarrow \infty$.

4.1. Случай $\alpha \geq 2$. Введем обозначения

$$\begin{aligned} E_m(t) &= E(t) = \int_{\Omega} \left(\frac{u_m^2(t, x)}{2b_m} + \frac{\alpha - 1}{\alpha} |u_m(t, x)|^\alpha \right) dx, \\ H(t) &= \|\nabla u_m(t)\|_p^p, \end{aligned}$$

опуская индексы там, где это допустимо. Формула (3.2) при $f = 0$ после дифференцирования по t примет вид

$$E' + H = 0. \quad (4.1)$$

Формула (3.4) после дифференцирования запишется в виде

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{b_m} + (\alpha - 1)|u_m(t)|^{\alpha-2} \right) u_m'^2(t) dx + \frac{1}{p} H'(t) = 0. \quad (4.2)$$

Справедливы оценки

$$\begin{aligned} (E')^2 &= \left(\int_{\Omega} \left(\frac{u_m u_m'(t)}{b_m} + (\alpha - 1)|u_m(t)|^{\alpha-2} u_m(t) u_m'(t) \right) dx \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{\|u_m(t)\|_2 \|u_m'(t)\|_2}{b_m} + (\alpha - 1) \|u_m^{\alpha/2}\|_2 \|u_m'(t) |u_m|^{\alpha/2-1}\|_2 \right)^2. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского для скалярного произведения в $\mathbb{R}_2$, выводим

$$\begin{aligned} (E')^2 &\leq \left(\int_{\Omega} \frac{u_m'^2(t)}{b_m} dx + (\alpha - 1) \int_{\Omega} |u_m|^{\alpha-2} u_m'^2(t) dx \right) \\ &\quad \times \left(\int_{\Omega} \frac{u_m^2(t)}{b_m} dx + (\alpha - 1) \int_{\Omega} |u_m|^{\alpha} dx \right). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$(E')^2 \leq -\frac{\alpha}{p} H'(t) E(t). \quad (4.3)$$

При помощи (4.1) перепишем последнее в виде

$$-HE' \leq -\frac{1}{\gamma} EH', \quad \gamma = \frac{p}{\alpha}.$$

Отсюда получаем $\gamma E'/E \geq H'/H$, или, после интегрирования,

$$H(t) \leq \frac{H(0)E^{\gamma}(t)}{E^{\gamma}(0)}.$$

Тогда

$$E'(t) = -H(t) \geq -\frac{H(0)E^{\gamma}(t)}{E^{\gamma}(0)},$$

или

$$\frac{E'}{E^{\gamma}} \geq -\frac{H(0)}{E^{\gamma}(0)}.$$

Отсюда имеем

$$E^{1-\gamma}(t) - E^{1-\gamma}(0) \leq (\gamma - 1) \frac{H(0)t}{E^{\gamma}(0)}.$$

Таким образом,

$$E(t) \geq E(0) \left(1 + (\gamma - 1) \frac{H(0)t}{E(0)} \right)^{1/(1-\gamma)}. \quad (4.4)$$

В силу (3.7) при фиксированном $t > 0$ для $\alpha \leq p$ в случае ограниченной области можно выделить подпоследовательность $u_{m_k}(t)$, сильно сходящуюся в пространстве $L_\alpha(\Omega)$. Функции

$$u_m(t) = \sum_{k=1}^n c_{mk}(t) \omega_k$$

принадлежат линейной оболочке функций $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$. В конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, поэтому

$$\int_{\Omega} u_m^2(t) dx \leq c_m \|u_m(t)\|_{\alpha}^2 \leq \widetilde{c_m} \quad \forall t > 0.$$

Выберем числа b_m так, чтобы $\widetilde{c_m} \leq b_m/m$. Тогда

$$E_m(t) \rightarrow \frac{\alpha - 1}{\alpha} \|u(t)\|_{\alpha}^{\alpha}.$$

После предельного перехода в (4.4) при $m \rightarrow \infty$ получим

$$\|u(t)\|_{\alpha}^{\alpha} \geq \|u(0)\|_{\alpha}^{\alpha} (1 + C(u_0)t)^{-\alpha/(p-\alpha)}. \quad (4.5)$$

4.2. Случай $\alpha < 2$. Обозначим в этом случае

$$E(t) = \int_{I_m} \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} v_m^{\alpha/2}(t, x) - \varepsilon_m v_m^{(\alpha-2)/2}(t, x) \right) dx + 2\varepsilon_m^{\alpha/4}.$$

Заметим, что из (3.15) следует неравенство $E(t) \geq \varepsilon_m^{\alpha/4}$.

Продифференцируем формулу (3.14) по t и перепишем при $f = 0$:

$$E' + H = 0. \quad (4.6)$$

Из формулы (3.16) следует, что

$$\int_{I_m} ((\alpha - 1)u_m^2 + \varepsilon)v_m^{(\alpha-4)/2} u_m'^2 dx = -\frac{1}{p} H'(t). \quad (4.7)$$

При каждом $\mu > 0$ очевидны неравенства

$$\begin{aligned} (E'(t))^2 &= \left(\int_{I_m} \left(\frac{\alpha - 1}{2} v_m^{(\alpha-2)/2} (2u_m u_m') - \varepsilon_m \frac{\alpha - 2}{2} v_m^{(\alpha-4)/2} (2u_m u_m') \right) dx \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \left((\alpha - 1) \int_{I_m} v_m^{(\alpha-2)/2} \left(\mu u_m^2 + \frac{u_m'^2}{\mu} \right) dx \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon_m (2 - \alpha) \int_{I_m} v_m^{(\alpha-4)/2} \left(\mu u_m^2 + \frac{u_m'^2}{\mu} \right) dx \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{p\mu} H' + \alpha E(t) \mu + \varepsilon_m (3 - \alpha) \mu \int_{I_m} v_m^{(\alpha-2)/2} dx - 2\alpha \mu \varepsilon_m^{\alpha/4} \right)^2. \end{aligned}$$

Теперь, учитывая (3.15), получим

$$(E'(t))^2 \leq \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{p\mu} H'(t) + \alpha E(t) \mu \right)^2.$$

Минимизируя правую часть по μ , устанавливаем (4.3).

Дальнейшие рассуждения проводятся аналогично случаю $\alpha \geq 2$.

Покажем, что оценка (4.5), установленная в случае ограниченной области Ω , точна. Воспользуемся неравенством типа Стеклова–Фридрихса

$$\|\varphi\|_p \leq C \|\nabla \varphi\|_p \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Отметим попутно, что для неограниченной области, расположенной внутри конуса, известно также следующее неравенство Стеклова–Фридрихса:

$$\|\chi^b v\|_p \leq C b \|\chi^b \nabla v\|_p. \quad (4.8)$$

При $p > \alpha$ справедливы неравенства

$$\|\varphi\|_\alpha \leq C_1 \|\varphi\|_p \leq C_2 \|\nabla \varphi\|_p. \quad (4.9)$$

Дифференцируя (3.10) или (3.18) по T , при помощи неравенства (4.9), записанного для u , находим, что

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_\alpha^\alpha = -(A(u), u(t))_\Omega = -\|\nabla u(t)\|_p^p \leq -C_2^{-1} \|u(t)\|_\alpha^p.$$

Решая это дифференциальное неравенство, будем иметь оценку

$$\|u(t)\|_\alpha^\alpha \leq \|u(0)\|_\alpha^\alpha (1 + c(u_0)t)^{-\alpha/(p-\alpha)},$$

доказывающую точность неравенства (4.5).

4.3. Неограниченная область. Установим теперь оценку (4.5) для решения задачи (1.3), (1.2) в случае неограниченной области Ω .

Через u^l , $l = 1, 2, \dots$, обозначим решения в $[0, \infty) \times \Omega^l$ с фиксированной начальной функцией u_0 . Можно считать, что эти решения продолжены нулем вне $[0, \infty) \times \Omega^l$. Неравенство (3.7) обеспечивает оценку

$$\|u^l(t)\|_{W_{\alpha,p}^1(\Omega)} \leq C, \quad t > 0, \quad l = 1, \dots, \infty.$$

Свойства решений u^l , перечисленные в теореме 1, позволяют выделить подпоследовательность l_i такую, что $u^{l_i}(t) \rightarrow u(t)$ слабо в $V(D^T)$ при $i \rightarrow \infty$ при всех $T > 0$, и посредством шагов 1–3 доказать, что предельная функция $u(t)$ будет являться обобщенным решением задачи (1.3), (1.2).

Далее, при фиксированном $t > 0$ можно считать, что $u^{l_i}(t) \rightarrow u(t)$ слабо в $\mathring{W}_{\alpha,p}^1(\Omega)$ при $i \rightarrow \infty$. Компактность вложения $\mathring{W}_{\alpha,p}^1(\Omega^r) \subset L_\alpha(\Omega^r)$ обеспечивает сильную сходимость $u^{l_i}(t) \rightarrow u(t)$ в $L_\alpha(\Omega^r)$ при $i \rightarrow \infty$ для каждого $r > 0$.

Благодаря оценке (2.11) для любого ε существует r такое, что справедливо неравенство

$$\|u^l(t)\|_{\alpha, \Omega \setminus \Omega^r}^\alpha \leq \varepsilon.$$

Для u^l справедлива оценка (4.5). Тогда

$$\|u^l(t)\|_{\alpha, \Omega^r}^\alpha \geq \|u_0\|_\alpha^\alpha (1 + C(u_0)t)^{-\alpha/(p-\alpha)} - \varepsilon.$$

Пользуясь сильной сходимостью в $L^\alpha(\Omega^r)$, переходим к пределу при $l \rightarrow \infty$, затем по $r \rightarrow \infty$ ($\varepsilon \rightarrow 0$). Таким образом, оценка (2.10) установлена и при неограниченной области Ω .

Теорема 2 доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 3

Ради полноты изложения приведем здесь принцип максимума, используемый в доказательстве теоремы 3. Неравенство $\alpha < p$ в доказательстве принципа максимума не используется.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $u_0(x) \leq B$, $x \in \Omega$, $0 \leq B < \infty$. Тогда обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) со свойствами (2.2)–(2.5) ограничено:

$$\text{ess sup } u \leq B. \quad (5.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно, что срезка $u^{(B)}(t, x) = \max(u(t, x) - B, 0)$ функции $u \in V(D^T)$ лежит в том же пространстве (см., например, [18; гл. 2, § 4, леммы 4.1–4.3]).

Пусть сначала $\alpha \in (1, 2)$. Предельным переходом обосновывается возможность подстановки в (3.17) функции $\varphi = u^{(B)}\xi$, где липшицева функция $\xi(x)$ имеет ограниченный носитель. Имеем

$$\begin{aligned} & (|u(T)|^{\alpha-2}u(T), u^{(B)}(T)\xi)_\Omega - \int_{D^T} |u|^{\alpha-2}uu_t^{(B)}\xi \, dx \, dt \\ & + \int_{D^T} \left(\sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^{p-2}u_{x_i}(u_{x_i}^{(B)}\xi + u^{(B)}\xi_{x_i}) - fu^{(B)}\xi \right) dx \, dt \\ & = (|u_0|^{\alpha-2}u_0, u^{(B)}(0)\xi)_\Omega. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Выберем $\xi = \xi(|x|)$, где

$$\xi(\rho) = \begin{cases} 1 & \text{при } \rho < r, \\ 0 & \text{при } \rho > R, \\ \frac{R-\rho}{R-r} & \text{при } \rho \in [r, R]. \end{cases}$$

Тогда $|\nabla \xi| \leq 1/(R-r)$. Заметим, что $u^{(B)}(0) = u_0^{(B)} \equiv 0$. Поскольку $f \leq 0$, то

$$- \int_{D^T} fu^{(B)}\xi \, dx \, dt \geq 0.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
\int_{D^T} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}|^{p-2} u_{x_i} u_{x_i}^{(B)} \xi \, dx \, dt &= \int_{D^T \cap \{u > B\}} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^{(B)}|^p \xi \, dx \, dt \geq 0, \\
(|u(T)|^{\alpha-2} u(T), u^{(B)}(T) \xi)_{\Omega} &= \int_{\Omega \cap \{u(T) > B\}} |u(T)|^{\alpha-2} u(T) u^{(B)}(T) \xi \, dx \\
&= \int_{\Omega} |u^{(B)} + B|^{\alpha-1} u^{(B)}(T) \xi \, dx, \\
- \int_{D^T} |u|^{\alpha-2} u u_t^{(B)} \xi \, dx \, dt &= - \int_{D^T \cap \{u > B\}} |u|^{\alpha-2} u u_t^{(B)} \xi \, dx \, dt \\
&= - \int_{D^T} |u^{(B)} + B|^{\alpha-2} (u^{(B)} + B) (u^{(B)} + B)_t \xi \, dx \, dt \\
&= - \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} \xi (u^{(B)}(t) + B)^{\alpha} \, dx \Big|_0^T \\
&= \frac{1}{\alpha} \int_{\Omega} \xi (B^{\alpha} - (u^{(B)}(T) + B)^{\alpha}) \, dx \\
&= - \int_{\Omega} \xi (\theta u^{(B)}(T) + B)^{\alpha-1} u^{(B)}(T) \, dx,
\end{aligned}$$

где $0 < \theta(x) < 1$. Таким образом, из (5.2) следует неравенство

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} \chi^r u^{(B)}(T) ((u^{(B)}(T) + B)^{\alpha-1} - (\theta u^{(B)}(T) + B)^{\alpha-1}) \, dx \\
&\leq \frac{c}{|R-r|} \int_{D^T} |\nabla u|^{p-1} |u^{(B)}| \, dx \, dt \\
&\leq \frac{c}{R-r} \|\nabla u\|_{p,D^T}^{p-1} \|u^{(B)}\|_{p,D^T}.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Не ограничивая общность, можно считать, что $B > 0$. Поскольку $u \in C([0, T]; L_{\alpha}(\Omega))$, то $\text{mes}\{\Omega \cap \{u(t) > B\}\} < C$, $t \in [0, T]$. Следовательно, $\|u^{(B)}(t)\|_p \leq c \|\nabla u^{(B)}(t)\|_p$, $t \in [0, T]$ (см., например, [18; гл. 2, § 1, неравенство (2.12)). Тогда правая часть в (5.3) стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Следовательно,

$$u^{(B)}(T, x) ((u^{(B)}(T, x) + B)^{\alpha-1} - (\theta(x) u^{(B)}(T, x) + B)^{\alpha-1}) = 0$$

для почти всех $x \in \Omega^r$. Поэтому $u^{(B)}(T, x) = 0$ почти всюду в Ω^r . В силу произвольности $r > 0$, $T > 0$ отсюда следует (5.1).

В случае $\alpha \geq 2$ следует выполнить подстановку $\varphi = u^{(B)} \xi$ в соотношении (3.9) и действовать по изложенной выше схеме. Преобразуем, например, первый интеграл неравенства (3.9) (с заменой $\varphi = u^{(B)} \xi$)

$$\begin{aligned}
&\int_{D^T} (|u|^{\alpha-2} u)_t u^{(B)} \xi \, dx \, dt \\
&= \int_{D^T \cap \{u > B\}} (\alpha - 1) (u^{(B)} + B)^{\alpha-2} u_t^{(B)} u^{(B)} \xi \, dx \, dt \\
&= \int_{\Omega} h(u^{(B)}(t)) \Big|_0^T \, dx,
\end{aligned}$$

где $h(s)$, $s > 0$, – монотонная функция: $h'(s) = (\alpha - 1)(s + B)^{\alpha-2}s$. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассмотренному выше случаю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Пусть сначала $\alpha \in (1, 2)$. Обозначим $\varphi = u\xi^p$, где функция $\xi(x)$ будет выбрана ниже. После подстановки φ в (3.17) при $f = 0$ имеем

$$\begin{aligned} & (|u|^{\alpha-2}(T)u(T), u(T)\xi^p)_\Omega - \int_{D^T} |u|^{\alpha-2}uu_t\xi^p dx dt \\ & + \int_{D^T} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} (u_{x_i}\xi^p + pu\xi^{p-1}\xi_{x_i}) dx dt = \int_\Omega |u_0|^\alpha \xi^p dx. \end{aligned} \quad (5.4)$$

За счет выбора функции ξ так, чтобы носители функций u_0 и ξ не пересекались, правую часть формулы (5.4) будем считать равной нулю. Тогда, воспользовавшись неравенством Юнга, получим

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \int_\Omega u^\alpha(T)\xi^p dx + \int_{D^T} |\nabla u|^p \xi^p dx dt \\ & = -p \int_{D^T} u\xi^{p-1}\xi_{x_i} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx dt \\ & \leq p \int_{D^T} \left(\frac{\xi^p |\nabla u|^p}{2p} + 2^p p^{p-1} u^p |\nabla \xi|^p \right) dx dt. \end{aligned} \quad (5.5)$$

В случае $\alpha \geq 2$ то же самое получается подстановкой $\varphi = u\xi^p$ в соотношение (3.9).

Пусть $\xi = \xi(|x|)$ и $\xi(t) = 0$ при $t < r$, $\xi(t) = (t - r)/\rho$ при $t \in (r, r + \rho]$, $\xi(t) = 1$ при $t > r + \rho$. Пусть c такое, что $|u(t, x)| \leq c$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \int_\Omega u^\alpha(T)\xi^p dx + \frac{1}{2} \int_{D^T} |\nabla u|^p \xi^p dx dt \\ & \leq 2^p p^p \int_{D^T} u^p |\nabla \xi|^p dx dt \\ & \leq \frac{2^p p^p c^{p-\alpha}}{\rho^p} \int_0^T \int_{\Omega_{r+\rho}} u^\alpha dx dt \quad \text{при } p \geq \alpha, \end{aligned}$$

где использовано обозначение $\Omega_r^b = \{x \in \Omega \mid r < |x| < b\}$, причем индекс $b = \infty$ будет опускаться. Отсюда получаем

$$\int_{\Omega_{r+\rho}} u^\alpha(T, x) dx \leq \frac{\delta}{\rho^p} \int_0^T \int_{\Omega_r} u^\alpha dx dt, \quad \text{где } \delta = \frac{2^p p^p \alpha c^{p-\alpha}}{\alpha - 1}.$$

Вводя обозначение

$$H_r(t) = \int_{\Omega_r} u^\alpha(t, x) dx,$$

будем иметь

$$H_{r+\rho}(T) \leq \frac{\delta}{\rho^p} \int_0^T H_r(t) dt. \quad (5.6)$$

В силу (3.10) функция $H_r(t)$ ограничена, т.е. $H_r(t) \leq A$ при всех $r > 0$, $t > 0$. Тогда из (5.6) следует

$$\begin{aligned} H_{R_0+\rho}(T) &\leq \frac{\delta}{\rho^p} \int_0^T A dt \leq \frac{\delta AT}{\rho^p}, \\ H_{R_0+2\rho}(T) &\leq \frac{\delta}{\rho^p} \int_0^T \frac{\delta At}{\rho^p} dt \leq \frac{\delta^2 AT^2}{2\rho^{2p}}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

По индукции, применив формулу Стирлинга, получим

$$H_{R_0+k\rho}(T) \leq \frac{A\delta^k T^k}{\rho^{kp} k!} \leq \frac{A\delta^k T^k}{\rho^{kp} (k/e)^k \sqrt{k}}.$$

Пусть $r = R_0 + k\rho$; тогда имеем

$$H_r(T) \leq \frac{A \exp(-k \ln(\rho^p k / (e\delta T)))}{\sqrt{k}}.$$

Выберем k таким, чтобы $e \leq \rho^p k / (e\delta T) \leq 2^p e$. Тогда

$$ek^{p-1} \leq \frac{\rho^p k^p}{e\delta T} = \frac{(r - R_0)^p}{e\delta T} \leq 2^p ek^{p-1}.$$

Следовательно,

$$k \ln \frac{\rho^p k}{e\delta T} \geq k \geq \left(\frac{(r - R_0)^p}{2^p e^2 \delta T} \right)^{1/(p-1)}.$$

Значит,

$$H_r(T) \leq A \exp\left(-\left(\frac{(r - R_0)^p}{2^p e^2 \delta T}\right)^{1/(p-1)}\right),$$

что влечет оценку (2.11). В случае, когда выбор требуемого k невозможен, выполняется неравенство $(r - R_0)^p / (e\delta T) < e$, и оценка (2.11) тривиальна.

Теорема 3 доказана.

§ 6. Оценка сверху нормы решения

В этом параграфе будут доказаны теоремы 4, 5.

6.1. Доказательство теоремы 4. Пусть $\theta(\rho)$, $\rho > 0$, – абсолютно непрерывная функция, равная единице при $\rho \geq r$, нулю при $\rho \leq R_0$, линейная при $\rho \in [R_0, 2R_0]$ и удовлетворяющая уравнению

$$\theta'(\rho) = \delta \nu(\rho) \theta(\rho), \quad \rho \in (2R_0, r) \quad (6.1)$$

(постоянную δ определим позднее). Решая это уравнение, находим, в частности, что

$$\theta'(\rho) = \theta'(R_0) = \frac{\theta(2R_0)}{R_0} = \frac{1}{R_0} \exp\left(-\delta \int_{2R_0}^r \nu(\rho) d\rho\right) \quad \text{при } \rho \in (R_0, 2R_0). \quad (6.2)$$

Для всякой функции $v(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ из определения функции $\nu(\rho)$ следует неравенство

$$\nu(\rho)\|v\|_{p,\gamma_\rho} \leq \|\nabla v\|_{p,\gamma_\rho}, \quad \rho > 0.$$

После домножения на $\theta^p(\rho)$ и интегрирования по $\rho \in [a, b]$ выводим соотношение

$$\int_a^b \nu^p(\rho) \theta^p(\rho) \|v\|_{p,\gamma_\rho}^p d\rho \leq \int_a^b \theta^p(\rho) \|\nabla v\|_{p,\gamma_\rho}^p d\rho,$$

справедливое уже для любой функции $v \in \dot{W}_{\alpha,p}^1(\Omega)$. При $a = 2R_0$, $b = r$ последнее перепишем в виде

$$\|\chi_{2R_0}^r \nu(|x|) \theta(|x|) v\|_p \leq \|\chi_{2R_0}^r \theta(|x|) \nabla v\|_p. \quad (6.3)$$

Подставив $\xi(x) = \theta(|x|)$ в (5.5), будем иметь

$$\int_\Omega u^\alpha(t, x) \theta^p(|x|) dx + \int_{D^t} \theta^p |\nabla u|^p dx d\tau \leq C(\alpha, p) \int_{D^t} |u|^p (\theta'(|x|))^p dx d\tau. \quad (6.4)$$

Используя (6.1), (6.2), нетрудно привести (6.4) к виду

$$\begin{aligned} & \int_\Omega u^\alpha(t, x) \theta^p(x_1) dx + \int_{D^t} \theta^p |\nabla u|^p dx d\tau \\ & \leq C(\theta'(R_0))^p \int_0^t \int_\Omega \chi_{2R_0}^{2R_0} |u|^p dx d\tau + C\delta^p \int_0^t \int_\Omega \chi_{2R_0}^r |u|^p \nu^p(|x|) \theta^p(|x|) dx d\tau \\ & = I_1^t + I_2^t. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Применяя (4.8) при $b = 2R_0$ и тождество (3.18), выводим

$$I_1^t \leq C_1(R_0)(\theta'(R_0))^p \int_0^t \|\nabla u(\tau)\|_p^p d\tau \leq C_2 \exp\left(-\delta p \int_{2R_0}^r \nu(\rho) d\rho\right) \|u_0\|_\alpha^\alpha. \quad (6.6)$$

Применяя (6.3), получаем

$$I_2^t \leq C\delta^p \int_0^t \|\chi_{2R_0}^r \theta \nabla u\|_p^p d\tau. \quad (6.7)$$

Выбирая $\delta = C^{-1/p}$ и соединяя (6.5)–(6.7), будем иметь

$$\|\chi_r u(t)\|_\alpha^\alpha + \int_0^t \|\chi_r \nabla u(\tau)\|_p^p d\tau \leq C_2 \exp\left(-\delta p \int_1^r \nu(\rho) d\rho\right) \|u_0\|_\alpha^\alpha.$$

Отсюда следует неравенство (2.14).

Теорема 4 доказана.

6.2. Доказательство теоремы 5. Выберем положительное число $r \geq 2R_0$. Согласно (2.14), вводя обозначение

$$\varepsilon(r) = \mathcal{M}^\alpha \exp\left(-\alpha \kappa \int_1^r \nu(\rho) d\rho\right) \|u_0\|_\alpha^\alpha,$$

имеем соотношение

$$\|u(t)\|_\alpha^\alpha \leq \|\chi^r u(t)\|_\alpha^\alpha + \varepsilon(r), \quad t \geq 0.$$

Из неравенства (4.8) следует

$$\begin{aligned} \|\chi^r u(t)\|_\alpha^\alpha &= \int_\Omega \chi^r u(t)^\alpha dx \leq \left(\int_\Omega \chi^r dx \right)^{(p-\alpha)/p} \|\chi^r u(t)\|_p^\alpha \\ &\leq C r^{n(p-\alpha)/p} r^\alpha \|\chi^r \nabla u(t)\|_p^\alpha. \end{aligned}$$

Вводя обозначение $\mu(r) = C_1 r^{1+n(p-\alpha)/(p\alpha)}$ с подходящим множителем C_1 , будем иметь

$$\|u(t)\|_\alpha^\alpha \leq \mu^\alpha(r) \|\chi^r \nabla u(t)\|_p^\alpha + \varepsilon(r), \quad t \geq 0. \quad (6.8)$$

Обозначим через t_r точку интервала $[0, \infty)$ такую, что $E(t_r) = \|u(t_r)\|_\alpha^\alpha = \varepsilon(r)$. В случае, если $E(t) > \varepsilon(r)$ при любом $t \geq 0$, полагаем $t_r = \infty$. В силу монотонного невозрастания функции $E(t)$ для $t \in [0, t_r)$ справедливо неравенство $E(t) > \varepsilon(r)$. Тогда из соотношения (6.8) следует, что

$$(E(t) - \varepsilon(r))^{p/\alpha} \leq \mu^p(r) \|\nabla u(t)\|_p^p, \quad t \in [0, t_r). \quad (6.9)$$

Дифференцируя (3.18) по T , находим, что

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\frac{\alpha}{\alpha-1} \|\nabla u(t)\|_p^p.$$

С учетом (6.9) будем иметь

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq -\frac{\alpha}{\alpha-1} \mu^{-p}(r) (E(t) - \varepsilon(r))^{p/\alpha}, \quad t \in (0, t_r). \quad (6.10)$$

Решая дифференциальное неравенство, получаем

$$(E(t) - \varepsilon(r))^{(p-\alpha)/\alpha} \leq \frac{\alpha-1}{(p-\alpha)t\mu^{-p}(r)}, \quad t \in (0, t_r).$$

Подставив в последнее неравенство значение $\varepsilon(r)$, для $t \in (0, t_r)$ выводим

$$E(t) \leq C_2 (t\mu^{-p}(r))^{-\alpha/(p-\alpha)} + \mathcal{M}^\alpha \exp\left(-\alpha\kappa \int_1^r \nu(\rho) d\rho\right) \|u_0\|_\alpha^\alpha. \quad (6.11)$$

Отметим, что для $t \in [t_r, \infty)$ выполнено неравенство $E(t) \leq \varepsilon(r)$, и оценка (6.11) также справедлива.

В (6.11) положим $r = r(t)$ и воспользуемся неравенством (2.15):

$$\begin{aligned} E(t) &\leq C_2 t^{-\alpha/(p-\alpha)} r(t)^{p\alpha/(p-\alpha)+n} + \mathcal{M}^\alpha \exp\left(-\alpha\kappa \int_1^{r(t)} \nu(\rho) d\rho\right) \|u_0\|_\alpha^\alpha \\ &\leq C_3 t^{-\alpha/(p-\alpha)} r(t)^{p\alpha/(p-\alpha)+n}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, установлено неравенство (2.16).

Теорема 5 доказана.

Список литературы

- [1] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, de Gruyter, Paris, 1969.
- [2] P. A. Raviart, “Sur la résolution de certaines équations paraboliques non linéaires”, *J. Functional Analysis*, **5** (1970), 299–328.
- [3] O. Grange, F. Mignot, “Sur la résolution d’une équation et d’une inéquation paraboliques non linéaires”, *J. Functional Analysis*, **11** (1972), 77–92.
- [4] A. Bamberger, “Étude d’une équation doublement non linéaire”, *J. Functional Analysis*, **24** (1977), 148–155.
- [5] H. W. Alt, S. Luckhaus, “Quasilinear elliptic-parabolic differential equations”, *Math. Z.*, **183**:3 (1983), 311–341.
- [6] F. Bernis, “Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains”, *Math. Ann.*, **279**:3 (1988), 373–394.
- [7] Э. Р. Андриянова, Ф. Х. Мукминов, “Оценка снизу скорости убывания решения параболического уравнения с двойной нелинейностью”, *Уфимск. матем. журн.*, **3**:3 (2011), 3–14.
- [8] Л. М. Кожевникова, А. А. Леонтьев, “Оценки решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью”, *Уфимск. матем. журн.*, **3**:4 (2011), 64–85.
- [9] А. К. Гущин, “Об оценках решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка”, *Краевые задачи для дифференциальных уравнений*. III, Сборник работ под редакцией В. П. Михайлова, Тр. МИАН СССР, **126**, 1973, 5–45; англ. пер.: A. K. Gushchin, “The estimates of the solutions of boundary value problems for a second order parabolic equation”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **126** (1973), 1–46.
- [10] N. Alikakos, R. Rostamian, “Gradient estimates for degenerate diffusion equations. II”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **91**:3–4 (1982), 335–346.
- [11] А. Ф. Тедеев, “Стабилизация решений начально-краевых задач для квазилинейных параболических уравнений”, *Укр. матем. журн.*, **44**:10 (1992), 1441–1450; англ. пер.: A. F. Tedeev, “Stabilization of the solutions of initial-boundary value problems for quasilinear parabolic equations”, *Izv. Math.*, **44**:10 (1992), 1325–1334.
- [12] Л. М. Кожевникова, “Стабилизация решений псевдодифференциальных параболических уравнений в неограниченных областях”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:2 (2010), 109–130; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, “Stabilization of solutions of pseudo-differential parabolic equations in unbounded domains”, *Izv. Math.*, **74**:2 (2010), 325–345.
- [13] Р. Х. Каримов, Л. М. Кожевникова, “Стабилизация решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка в областях с некомпактными границами”, *Матем. сб.*, **201**:9 (2010), 3–26; англ. пер.: R. Kh. Karimov, L. M. Kozhevnikova, “Stabilization of solutions of quasilinear second order parabolic equations in domains with non-compact boundaries”, *Sb. Math.*, **201**:9 (2010), 1249–1271.
- [14] Л. М. Кожевникова, Ф. Х. Мукминов, “Стабилизация решений анизотропного квазилинейного параболического уравнения в неограниченных областях”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **278**, МАИК, М., 2012, 114–128; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, F. Kh. Mukminov, “Stabilization of solutions of an anisotropic quasilinear parabolic equation in unbounded domains”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **278** (2012), 106–120.
- [15] M. A. Xerrero, J. L. Vázquez, “Asymptotic behaviour of the solutions of a strongly nonlinear parabolic problem”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (5), **3**:2 (1981), 113–127.

- [16] J. L. Vázquez, *The porous medium equation*, Oxford Math. Monogr., Oxford Univ. Press, Oxford, 2007.
- [17] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, de Gruyter, Paris, 1969.
- [18] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралъцева, *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, 2-е изд., Наука, М., 1973; англ. пер. 1-го изд.: О. А. Ladyzhenskaya, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, Math. Sci. Engrg., **46**, Academic Press, New York–London, 1968.

Э. Р. Андриянова (E. R. Andriyanova)

Уфимский государственный авиационный

технический университет

E-mail: Elina.Andriyanov@mail.ru

Поступила в редакцию

16.10.2012 и 02.04.2013

Ф. Х. Мукминов (F. Kh. Mukminov)

Институт математики с вычислительным центром

УНЦ РАН, г. Уфа

E-mail: mfkh@rambler.ru