Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Слюсарчук, Исследование нелинейных почти периодических дифференциальных уравнений, не использующее $\mathcal{H}$ -классы этих уравнений, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 6, 139–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8188>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 06:20:15

УДК 517.925.52

В. Е. Слюсарчук

Исследование нелинейных почти периодических дифференциальных уравнений, не использующее $\mathcal{H}$ -классы этих уравнений

Известные теоремы Фавара и Америко о существовании почти периодических решений линейных и нелинейных почти периодических дифференциальных уравнений существенно используют $\mathcal{H}$ -классы и требование разделенности ограниченных решений этих уравнений. В настоящей статье предложены иные условия существования почти периодических решений. Они используют определенный на множестве ограниченных решений исследуемых уравнений функционал, позволяющий, в частности, определять разделенность решений, и не используют $\mathcal{H}$ -классы этих уравнений.

Библиография: 24 названия.

Ключевые слова: ограниченные и почти периодические решения, нелинейные почти периодические дифференциальные уравнения, теорема Америко.

DOI: 10.4213/sm8188

Эта статья – дополнение к методам исследований почти периодических дифференциальных уравнений, изложенным в [1]–[4]. Предложенные в статье методы исследования почти периодических систем новы и наделены свойством, указанным в названии статьи.

§ 1. Основные обозначения и объект исследований

Пусть E – конечномерное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_E$, X и Y – произвольные банаховы пространства и $L(X, Y)$ – банахово пространство линейных непрерывных операторов A , действующих из пространства X в пространство Y , с нормой $\|A\|_{L(X, Y)} = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y$. Обозначим через C^0 банахово пространство ограниченных и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $x = x(t)$ со значениями в E с нормой $\|x\|_{C^0} = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|_E$, а через C^1 – банахово пространство функций $x \in C^0$, для каждой из которых $dx/dt \in C^0$, с нормой $\|x\|_{C^1} = \max\{\|x\|_{C^0}, \|dx/dt\|_{C^0}\}$.

В пространстве C^0 определим оператор сдвига S_h , $h \in \mathbb{R}$, соотношением

$$(S_h x)(t) = x(t + h), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Согласно Бохнеру (см. [5]) элемент $y \in C^k$, $k = 0, 1$, называется *почти периодическим*, если замыкание множества $\{S_h y : h \in \mathbb{R}\}$ в пространстве C^k есть компактное подмножество этого пространства.

Множества B^0 и B^1 почти периодических элементов пространств C^0 и C^1 являются подпространствами этих пространств соответственно с нормами $\|x\|_{B^0} = \|x\|_{C^0}$ и $\|x\|_{B^1} = \|x\|_{C^1}$.

Пусть Ω – область пространства E , т.е. открытое связное множество пространства E , и $\mathcal{K}$ – множество всех непустых связных компактных подмножеств $K \subset \Omega$.

Рассмотрим непрерывное отображение $f: \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow E$, которое удовлетворяет условиям:

- 1) $f(t, x)$ равномерно непрерывно по x на каждом подмножестве $\mathbb{R} \times K$, где $K \in \mathcal{K}$;
- 2) $f(t, x)$ почти периодически по t равномерно по x на каждом множестве $K \in \mathcal{K}$.

Нетрудно показать (см. [4; дополнение, § 19]), что $f(t, x)$ ограничено на каждом множестве $\mathbb{R} \times K$, $K \in \mathcal{K}$, т.е.

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, x \in K} \|f(t, x)\|_E < +\infty, \quad K \in \mathcal{K},$$

и для произвольной числовой последовательности $(h_k)_{k \geq 1}$ существует подпоследовательность $(h_{k_l})_{l \geq 1}$, для которой последовательность $(f(t + h_{k_l}, x))_{l \geq 1}$ сходится равномерно на каждом множестве $\mathbb{R} \times K$, $K \in \mathcal{K}$. В этом случае предельное отображение $g: \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow E$, которое определяется формулой

$$g(t, x) = \lim_{l \rightarrow \infty} f(t + h_{k_l}, x), \quad (1.2)$$

будет удовлетворять условиям 1) и 2).

Множество всех таких отображений называется $\mathcal{H}$ -классом отображения f и обозначается через $\mathcal{H}(f)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \quad (1.3)$$

$\mathcal{H}$ -классом этого уравнения называется множество всех дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = g(t, x), \quad (1.4)$$

правая часть которых определяется с помощью (1.2).

Элементы $\mathcal{H}$ -класса уравнения (1.3) называют *присоединенными* уравнениями к уравнению (1.3) [4; дополнение, § 19].

Целью статьи является исследование условий существования почти периодических решений уравнения (1.3) без применения элементов $\mathcal{H}$ -класса этого уравнения. $\mathcal{H}$ -класс уравнения (1.3) нам потребуются только в местах сравнения полученных результатов с теоремой Амирио, а также с другими результатами о почти периодических решениях дифференциальных уравнений.

Заметим, что исследованию почти периодических уравнений посвящено много публикаций. Выделим лишь часть из них. Для обыкновенных линейных

дифференциальных уравнений первые теоремы о почти периодических решениях были доказаны Фаваром в работе [1], а для нелинейных дифференциальных уравнений – Америо в работе [2]. Теоремы Фавара были улучшены Э. Мухамадиевым (см. [6], [7]). Обобщениям результатов Э. Мухамадиева посвящены работы автора [8]–[10]. Почти периодические дифференциальные операторы с частными производными исследовались Э. Мухамадиевым (см. [11]) и М. А. Шубиным (см. [12]). Важные результаты в этом направлении также принадлежат Б. М. Левитану и В. В. Жикову [13], Америо [14], В. В. Жикову [15]–[17] и Финку [18].

§ 2. Функционал Δ

Пусть Ω – область пространства E , как и в § 1. Обозначим через $\mathcal{N}(f, K)$ множество всех ограниченных решений $x = x(t)$ уравнения (1.3), для каждого из которых замыкание множества значений $\overline{R(x)}$ является подмножеством множества $K \in \mathcal{K}$ (для уравнения (1.4), где $g \in \mathcal{H}(f)$, аналогичное множество будем обозначать через $\mathcal{N}(g, K)$).

Фиксируем произвольное множество $K \in \mathcal{K}$ и ограниченное решение $x^* \in \mathcal{N}(f, K)$ уравнения (1.3) (считаем, что $\mathcal{N}(f, K) \neq \emptyset$). Положим

$$r(x^*, K, f) = \sup\{\|x - y\|_E : x \in \overline{R(x^*)}, y \in K\}. \quad (2.1)$$

Также фиксируем произвольное число $\varepsilon \in [0, r(x^*, K, f)]$. Положим

$$m(K, f) = \sup_{t \in \mathbb{R}, x \in K} \|f(t, x)\|_E. \quad (2.2)$$

Обозначим через $\Omega(x^*, K, f, \varepsilon)$ множество всех функций $y \in C^1$, для каждой из которых

$$x^*(t) + y(t) \in K \quad (2.3)$$

для всех $t \in \mathbb{R}$,

$$\left\| \frac{d(x^*(t) + y(t))}{dt} \right\|_E \leq m(K, f) \quad (2.4)$$

для всех $t \in \mathbb{R}$ и

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \|y(t)\|_E - \varepsilon = 0. \quad (2.5)$$

Очевидно, что соотношение (2.5) выполняется, если или $\|y(\tau)\|_E = \varepsilon$ для некоторого $\tau \in \mathbb{R}$ в случае $\varepsilon \in \{\|x\|_E : x \in R(y)\}$, или $\lim_{n \rightarrow \infty} \|y(\tau_n)\|_E = \varepsilon$ для некоторых чисел $\tau_n \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, в случае $\varepsilon \in \{\|x\|_E : x \in \overline{R(y)} \setminus R(y)\}$.

Рассмотрим функционал

$$\Delta(x^*, K, f, \varepsilon) = \inf_{y \in \Omega(x^*, K, f, \varepsilon)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{d(x^*(t) + y(t))}{dt} - f(t, x^*(t) + y(t)) \right\|_E. \quad (2.6)$$

Для $g \in \mathcal{H}(f)$ функционал $\Delta(y^*, K, g, \varepsilon)$ (в этом случае предполагается, что $y^* \in \mathcal{N}(g, K)$) определяется аналогичным образом. Нужно во всех приведенных выше соотношениях заменить f и x^* на g и y^* соответственно. Тогда очевидно, что

$$m(K, f) = m(K, g).$$

Свойства функционала Δ и его применение к исследованию почти периодического уравнения (1.3) приведем в § 4–8.

§ 3. Локально сходящиеся последовательности функций

Приведем ряд вспомогательных утверждений о локально сходящихся последовательностях функций, которые потребуются в дальнейшем.

Последовательность элементов $x_k \in C^0$, $k \in \mathbb{N}$, будем называть *локально сходящейся* к элементу $x \in C^0$ при $k \rightarrow \infty$, если эта последовательность ограничена и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \max_{|t| \leq T} \|x_k(t) - x(t)\|_E = 0$$

для каждого числа $T > 0$. Для такой последовательности будем использовать следующее обозначение:

$$x_k \xrightarrow{\text{loc}, C^0} x \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Важной для дальнейшего является следующая

ЛЕММА 1 (см. [19]). *Для ограниченной последовательности $(u_n)_{n \geq 1}$ элементов пространства C^1 существуют возрастающая последовательность $(n_k)_{k \geq 1}$ натуральных чисел и элемент $u \in C^0$, для которых*

$$u_{n_k} \xrightarrow{\text{loc}, C^0} u \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

и

$$\|u\|_{C^0} \leq \sup_{n \geq 1} \|u_n\|_{C^0}.$$

С помощью леммы 1 легко устанавливается

ЛЕММА 2. *Пусть:*

1) $h \in C^0$ и $(h_n)_{n \geq 1}$ – ограниченная последовательность элементов пространства C^0 , для которых

$$h_n \xrightarrow{\text{loc}, C^0} h \quad \text{при } n \rightarrow \infty; \quad (3.1)$$

2) $(u_n)_{n \geq 1}$ – такая ограниченная последовательность элементов пространства C^1 со значениями в $K \in \mathcal{K}$, что для функций

$$v_n(t) = \frac{du_n(t)}{dt} - f(t, u_n(t)) - h_n(t), \quad n \geq 1, \quad (3.2)$$

выполняется соотношение

$$v_n \xrightarrow{\text{loc}, C^0} 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (3.3)$$

Тогда существуют возрастающая последовательность $(n_k)_{k \geq 1}$ натуральных чисел и элемент $u \in C^1$ со значениями в K , для которых

$$u_{n_k} \xrightarrow{\text{loc}, C^0} u \quad \text{при } k \rightarrow \infty \quad (3.4)$$

и

$$\frac{du(t)}{dt} \equiv f(t, u(t)) + h(t). \quad (3.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку последовательность $(u_n)_{n \geq 1}$ является ограниченной в пространстве C^1 , то на основании леммы 1 существуют возрастающая последовательность $(n_k)_{k \geq 1}$ натуральных чисел и элемент $u \in C^0$, для которых выполняется соотношение (3.4). Из (3.4), соотношений $R(u_n) \subset K$, $n \geq 1$, и компактности множества K вытекает, что $R(u) \subset K$.

Покажем выполнение соотношения (3.5). Из (3.2) и (3.3) вытекает, что для произвольных $t, s \in \mathbb{R}$ ($t \geq s$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| u_n(t) - u_n(s) - \int_s^t f(\tau, u_n(\tau)) d\tau - \int_s^t h_n(\tau) d\tau \right\|_E = 0.$$

Поэтому на основании (3.4) и равномерной непрерывности $f(t, x)$ по x на $\mathbb{R} \times K$ для всех $t, s \in \mathbb{R}$ ($t \geq s$)

$$u(t) - u(s) = \int_s^t f(\tau, u(\tau)) d\tau + \int_s^t h(\tau) d\tau.$$

Отсюда вытекает (3.4) и включение $u \in C^1$.

Лемма 2 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $(u_n)_{n \geq 1}$ – такая последовательность элементов пространства C^1 со значениями в $K \in \mathcal{K}$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{du_n(t)}{dt} - f(t, u_n(t)) \right\|_E = 0.$$

Тогда существуют возрастающая последовательность $(n_k)_{k \geq 1}$ натуральных чисел и элемент $u \in C^1$ со значениями в K , для которых

$$u_{n_k} \xrightarrow{\text{loc}, C^0} u \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

и

$$\frac{du(t)}{dt} \equiv f(t, u(t)).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\xi(t)$ – ограниченное решение почти периодического уравнения (1.3) со значениями в $K \in \mathcal{K}$, $g \in \mathcal{H}(f)$ и $(h_n)_{n \geq 1}$ – такая числовая последовательность, что последовательность $(f(t + h_n, x))_{n \geq 1}$ сходится равномерно на множестве $\mathbb{R} \times K$, где $K \in \mathcal{K}$, к функции $g(t, x)$.

Тогда существуют подпоследовательность $(h_{n_k})_{k \geq 1}$ последовательности $(h_n)_{n \geq 1}$ и функция $\eta \in C^1$ со значениями в K , для которых

$$S_{h_{n_k}} \xi \xrightarrow{\text{loc}, C^0} \eta \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

и

$$\frac{d\eta(t)}{dt} \equiv g(t, \eta(t)).$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $(\xi_n)_{n \geq 1}$ – ограниченная последовательность элементов пространства C^1 со значениями в $K \in \mathcal{K}$, $g \in \mathcal{H}(f)$, $(h_n)_{n \geq 1}$ – такая

числовая последовательность, что последовательность $(f(t + h_n, x))_{n \geq 1}$ сходится равномерно на множестве $\mathbb{R} \times K$, где $K \in \mathcal{K}$, к функции $g(t, x)$, и для функций

$$\chi_n(t) = \frac{d\xi_n(t)}{dt} - f(t, \xi_n(t)), \quad n \geq 1,$$

выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\chi_n\|_{C^0} = 0.$$

Тогда существуют подпоследовательность $(h_{n_k})_{k \geq 1}$ последовательности $(h_n)_{n \geq 1}$ и функция $\eta \in C^1$ со значениями в K , для которых

$$S_{h_{n_k}} \xi_{n_k} \xrightarrow{\text{loc}, C^0} \eta \quad \text{при } k \rightarrow \infty$$

и

$$\frac{d\eta(t)}{dt} \equiv g(t, \eta(t)).$$

§ 4. Свойства функционала Δ

Ряд необходимых для дальнейшего свойств функционала Δ представим с помощью следующих утверждений.

ЛЕММА 3. $\Delta(x^*, K, f, 0) = 0$ для всех $K \in \mathcal{K}$ и $x^* \in \mathcal{N}(f, K)$.

Утверждение леммы вытекает из соотношения (2.6).

ЛЕММА 4. Пусть $\Delta(x^*, K, f, \varepsilon_0) = 0$, где $\varepsilon_0 \in (0, r(x^*, K, f))$, и для некоторой последовательности $(y_n)_{n \geq 1}$ элементов множества $\Omega(x^*, K, f, \varepsilon_0)$ выполняется соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{d(x^*(t) + y_n(t))}{dt} - f(t, x^*(t) + y_n(t)) \right\|_E = 0. \quad (4.1)$$

Тогда

$$\Delta(x^*, K, f, \varepsilon_1) = 0 \quad (4.2)$$

для всех

$$\varepsilon_1 \in \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{ \|a\|_E : a \in \overline{R(y_n)} \}. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если выполняется включение (4.3), то для некоторой возрастающей последовательности $(n_k)_{k \geq 1}$ натуральных чисел

$$\varepsilon_1 \in \{ \|a\|_E : a \in \overline{R(y_{n_k})} \}, \quad k \geq 1.$$

Следовательно,

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \| \|y_{n_k}(t)\|_E - \varepsilon_1 \| = 0, \quad k \geq 1.$$

Поскольку для функций y_{n_k} , $k \geq 1$, также выполняются соотношения

$$x^*(t) + y_{n_k}(t) \in K, \quad \left\| \frac{d(x^*(t) + y_{n_k}(t))}{dt} \right\|_E \leq m(K, f)$$

для всех $t \in \mathbb{R}$ и $k \geq 1$, то

$$y_{n_k} \in \Omega(x^*, K, f, \varepsilon_1), \quad k \geq 1.$$

Тогда в силу соотношения (4.1) и леммы 3 выполняется соотношение (4.2).

Лемма 4 доказана.

Следующие свойства функционала Δ будут использовать понятие разделимости ограниченных решений уравнения (1.3).

Для решений $x^*, y^* \in \mathcal{N}(f, K)$ дифференциального уравнения (1.3) рассмотрим величину $\omega(x^*, y^*)$, которая определяется равенством

$$\omega(x^*, y^*) = \inf_{t \in \mathbb{R}} \|x^*(t) - y^*(t)\|_E.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [2]). Решение $x^* \in \mathcal{N}(f, K)$ уравнения (1.3) называется *разделенным* на множестве $\mathbb{R} \times K$, если оно или единственное на $\mathbb{R} \times K$, или для всякого другого ограниченного решения $y^* \in \mathcal{N}(f, K)$ выполняется соотношение

$$\omega(x^*, y^*) \geq \rho,$$

где ρ – положительная постоянная, зависящая только от x^* .

ЛЕММА 5. Пусть для решения $x^* \in \mathcal{N}(f, K)$ уравнения (1.3) и некоторого числа $\delta > 0$ выполняется соотношение

$$\Delta(x^*, K, f, \varepsilon) > 0 \tag{4.4}$$

для всех $\varepsilon \in (0, \delta)$.

Если множество $\mathcal{N}(f, K)$ содержит больше одного элемента, то для любого другого решения $y^* \in \mathcal{N}(f, K)$ уравнения (1.3)

$$\omega(x^*, y^*) \geq \delta \tag{4.5}$$

и, следовательно, решение x^* является разделенным на множестве $\mathbb{R} \times K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z^* \in \mathcal{N}(f, K)$ и $z^* \neq x^*$. Тогда функция

$$y = z^*(t) - x^*(t)$$

является элементом множества $\Omega(x^*, K, \varepsilon_0)$ для каждого $\varepsilon_0 \in \{\|y(t)\|_E : t \in \mathbb{R}\}$ и, следовательно,

$$\Delta(x^*, K, f, \varepsilon_0) = 0$$

для каждого такого ε_0 . Поэтому на основании (4.4)

$$\varepsilon_0 \geq \delta.$$

Отсюда следует (4.5).

Лемма 5 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Решение $x^* \in \mathcal{N}(f, K)$ уравнения (1.3) может быть разделенным в области $\mathbb{R} \times K$, и для некоторого $\delta > 0$ может выполняться соотношение

$$\Delta(x^*, K, f, \varepsilon) = 0 \quad (4.6)$$

для всех $\varepsilon \in (0, \delta)$. Это подтверждается следующим примером.

ПРИМЕР 1. Используем пример почти периодического уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t)x, \quad (4.7)$$

где

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin \frac{t}{2k+1},$$

который заимствован из [1], [3; гл. IV, § 2] и [4; дополнение, § 20]. Выделим важные моменты, касающиеся этого уравнения, необходимые для дальнейшего:

1) общее решение уравнения (4.7) представляется в виде $x(t) = ce^{F(t)}$, где c – произвольная вещественная постоянная и $F(t) = \int_0^t f(s) ds$ – неотрицательная и неограниченная на $\mathbb{R}$ функция, и, следовательно, единственное ограниченное решение $x \equiv 0$ уравнения (4.7), соответствующее $c = 0$, является разделенным на каждом множестве $\mathbb{R} \times [a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < 0$, $b > 0$);

2) выполняется соотношение

$$f(t + t_n) = -f(t) + \gamma_n(t), \quad n \geq 1, \quad (4.8)$$

где $t_n = 1 \cdot 3 \cdots (2n+1)\pi$ и $\gamma_n(t)$ – непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\gamma_n(t)| = 0, \quad (4.9)$$

и, следовательно, уравнение

$$\frac{dy}{dt} = -f(t)y \quad (4.10)$$

является элементом $\mathcal{H}$ -класса уравнения (4.7);

3) общее решение уравнения (4.10) представляется в виде $y(t) = ce^{-F(t)}$, причем $\sup_{t \in \mathbb{R}} |y(t)| = |c|$ и $\inf_{t \in \mathbb{R}} |y(t)| = 0$, и, следовательно, все решения уравнения (4.10) не являются разделенными.

Покажем, что для решения $x^* \equiv 0$ уравнения (4.7) выполняется соотношение (4.6).

Зафиксируем произвольное множество $K = [a, b]$, где $a < 0$ и $b > 0$. Положим $\delta = \min\{|a|, |b|\}$. Рассмотрим произвольное $\varepsilon \in (0, \delta)$ и функции

$$x_{\varepsilon, n}(t) = \varepsilon e^{-F(t-t_n)}, \quad n \geq 1.$$

Согласно (2.6), (4.8) и (4.9)

$$\begin{aligned}
 \Delta(0, [a, b], f, \varepsilon) &= \inf_{y \in \Omega(0, [a, b], f, \varepsilon)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{d(y(t))}{dt} - f(t)y(t) \right| \\
 &= \inf_{n \geq 1} \inf_{y \in \Omega(0, [a, b], f, \varepsilon)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{d(y(t + t_n))}{dt} - f(t + t_n)y(t + t_n) \right| \\
 &= \inf_{n \geq 1} \inf_{y \in \Omega(0, [a, b], f, \varepsilon)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{d(y(t + t_n))}{dt} + (f(t) - \gamma_n(t))y(t + t_n) \right| \\
 &\leq \inf_{n \geq 1} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{d(x_{\varepsilon, n}(t + t_n))}{dt} + (f(t) - \gamma_n(t))x_{\varepsilon, n}(t + t_n) \right| \\
 &= \inf_{n \geq 1} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{d\varepsilon e^{-F(t)}}{dt} + (f(t) - \gamma_n(t))\varepsilon e^{-F(t)} \right| \\
 &= \inf_{n \geq 1} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \left(\frac{d\varepsilon e^{-F(t)}}{dt} + f(t)\varepsilon e^{-F(t)} \right) - \gamma_n(t)\varepsilon e^{-F(t)} \right| \\
 &= \inf_{n \geq 1} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\gamma_n(t)\varepsilon e^{-F(t)}| \leq \inf_{n \geq 1} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\gamma_n(t)\varepsilon| = \varepsilon \inf_{n \geq 1} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\gamma_n(t)| = 0.
 \end{aligned}$$

Таким образом, решение $x^* \equiv 0$ уравнения (4.7) является разделенным на каждом множестве $\mathbb{R} \times [a, b]$, где $a < 0$ и $b > 0$, и для него выполняется соотношение (4.6).

§ 5. Условия равной разделенности ограниченных решений

Приведем свойства функционала Δ , использующие все элементы $\mathcal{H}$ -класса уравнения (1.3).

Обозначим через $\text{card } \mathcal{M}$ число элементов конечного множества $\mathcal{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $K \in \mathcal{K}$. Ограниченные решения со значениями в K уравнений $\mathcal{H}$ -класса уравнения (1.3) называются *равноразделенными* на множестве $\mathbb{R} \times K$, если или каждое из этих уравнений имеет единственное ограниченное решение со значениями в K , или (в случае неединственности ограниченных решений) существует такое число $\rho > 0$, что для каждой функции $g \in \mathcal{H}(f)$ и любых двух различных решений $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{N}(g, K)$ уравнения (1.4) выполняется неравенство

$$\omega(\eta_1, \eta_2) \geq \rho. \quad (5.1)$$

Наибольшее из чисел ρ , для которых выполняется неравенство (5.1), обозначим через $D(K)$.

Важными для теории почти периодических систем являются следующие три утверждения.

ЛЕММА 6 (см. [4; дополнение, § 20]). Пусть $K \in \mathcal{K}$. Если все ограниченные решения со значениями в K уравнения (1.3) являются разделенными на множестве $\mathbb{R} \times K$, то существует лишь конечное число ограниченных решений со значениями в K .

ЛЕММА 7 (см. [4; дополнение, § 20]). Пусть $K \in \mathcal{K}$. Если почти периодическое уравнение (1.3) имеет ограниченное решение со значениями в K , то

каждое уравнение $\mathcal{H}$ -класса уравнения (1.3) также имеет ограниченное решение со значениями в K .

ЛЕММА 8 (см. [4; дополнение, § 20]). Пусть $K \in \mathcal{K}$. Если почти периодическое уравнение (1.3) имеет ограниченное решение со значениями в K и все ограниченные решения уравнений $\mathcal{H}$ -класса уравнения (1.3) являются разделимыми на множестве $\mathbb{R} \times K$, то они равномерно разделимы на множестве $\mathbb{R} \times K$ и $\text{card } \mathcal{N}(g, K) = \text{card } \mathcal{N}(f, K)$ для каждого $g \in \mathcal{H}(f)$.

Далее для изучения свойства равной разделимости решений исследуемых почти периодических уравнений применим функционал Δ .

ЛЕММА 9. Пусть $K \in \mathcal{K}$, $\text{card } \mathcal{N}(f, K) \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ и ограниченные решения со значениями в K уравнений $\mathcal{H}$ -класса уравнения (1.3) являются равномерно разделимыми на множестве $\mathbb{R} \times K$.

Тогда для произвольных $g \in \mathcal{H}(f)$ и $x^* \in \mathcal{N}(g, K)$ выполняется соотношение

$$\Delta(x^*, K, g, \varepsilon) > 0 \quad (5.2)$$

для всех $\varepsilon \in (0, D(K))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что соотношение (5.2) не выполняется, т.е. для некоторых $g \in \mathcal{H}(f)$, $x^* \in \mathcal{N}(g, K)$ и $\varepsilon_0 \in (0, D(K))$

$$\Delta(x^*, K, g, \varepsilon_0) = 0. \quad (5.3)$$

Тогда существует последовательность $(y_n)_{n \geq 1}$ элементов пространства C^1 , для которых выполняются соотношения

$$x^*(t) + y_n(t) \in K, \quad (t, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \quad (5.4)$$

$$\left\| \frac{d(x^*(t) + y_n(t))}{dt} \right\|_E \leq m(K, g), \quad (t, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N},$$

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \|y_n(t)\|_E - \varepsilon_0 = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (5.5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{d(x^*(t) + y_n(t))}{dt} - f(t, x^*(t) + y_n(t)) \right\|_E = 0. \quad (5.6)$$

Согласно (5.5) существует такая числовая последовательность $(h_n)_{n \geq 1}$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n(h_n)\|_E = \varepsilon_0. \quad (5.7)$$

Рассмотрим ограниченные последовательности $(S_{h_n} y_n)_{n \geq 1}$ и $(S_{h_n} x^*)_{n \geq 1}$ элементов пространства C^1 . Согласно лемме 1 существуют подпоследовательность $(h_{n_k})_{k \geq 1}$ последовательности $(h_n)_{n \geq 1}$ и элементы $u, v \in C^0$, для которых

$$S_{h_{n_k}} x^* \xrightarrow{\text{loc}, C^0} u \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad (5.8)$$

$$S_{h_{n_k}} y_{n_k} \xrightarrow{\text{loc}, C^0} v \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (5.9)$$

В силу (5.4), (5.7) и замкнутости K для u и v выполняются соотношения

$$u(t) + v(t) \in K, \quad (t, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \quad (5.10)$$

$$\|v(0)\|_E = \varepsilon_0. \quad (5.11)$$

Далее будем считать, не ограничивая общности доказательства, что последовательность $(f(t + h_{n_k}, x))_{k \geq 1}$ сходится равномерно на множестве $\mathbb{R} \times K$ к некоторой функции $s \in \mathcal{H}(g)$ (заметим, что $\mathcal{H}(g) = \mathcal{H}(f)$; см. [4; дополнение, § 19]). Поэтому на основании (5.6), а также следствий 2 и 3

$$\frac{du(t)}{dt} \equiv s(t, u(t)), \quad (5.12)$$

$$\frac{d(u(t) + v(t))}{dt} \equiv s(t, u(t) + v(t)). \quad (5.13)$$

Отсюда вытекает, что также

$$\left\| \frac{d(u(t) + v(t))}{dt} \right\|_E \leq m(K, s), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Следовательно, если учесть соотношения (5.10)–(5.13), получаем

$$v \in \Omega(u, K, s, \varepsilon_0), \quad \Delta(u, K, s, \varepsilon_0) = 0.$$

Итак, соотношение (5.3) выполняется при $x^* = u$ и $g = s$.

Мы пришли к противоречию, поскольку

$$\omega(u, u + v) \leq \varepsilon_0 < D(K).$$

Таким образом, предположение о невыполнении соотношения (5.2) ложное. Лемма 9 доказана.

Аналогичное утверждение имеет место и в случае, когда все множества $\mathcal{N}(g, K)$, $g \in \mathcal{H}(f)$, являются одноэлементными множествами.

ЛЕММА 10. Пусть $K \in \mathcal{K}$ и каждое из множеств $\mathcal{N}(g, K)$, $g \in \mathcal{H}(f)$, содержит только один элемент.

Тогда существует такое число $D > 0$, что выполняется соотношение

$$\Delta(x^*, K, g, \varepsilon) > 0$$

для всех $g \in \mathcal{H}(f)$, $x^* \in \mathcal{N}(g, K)$ и $\varepsilon \in (0, D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что утверждение леммы ложное. Тогда существуют элементы $g_n \in \mathcal{H}(f)$, $x^* \in \mathcal{N}(g_n, K)$, $\varepsilon_n \in (0, D)$, $n \geq 1$, для которых

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0, \quad \Delta(x_n^*, K, g_n, \varepsilon_n) = 0, \quad n \geq 1.$$

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям в доказательстве леммы 9, приходим к выводу, что для некоторых функций $g_n^* \in \mathcal{H}(f)$, $n \geq 1$, существуют

функции $u_n^*, v_n^* \in C^1$, $n \geq 1$, для которых

$$\begin{aligned} u_n^*(t), u_n^*(t) + v_n^*(t) &\in K, & (t, n) &\in \mathbb{R} \times \mathbb{N}, \\ v_n^* &\in \Omega(u_n^*, K, g_n^*, \varepsilon_n), & n &\geq 1, \\ \frac{du_n^*(t)}{dt} &\equiv g_n^*(t, u_n^*(t)), & n &\geq 1, \\ \frac{d(u_n^*(t) + v_n^*(t))}{dt} &\equiv g_n^*(t, u_n^*(t) + v_n^*(t)), & n &\geq 1. \end{aligned}$$

Эти соотношения противоречат единственности ограниченных решений со значениями в K всех уравнений $\mathcal{H}$ -класса уравнения (1.3).

Итак, утверждение леммы является правильным.

Лемма 10 доказана.

Из лемм 5, 9 и 10 вытекает следующий критерий равной разделенности всех ограниченных решений уравнений $\mathcal{H}$ -класса уравнения (1.3).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $K \in \mathcal{K}$. Для того чтобы все ограниченные решения со значениями в K уравнений $\mathcal{H}$ -класса уравнения (1.3) были равноразделенными на множестве $\mathbb{R} \times K$, необходимо и достаточно, чтобы для каждой функции $g \in \mathcal{H}(f)$ и каждого решения $x^* \in \mathcal{N}(g, K)$ выполнялось соотношение

$$\Delta(x^*, K, g, \varepsilon) > 0 \quad (5.14)$$

для всех $\varepsilon \in (0, \delta)$, где δ – положительное число, зависящее от f .

В § 7 мы рассмотрим более простой критерий равной разделенности ограниченных решений исследуемых уравнений.

§ 6. Условия почти периодичности ограниченных решений уравнения (1.3)

Здесь мы приведем одно из основных утверждений статьи. Таковым утверждением является

ТЕОРЕМА 2. Пусть $K \in \mathcal{K}$. Если для решения $z \in \mathcal{N}(f, K)$ почти периодического уравнения (1.3) и некоторого числа $\delta > 0$ выполняется соотношение

$$\Delta(z, K, f, \varepsilon) > 0 \quad (6.1)$$

для всех $\varepsilon \in (0, \delta)$, то это решение почти периодическое.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что решение $z \in \mathcal{N}(f, K)$ уравнения (1.3) не является элементом пространства B^0 (случай, когда $z \in B^0$ и $dz/dt \notin B^0$, невозможен). Тогда существует последовательность $(z(t + h_p))_{p \geq 1}$, сходящаяся в каждой точке $t \in \mathbb{R}$ (в силу теоремы Арцела [20]), причем любая ее подпоследовательность $(z(t + k_p))_{p \geq 1}$ не сходится равномерно на $\mathbb{R}$. Следовательно,

$$\lim_{p, q \rightarrow \infty} \|z(h_p) - z(h_q)\|_E = 0 \quad (6.2)$$

и для некоторых последовательностей $(p_r)_{r \geq 1}$, $(q_r)_{r \geq 1}$ и числа $\gamma \in (0, \delta)$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|z(t + k_{p_r}) - z(t + k_{q_r})\|_E > \gamma, \quad r \geq 1. \quad (6.3)$$

Не ограничивая общности, можно предполагать (на основании ограничений на f (см. § 1)), что последовательность $(f(t + k_p, x))_{p \geq 1}$ сходится равномерно на $\mathbb{R} \times K$. Тогда

$$\lim_{p, q \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}, x \in K} \|f(t + k_p, x) - f(t + k_q, x)\|_E = 0. \quad (6.4)$$

Фиксируем произвольное число $\varepsilon_0 \in (0, \gamma]$. В силу (6.2) и (6.3) для функций

$$y_r(t) = z(t + k_{p_r}) - z(t + k_{q_r}), \quad r \geq 1,$$

выполняется соотношение

$$y_r \in \Omega(S_{k_{q_r}} z, K, f, \varepsilon_0), \quad r \geq 1, \quad (6.5)$$

где S_h – оператор сдвига, определенный соотношением (1.1).

Покажем, что

$$\Delta(z, K, f, \varepsilon_0) = 0. \quad (6.6)$$

Согласно (2.6), (6.5) и в силу

$$\frac{dz(t + k_{p_r})}{dt} - f(t + k_{p_r}, z(t + k_{p_r})) \equiv 0, \quad r \geq 1,$$

выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \Delta(z, K, f, \varepsilon_0) &= \inf_{y \in \Omega(z, K, f, \varepsilon_0)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{d(z(t) + y(t))}{dt} - f(t, z(t) + y(t)) \right\|_E \\ &= \inf_{y \in \Omega(S_{k_{q_r}} z, K, f, \varepsilon_0)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{d(z(t + k_{q_r}) + y(t))}{dt} - f(t + k_{q_r}, z(t + k_{q_r}) + y(t)) \right\|_E \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{d(z(t + k_{q_r}) + y_r(t))}{dt} - f(t + k_{q_r}, z(t + k_{q_r}) + y_r(t)) \right\|_E \\ &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{dz(t + k_{p_r})}{dt} - f(t + k_{q_r}, z(t + k_{p_r})) \right\|_E \\ &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{dz(t + k_{p_r})}{dt} - f(t + k_{p_r}, z(t + k_{p_r})) \right\|_E \\ &\quad + \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t + k_{p_r}, z(t + k_{p_r})) - f(t + k_{q_r}, z(t + k_{p_r}))\|_E \\ &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t + k_{p_r}, z(t + k_{p_r})) - f(t + k_{q_r}, z(t + k_{p_r}))\|_E, \end{aligned}$$

из которых на основании (6.4) следует соотношение (6.6). Но это соотношение противоречит условию (6.1).

Следовательно, предположение, что решение $z \in \mathcal{N}(f, K)$ уравнения (1.3) не является почти периодическим, ложное.

Теорема 2 доказана.

Заметим, что для разностных уравнений утверждения, аналогичные теореме 2, содержатся в [21], [22].

Покажем, что из теоремы 2 вытекает теорема Америо (ее мы сформулируем с использованием обозначений этой статьи).

ТЕОРЕМА 3 (теорема Америо; см. [2]). *Если почти периодическое уравнение (1.3) имеет ограниченное решение со значениями в некотором компактном множестве $B \subset \Omega$, причем ограниченные решения со значениями в B всех уравнений $\mathcal{H}$ -класса уравнения (1.3) разделены на множестве $\mathbb{R} \times B$, то все эти ограниченные решения почти периодические.*

Действительно, поскольку разделенные на множестве $\mathbb{R} \times B$ все ограниченные решения со значениями в B уравнений $\mathcal{H}$ -класса уравнения (1.3) являются равноразделенными на множестве $\mathbb{R} \times B$ (см. лемму 8), то на основании лемм 9 и 10 для каждой функции $g \in \mathcal{H}(f)$ и каждого ограниченного решения $x^* \in \mathcal{N}(g, B)$ уравнения (1.4) для некоторого числа $D > 0$ выполняется соотношение

$$\Delta(x^*, B, g, \varepsilon) > 0$$

для всех $\varepsilon \in (0, D)$. Тогда согласно теореме 2 решение $x^* \in \mathcal{N}(g, B)$ уравнения (1.4) является почти периодическим.

Следовательно, в силу произвольности $g \in \mathcal{H}(f)$ и $x^* \in \mathcal{N}(g, B)$ из теоремы 2 вытекает теорема Америо.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При исследовании ограниченных решений уравнения (1.3) с помощью теоремы 2 следует обращать внимание на выбор компактного множества $K \in \mathcal{K}$. Условие (6.1) обеспечивает разделенность решения $z \in \mathcal{N}(f, K)$ уравнения (1.3) на множестве $\mathbb{R} \times K$. Для другого компактного множества $K_1 \in \mathcal{K}$, для которого $K \subset K_1$, соотношение, аналогичное (6.1), может не выполняться, т.е. разделенное на множестве $\mathbb{R} \times K$ решение z может не обладать этим свойством на множестве $\mathbb{R} \times K_1$. Это подтверждается следующим примером.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим скалярное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)), \quad (6.7)$$

где

$$f(x) = -x(1 - x).$$

Пусть $x = x(t)$ – произвольное ограниченное решение этого уравнения. Таких решений бесконечно много, и для каждого из них, кроме решений $x_1 \equiv 0$ и $x_2 \equiv 1$, выполняются соотношения

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 1$$

(решение $x_1 \equiv 0$ асимптотически устойчиво, а решение $x_2 \equiv 1$ неустойчиво) и

$$R(x) = (0, 1). \quad (6.8)$$

Очевидно, что если $x = x_3(t)$ – одно из ограниченных решений уравнения (6.7), удовлетворяющее (6.8), то каждое другое решение $y = y(t)$ этого уравнения, удовлетворяющее (6.8), представляется в виде

$$y(t) = x_3(t + c),$$

где c – вещественная постоянная. Очевидно также, что все рассмотренные ограниченные решения уравнения (6.7) не являются разделенными на множестве $\mathbb{R} \times [0, 1]$ и для каждого $\varepsilon \in [0, 1]$ выполняется соотношение

$$\Delta(x_1, [0, 1], f, \varepsilon) = 0.$$

Однако решение x_1 является разделенным на множестве $\mathbb{R} \times [0, 1/2]$, поскольку

$$\Delta\left(x_1, \left[0, \frac{1}{2}\right], f, \varepsilon\right) > 0$$

для всех $\varepsilon \in (0, 1/2)$ (см. лемму 5). Если предположить, что для некоторого $\varepsilon_1 \in (0, 1/2)$

$$\Delta\left(x_1, \left[0, \frac{1}{2}\right], f, \varepsilon_1\right) = 0, \quad (6.9)$$

то уравнение (6.7) будет иметь нетривиальное решение $z = z(t)$ со значениями в $[0, 1/2]$. Действительно, согласно определению функционала Δ найдутся непрерывно дифференцируемые на $\mathbb{R}$ функции y_n , $n \geq 1$, для которых

$$y_n(t) \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad n \geq 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$\frac{dy_n(t)}{dt} \leq m, \quad n \geq 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

где

$$m = \max_{s \in [0, 1/2]} |f(s)| = \frac{1}{4},$$

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} |y_n(t) - \varepsilon_1| = 0, \quad n \geq 1, \quad (6.10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{dy_n(t)}{dt} - f(y_n(t)) \right| = 0. \quad (6.11)$$

Согласно (6.10) существует такая числовая последовательность $(t_n)_{n \geq 1}$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_n(t_n)| = \varepsilon_1. \quad (6.12)$$

Поскольку уравнение (6.7) автономное, то на основании (6.11)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{dy_n(t + t_n)}{dt} - f(y_n(t + t_n)) \right| = 0.$$

Поэтому на основании следствия 1 существуют возрастающая последовательность $(n_k)_{k \geq 1}$ натуральных чисел и ограниченная вместе с производной функция $u = u(t)$ со значениями в $[0, 1/2]$, для которых

$$u_{n_k} \xrightarrow{\text{loc}, C^0} u \quad \text{при } k \rightarrow \infty,$$

где $u_{n_k}(t) = y_{n_k}(t + t_{n_k})$, C^0 – рассмотренное в § 1 банахово пространство в случае $E = \mathbb{R}$,

$$|u(0)| = \varepsilon_1$$

на основании (6.12) и

$$\frac{du(t)}{dt} \equiv f(u(t)).$$

Итак, исследуемое дифференциальное уравнение в случае выполнения соотношения (6.9) имеет ограниченное нетривиальное решение $u = u(t)$ со значениями в $[0, 1/2]$, что противоречит (6.8).

Таким образом, решение $x_1 \equiv 0$ уравнения (6.7) является разделенным на множестве $\mathbb{R} \times [0, 1/2]$ и не обладает этим свойством на множестве $\mathbb{R} \times [0, 1]$.

§ 7. Другие условия равной разделенности ограниченных решений

Здесь мы приведем условия равной разделенности ограниченных решений уравнений $\mathcal{H}$ -класса уравнения (1.3), которые в отличие от теоремы 1 используют только ограниченные решения уравнения (1.3).

ТЕОРЕМА 4. Пусть $K \in \mathcal{K}$. Для того чтобы все ограниченные решения со значениями в K уравнений $\mathcal{H}$ -класса уравнения (1.3) были равноразделенными на множестве $\mathbb{R} \times K$, необходимо и достаточно, чтобы для некоторого положительного числа δ и каждого решения $x^* \in \mathcal{N}(f, K)$ выполнялось соотношение

$$\Delta(x^*, K, f, \varepsilon) > 0 \quad (7.1)$$

для всех $\varepsilon \in (0, \delta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если все ограниченные решения со значениями в K уравнений $\mathcal{H}$ -класса уравнения (1.3) равноразделенные на множестве $\mathbb{R} \times K$, то на основании теоремы 1 для каждой функции $g \in \mathcal{H}(f)$ и каждого решения $x^* \in \mathcal{N}(g, K)$ выполняется соотношение (5.14) и, следовательно, выполняется соотношение (7.1).

Итак, если все решения со значениями в K уравнений $\mathcal{H}$ -класса уравнения (1.3) равноразделенные на множестве $\mathbb{R} \times K$, то выполняется соотношение (7.1) для каждого решения $x^* \in \mathcal{N}(f, K)$.

Докажем обратное утверждение. Пусть выполняется соотношение (7.1) для всех $x^* \in \mathcal{N}(f, K)$. Тогда на основании теоремы 2

$$\mathcal{N}(f, K) \subset B^1. \quad (7.2)$$

Рассмотрим случай, когда $\text{card } \mathcal{N}(f, K) \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Пусть

$$\mathcal{N}(f, K) = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*\},$$

где

$$p = \text{card } \mathcal{N}(f, K). \quad (7.3)$$

Зафиксируем произвольную функцию $g \in \mathcal{H}(f)$ и соответствующее почти периодическое дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y). \quad (7.4)$$

Существует числовая последовательность $(h_n)_{n \geq 1}$, для которой последовательность $(f(t + h_n, x))_{n \geq 1}$ сходится равномерно на множестве $\mathbb{R} \times K$ к функции $g(t, x)$. Не ограничивая общности, можно считать, что на основании (7.2) последовательности $(S_{h_n} x_k^*)_{n \geq 1}$, $k = \overline{1, p}$, элементов пространства B^1 являются сходящимися в этом пространстве. Пусть $y_1^*, y_2^*, \dots, y_p^*$ – соответствующие пределы этих последовательностей. Согласно следствию 2

$$\frac{dy_k^*(t)}{dt} \equiv g(t, y_k^*(t)), \quad k = \overline{1, p}.$$

Заметим, что на основании (7.1) и леммы 5

$$\omega(x_i^*, x_j^*) \geq \delta,$$

если $i, j \in \{1, \dots, p\}$ и $i \neq j$, и, следовательно,

$$\omega(y_i^*, y_j^*) \geq \delta, \quad (7.5)$$

если $i, j \in \{1, \dots, p\}$ и $i \neq j$.

Покажем, что уравнение (7.4) не имеет других ограниченных решений со значениями в K , отличных от $y_1^*, y_2^*, \dots, y_p^*$.

Предположим, что функция $z \in C^1$ является решением уравнения (7.4) и

$$z \notin \{y_1^*, y_2^*, \dots, y_p^*\}. \quad (7.6)$$

Тогда или

$$\omega(z, y_i^*) \geq \mu, \quad i \in \{1, \dots, p\} \quad (7.7)$$

(μ – некоторое положительное число), или для некоторого $i_0 \in \{1, \dots, p\}$

$$\omega(z, y_{i_0}^*) = 0. \quad (7.8)$$

В случае выполнения соотношения (7.7) рассмотрим числовую последовательность $(-h_n)_{n \geq 1}$, для которой последовательность $(g(t - h_n, x))_{n \geq 1}$ сходится равномерно на множестве $\mathbb{R} \times K$ к функции $f(t, x)$. Это свойство для функции $g(t, x)$ имеет место, поскольку последовательность $(f(t + h_n, x))_{n \geq 1}$ сходится равномерно на множестве $\mathbb{R} \times K$ к функции $g(t, x)$. Не ограничивая общности, можно считать, что для ограниченной последовательности $(S_{-h_n} z)_{n \geq 1}$ элементов пространства C^1 и некоторого элемента $z^* \in C^0$ выполняется соотношение

$$S_{-h_n} z \xrightarrow{\text{loc}, C^0} z^* \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (7.9)$$

Это возможно в силу леммы 1. Тогда на основании следствия 2 $z^* \in C^1$ и

$$\frac{dz^*(t)}{dt} \equiv f(t, z^*(t)).$$

Очевидно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{-h_n} y_i^* - x_i^*\|_{C^1} = 0, \quad i \in \{1, \dots, p\}. \quad (7.10)$$

Поэтому на основании (7.7) и (7.9)

$$\omega(z^*, x_i^*) \geq \mu, \quad i \in \{1, \dots, p\}.$$

Итак, дифференциальное уравнение (1.3) имеет $p+1$ разделенных на $\mathbb{R} \times K$ ограниченных решений, что противоречит равенству (7.3).

Таким образом, для z не может выполняться соотношение (7.7).

Далее рассмотрим случай выполнения для z соотношения (7.8). Согласно (7.6) и (7.8) для каждого числа ε_0 из некоторого интервала $(0, \gamma) \subset (0, \delta)$ найдется число $\tau \in \mathbb{R}$, для которого

$$\|z(\tau) - y_{i_0}^*(\tau)\|_E = \varepsilon_0.$$

Отсюда, из (7.10) и того, что $0 < \gamma < \delta$, следует, что для некоторых чисел $t_n \in \mathbb{R}$, $n \geq n_0$, где n_0 – достаточно большое натуральное число, выполняется аналогичное соотношение

$$\|z(t_n) - x_{i_0}^*(t_n + h_n)\|_E = \varepsilon_0, \quad n \geq n_0.$$

Покажем, что

$$\Delta(x_{i_0}^*, K, f, \varepsilon_0) = 0. \quad (7.11)$$

На основании (2.6), (7.10), почти периодичности элемента $x_{i_0}^*$, равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}, x \in K} \|f(t + h_n, x) - g(t, x)\|_E = 0$$

и того, что

$$z - S_{h_n} x_{i_0}^* \in \Omega(x_{i_0}^*, K, f, \varepsilon_0), \quad n \geq n_0,$$

выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \Delta(x_{i_0}^*, K, f, \varepsilon_0) &= \inf_{y \in \Omega(x_{i_0}^*, K, f, \varepsilon_0)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{d(x_{i_0}^*(t) + y(t))}{dt} - f(t, x_{i_0}^*(t) + y(t)) \right\|_E \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{y \in \Omega(x_{i_0}^*, K, f, \varepsilon_0)} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{d(x_{i_0}^*(t + h_n) + y(t))}{dt} \right. \\ &\quad \left. - f(t + h_n, x_{i_0}^*(t + h_n) + y(t)) \right\|_E \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{d(x_{i_0}^*(t + h_{n+n_0}) + (z(t) - x_{i_0}^*(t + h_{n+n_0})))}{dt} \right. \\ &\quad \left. - f(t + h_{n+n_0}, x_{i_0}^*(t + h_{n+n_0}) + (z(t) - x_{i_0}^*(t + h_{n+n_0}))) \right\|_E \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{dz(t)}{dt} - f(t + h_n, z(t)) \right\|_E \end{aligned}$$

$$\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{dz(t)}{dt} - g(t, z(t)) \right\|_E + \sup_{t \in \mathbb{R}} \|g(t, z(t)) - f(t + h_n, z(t))\|_E \right) = 0.$$

Таким образом, соотношение (7.11) выполняется. Но это соотношение противоречит соотношению (7.1), поскольку $0 < \varepsilon_0 < \gamma < \delta$. Следовательно, для z также не выполняется соотношение (7.8). Поэтому предположение о выполнении соотношения (7.6) ложное.

Итак, дифференциальное уравнение (7.4) не имеет других ограниченных решений со значениями в K , кроме $y_1^*, y_2^*, \dots, y_p^*$. На основании (7.5) эти решения равномерно распределены на множестве $\mathbb{R} \times K$. Поскольку это свойство выполняется для любой функции $g \in \mathcal{H}(f)$ при том же самом $\delta > 0$, то теорема доказана в случае $\text{card } \mathcal{N}(f, K) \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Очевидно, что для завершения доказательства теоремы осталось показать, что если выполняется соотношение (7.1) и $\text{card } \mathcal{N}(f, K) = 1$, то каждое из присоединенных уравнений к уравнению (1.3) имеет единственное ограниченное решение со значениями в K и для них выполняются соотношения, аналогичные (7.1), с тем же числом $\delta > 0$. Эта часть доказывается таким же самым образом, как и предыдущая. Нужно провести аналогичные рассуждения при $p = 1$.

Теорема 4 доказана.

§ 8. Условия существования ограниченных решений почти периодических дифференциальных уравнений

В теореме 2 одно из условий – это условие существования в уравнении (1.3) ограниченного решения. Мы приведем достаточные условия выполнения этого требования как для уравнения (1.3), так и для более общего, чем (1.3), почти периодического дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + h(t), \quad (8.1)$$

где $f(t, x)$ – та же самая функция, что в уравнении (1.3), а h – произвольный элемент пространства B^0 . Очевидно, что для исследования уравнения (8.1) также применима изложенная в предыдущих параграфах теория с применением функционала, аналогичного Δ .

Мы укажем условия существования ограниченных решений уравнения (8.1) для произвольной функции $h \in B^0$.

Обозначим через $\mathcal{D}$ множество непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций $B = B(t)$ со значениями в пространстве $L(E, E)$, для каждого из которых оператор $\mathcal{L}_B: C^1 \rightarrow C^0$, который определяется формулой

$$(\mathcal{L}_B x)(t) = \frac{dx(t)}{dt} - B(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

имеет непрерывный обратный оператор $\mathcal{L}_B^{-1}: C^0 \rightarrow C^1$.

Рассмотрим замкнутый шар

$$B[0, r] = \{x : \|x\|_E \leq r\}.$$

Имеют место следующие два утверждения.

ТЕОРЕМА 5 (см. [19]). Пусть для числа $r > 0$ и элемента $B \in \mathcal{D}$ выполняются соотношения

$$B[0, r] \subset \Omega$$

и

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, \|x\|_E \leq r} \|f(t, x) - B(t)x\|_E \leq \frac{r}{\|\mathcal{L}_B^{-1}\|_{L(C^0, C^0)}}.$$

Тогда уравнение (1.3) имеет хотя бы одно решение $x \in C^1$, для которого $\|x\|_{C^0} \leq r$.

ТЕОРЕМА 6 (см. [23], [24]). Пусть $\Omega = E$ и для каждого числа $H > 0$ существуют такие число $r > 0$ и элемент $B \in \mathcal{D}$, что

$$\sup_{t \in \mathbb{R}, \|x\|_E \leq r} \|f(t, x) - B(t)x\|_E \leq \frac{r}{\|\mathcal{L}_B^{-1}\|_{L(C^0, C^0)}} - H.$$

Тогда для каждого $h \in C^0$ (и, следовательно, для каждого $h \in B^0$) уравнение (8.1) имеет хотя бы одно решение $x \in C^1$.

Заметим, что решение $x \in C^1$ уравнения (8.1), когда $h \in B^0$, может не быть почти периодическим, что подтверждается примером 2.

Более общие утверждения о существовании ограниченных решений, чем теоремы 5 и 6, можно найти в [19], [24].

Список литературы

- [1] J. Favard, “Sur les équations différentielles linéaires à coefficients presque-périodiques”, *Acta Math.*, **51**:1 (1928), 31–81.
- [2] L. Amerio, “Soluzioni quasi-periodiche, o limitate, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **39**:1 (1955), 97–119.
- [3] Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции*, Гостехиздат, М., 1953, 396 с.
- [4] Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, М., 1967, 472 с.
- [5] S. Bochner, “Beitrage zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. I Teil. Funktionen einer Variablen”, *Math. Ann.*, **96**:1 (1927), 119–147; II Teil. Funktionen mehrerer Variablen, **96**:1 (1927), 383–409.
- [6] Э. Мухамадиев, “Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций”, *Матем. заметки*, **11**:3 (1972), 269–274; англ. пер.: É. Muhamadiev, “On the inversion of functional operators in a space of functions bounded on the axes”, *Math. Notes*, **11**:3 (1972), 169–172.
- [7] Э. Мухамадиев, “Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений”, *Матем. заметки*, **30**:3 (1981), 443–460; англ. пер.: É. Muhamadiev, “Investigations in the theory of bounded and periodic solutions of differential equations”, *Math. Notes*, **30**:3 (1981), 713–722.
- [8] В. Е. Слюсарчук, “Обратимость почти периодических c -непрерывных функциональных операторов”, *Матем. сб.*, **116**(158):4(12) (1981), 483–501; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Invertibility of almost periodic c -continuous functional operators”, *Math. USSR-Sb.*, **44**:4 (1983), 431–446.

- [9] В. Е. Слюсарчук, “Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов”, *Матем. сб.*, **130(172)**:1(5) (1986), 86–104; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Invertibility of nonautonomous functional-differential operators”, *Math. USSR-Sb.*, **58**:1 (1987), 83–100.
- [10] В. Е. Слюсарчук, “Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов”, *Матем. заметки*, **42**:2 (1987), 262–267; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Necessary and sufficient conditions for invertibility of nonautonomous functional-differential operators”, *Math. Notes*, **42**:2 (1987), 648–651.
- [11] Э. Мухамадиев, “Об обратимости дифференциальных операторов в частных производных эллиптического типа”, *Докл. АН СССР*, **205** (1972), 1292–1295; англ. пер.: Ё. Muhamadiev, “The invertibility of partial differential operators of elliptic type”, *Soviet Math. Dokl.*, **13** (1972), 1122–1126.
- [12] М. А. Шубин, “Почти-периодические функции и дифференциальные операторы с частными производными”, *УМН*, **33**:2(200) (1978), 3–47; англ. пер.: M. A. Shubin, “Almost periodic functions and partial differential operators”, *Russian Math. Surveys*, **33**:2 (1978), 1–52.
- [13] Б. М. Левитан, В. В. Жиков, *Почти периодические функции и дифференциальные уравнения*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1978, 204 с.; англ. пер.: B. M. Levitan, V. V. Zhikov, *Almost periodic functions and differential equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1982, 211 pp.
- [14] L. Amerio, “Sull equazioni differenziali quasi-periodiche astratte”, *Ricerche Mat.*, **9** (1960), 255–274.
- [15] В. В. Жиков, “Об одном дополнении к классической теории Фавара”, *Матем. заметки*, **7**:2 (1970), 239–246; англ. пер.: V. V. Zhikov, “Addition to the classical theory of Favard”, *Math. Notes*, **7**:2 (1970), 142–146.
- [16] В. В. Жиков, “Существование почти периодических по Левитану решений линейных систем (второе дополнение к классической теории Фавара)”, *Матем. заметки*, **9**:4 (1971), 409–414; англ. пер.: V. V. Zhikov, “The existence of Levitan almost-periodic solutions of linear systems (second complement to Favard’s classical theory)”, *Math. Notes*, **9** (1971), 235–238.
- [17] В. В. Жиков, “Доказательство теоремы Фавара о существовании почти периодического решения в случае произвольного банахова пространства”, *Матем. заметки*, **23**:1 (1978), 121–126; англ. пер.: V. V. Zhikov, “Proof of the Favard theorem on the existence of almost-periodic solution for an arbitrary Banach space”, *Math. Notes*, **23**:1 (1978), 66–69.
- [18] A. M. Fink, “Semi-separated conditions for almost periodic solutions”, *J. Differential Equations*, **11**:2 (1972), 245–251.
- [19] В. Е. Слюсарчук, “Ограниченные и периодические решения нелинейных дифференциально-функциональных уравнений”, *Матем. сб.*, **203**:5 (2012), 135–160; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “Bounded and periodic solutions of nonlinear functional differential equations”, *Sb. Math.*, **203**:5 (2012), 743–767.
- [20] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 2-е изд., Наука, М., 1968, 496 с.; англ. пер. 1-го изд.: A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, *Elements of the theory of functions and functional analysis*, v. I, II, Graylock Press, Albany, N.Y., 1957, 1961, 129, 128 pp.
- [21] В. Ю. Слюсарчук, “Умови майже періодичності обмежених розв’язків нелінійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом”, *Нелінійні коливання*, **16**:1 (2013), 118–124.
- [22] В. Ю. Слюсарчук, “Умови існування майже періодичних розв’язків нелінійних різницевих рівнянь з дискретним аргументом”, *Нелінійні коливання*, **16**:3 (2013), 416–425.

- [23] В. Ю. Слюсарчук, “Метод локальної лінійної апроксимації в теорії обмежених розв’язків нелінійних диференціальних рівнянь”, *Укр. матем. журн.*, **61**:11 (2009), 1541–1556; англ. пер.: V. Yu. Slyusarchuk, “Method of local linear approximation in the theory of bounded solutions of nonlinear differential equations”, *Ukrainian Math. J.*, **61**:11 (2009), 1809–1829.
- [24] В. Е. Слюсарчук, “Метод локальной линейной аппроксимации в теории нелинейных дифференциально-функциональных уравнений”, *Матем. сб.*, **201**:8 (2010), 103–126; англ. пер.: V. E. Slyusarchuk, “The method of local linear approximation in the theory of nonlinear functional-differential equations”, *Sb. Math.*, **201**:8 (2010), 1193–1215.

Василий Ефимович Слюсарчук
(**Vasilii Ye. Slyusarchuk**)

Национальный университет
водного хозяйства и природопользования,
г. Ровно, Украина
E-mail: V.E.Slyusarchuk@gmail.com,
V.Ye.Slyusarchuk@NUWM.rv.ua

Поступила в редакцию
02.11.2012 и 10.01.2014