Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Х. Сабитов, Жесткость и неизгибаемость “в малом” и “в целом” поверхностей вращения с уплощениями в полусах, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 10, 127–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8189>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 13:39:26

УДК 514.772.35

И. Х. Сабитов

Жесткость и неизгибаемость “в малом” и “в целом” поверхностей вращения с уплощениями в полюсах

Статья посвящена одному из важных вопросов классической геометрии – теории изгибаний и бесконечно малых изгибаний поверхностей. Эти вопросы рассматриваются для поверхностей вращения, и, в отличие от известных работ, в начальной части исследование ведется при минимально допустимой гладкости – в классе C^1 , и в этом классе “в малом” доказываются теоремы существования и единственности бесконечно малых изгибаний. Затем в аналитическом классе устанавливаются простые признаки жесткости и неизгибаемости компактных поверхностей вращения в зависимости от значений целочисленных характеристик, связанных с порядками уплощения поверхности в ее полюсах. Вместе с тем показывается, что в неаналитических случаях существуют нежесткие поверхности с любыми наперед заданными порядками уплощения в полюсах.

Библиография: 22 названия.

Ключевые слова: полюс поверхности вращения, порядок уплощения, бесконечно малые изгибания, номер гармоника, жесткость.

DOI: 10.4213/sm8189

1. Известно, что в окрестности точки уплощения поверхность даже локально может быть жесткой и неизгибаемой, см. [1], [2]. Когда точка уплощения является полюсом поверхности вращения, исследование этого феномена проводилось многими авторами, см. обзорные статьи [3] и [4]. В случае требования аналитичности и поверхности, и ее деформации вопрос о жесткости замкнутой поверхности вращения был сведен в [5] к исследованию разрешимости некоторой системы диофантовых уравнений. В настоящей работе мы хотим предложить некоторые результаты такого исследования, полученные как теоретическими, так, в частности, и компьютерными вычислениями. Принципиальная важность этих исследований состоит в установлении неизгибаемости некоторых классов замкнутых поверхностей вращения. Напомним, что в теории изгибаний основной нерешенной проблемой считается доказательство или опровержение гипотезы Эйлера о неизгибаемости замкнутой поверхности, и нахождение новых классов неизгибаемых компактных поверхностей является шагом вперед в подтверждении этой гипотезы.

Исследование бесконечно малых (б.м.) изгибаний в окрестности полюса мы начинаем с минимально допустимой гладкости класса C^1 , а затем основное внимание уделяем б.м. изгибаниям в предположении аналитичности и поверхности,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-90415-УКР).

и деформаций, поэтому результаты работы, хотя и имеют частичное пересечение с результатами статьи [6] в классах конечной гладкости C^n , $2 \leq n < \infty$, в основном являются новыми.

2. Напомним стандартные формулы теории бесконечно малых (б.м.) изгибаний в применении к поверхностям вращения (см. [7]). Пусть $\mathbf{k}$ – единичный вектор оси вращения, которую мы принимаем за ось Oz , $\mathbf{e}(\theta)$ – единичный вектор, описывающий окружность в ортогональной к оси вращения плоскости. Положим $\mathbf{e}(\theta) = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$, где $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ – единичные орты по осям Ox и Oy соответственно. Пусть гладкая поверхность вращения S в окрестности полюса $(0, 0, 0)$ представлена уравнением

$$\mathbf{r} = \varphi(\rho)\mathbf{k} + \rho\mathbf{e}(\theta), \quad (1)$$

где ρ – расстояние от оси вращения, $0 \leq \rho \leq a$, $z = \varphi(\rho)$ – уравнение меридиана, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$. Пусть

$$\mathbf{U}(\rho, \theta) = \alpha\mathbf{k} + \beta\mathbf{e}(\theta) + \gamma\mathbf{e}'(\theta) \quad (2)$$

– гладкое векторное поле, заданное в точках поверхности и определяющее ее б.м. изгибание 1-го порядка по формуле

$$\mathbf{r} \mapsto \mathbf{r}_\varepsilon = \mathbf{r} + 2\varepsilon\mathbf{U}. \quad (3)$$

В стандартном декартовом базисе поле $\mathbf{U}$ б.м. изгибания имеет вид

$$\mathbf{U} = \alpha\mathbf{k} + (\beta \cos \theta - \gamma \sin \theta)\mathbf{i} + (\beta \sin \theta + \gamma \cos \theta)\mathbf{j}. \quad (4)$$

Условие $ds^2 - ds_\varepsilon^2 = o(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$, приводит к уравнению $d\mathbf{r} d\mathbf{U} = 0$, которое, в свою очередь, можно записать в виде следующих уравнений на функции $\alpha(\rho, \theta)$, $\beta(\rho, \theta)$, $\gamma(\rho, \theta)$:

$$\begin{cases} \varphi' \alpha_\rho + \beta_\rho = 0, \\ \rho \gamma_\rho + \varphi' \alpha_\theta + \beta_\theta - \gamma = 0, \\ \beta + \gamma_\theta = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Так как все участвующие в системе (5) неизвестные функции являются периодическими по θ , то естественно попытаться разделить переменные, для чего в качестве искоемых нужно взять коэффициенты Фурье функций $\alpha(\rho, \theta)$, $\beta(\rho, \theta)$, $\gamma(\rho, \theta)$. Положим

$$\alpha = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_m(\rho) e^{im\theta}, \quad \beta = \sum_{-\infty}^{+\infty} \beta_m(\rho) e^{im\theta}, \quad \gamma = \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_m(\rho) e^{im\theta}. \quad (6)$$

Так как все функции действительные, то

$$\alpha_m = \overline{\alpha}_{-m}, \quad \beta_m = \overline{\beta}_{-m}, \quad \gamma_m = \overline{\gamma}_{-m}. \quad (7)$$

Далее при работе с $\alpha_m, \beta_m, \gamma_m$ надо иметь в виду, что в записи полей б.м. изгибаний в форме (2) есть одна тонкость, а именно в этой записи предполагается, что в полюсе (т.е. в точке $\rho = 0$) значения

$$\beta(0, \theta) = \gamma(0, \theta) = 0, \quad (8)$$

иначе поле $\mathbf{U}$ будет в полюсе разрывным. Но условие (8) не представляет собой какого-либо ограничения общности, так как его выполнения можно добиться добавлением к любому непрерывному б.м. изгибанию 1-го порядка параллельного переноса вида $\varepsilon(C_1, C_2, 0)$, записанного в стандартном базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ и с соответствующим образом подобранными числовыми коэффициентами C_1, C_2 . Добавлением переноса вдоль оси Oz можем добиться “зануления” в полюсе и компоненты при $\mathbf{k}$. Поэтому мы с самого начала предполагаем, что

$$\alpha_m(0) = \beta_m(0) = \gamma_m(0) = 0 \quad \forall m. \quad (9)$$

Кроме того, если б.м. изгибания принадлежат классу C^1 , то сначала покажем, что за счет добавления C^1 -гладкого вращения 1-го порядка малости по ε можем добиться, чтобы выполнялось равенство

$$d\mathbf{r}_\varepsilon(0, 0) = d\mathbf{r}(0, 0),$$

т.е.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y}(0, 0) = 0, \quad (10)$$

а затем посмотрим, какие ограничения на $\alpha(\rho, \theta), \beta(\rho, \theta), \gamma(\rho, \theta)$ накладывает условие (10). Пусть вектор $\mathbf{U}$ б.м. изгибания (3) представлен в стандартных декартовых координатах в виде

$$\mathbf{U} = a\mathbf{k} + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} \quad (11)$$

(для симметрии новой записи обозначение a коэффициента при $\mathbf{k}$ заменено на a). Пусть

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}(0, 0) = A_1\mathbf{k} + B_1\mathbf{i} + C_1\mathbf{j}, \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y}(0, 0) = A_2\mathbf{k} + B_2\mathbf{i} + C_2\mathbf{j}. \quad (12)$$

Так как $d\mathbf{r} d\mathbf{U} = 0$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}(0, 0) = \mathbf{i}, \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}(0, 0) = \mathbf{j}$, то

$$B_1 = C_2 = 0, \quad C_1 + B_2 = 0. \quad (13)$$

Подвергнем продеформированную поверхность $\mathbf{r}_\varepsilon$ из (3) вращению с некоторой матрицей $A(\varepsilon)$, ортогональной с точностью до порядка $o(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. Это значит, что матрица $A(\varepsilon)$ имеет вид

$$A(\varepsilon) = E + 2\varepsilon A_1 + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

где E – единичная матрица, и выполнено условие $A^{-1}(\varepsilon) = A^T(\varepsilon)$ (т.е. равенство обратной и транспонированной матриц) с точностью до матриц с элементами порядка $o(\varepsilon)$. Следовательно, должны иметь $A(\varepsilon)A^T(\varepsilon) = E + o(\varepsilon)$, $\varepsilon \rightarrow 0$. А так как

$$(E + 2\varepsilon A_1 + o(\varepsilon))(E + 2\varepsilon A_1^T + o(\varepsilon)) = E + 2\varepsilon(A_1 + A_1^T) + o(\varepsilon),$$

то матрица A_1 должна быть кососимметрической, и поэтому матрица $A(\varepsilon)$ имеет вид

$$A(\varepsilon) = E + 2\varepsilon \begin{pmatrix} 0 & l & m \\ -l & 0 & n \\ -m & -n & 0 \end{pmatrix} + o(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

После действия на точки поверхности с радиус-вектором $\mathbf{r}_\varepsilon$ вращения, матрица которого в разложении по ε в начальной части имеет вид матрицы $A(\varepsilon)$, получаем новую поверхность с радиус-вектором $\mathbf{R}_\varepsilon = \mathbf{r} + 2\varepsilon \mathbf{U}_1 + o(\varepsilon)$, где

$$\mathbf{U}_1 = \mathbf{U} + (ly + mz)\mathbf{i} + (-lx + nz)\mathbf{j} + (-mx - ny)\mathbf{k},$$

причем требуемое для деформации б.м. изгибания равенство $d\mathbf{r} d\mathbf{U}_1 = 0$ сохраняется. Учитывая равенства (12), (13) и $dz(0, 0) = 0$, получаем, что при выборе $l = C_1$, $m = A_1$, $n = A_2$ для нового поля $\mathbf{U}_1$ б.м. изгибаний выполнены желаемые условия (10), что и требовалось установить. В дальнейшем за полем б.м. изгибания с условием равенства нулю его первых производных в точке $(0, 0)$ мы оставляем обозначение $\mathbf{U}$.

В применении к записи вида (2) это условие дает, что

$$\alpha'_\rho(0, \theta) = 0, \quad \frac{\alpha'_\theta}{\rho} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0 \quad (14)$$

(так как $(\alpha'_\rho)^2 + (\alpha'_\theta/\rho)^2 = (a'_x)^2 + (a'_y)^2 \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$).

Условия на β и γ получаются чуть сложнее. Именно, сначала из (4), сравнивая его с представлением (11), получаем равенства $b = \beta \cos \theta - \gamma \sin \theta$, $c = \beta \sin \theta + \gamma \cos \theta$ и $b \cos \theta + c \sin \theta = \beta$, $-b \sin \theta + c \cos \theta = \gamma$, затем прямым вычислением находим, что

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\gamma}{\rho} \sin \theta = b'_x \cos \theta + c'_x \sin \theta \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\beta}{\rho} \sin \theta = c'_x \cos \theta - b'_x \cos \theta \rightarrow 0, \\ (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

Составим аналогичные соотношения для производных β и γ по y . Перейдя затем к производным по ρ и θ , среди прочих уравнений получаем

$$\gamma_\rho \cos \theta - (\beta + \gamma_\theta) \frac{\sin \theta}{\rho} \rightarrow 0, \quad \gamma_\rho \sin \theta - (\beta + \gamma_\theta) \frac{\cos \theta}{\rho} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0,$$

откуда, с учетом 3-го уравнения системы (5) имеем $\gamma_\rho \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$, следовательно,

$$\frac{\gamma(\rho, \theta)}{\rho} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0.$$

Обратимся к производным от β . Имеем

$$\beta_\rho \cos \theta - \frac{\beta_\theta}{\rho} \sin \theta + \frac{\gamma}{\rho} \sin \theta \rightarrow 0, \quad \beta_\rho \sin \theta + \frac{\beta_\theta}{\rho} \cos \theta - \frac{\gamma}{\rho} \cos \theta \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0,$$

откуда очевидно, что

$$\beta_\rho \rightarrow 0, \quad \frac{\beta_\theta}{\rho} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 0.$$

3. В дальнейшем составляющие поля $\mathbf{U}$, соответствующие номерам m , будем называть m -й гармоникой этого поля и обозначать $\mathbf{U}_m$. В [7] показано, что гармоники с номерами $m = 0, \pm 1$ поля $\mathbf{U}$ соответствуют тривиальным б.м. изгибаниям 1-го порядка. Поэтому можем считать, что гармоники для $\mathbf{U}$ имеют номера с $|m| \geq 2$. Проведенное выше исследование функций α, β, γ позволяет нам утверждать, что если б.м. изгибание принадлежит классу гладкости C^1 , тогда кроме условий (9) для функций $\alpha_m(\rho), \beta_m(\rho), \gamma_m(\rho)$, необходимо выполняются еще следующие условия:

$$\alpha'_m(0) = \beta'_m(0) = \gamma'_m(0) = 0 \quad \forall |m| \geq 2. \quad (15)$$

Вернемся к уравнениям б.м. изгибаний. Предполагая, что разложения Фурье (6) поля б.м. изгибаний $\mathbf{U}$ допускают почленное дифференцирование по ρ и по θ , мы из (5) получаем систему

$$\begin{cases} \varphi'(\rho)\alpha'_m + \beta'_m = 0, \\ im\varphi'(\rho)\alpha_m + im\beta_m - \gamma_m + \rho\gamma'_m = 0, \\ \beta_m + im\gamma_m = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Отсюда для β_m и γ_m получаем соотношения

$$\gamma_m = \frac{i}{m}\beta_m, \quad \beta_m = - \int_0^\rho \varphi'(t)\alpha'_m(t) dt. \quad (17)$$

Исключая из системы (16) неизвестную $\gamma_m(\rho)$, получим систему

$$\beta'_m(\rho) = -\frac{m^2\varphi'(\rho)}{\rho}\alpha_m(\rho) - \frac{m^2-1}{\rho}\beta_m(\rho), \quad (18)$$

$$\alpha'_m(\rho) = \frac{m^2}{\rho}\alpha_m(\rho) + \frac{m^2-1}{\rho\varphi'(\rho)}\beta_m(\rho), \quad \rho > 0, \quad (19)$$

откуда, предполагая, что все происходит в классе гладкости C^2 , для $\alpha_m(\rho)$ приходим к уравнению

$$\rho\varphi'(\rho)\alpha''_m + \rho\varphi''(\rho)\alpha'_m - m^2\varphi''(\rho)\alpha_m = 0. \quad (20)$$

Восстановление компонент поля б.м. изгибания в стандартном базисе по гармонике с номером m производится по формуле

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_m = & \alpha_m \cos m\theta \mathbf{k} + \beta_m \left(\cos m\theta \cos \theta + \frac{1}{m} \sin m\theta \sin \theta \right) \mathbf{i} \\ & + \beta_m \left(\cos m\theta \sin \theta - \frac{1}{m} \sin m\theta \cos \theta \right) \mathbf{j}. \end{aligned} \quad (21)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Система уравнений (18), (19) не зависит от знака целого числа m и при поиске ее комплекснозначного решения для действительной и для мнимой его частей получаются одинаковые уравнения. На основании этого обычно ограничиваются изучением и использованием только их действительных решений (как это и сделано в формуле (21) в соответствии с общей традицией). Но такой подход недостаточен для полного описания множества б.м. изгибаний поверхности вращения. На самом деле по двум функциям $\alpha_m(\rho)$ и $i\alpha_m(\rho)$ можно построить два действительных поля (2) б.м. изгибаний: как в формуле (21), а еще поле $\alpha_m(\rho) \sin m\theta \mathbf{k} + \beta_m(\rho) \sin m\theta \mathbf{e}$, $(\beta_m(\rho) \cos m\theta)/m\mathbf{e}'$, $m \geq 2$. В литературе этот факт почему-то игнорируется, хотя некоторые свойства б.м. изгибаний, в частности, б.м. изгибаний высшего порядка, существенно зависят от размерности линейного пространства полей б.м. изгибаний 1-го порядка, особенно это может оказаться важным в теории б.м. изгибаний многогранников (см., например, [8]–[11]).

4. Уравнению (20) (и, соответственно, системе (16), но в меньшей степени) со времени появления статьи Кон-Фоссена [7] посвящено большое количество работ, однако, как ни странно, в литературе нам неизвестны исследования в общем случае двух основополагающих вопросов теории этих уравнений, а именно вопросы существования и единственности его решения в окрестности полюса. Дело в том, что это уравнение, рассмотренное в окрестности полюса, имеет особенность в точке $\rho = 0$, а для таких уравнений обычно используемые и идущие от Кон-Фоссена утверждения о существовании решения обоснованы, со ссылкой на теорию Фукса, фактически только в аналитическом классе или же в классах гладкости по крайней мере C^3 и в дополнительном предположении строгой выпуклости поверхности в проколотой окрестности полюса, причем со специальным представлением уравнения меридиана, допускающим его поведение около полюса лишь в виде степенной функции (см., например, [4]). При нарушении этих условий возможны, вообще говоря, всякие отклонения от классического поведения решений (или попадаем в ситуацию неизвестности). Например, если кривая $z = \varphi(\rho)$ – меридиан поверхности – имеет сгущающиеся к полюсу критические точки с $\varphi'(\rho) = 0$, тогда теория Фукса неприменима, и, действительно, в этом случае уравнение (20) может и вовсе не иметь даже C^1 -гладких решений с ограниченной в полюсе производной, см. [12] и [13], а также [4; п. 8.5.2]. Бывает и противоположная ситуация, когда это уравнение имеет два решения с обращением в нуль в полюсе. Например, для кривой $z = \varphi(\rho) = \rho^{2-2a}$ соответствующее уравнение (20) имеет два решения: а) $\alpha_m = \rho^a \sin \theta(\rho)$ и б) $\alpha_m = \rho^a \cos \theta(\rho)$, где $\theta(\rho) = \sqrt{2am^2 - a^2 - m^2} \ln \rho$ и $m(m - \sqrt{m^2 - 1}) < a < 1$. Но этот пример пока пригоден только в принципиальном плане как иллюстрация возможности наличия двух решений, так как полученная вращением этой кривой поверхность не является в полюсе регулярной, поскольку меридиан не ортогонален оси вращения (как это нужно для регулярности) а наоборот, касается оси вращения. В случае регулярной поверхности вращения вопрос о единственности в общем случае остается пока открытым, но даже в классе C^1 -гладкости удастся получить достаточное условие единственности решения системы (18), (19), полностью включающее выпуклые

поверхности, а также довольно широкий класс невыпуклых поверхностей (этот класс “довольно широкий” хотя бы в том смысле, что построение примера не входящей в него поверхности вращения требует специальных и весьма непростых усилий).

ТЕОРЕМА 1. Пусть меридиан $z = \varphi(\rho)$ поверхности вращения принадлежит в окрестности полюса $\rho = 0$ классу гладкости C^1 . Пусть $\varphi'(0) = 0$ и $\varphi'(\rho) > 0$ при $\rho > 0$ и пусть в некотором интервале $(0, \rho_0)$ выполнено условие

$$\sup_{0 < \rho \leq \rho_0} \frac{(m^2 - 1)\rho^{-m^2+1}}{\varphi'(\rho)} \int_0^\rho \varphi'(t)t^{m^2-2} dt \leq 1. \quad (22)$$

Тогда система (18), (19) для m -й гармоники может иметь в $[0, \rho_0]$ в классе функций $C[0, \rho_0] \cap C^1(0, \rho_0]$ только единственное решение с начальными условиями $\alpha_m(0) = \beta_m(0) = 0$, которое в этом случае продолжимо единственным образом на всю область существования функции $\varphi(\rho)$ до возможного первого нуля ее производной $\varphi'(\rho)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть существуют два решения системы (18), (19), обращающиеся в нуль при $\rho = 0$. Тогда их разность тоже является ее решением с тем же поведением в полюсе. Умножая в случае необходимости эти решения на подходящим образом подобранные постоянные, можем считать что две функции $\alpha_m(\rho)$ имеют в произвольно заданной точке $\rho = \rho_0 > 0$ общее значение. Тогда их разность, обозначим ее через $a_m(\rho)$, в точке ρ_0 будет равна нулю (если одна из функций уже была равна при $\rho = \rho_0$ нулю, в качестве a_m берем эту функцию). Разность соответствующих функций $\beta_m(\rho)$ обозначим через $b_m(\rho)$. Функции a_m и b_m тоже удовлетворяют системе (18), (19). Для уравнения (18) как линейного уравнения с начальным условием $b_m(0) = 0$ решение дается следующим выражением:

$$b_m(\rho) = -m^2 \rho^{-(m^2-1)} \int_0^\rho t^{m^2-2} \varphi'(t) a_m(t) dt.$$

Тогда линейное уравнение (19), выписанное с заменой $\alpha_m(\rho)$ на $a_m(\rho)$ и $\beta(\rho)$ на $b_m(\rho)$, при начальном условии $a_m(\rho_0) = 0$ имеет решение, удовлетворяющее интегральному уравнению

$$a_m(\rho) = -m^2(m^2 - 1)\rho^{m^2} \int_{\rho_0}^\rho \frac{t^{-2m^2}}{\varphi'(t)} dt \int_0^t \varphi'(\tau)\tau^{m^2-2} a_m(\tau) d\tau. \quad (23)$$

Пусть ρ_* – некоторая внутренняя точка интервала $(0, \rho_0)$, в которой $|a_m(\rho)|$ достигает своего максимума M . В этой точке производная $a'_m(\rho_*) = 0$. Используя это равенство, найдем соотношение

$$a_m(\rho_*) = (m^2 - 1) \frac{\rho_*^{-m^2+1}}{\varphi'(\rho_*)} \int_0^{\rho_*} \varphi'(\tau)\tau^{m^2-2} a_m(\tau) d\tau,$$

откуда для M имеем следующее неравенство:

$$M < (m^2 - 1) \left(\frac{\rho_*^{-m^2+1}}{\varphi'(\rho_*)} \int_0^{\rho_*} \varphi'(\tau)\tau^{m^2-2} d\tau \right) M,$$

так как $|a_m(t)|$ не может равняться $\max_{0 < t \leq \rho_*} |a_m(t)| = M \neq 0$ во всех точках интервала $(0, \rho_*)$. Тогда коэффициент в правой части при M должен быть больше 1, иначе неравенство невозможно. Значит, если выполнено указанное в формулировке теоремы неравенство, то $M = 0$ и не может быть двух различных решений. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть точка $\rho = \rho_0$ такова, что в промежутке $(0, \rho_0]$ производная $\varphi'(\rho) > 0$ и выполнено условие (22) теоремы 1. Тогда компонента $\alpha_m(\rho)$ непрерывного решения системы (18), (19) не обращается в нуль в $[0, \rho_0]$ ни в одной точке, кроме точки $\rho = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Приведенное в формулировке теоремы 1 достаточное условие единственности решения, хотя и довольно сложное по форме, на самом деле легко проверяется в наиболее интересных для приложений случаях. Действительно, разберем два случая.

1) Поверхность выпуклая в окрестности полюса. Тогда функция $\varphi'(\rho)$ монотонно неубывающая в некотором отрезке $[0, \rho_0]$ и выполнение условий теоремы можно проверить следующим образом. В промежутке $(0, \rho_0]$ имеем неравенство

$$\frac{(m^2 - 1)\rho^{-m^2+1}}{\varphi'(\rho)} \int_0^\rho \varphi'(\tau)\tau^{m^2-2} d\tau < (m^2 - 1)\rho^{-m^2+1} \int_0^\rho \tau^{m^2-2} d\tau = 1$$

(так как неубывающая и непрерывная функция $\varphi'(t) > 0$ не может быть постоянной в $(0, \rho]$). Значит,

$$\sup_{0 < \rho \leq \rho_0} \left[\frac{(m^2 - 1)\rho^{-m^2+1}}{\varphi'(\rho)} \int_0^\rho \varphi'(\tau)\tau^{m^2-2} d\tau \right] \leq 1,$$

т.е. имеем единственность решения (что ранее в литературе было установлено только в специальных условиях, например, это не было известно, если меридиан не обязательно строго выпуклый или же когда меридиан строго выпуклый, но имеет в полюсе экспоненциальный, логарифмический или вообще произвольный порядок убывания).

2) Пусть имеем условие $\varphi'(\rho) \sim \rho^a$ при $\rho \rightarrow 0$, $a > 0$. Так как условие теоремы достаточно проверить при сколь угодно малом ρ_0 , можно рассмотреть только главные части встречающихся выражений. Имеем

$$(m^2 - 1) \frac{\rho^{1-m^2}}{\rho^a} \int_0^\rho \tau^{m^2-2+a} d\tau = \frac{m^2 - 1}{m^2 - 1 + a} < 1.$$

Заметим, что данное в теореме условие обеспечивает единственность и для некоторых невыпуклых поверхностей, так как и для них возможно поведение производной функции меридиана со степенной главной частью, например, для поверхности с $\varphi'(\rho) = \rho^a + \alpha\rho^b \sin(1/\rho^c)$ с условиями $0 < a < b$, $c > 0$, $a < c|\alpha|$, $b - c \leq a$.

Важно отметить, что теорема единственности получена нами в более широком классе решений системы (18), (19), чем это требуется для б.м. изгибаний, принадлежащих классу C^1 , включая и полюс поверхности вращения, так как

мы не использовали необходимое для этого первое условие из (14). Если заранее предположить, что рассматриваются решения с условием $\alpha_m(\rho)/\rho^{\varepsilon_0} \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$ для какого-либо значения ε_0 , $0 < \varepsilon_0 \leq 1$, тогда достаточные условия единственности таких решений даются следующей теоремой.

ТЕОРЕМА 2. Пусть меридиан $z = \varphi(\rho) \in C^1$ поверхности вращения удовлетворяет в окрестности полюса $\rho = 0$ условиям $\varphi'(0) = 0$ и $\varphi'(\rho) > 0$ при $\rho > 0$. Пусть в некотором интервале $(0, \rho_0)$ ищутся решения системы (18), (19), удовлетворяющие условию $\alpha_m(\rho)/\rho^{\varepsilon_0} \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, где $0 < \varepsilon_0 \leq 1$. Тогда при выполнении условия

$$\inf_{0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0} \sup_{0 < \rho \leq \rho_0} \frac{m^2(m^2 - 1)\rho^{-m^2-\varepsilon+1}}{(m^2 - \varepsilon)\varphi'(\rho)} \int_0^\rho \varphi'(t)t^{m^2-2+\varepsilon} dt \leq 1 \quad (24)$$

с обязательным достижением инфимума в некоторой точке $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ при его равенстве 1, система (18), (19) для m -й гармоники может иметь в $[0, \rho_0]$ в классе $C[0, \rho_0] \cap C^1(0, \rho_0]$ только единственное решение с указанным поведением в полюсе.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы введем функцию $A_\varepsilon(\rho) = \alpha_m(\rho)/\rho^\varepsilon$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Для A_ε уравнение (23) принимает вид

$$A_\varepsilon(\rho) = -m^2(m^2 - 1)\rho^{m^2-\varepsilon} \int_{\rho_0}^\rho \frac{t^{-2m^2}}{\varphi'(t)} dt \int_0^t \varphi'(\tau)\tau^{m^2-2+\varepsilon} A_\varepsilon(\tau) d\tau, \quad (25)$$

и дальше можно использовать те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 1. В силу условия теоремы окажется, что при некотором $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ система (18), (19) может иметь только единственное решение с условием $\alpha_m(\rho)/\rho^\varepsilon \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, значит, в силу соотношения $\varepsilon_0 \geq \varepsilon$ единственность будет иметь место и для решений с условием $\alpha_m(\rho)/\rho^{\varepsilon_0} \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Обозначим левые части неравенств (22) и (24) соответственно через A и B . Так как при $\varepsilon = 0$ в левой части неравенства (24) под действие нахождения инфимума попадает число A , то $B \leq A$, и это согласуется с тем, что единственность для более узкого класса решений со специальным поведением в полюсе обязательно имеет место, если она имеет место для более широкого класса решений с требованием просто непрерывности в полюсе.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если для системы (18), (19) ищутся решения, соответствующие б.м. изгибаниям класса гладкости C^1 , тогда для единственности ее решения достаточно выполнение условия

$$\inf_{0 \leq \varepsilon \leq 1} \sup_{0 < \rho \leq \rho_0} \frac{m^2(m^2 - 1)\rho^{-m^2-\varepsilon+1}}{(m^2 - \varepsilon)\varphi'(\rho)} \int_0^\rho \varphi'(t)t^{m^2-2+\varepsilon} dt \leq 1 \quad (26)$$

с обязательным достижением инфимума при его равенстве 1.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Используя теорему о среднем, условие теоремы 2 при $\varepsilon = 1/2$ можно представить в виде

$$\frac{m^2(m^2 - 1)}{m^2(m^2 - 1) + 1/4} \sup_{0 < \xi \leq t \leq \rho_0} \left(\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi'(t)} \right) \leq 1,$$

что выполнено при справедливости неравенства

$$\sup_{0 < \xi \leq t \leq \rho_0} \left(\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi'(t)} \right) \leq \frac{m^2(m^2 - 1) + 1/4}{m^2(m^2 - 1)}.$$

Левая часть этого неравенства при монотонности $\varphi'(\rho)$ тождественно равна 1, а правая часть больше 1 (самое большое ее значение равно $1 + 1/48$). Следовательно, имеем еще одно достаточное условие единственности, справедливое для некоторых невыпуклых поверхностей.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В нашем рассмотрении мы умножили решение $a_m(\rho)$ на функцию $\rho^{-\varepsilon}$ и получили некоторое нетривиальное достаточное условие единственности решения. Конечно, можно было бы попытаться получить тем же методом другие условия единственности, умножая $a_m(\rho)$ на некоторые другие специально подобранные функции, но нашей главной целью было обратить внимание на этот фундаментальный нерешенный вопрос в локальной теории б.м. изгибаний поверхностей вращения. Самым приятным результатом было бы доказательство теоремы единственности только в предположении $\varphi'(\rho) > 0$ в окрестности полюса.

5. Теперь рассмотрим вопрос о существовании решения. Мы докажем два варианта соответствующей теоремы при различных исходных условиях. Первый вариант теоремы существования относится к выпуклым поверхностям.

ТЕОРЕМА 3. Пусть C^1 -гладкий меридиан $z = \varphi(\rho)$, $\varphi'(0) = 0$, является выпуклым. Тогда соответствующая C^1 -гладкая выпуклая поверхность вращения допускает в окрестности полюса C^1 -гладкое б.м. изгибание с нетривиальной гармоникой с любым номером $m \geq 2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем искать функцию $\alpha_m(\rho)$ с условием $\alpha_m(\rho_0) = 1$. Тогда $\alpha_m(\rho)$ будет решением интегрального уравнения

$$\alpha_m(\rho) = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{m^2} + m^2(m^2 - 1)\rho^{m^2} \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{t^{-2m^2}}{\varphi'(t)} dt \int_0^t \varphi'(\tau) \tau^{m^2-2} \alpha_m(\tau) d\tau. \quad (27)$$

Рассмотрим интегральное уравнение

$$A_{\varepsilon}(\rho) = \frac{\rho^{m^2-\varepsilon}}{\rho_0^{m^2}} + m^2(m^2 - 1)\rho^{m^2-\varepsilon} \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{t^{-2m^2}}{\varphi'(t)} dt \int_0^t \varphi'(\tau) \tau^{m^2-2+\varepsilon} A_{\varepsilon}(\tau) d\tau, \quad (28)$$

где $0 < \varepsilon < 1$. Вычисляя норму интегрального оператора с учетом монотонности $\varphi'(\rho)$, получаем, что она меньше чем

$$\frac{m^2(m^2 - 1)}{(m^2 - 1 + \varepsilon)(m^2 - \varepsilon)} = q < 1,$$

следовательно, уравнение (28) имеет получаемое методом последовательных приближений неотрицательное решение в классе функций $C[0, \rho_0]$. Кроме того, с учетом той же оценки нормы получаем, что в точке $\rho = 0$ имеем неравенство $A_{\varepsilon}(0) \leq qA_{\varepsilon}(0)$, значит, $A_{\varepsilon}(0) = 0$. Функция $a = \rho^{\varepsilon} A_{\varepsilon}(\rho)$ удовлетворяет

уравнению (27) для $\alpha_m(\rho)$ (со значением $\alpha_m(\rho_0) = 1$), и в силу единственности решения этого уравнения имеем, что есть решение $\alpha_m(\rho) = \rho^\varepsilon A_\varepsilon(\rho)$.

Теперь покажем, что функция $A_\varepsilon(\rho)$ монотонна. Так как $A_\varepsilon(0) = 0$ и нет других нулей, можем считать, что $A_\varepsilon(\rho) > 0$, $\rho > 0$. Допустим, $A_\varepsilon(\rho)$ имеет внутри какого-нибудь отрезка $[0, \rho_0]$ точку максимума. Тогда по уже несколько раз использованному методу (нахождением неравенства для значения этого максимума с учетом равенства нулю производной функции $A_\varepsilon(\rho)$ в точке ее максимума) мы придем к невозможному неравенству в точке максимума. Значит, на любом отрезке максимум достигается в его концевой точке, что и означает монотонность функции.

Отсюда мы делаем вывод, что функция $\alpha_m(\rho)/\rho^\varepsilon$ тоже является монотонной при каждом $\varepsilon < 1$. Тогда функция $\alpha_m(\rho)/\rho$, как предел этих монотонных функций при $\varepsilon \rightarrow 1$, тоже является неубывающей и ограниченной снизу функцией, и поэтому она при $\rho \rightarrow 0$ имеет некоторый предел. Если этот предел равен нулю, то функция $\alpha_m(\rho)$ будет удовлетворять условию (14) и определит C^1 -гладкое поле б.м. изгибания. Покажем, что возможность $\alpha_m(\rho)/\rho \rightarrow a \neq 0$ исключена.

Допустим обратное. Тогда $\alpha_m(\rho) \sim a\rho$, $\rho \rightarrow 0$. Прямой подстановкой в систему (18), (19) проверяется, что $\varphi'(\rho)$ определяется через $\alpha_m(\rho)$ следующим равенством:

$$\varphi'(\rho) = \frac{\rho^{1-m^2}}{m^2\alpha_m(\rho) - \rho\alpha'_m(\rho)} \exp\left(m^2(1-m^2) \int_\rho^{\rho_0} \frac{\alpha_m(t) dt}{t(m^2\alpha_m(t) - t\alpha'_m(t))}\right). \quad (29)$$

В предположении $\alpha_m(\rho) \sim a\rho$ мы в показателе экспоненты имеем главную часть $\ln(\rho/\rho_0)^{m^2}$, поэтому в итоге получается, что $\varphi'(\rho) \sim \rho_0^{-m^2}/(a(m^2-1))$, $\rho \rightarrow 0$, что противоречит условию $\varphi'(0) = 0$. Итак, решение уравнения (23), полученное по формуле $\alpha_m(\rho) = \rho^\varepsilon A_\varepsilon(\rho)$ через решение $A_\varepsilon(\rho)$ уравнения (28), удовлетворяет условию (14), и поэтому оно определяет C^1 -гладкое б.м. изгибание.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Доказанная теорема интересна для теории б.м. изгибаний выпуклых поверхностей по следующей причине. Известно, что всякая поверхность строго положительной кривизны локально является нежесткой, при этом регулярность поля б.м. изгибаний гарантированно совпадает с гладкостью самой поверхности S только в том случае, когда поверхность имеет гладкость гильдеровского класса $C^{n,\delta}$, $n \geq 2$, $0 < \delta < 1$, а в случае поверхности гладкости C^n для поля б.м. изгибания можно гарантировать гладкость только класса $C^{n-1,\delta'}$ с $\delta' < 1$, см. [14]¹; это же верно и для выпуклых поверхностей с изолированной точкой уплощения, см. [4; п. 3.6]. А в нашем случае получается, что для выпуклых поверхностей вращения класса C^1 гладкость поля б.м. изгибания обязательно совпадает с гладкостью самой поверхности. Интересно было бы исследовать, как обстоит дело в гладкостях класса C^2 и выше (есть основания полагать, что уже в классе C^2 не для всякой выпуклой поверхности с нулевой гауссовой кривизной в полюсе существует C^2 -гладкое б.м. изгибание).

¹На самом деле в этой книге в гл. IV формулируется немного более слабый результат, но с учетом общих результатов теории эллиптических уравнений справедлива приведенная сейчас формулировка.

Второй вариант теоремы существования относится к случаю, когда известно асимптотическое поведение производной уравнения меридиана при подходе к полюсу.

ТЕОРЕМА 4. Пусть для C^1 -гладкого меридиана $z = \varphi(\rho)$ выполнено условие $\varphi'(\rho) \sim C\rho^a$, $C \neq 0$, с представлением $\varphi'(\rho) = C\rho^a + O(\rho^{a+2\varepsilon})$, $\rho \rightarrow 0$, $a > 0$, $\varepsilon > 0$. Тогда система (16) имеет C^1 -гладкое решение с $\alpha_m(\rho) \sim \rho^\nu$, $\beta_m(\rho) \sim -m^2/(m^2 - 1 + a + \nu)\rho^{a+\nu}$, $\rho \rightarrow 0$, где число $\nu > 1$ определяется уравнением $\nu(\nu - 1) + a\nu - am^2 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала по аналогии с доказательством теоремы 3 рассмотрим уравнение (28). На этот раз главная часть интегрального оператора имеет норму, не превосходящую $m^2(m^2 - 1)/(m^2(m^2 - 1) + am^2 + \varepsilon(1 - a - \varepsilon))$, что меньше 1 при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Тогда влияние неглавной части будет малым при достаточно малых ρ и поэтому уравнение (27) имеет решение A_ε , непрерывное в $[0, \rho_0]$. Отсюда получаем, что функция $\alpha_m(\rho) = \rho^\varepsilon A_\varepsilon$ определяет решение системы (18), (19) и имеет в полюсе нуль по крайней мере порядка ε .

Проинтегрируем левую и правую части уравнения (19) по отрезку $[0, \rho]$ с учетом значения

$$\beta_m(\rho) = -m^2\rho^{1-m^2} \int_0^\rho \varphi'(t)t^{m^2-2}\alpha_m(t) dt.$$

Получим уравнение

$$\alpha_m(\rho) = m^2 \int_0^\rho \frac{\alpha_m(t)}{t} dt - m^2(m^2 - 1) \int_0^\rho \frac{t^{-m^2}}{\varphi'(t)} dt \int_0^t \varphi'(\tau)\tau^{m^2-2}\alpha_m(\tau) d\tau \quad (30)$$

(существование интегралов в правой части легко проверяется). Убедимся, что решение $\alpha_m(\rho)$ можно искать в виде $\alpha_m(\rho) = \rho^\nu + \rho^{\nu+\varepsilon}h(\rho)$, где $h(\rho)$ является некоторой непрерывной функцией. Подставим это значение $\alpha_m(\rho)$ в (30). Получим уравнение

$$\begin{aligned} \rho^{\nu+\varepsilon}h(\rho) = & -\rho^\nu + \frac{m^2}{\nu}\rho^\nu - m^2(m^2 - 1) \int_0^\rho \frac{t^{-m^2}}{\varphi'(t)} dt \int_0^t \varphi'(\tau)\tau^{m^2-2+\nu} d\tau \\ & + m^2 \int_0^\rho t^{\nu-1+\varepsilon}h(t) dt \\ & - m^2(m^2 - 1) \int_0^\rho \frac{t^{-m^2}}{\varphi'(t)} dt \int_0^t \varphi'(\tau)\tau^{m^2-2+\nu+\varepsilon}h(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (31)$$

Прямым вычислением суммы слагаемых в (31) находим, что благодаря равенству $\nu(\nu - 1) + a\nu - am^2 = 0$ коэффициент при ρ^ν в этой сумме обращается в нуль, а вся сумма имеет порядок $O(\rho^{\nu+2\varepsilon})$, $\rho \rightarrow 0$. Покажем, что последнее интегральное слагаемое в (31) при ограниченных $h(t)$ можно преобразовать к следующему виду:

$$m^2(m^2 - 1) \int_0^\rho \left(\int_\tau^\rho \frac{t^{-m^2}}{\varphi'(t)} dt \right) \varphi'(\tau)\tau^{m^2-2+\nu+\varepsilon}h(\tau) d\tau.$$

Действительно, интегрированием по частям получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^\rho \frac{t^{-m^2}}{\varphi'(t)} dt \int_0^t \varphi'(\tau) \tau^{m^2-2+\nu+\varepsilon} h(\tau) d\tau \\ &= u(t)v(t)|_0^\rho + \int_0^\rho \varphi'(\tau) \tau^{m^2-2+\nu+\varepsilon} h(\tau) d\tau \int_\tau^\rho \frac{t^{-m^2}}{\varphi'(t)} dt, \end{aligned}$$

где

$$u(t) = \int_0^t \varphi'(\tau) \tau^{m^2-2+\nu+\varepsilon} h(\tau) d\tau, \quad v(t) = - \int_t^\rho \frac{\tau^{-m^2}}{\varphi'(\tau)} d\tau.$$

Внеинтегральное слагаемое равно нулю. Это очевидно при значении $t = \rho > 0$, а при $t \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} |u(t)| &= \left| \int_0^t \varphi'(\tau) \tau^{m^2-2+\nu+\varepsilon} h(\tau) d\tau \right| \leq H_1 t^{m^2-1+\nu+a+\varepsilon}, \\ |v(t)| &= \left| \int_t^\rho \frac{\tau^{-m^2}}{\varphi'(\tau)} d\tau \right| \sim H_2 t^{-m^2-a+1}, \end{aligned}$$

где H_1 и H_2 – некоторые постоянные, зависящие от C , m , a , ν , ε и максимума $|h(t)|$ на $[0, t]$. Поэтому произведение $|u(t)v(t)| \leq H_1|v(t)|t^{m^2-1+\nu+a+\varepsilon} \sim H_1H_2t^{\nu+\varepsilon} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

Теперь с использованием условия $\varphi'(\rho) \sim C\rho^a$ вычисляем главную часть нормы интегрального оператора во второй и третьей строках формулы (31). Имеем

$$\begin{aligned} & m^2 \int_0^\rho \left| \tau^{\nu+1+\varepsilon} - (m^2-1) \left(\int_\tau^\rho \frac{t^{-m^2}}{\varphi'(t)} dt \right) \varphi'(\tau) \tau^{m^2-2+\nu+\varepsilon} \right| d\tau \\ &= m^2 \left(\int_0^\rho \left(1 - \frac{m^2-1}{m^2-1+a} \right) \tau^{\nu+1+\varepsilon} d\tau + \int_0^\rho \frac{m^2-1}{m^2+a-1} \frac{\tau^{m^2-2+\nu+a+\varepsilon}}{\rho^{m^2+a-1}} d\tau \right) \\ &\quad + o(\rho^{\nu+\varepsilon}) \\ &= m^2 \left(\frac{a}{(m^2+a-1)(\nu+\varepsilon)} + \frac{m^2-1}{(m^2+a-1)(m^2+a-1+\nu+\varepsilon)} \right) \rho^{\nu+\varepsilon} \\ &\quad + o(\rho^{\nu+\varepsilon}) \\ &= \frac{(\nu+a+\varepsilon)m^2}{(m^2+a-1+\nu+\varepsilon)(\nu+\varepsilon)} \rho^{\nu+\varepsilon} + o(\rho^{\nu+\varepsilon}), \quad \rho \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Если учесть определяющее ν равенство, то нетрудно проверить, что коэффициент при $\rho^{\nu+\varepsilon}$ в главной части при любых фиксированных $m \geq 2$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ строго меньше 1. Разделив (31) на $\rho^{\nu+\varepsilon}$, для h получим интегральное уравнение, для которого норма оператора при достаточно малых ρ будет меньше 1, значит, требуемая для представления

$$\alpha_m(\rho) = \rho^\nu + \rho^{\nu+\varepsilon} h(\rho), \quad \rho \rightarrow 0, \quad (32)$$

функция $h(\rho)$ существует. Теорема доказана.

Показатель ν зависит, конечно, от m – номера гармоники, причем точно по такому же закону, как это было известно для случая аналитических поверхностей или для выпуклых поверхностей вращения со специальным представлением меридиана около полюса. У нас все это получилось в классе C^1 , к тому же и без предположения выпуклости поверхности.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Теорема 4 справедлива в более широком классе функций φ , а именно достаточно предположить, что $\varphi'(\rho)$ имеет представление вида $\varphi'(\rho) = \rho^a + g(\rho)O(\rho^a)$, где $g(\rho)$ – произвольная положительная монотонная бесконечно малая функция при $\rho \rightarrow 0$. По-видимому, можно рассмотреть и другие виды убываний, например, по экспоненциальному или логарифмическому закону.

6. Исследование решений системы (18), (19) и существование б.м. изгибающих соответствующей поверхности вращения в других классах мы проведем немного ниже, а сейчас докажем вспомогательную лемму, которая должна облегчить это исследование (и которая верна в общем случае, а не только для поверхностей вращения).

ЛЕММА 1. Пусть поверхность $S^*: \mathbf{r}^* = \{x + \xi(x, y), y + \eta(x, y), f(x, y) + \zeta(x, y)\} \in C^2$ изометрична поверхности $S: \mathbf{r} = \{x, y, f(x, y)\} \in C^{n, \alpha}$, $2 \leq n \leq \infty$, $0 \leq \alpha \leq 1$, $n + \alpha > 2$, с изометрическим соответствием по равенству внутренних координат (x, y) . Тогда если частные производные $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ достаточно малы, то для принадлежности поверхности S^* классу гладкости $C^{n, \alpha}$ необходимо и достаточно, чтобы вертикальная компонента $\zeta(x, y)$ изометрической деформации принадлежала классу $C^{n, \alpha}$. Аналогичное утверждение верно и в аналитическом классе гладкости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость условия леммы очевидна. Докажем его достаточность. Записывая условие изометричности $ds^{*2}(x, y) = ds^2(x, y)$ поверхностей S^* и S , приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} 2\xi_x + \xi_x^2 + \eta_x^2 + 2p\zeta_x + \zeta_x^2 &= 0, \\ \xi_y + \eta_x + \xi_x\xi_y + \eta_x\eta_y + p\zeta_y + q\zeta_x + \xi_x\zeta_y &= 0, \\ 2\eta_y + \xi_y^2 + \eta_y^2 + 2q\zeta_y + \zeta_y^2 &= 0 \end{aligned}$$

(здесь по стандартным обозначениям Монжа $p = f'_x$, $q = f'_y$). Дифференцируя каждое из этих уравнений по x и по y , получаем неоднородную систему из 6 линейных уравнений для 6 неизвестных $\xi_{xx}, \xi_{xy}, \xi_{yy}, \eta_{xx}, \eta_{xy}, \eta_{yy}$, у которой определитель имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 + \xi_x & 0 & 0 & \eta_x & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \xi_x & 0 & 0 & \eta_x & 0 \\ 0 & \xi_y & 0 & 0 & 1 + \eta_y & 0 \\ 0 & 0 & \xi_y & 0 & 0 & 1 + \eta_y \\ \xi_y & 1 + \xi_x & 0 & 1 + \eta_y & \eta_x & 0 \\ 0 & \xi_y & 1 + \xi_x & 0 & 1 + \eta_y & \eta_x \end{vmatrix}.$$

При $\xi_x = \xi_y = \eta_x = \eta_y = 0$ этот определитель равен 1, поэтому при достаточно малых значениях этих величин определитель отличен от нуля. Следовательно,

полученная система допускает решение, алгебраически выражающее ξ_{xx} , ξ_{xy} , ξ_{yy} , η_{xx} , η_{xy} , η_{yy} через ξ_x , ξ_y , η_x , η_y , которые принадлежат классу C^1 , и через первые и вторые производные от $f(x, y)$ и $\zeta(x, y)$. Пусть сначала $n = 2$, $\alpha > 0$, тогда первые и вторые производные от $f(x, y)$, $\zeta(x, y)$ будут из класса $C^{0, \alpha}$, а вместе с ними и $\xi_{xx}, \dots, \eta_{yy} \in C^{0, \alpha}$, следовательно, $\xi(x, y), \eta(x, y) \in C^{2, \alpha}$. Пусть теперь $n = 3$. Тогда первые и вторые производные от $f(x, y)$, $\zeta(x, y)$ будут из класса $C^{1, \alpha}$, а по предыдущему шагу знаем, что $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ из класса C^1 , значит, их алгебраические комбинации $\xi_{xx}, \dots, \eta_{yy}$ тоже будут из C^1 , следовательно, $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ на самом деле будут из класса C^2 , а поэтому в действительности $\xi_{xx}, \dots, \eta_{yy} \in C^{1, \alpha}$, т.е. $\xi(x, y), \eta(x, y) \in C^{3, \alpha}$. Если же $n > 3$, то сначала показываем, что $\xi(x, y), \eta(x, y) \in C^4$, и аналогичные рассуждения можно продолжить дальше, пока не получим $\xi(x, y), \eta(x, y) \in C^{n, \alpha}$. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. В случае аналитического класса гладкости можно было поступить так: сначала составить квазилинейную эллиптическую систему, например, из двух уравнений Лапласа $\Delta \xi = \dots$, $\Delta \eta = \dots$, с аналитической зависимостью от $\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$ и с аналитическими коэффициентами, зависящими от $f'_x, \dots, \zeta''_{yy}$, а затем применить к этой системе известные теоремы об аналитичности решений аналитической системы эллиптических уравнений. Но применение такого приема для случая конечной гладкости вызывает дополнительные трудности в классах с показателем Гёльдера $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, так как эти классы не сохраняются в теоремах о регулярности решений эллиптических уравнений.

СЛЕДСТВИЕ 3. При локальном исследовании гладкости изгибаний и б.м. изгибаний данной поверхности достаточно знать гладкость самой поверхности и вертикальной компоненты изгибающего поля².

7. Гармоники полей б.м. изгибаний имеют вид $F_m(\rho)e^{im\theta}$, и нам нужно уметь определять гладкость этих функций в регулярной системе координат (x, y) . (Стоит отметить, что пренебрежение нерегулярностью полярной системы координат в полюсе приводило некоторых авторов к ошибочным заключениям; в связи с этим полезно прочесть соответствующее замечание перед предложением 2.7. в [15; § 2].) Для этого мы докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2. Пусть в полярных координатах (ρ, θ) задана функция вида $F(\rho)e^{im\theta}$, $0 \leq \rho < a$, $m \in \mathbf{Z}$, с условием $F(0) = 0$ при $m \neq 0$. Пусть совершен переход к декартовым координатам $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$. Для того чтобы полученная при этом функция

$$f(x, y) = \begin{cases} F(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{(x + i(\operatorname{sign} m)y)^{|m|}}{(x^2 + y^2)^{|m|/2}}, & m \neq 0, \\ F(\sqrt{x^2 + y^2}), & m = 0, \end{cases}$$

²В общем случае, для поверхностей “в целом” достаточно знать гладкость поверхности и нормальной составляющей вектора деформации.

принадлежала в круге $D: 0 \leq x^2 + y^2 < a^2$ классу гладкости $C^n(D)$, $0 \leq n \leq \infty$, необходимо и достаточно, чтобы $F(\rho) \in C^n[0, a)$ и чтобы при этом выполнялись свойства

1) $F^{(j)}(0) = 0$ для всех $0 \leq j \leq n$, если $n < |m|$;

2) $F^{(j)}(0) = 0$ для всех $0 \leq j \leq |m| - 1$ и для всех j , $|m| < j \leq n$, имеющих противоположную с m четность, если $n \geq |m|$.

В частности, $f(x, y)$ аналитична в точках области $D \setminus O$ в том и только в том случае, когда $F(\rho)$ аналитична в $(0, a)$, а для аналитичности $f(x, y)$ в окрестности точки $O = (0, 0)$ необходимо и достаточно, чтобы функция $F(\rho)$ была представима для значений $\rho \geq 0$ сходящимся рядом Тейлора с центром в точке $\rho = 0$ со значениями производных $F^{(j)}(0) = 0$ для всех $0 \leq j \leq |m| - 1$ и для всех $j > |m|$ с противоположной n четностью.

СЛЕДСТВИЕ 4. Поверхность $S: z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$, полученная вращением кривой $z = \varphi(x)$, $0 \leq x < a$, вокруг оси Oz , имеет гладкость класса C^n , $n \geq 1$, в том и только в том случае, когда функция $\varphi(x) \in C^n[0, a)$ и $\varphi^{(j)}(0) = 0$ для всех нечетных $j \leq n$. В частности, S является аналитической только для аналитических функций $\varphi(x)$ с разложением в ряд по четным степеням x .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что утверждение леммы требует проверки лишь в точке $(x, y) = (0, 0)$. Далее, для $m = 0$ лемма очевидна, поэтому считаем $m \geq 1$ (в случае $m \leq -1$ достаточно перейти к комплексно сопряженной функции).

Пусть сначала $f(x, y) \in C^n(D)$. Имеем $F(\rho) = F(x) = f(x, 0)$ с заменой $\rho = x$, $0 \leq x < a$, поэтому $F(\rho) \in C^n[0, a)$. Отсюда же при аналитичности $f(x, y)$ следует аналитичность $F(\rho)$. Далее, при $\rho > 0$

$$\begin{aligned} F(\rho) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) e^{-im\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) - f(0, 0)] e^{-im\theta} d\theta + \frac{f(0, 0)}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} d\theta, \quad (33) \end{aligned}$$

откуда

$$F(0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} F(\rho) = 0 \quad \text{при } m \neq 0.$$

Пусть $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$, тогда $\frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial z} e^{i\theta} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} e^{-i\theta}$. Для производных $F^{(j)}$ по индукции имеем

$$F^{(j)}(\rho) = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^j C_j^k \frac{\partial^j f}{\partial z^k \partial \bar{z}^{j-k}} e^{-i(m+j-2k)\theta} d\theta, \quad \rho > 0.$$

Отсюда, используя аналогичное (33) представление, получаем, что при $j \leq n < m$ и $j \leq n - 1 = m - 1$ предел $F^{(j)}(\rho) = 0$ при $\rho \rightarrow 0$, так как $m + j - 2k \neq 0$ ни при каких $0 \leq k \leq j$. А если $n > m \geq 0$, то по той же причине $F^{(j)}(0) = 0$ при $j \leq n - 1$, а для $j \geq m$ при противоположной четности j и m снова $m + j - 2k \neq 0$, т.е. $F^{(j)}(0) = 0$. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Представив $F(\rho)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, получим

$$f(x, y) = e^{im\theta} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{F^{(j)}(0)}{j!} (x^2 + y^2)^{j/2} + \frac{e^{im\theta}}{(n-1)!} \int_0^\rho [F^{(n)}(t) - F^{(n)}(0)] (\rho - t)^{n-1} dt + \frac{e^{im\theta}}{n!} F^{(n)}(0) \rho^n. \quad (34)$$

При $n \leq m-1$ в силу условий леммы все внеинтегральные слагаемые равны нулю, а при $n \geq m$ все неравные нулю внеинтегральные слагаемые являются многочленами от x и y . Обратимся к интегральному слагаемому, обозначим его $\varphi(x, y)$. Так как

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\sin \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{\cos \theta}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

то любая j -я производная от $\varphi(x, y)$, $1 \leq j \leq n$, в точке $(x, y) \neq (0, 0)$ существует и равна сумме слагаемых, в каждом из которых есть сомножитель вида

$$\frac{1}{\rho^{j-k}} \int_0^\rho [F^{(n)}(t) - F^{(n)}(0)] (\rho - t)^{n-1-k} dt, \quad 0 \leq k \leq j,$$

умноженный на некоторый тригонометрический полином с постоянными коэффициентами. Так как $F^{(n)}(t) - F^{(n)}(0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, то все эти слагаемые при $\rho \rightarrow 0$ стремятся к нулю. Следовательно, $\varphi(x, y)$, а вместе с ней и $f(x, y)$ имеют в D непрерывные производные до порядка n включительно. Достаточность доказана.

Нетрудно убедиться, что аналитичность $f(x, y)$ при указанных в лемме условиях получается из аналитичности $F(\rho)$ с использованием формулы вида (33), расписанной в виде ряда. Лемма доказана.

Каждая гармоника вертикальной компоненты α поля б.м. изгибаия 1-го порядка имеет изучаемый ниже в лемме 3 вид $\alpha_m(\rho)e^{im\theta}$, где

$$\alpha_m(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(x, y) e^{-im\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \alpha(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) e^{-im\theta} d\theta.$$

Проверим, каковы свойства функции $\alpha_m(\rho)$ в зависимости от свойств гладкости функции $\alpha(x, y)$.

ЛЕММА 3. Пусть определенная в круге $D: x^2 + y^2 < a^2$ комплекснозначная функция $f(x, y) \in C^n(D)$, $0 \leq n \leq \infty$, или же $f \in C^A$, т.е. аналитическая. Тогда ее m -й коэффициент Фурье

$$F_m(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) e^{-im\theta} d\theta$$

принадлежит классу $C^n[0, a)$, причем

- 1) если $n < m$, то $F_m^{(j)}(0) = 0$ для всех $0 \leq j \leq n$;

2) если $n \geq m$, то $F_m^{(j)}(0) = 0$ для всех $0 \leq j \leq m-1$, а также для всех j , $m < j \leq n$, имеющих противоположную с m четность.

В случае аналитичности $f(x, y)$ функция $F_m(\rho)$ аналитична в $[0, a)$ с разложением в ряд по степеням ρ в соответствии с 2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Факт принадлежности $F_m(\rho)$ классу $C^n[0, a)$ очевиден, надо лишь доказать свойства 1) и 2). Имеем

$$F_m(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(0, 0) e^{-im\theta} d\theta = \begin{cases} f(0, 0), & m = 0, \\ 0, & m > 0, \end{cases}$$

т.е. для $j = 0$ эти свойства верны.

Так как

$$\frac{dF_m}{d\rho} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \right) e^{-im\theta} d\theta,$$

то по индукции

$$F_m^{(j)}(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^j C_j^k \frac{\partial^j f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)}{\partial x^k \partial y^{j-k}} \cos^k \theta \sin^{j-k} \theta e^{-im\theta} d\theta,$$

и поэтому

$$F_m^{(j)}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^j \sum_{l=0}^k \sum_{t=0}^{j-k} c_{jkl} e^{i(2l+2t-m-j)\theta} d\theta.$$

Пусть $j < n \leq m$. Тогда $2l+2t-m-j \leq 2n+2(j-n)-m-j = j-m < n-m \leq 0$. Значит, $F_m^{(j)}(0) = 0$. А при $j > m$ имеем, что $2l+2t-m-j = 0$ лишь при $m+j = 2(l+t)$, т.е. когда m и j одинаковой четности. Следовательно, если m и j противоположной четности, то все слагаемые, дающие в сумме $F_m^{(j)}(0)$, равны нулю, и имеем утверждаемое равенство $F_m^{(j)}(0) = 0$.

Аналитичность $F_m(\rho)$ при аналитичности $f(x, y)$ доказывается простым применением известных теорем из анализа на основе использования разложения f в ряд по степеням x и y . Лемма доказана.

Теперь мы можем объединить все доказанные леммы вместе и сделать следующий вывод.

СЛЕДСТВИЕ 5. Для того чтобы имеющее конечное число гармоник поле б.м. изгибания $\mathbf{U}$ 1-го порядка аналитической поверхности вращения $S: z = \varphi(x, y)$ было аналитическим, необходимо и достаточно, чтобы в каждой гармонике $\alpha_m(x, y) = \alpha_m(\rho) e^{im\varphi}$ вертикальной компоненты $\alpha(x, y) \mathbf{k}$ поля $\mathbf{U}$ функция $\alpha_m(\rho)$ была аналитической с условием, что

$$\alpha_m^{(j)}(0) = 0 \text{ для } j \leq m-1 \text{ и } j > m \text{ с противоположной } m \text{ четностью.} \quad (35)$$

8. Теперь мы выпишем уравнения, с которыми нам предстоит работать. Для нахождения б.м. изгибаний 1-го порядка нам достаточно иметь дело с уравнением (20) для гармоник вертикальной компоненты поля $\mathbf{U}$. Напомним вкратце основные моменты проведенного в [5] исследования этого уравнения. Учитывая, что согласно следствию 1 аналитическая поверхность вращения S в окрестности полюса уплощения порядка $2k - 2 > 0$ должна иметь уравнение вида

$$z = \varphi(\rho) = \rho^{2k} \sum_{j=0}^{\infty} d_j \rho^{2j}, \quad d_0 \neq 0, \quad k \geq 2,$$

мы можем переписать уравнение (20) в виде

$$\rho^2 \alpha_m'' + (2k - 1) \rho \varphi_0(\rho) \alpha_m' - m^2 (2k - 1) \varphi_0(\rho) \alpha_m = 0, \quad (36)$$

где $\varphi_0(\rho)$ – некоторая известная функция вида $1 + \sum_{j=1}^{\infty} D_{2j} \rho^{2j}$, и искать решения в виде обобщенного степенного ряда

$$\alpha_m(\rho) = \rho^{\nu_m} \sum_{j=0}^{\infty} f_j \rho^j, \quad f_0 \neq 0.$$

Показатель ν_m определяется из соотношения

$$\nu_m = 1 - k + \sqrt{m^2(2k - 1) + (k - 1)^2}, \quad (37)$$

а коэффициенты f_j , $j = 1, 2, \dots$, получаются последовательным вычислением из системы

$$j \left(j + 2\sqrt{m^2(2k - 1) + (k - 1)^2} \right) f_j + (2k - 1)(1 - m^2) \sum_{i=0}^{j-1} D_{j-i} (i + \nu_m) f_i = 0.$$

Так как коэффициенты D с нечетными номерами равны нулю, то последовательно находим, что f с нечетными номерами тоже равны нулю и поэтому решение α_m имеет вид

$$\alpha_m(\rho) = \rho^{\nu_m} \sum_{j=0}^{\infty} f_{2j} \rho^{2j}, \quad f_0 \neq 0.$$

Положив $X = \nu_m + k - 1 > 0$ и учитывая требование аналитичности изгибающего поля, приходим к тому, что номер гармоники m должен определяться решением следующего диофантового уравнения:

$$X^2 - (2N + 1)Y^2 = N^2, \quad (38)$$

известного как уравнение Пелля; здесь приняты обозначения $Y = m$, $N = k - 1$. Любое решение уравнения (38) в натуральных числах (X, Y) , $Y \geq 2$, дает номер $m = Y$, для которого соответствующая гармоника определяет для поверхности S аналитическое б.м. изгибание 1-го порядка. Действительно, так как уравнение (38) представимо в виде $(X - N - Y)(X + N + Y) = 2NY(Y - 1)$,

то отсюда легко вывести, что число $X - N - Y = \nu_m - m$ равно некоторому неотрицательному четному числу $2p$, следовательно, для функции $\alpha_m(x, y) = \alpha_m(\rho)e^{im\theta}$ выполнены условия леммы 2, обеспечивающие ее аналитичность.

Теория решения уравнения Пелля хорошо известна, см., например, [16], [17]; краткое изложение этой теории можно найти в [5]. Там же показано, что 1) кроме случая уплощения порядка $2k - 2 = 8$ окрестность полюса локально всегда является нежесткой относительно аналитических б.м. изгибаний 1-го порядка; 2) если число $2N + 1 = 2k - 1$ является полным квадратом, то число нетривиальных гармоник конечно; 3) если $2k - 1$ не является полным квадратом, то число номеров нетривиальных гармоник бесконечно, но эти номера идут с большими лакунами. Для примера в табл. 1 приведены номера нетривиальных гармоник до номера 10000 для уплощений до порядка $2k - 2 = 50$.

Из этого списка видно, что среди номеров гармоник нет числа $m = 2$. Это не случайно, так как справедливо следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Поле аналитического б.м. изгибания 1-го порядка окрестности полюса уплощения не может иметь нетривиальную гармонику с номером $m = 2$.*

Справедливость этого утверждения получится как следствие из следующего более общего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Порядки уплощений, для которых окрестность полюса имеет нетривиальную гармонику с данным номером $m = y_0 \geq 2$, не превышают значения $2n = 2 + y_0^2(y_0^2 - 5)/2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решая (38) как уравнение относительно N при данном $y = y_0$, получаем

$$N = -y_0^2 + \sqrt{y_0^4 - y_0^2 + x^2}.$$

Под корнем должен быть квадрат некоторого целого числа, обозначим его через p^2 . Тогда имеем

$$(p - x)(p + x) = y_0^2(y_0^2 - 1) \equiv Q$$

(так как геометрический смысл переменных в исследовании самой системы Пелля не имеет значения, то мы вместо “геометрических” переменных X, Y из (38) дальше используем “нейтральные” переменные x, y). Нетрудно видеть, что Q делится на 4. Натуральные числа $q_1 = p - x$ и $q_2 = p + x > q_1$ должны быть взаимно дополнительными делителями числа Q , т.е. $Q = q_1 q_2$. Отсюда имеем $2p = q_1 + q_2$, $2x = q_2 - q_1$, значит, эти делители числа Q должны быть одинаковой четности, т.е. они оба четные в силу четности Q . Так как $2p = q_1 + Q/q_1$, $q_1 < \sqrt{Q}$, то самое большое значение p получается при самом маленьком допустимом значении q_1 . Случай нечетного значения $q_1 = 1$ невозможен. Следующее значение $q_1 = 2$ уже допустимо и оно дает максимально возможное значение $p = 1 + Q/4$, откуда и получаем утверждаемое максимальное значение $2n_{\max} = 2 + y_0^2(y_0^2 - 5)/2$. Эта оценка является неулучшаемой, так как такое значение n при любом данном $y_0 > 2$ действительно существует

Таблица 1

$n = k - 1$ ($z = \varphi(\rho) \sim \rho^{2k}$)	Номера нетривиальных гармоник в диапазоне	Число нетривиальных гармоник
1	4, 15, 56, 209, 780, 2911	6
2	3, 8, 21, 55, 144, 377, 987, 2584, 6765	9
3	4, 9, 20, 65, 144, 319, 1036, 2295, 5084	9
4	нет	нет
5	8, 15, 28, 161, 300, 559, 3212, 5985	8
6	5, 9, 16, 56, 99, 175, 611, 1080, 1909, 6665	10
7	4, 7, 12, 33, 56, 95, 260, 441, 748, 2047, 3472, 5889	12
8	6, 10, 39, 64, 105, 406, 666, 2575, 4224, 6929	10
9	15, 24, 220, 351, 560, 5124, 8175	7
10	3, 5, 8, 16, 25, 39, 77, 120, 187, 369, 575, 896, 1768, 2755, 4293, 8471	16
11	36, 55, 84, 1729, 2640, 4031	6
12	7	1
13	44, 65, 96, 2289, 3380, 4991	6
14	24, 35, 51, 649, 945, 1376	6
15	8, 25, 36, 153, 220, 671, 2848, 4095, 5888	9
16	4, 6, 14, 20, 45, 64, 91, 204, 290, 650, 924, 2071, 2944, 4185, 9380	15
17	12, 17, 24, 145, 204, 287, 1728, 2431, 3420	9
18	15, 21, 155, 216, 301, 2211, 3081	7
19	55, 76, 105, 2751, 3800, 5249	6
20	9, 35, 48, 208, 285, 1079, 4671, 6400, 8769	9
21	16, 36, 49, 364, 495, 1105, 8200	7
22	8, 11, 15, 57, 77, 104, 391, 528, 713, 2680, 3619, 4887	12
23	120, 161, 216	3
24	10	1
25	15, 20, 132, 175, 232, 1520, 2015	7

(при значении $n = n_{\max}$ уравнение (38) имеет решение $x = n + y_0^2 - 2$, $y = y_0$). А при $y_0 = 2$ эта оценка дает $n_{\max} = 0$, что соответствует полюсу без уплощения и доказывает справедливость утверждения 1.

Кстати, вышеприведенное рассуждение с делителями числа Q позволяет найти все порядки уплощений, для которых окрестность полюса имеет нетривиальные гармоники с данным номером $m = y_0$, так как для данного $y = y_0$ величина $2x$ определяется конечным числом возможных значений разности делителей числа Q (или $2n$ при данном $y = y_0$ находится через конечное число значений числа $2p = q_1 + q_2$). Например, нетрудно проверить, что гармоники с номером $m = 3$ существуют только для порядков уплощений $2k - 2 = 4$ и $2k - 2 = 20$, т.е. для меридианов с $\varphi(\rho) \sim \rho^6$, $\rho \rightarrow 0$, и $\varphi(\rho) \sim \rho^{22}$, $\rho \rightarrow 0$, соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Из утверждения 2 следует, что если пытаться решать давно уже известный специалистам вопрос о существовании аналитической поверхности вращения, допускающей аналитические б.м. изгибания с нетривиальными гармониками всех номеров, то ее надо искать среди поверхностей, у которых ни один полюс не является точкой уплощения.

9. Теперь мы займемся нахождением номеров нетривиальных гармоник для уплощений “квадратного” порядка (так мы называем порядки уплощений $2n$, для которых в (38) коэффициент $2N + 1 = 2k - 1$ является квадратом целого числа). Пусть $2N + 1 = A^2$. Очевидно, A должно быть нечетным: $A = 2a + 1$. Тогда $N = 2a(a + 1)$ и уравнение (38) сводится к системе

$$\begin{cases} x - (2a + 1)y = a_1, \\ x + (2a + 1)y = a_2, \end{cases}$$

где $a_1 a_2 = 4a^2(a + 1)^2$, $a_1 < a_2$. Пусть T_0 – наибольший общий делитель чисел a_1 и a_2 : $a_1 = p_1 T_0$, $a_2 = p_2 T_0$. Тогда $p_1 p_2 T_0^2 = 4a^2(a + 1)^2$, и так как p_1 и p_2 взаимно просты, то они являются квадратами: $p_1 = p^2$, $p_2 = q^2$, откуда $pqT_0 = 2a(a + 1)$. Далее, имеем

$$x = \frac{p^2 + q^2}{2} T_0.$$

Убедимся, что T_0 должно быть четным числом. Допустим обратное. Тогда или p , или q должно быть четным. Оба они не могут быть четными, так как они взаимно просты. Но тогда x не может быть целым. Значит, $T_0 = 2T$ и

$$pqT = a(a + 1), \quad x = (p^2 + q^2)T, \quad y = \frac{(q - p)(q + p)}{2a + 1}T. \quad (39)$$

Покажем, что T не может быть больше чем $a\sqrt{(a + 1)/2}$. Пусть t – некоторый простой делитель T . Тогда он находится среди делителей a или $a + 1$. Но a и $a + 1$ взаимно просты, поэтому ни один из их делителей не может быть делителем числа $2a + 1 = a + (a + 1)$. Следовательно, $\text{НОД}(T, 2a + 1) = 1$. Это значит, что в (39) y является целым за счет делимости $q^2 - p^2$ на $2a + 1$, поэтому $q^2 - p^2 \geq 2a + 1$. Из этого неравенства находим, что $q^2 \geq 2a + 1 + p^2 \geq 2a + 2$. Так

как $p \geq 1$ и $T = a(a+1)/(pq)$, то $1 \leq T \leq a\sqrt{(a+1)/2}$ (примеры показывают, что эта оценка достигается).

Далее, для верхней границы p имеем две оценки: $p < a/T\sqrt{(a+1)/2}$ (получается из равенства $pqT = a(a+1)$ с учетом неравенства $q^2 \geq 2a+2$) и $p < \sqrt{a(a+1)/T}$ (получается из условия $q > p$). Из этих оценок первая точнее при $T \geq a/2$, а вторая – при $T < a/2$, и обе они не превосходят верхней границы для T , т.е. для нахождения p искать новых делителей числа $a(a+1)$ не надо.

В итоге для решения системы

$$\begin{cases} x - (2a+1)y = 2Tp^2, \\ x + (2a+1)y = 2Tq^2 \end{cases}$$

имеем следующий алгоритм: для числа $a(a+1)$ находим делители T , $1 \leq T \leq a\sqrt{(a+1)/2}$, затем среди этих делителей для каждого взятого T находим числа $p \geq 1$ (с учетом указанной выше границы) с условием, что число $q = a(a+1)/(pT)$ является взаимно простым с p . После этого проверяем, что число $r = (q-p)(q+p)/(2a+1)$ является целым, и в случае положительного ответа узнаем номер нетривиальной гармоники $y = m = rT$. Такой алгоритм позволяет избежать быстрого переполнения, которое при прямом разложении правой части $N^2 = 4a^2(a+1)^2$ уравнения (38) на делители наступает уже при $a \sim 1000$. По нашему алгоритму поиск номеров нетривиальных гармоник можно проводить для уплотнений до порядка в несколько миллионов.

Ниже приведены две таблицы вычислений, в табл. 2 даны все номера нетривиальных гармоник для “квадратных” уплотнений, соответствующих значениям $2 \leq a \leq 10$ (при $a = 1$ нетривиальных гармоник нет), в табл. 3 указаны те значения $a \leq 1000$ (т.е. для порядков уплотнений до $\sim 4 \cdot 10^6$), для которых окрестность полюса имеет 4 и более нетривиальных гармоник.

Параллельно с описанием алгоритма нахождения номеров нетривиальных гармоник аналогичные проведенным выше рассуждения могут быть использованы для нахождения верхней оценки номеров гармоник в окрестности полюса с заданным “квадратным” порядком уплотнения. Пусть $2N+1 = (2a+1)^2$. Тогда $N^2 = 4a^2(a+1)^2$ и уравнение Пелля распадается в систему

$$\begin{cases} x - (2a+1)y = a_1, \\ x + (2a+1)y = a_2, \end{cases}$$

где $a_1 a_2 = N^2$ и $a_2 > a_1$. Из этой системы имеем

$$2(2a+1)y = a_2 - a_1. \quad (40)$$

Значит, делители a_1 и a_2 числа N^2 должны быть одинаковой четности, а так как N^2 – число четное, то a_1 и a_2 оба четные, т.е. можем положить $a_1 = 2b_1$, $a_2 = 2b_2$. Тогда уравнение (40) принимает вид

$$(2a+1)y = b_2 - b_1, \quad b_1 b_2 = a^2(a+1)^2.$$

Таблица 3

a	Порядок уплощения	Число гармоник
7	224	4
31	3968	4
55	12320	4
71	20448	4
104	43680	6
127	65024	4
136	74528	4
199	159200	4
287	330624	4
357	511224	4
391	613088	4
494	978120	5
511	1046528	4
594	1413720	6
648	1677024	4
703	1979648	4
799	2556800	4
967	3744224	4

Таблица 2

a	Порядок уплощения	Номера гармоник
2	24	7
3	48	10
4	80	22
5	120	27
6	168	45
7	224	12, 14, 52, 209
8	288	76
9	360	81
10	440	11, 115, 288

Для получения наибольшего значения y необходимо иметь наибольшее возможное значение разности $b_2 - b_1$, делящейся на $2a + 1$. При конкретно заданном a наибольшая величина такой разности определяется перебором возможных значений меньшего делителя $b_1 = 1, 2$ и т.д. Всегда верна оценка $b_2 - b_1 \leq a^2(a + 1)^2 - 1$, откуда имеем

$$y \leq \left\lceil \frac{(a^2+a-1)(a^2+a+1)}{2a+1} \right\rceil.$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 5. *Если полюс поверхности вращения имеет “квадратный” порядок уплощения с $2N = 4a(a + 1)$, тогда наибольший номер нетривиальной гармоники не превосходит числа $b = \lceil (a^2+a-1)(a^2+a+1)/(2a+1) \rceil$, причем эта оценка достигается.*

Достижимость оценки доказывается примером уплощения с $a = 2$. В этом случае мы знаем, что существует гармоника с номером 7 (см. табл. 2) и в то же время наша оценка дает $b = \lceil 5 \cdot 7/5 \rceil = 7 = y_{\max}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Можно предложить менее точные, но более простые оценки

$$y \leq \left[(a^2 + a - 1) \frac{5a + 4}{10} \right] \leq \left[(a^2 + a - 1) \frac{a + 1}{2} \right].$$

10. Пусть поверхность S замкнутая и пусть оба ее полюса являются точками уплощения разных порядков $2k_1 - 2$ и $2k_2 - 2$. Тогда для ее нежесткости необходимо, чтобы система уравнений Пелля

$$\begin{cases} x^2 - (2N + 1)y^2 = N^2, & N = k_1 - 1, \\ z^2 - (2M + 1)y^2 = M^2, & M = k_2 - 1 \end{cases} \quad (41)$$

имела решение с общим $y \geq 2$. Если такой общий номер гармоник существует, то мы будем называть порядки уплощений *согласованными*, в противном случае порядки уплощений назовем *несогласованными*. В случае несогласованных порядков уплощений поверхность вращения S в целом является жесткой относительно аналитических б.м. изгибаний 1-го порядка.

По поводу решений системы (41) известны следующие факты.

1) Число решений (x, y, z) системы конечно [5].

2) Множества пар согласованных и несогласованных порядков уплощений бесконечны. Вопрос об этом свойстве системы (41) был поставлен в [5], и положительный ответ подтвержден примерами, принадлежащими А. К. Дубискасу. Приведем эти примеры.

Пример бесконечного множества согласованных пар дают уплощения порядка $2M = 648p^4 - 90p^2 + 2$ и $2N = 216p^4 - 78p^2 + 6$, $p = 1, 2, \dots$. Для них система (41) имеет решение $x = 3p^2(36p^2 - 1) - 3$, $y = 6p$, $z = 9p^2(36p^2 - 1) - 1$, что проверяется непосредственными вычислениями.

Пример бесконечного множества пар несогласованных порядков уплощений дают пары с $N = 12$ и с любым $M > 2303$. Доказательство этого получается так. Уравнение $x^2 - 25y^2 = (x - 5y)(x + 5y) = 144$ имеет только одно решение $(x, y) = (37, 7)$. Но тогда $(2M + 1)y^2 + M^2 = M^2 + 49(2M + 1) = (M + 49)^2 - 49 \cdot 48 = z^2$, а уравнение $(M + 49 + z)(M + 49 - z) = 49 \cdot 48$, очевидно, не имеет решения в целых числах при $M + 49 \geq 49 \cdot 48$. На самом деле более точная оценка для нужных M получается из утверждения 2 и она имеет вид $M > 1080$.

Это же утверждение позволяет найти более общее описание примера множества несогласованных пар. А именно в одном из полюсов нужно взять уплощение “квадратного” порядка $2N + 1 = (2a + 1)^2$, для которого первое уравнение системы (41) имеет конечное число решений. По теореме 5 имеем

$$y_{\max} \leq b = \left\lceil \frac{(a^2 + a - 1)(a^2 + a + 1)}{2a + 1} \right\rceil,$$

а тогда по утверждению 2 порядки согласованных уплощений в другом полюсе не должны превосходить числа $2 + b^2(b^2 - 5)/2$. Следовательно, имеем следующую теорему о жесткости.

ТЕОРЕМА 6. *Если один из полюсов аналитической поверхности вращения имеет “квадратный” порядок уплощения с $2N = 4a(a + 1)$, то при порядке*

уплощения другого полюса больше чем $2 + b^2(b^2 - 5)/2$, $b = [(a^2 + a - 1)(a^2 + a + 1)/(2a + 1)]$ поверхность является жесткой в аналитическом классе деформаций. Свойство жесткости сохраняется и в классе деформаций гладкости C^∞ .

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Вместе с тем задача общего описания множества несогласованных пар остается пока нерешенной.

Рассмотрим отдельно случай, когда порядки уплощений в обоих полюсах являются “квадратными”. Тогда можно получить еще один признак несогласованности порядков уплощений.

ТЕОРЕМА 7. Если окрестности обоих полюсов с разными “квадратными” порядками уплощения допускают б.м. изгибания только с одной нетривиальной гармоникой, то их порядки уплощений являются несогласованными.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [5] первое уравнение системы (41) при $2N+1 = (2a+1)^2$ всегда имеет решение $y = s(4s+3)$, если $a = 2s$, и $y = (s+1)(4s+1)$, если $a = 2s+1$. Соответственно, второе уравнение системы при $2M+1 = (2b+1)^2$ имеет решение $y = t(4t+3)$, если $b = 2t$, и $y = (t+1)(4t+1)$, если $b = 2t+1$. Если нетривиальные гармоники в обоих полюсах единственны, то их номера обязаны совпадать с указанными значениями y . Однако если a и b оба нечетные и $a < b$, то $0 < s < t$ и равенство $s(4s+3) = t(4t+3)$ невозможно, аналогично, если оба они нечетные. Пусть теперь a четное, а b нечетное, тогда равенство $s(4s+3) = (t+1)(4t+1)$ при $s < t$ тоже невозможно. Действительно, пусть $t = s+k$, тогда $0 > -2s = 8sk + 4k^2 + 5k + 1 > 0$. Если же a нечетно, а b четно, то имеем равенство $4s^2 + 5s + 1 = 4t^2 + 3t$, решив которое относительно s , получаем $s = t - 1/4$, что невозможно. Теорема доказана.

Так как решение системы

$$\begin{cases} x^2 - (2a+1)^2 y^2 = 4a^2(a+1)^2, \\ z^2 - (2b+1)^2 y^2 = 4b^2(b+1)^2 \end{cases} \quad (42)$$

сводится к решению обоих уравнений по описанному выше алгоритму, то нахождение решения системы (42) сводится к сравнению полученных значений y . Таким образом, мы нашли решения для пар полюсов с уплощениями “квадратных” порядков, соответствующих парам (a, b) , $a < b$, со значениями $1 \leq a < 5000$ и $a+1 \leq b \leq 5000$ (это уплощения каждого полюса в диапазоне от порядка 2 до порядка $\approx 100 \cdot 10^6$), что дало возможность сформулировать следующую “компьютерную” теорему.

ТЕОРЕМА 8. Пусть полюса поверхности вращения имеют уплощения “квадратных” порядков $(2N, 2M)$, $N < M$, $N < 100 \cdot 10^6$, $M < 100 \cdot 10^6$. Тогда среди них есть только 35 пар (см. табл. 4) согласованных порядков $(2N, 2M)$ с номером гармоники y .

Среди рассмотренных уплощений содержится порядка 10^{16} пар “квадратных”, но согласованных, как видим, всего 35 пар. На основании этих вычислений естественно высказать предположение, что система (42) из двух

Таблица 4

$2N$	$2M$	y	$2N$	$2M$	y
224	30624	52	440	3024	288
2600	24024	637	2600	114920	637
2600	152880	637	3480	3606200	855
3698	450240	124	6240	1555008	1540
6888	2122848	1701	7920	44422224	2002
8280	32760	627	13224	303600	15840
13224	5851560	15840	13224	73702224	15840
17688	1803648	4455	19880	43864128	5005
24024	114920	637	24024	152880	637
38024	245024	679	38024	77457600	679
65024	4239480	1008	108240	5085024	185472
114920	152880	637	142128	974168	93024
173888	10556000	1210	173888	5536608	3724
245024	77457600	679	303600	5851560	15840
303600	73702224	15840	436920	46226400	109395
505520	39929760	1123200	811800	48011040	1785
1413720	5499024	1683	2666688	73977200	2365
5851560	73702224	15840			

уравнений относительно пяти неизвестных (a, b, x, y, z) имеет только конечное число решений. Это же предположение находит дополнительный аргумент в том, что для “квадратных” порядков уплощений при нахождении номеров нетривиальных гармоник для одного полюса большинство полюсов имеют только одну гармонику, а это по теореме 7 для двух полюсов должно привести к несогласованности их порядков уплощений. А именно вычисления на компьютере показывают, что до порядков уплощений $2N = 67749360$ последний порядок, дающий 6 нетривиальных гармоник, равен $2N = 15249024$ (а больше шести не дает ни один порядок), 5 гармоник дает самый большой порядок $2N = 35820224$, последний порядок для четырех гармоник равен $2N = 23961024$, для трех – $2N = 65529024$, а для двух – $2N = 67059720$.

11. Другая возможность исследования системы (41) с помощью простого алгоритма вычислений бывает в случае, когда произведение $(2N + 1)(2M + 1)$ или отношение $(2N + 1)/(2M + 1)$ является квадратом рационального числа. Действительно, пусть $(2N + 1)(2M + 1) = p^2/q^2$. Тогда из системы (41) получаем уравнение

$$(2N + 1)z^2 - (2M + 1)x^2 = (M - N)(N + M + 2MN).$$

Умножая его на $2N + 1$, приходим к уравнению

$$(2N + 1)^2 z^2 - \frac{p^2}{q^2} x^2 = (2N + 1)(M - N)(N + M + 2MN),$$

которое приводится к разлагаемому на два линейных уравнения вида

$$(q(2N + 1))^2 z^2 - p^2 x^2 = (2N + 1)(M - N)(M + N + 2MN)q^2.$$

Аналогично проверяется и случай $(2N + 1)/(2M + 1) = p^2/q^2$.

В работе [18] рассмотрен случай, когда порядки уплощений в обоих полюсах не являются “квадратными” или не удовлетворяют только что приведенному условию для их произведения или отношения. Как мы уже упоминали, конечность числа решений системы (41) установлена в [5] сведением к известной теореме Туэ о конечности числа решений диофантовых уравнений порядка 3 и выше, но без предъявления алгоритма ее решения. В [18] применением довольно сложной для неспециалиста по теории чисел техники предложен конечный алгоритм с результатами его применения в первой сотне порядков уплощения в обоих полюсах.

12. Согласованность порядков уплощений является необходимым, но вовсе еще не достаточным признаком нежесткости замкнутой поверхности. Простой пример – выпуклая поверхность вращения, она всегда жесткая, но порядки уплощений в полюсах можно взять какими угодно, в том числе и согласованными. Однако можно показать, что среди поверхностей вращения с уплощениями в полюсах при любых значениях порядков уплощений существуют нежесткие поверхности. А именно, верна следующая

ТЕОРЕМА 9. *Для любого данного натурального числа $m \geq 2$ и любой пары чисел (не обязательно целых) $n_1 \geq 1$, $n_2 \geq 2$ существует поверхность вращения S , имеющая в полюсах уплощения порядка $p = 2n_1 - 2 \geq 0$ и $q = 2n_2 - 2 \geq 0$ и допускающая б.м. изгибания с нетривиальной гармоникой с номером m , причем возможно любое сочетание уплощений:*

- 1) в обоих полюсах уплощения имеют порядок $p = q = 0$ (т.е. $n_1 = n_2 = 1$ и уплощения фактически нет);
- 2) в одном полюсе уплощение есть, а в другом его нет;
- 3) оба полюса имеют уплощения.

Во всех случаях можно гарантировать, что и поверхность, и поле б.м. изгибания аналитичны вне полюсов, а в полюсах гладкость следующая:

- 1) и поверхность, и б.м. изгибание аналитичны, если оба полюса без уплощений (т.е. $n_1 = n_2 = 1$);
- 2) и поверхность, и б.м. изгибание аналитичны всюду, если в обоих полюсах уплощения четного порядка и согласованы между собой при данном номере гармоники m ;
- 3) в остальных случаях гладкость поверхности и поля б.м. изгибания определяется леммой 3 и следствием 2.

Построение искомой нежесткой поверхности мы проведем методом работы [19], для чего сначала докажем следующую простую лемму.

ЛЕММА 4. Пусть $S: \{x_1 = \rho \cos \theta, x_2 = \rho \sin \theta, x_3 = \varphi(\rho)\}$, $0 \leq \rho \leq \infty$, – поверхность вращения с осью Oz , и пусть для функции $\varphi(\rho)$, определяющей меридиан поверхности, выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 1, \quad \varphi(\rho) - 1 \sim c_1 \rho^b, \quad c_1 > 0, \quad b > 0, \quad \rho \rightarrow 0, \\ \varphi(\rho) \sim c_2 \rho^a, \quad c_2 > 0, \quad a > 1, \quad \rho \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Далее, пусть S^* – поверхность, полученная из S проективным преобразованием по формуле

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1}{x_3}, \quad \tilde{x}_2 = \frac{x_2}{x_3}, \quad \tilde{x}_3 = \frac{1}{x_3}.$$

Тогда S^* является замкнутой поверхностью вращения с полюсами в точках с аппликатами $\tilde{x}_3 = 0$ и $\tilde{x}_3 = 1$ со следующим поведением ее меридиана $\tilde{x}_3 = \tilde{\varphi}(r)$ в полюсах:

$$\begin{aligned} \tilde{x}_3 = 1: \tilde{\varphi}(r) = 1 - c_1 r^b + o(r^b), \quad r = \sqrt{\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2} \rightarrow 0, \\ \tilde{x}_3 = 0: \tilde{\varphi}(r) = c_2^{1/(a-1)} r^{a/(a-1)} + o(r^{a/(a-1)}), \quad r \rightarrow 0. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полюс $x_3 = 1$ поверхности S переходит в полюс $\tilde{x}_3 = 1$ поверхности S^* . А в его окрестности имеем

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \frac{\rho}{\varphi(\rho)} \sim \rho, \quad \rho \rightarrow 0,$$

и поэтому

$$1 - \tilde{x}_3 = \frac{\varphi(\rho) - 1}{\varphi(\rho)} \sim c_1 r^b, \quad r \rightarrow 0.$$

В свою очередь, в окрестности полюса $z = 0$, являющегося образом бесконечно удаленной точки поверхности S , имеем

$$r = \sqrt{\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2} = \frac{\rho}{\varphi(\rho)} \sim \frac{1}{c_2} \rho^{1-a}, \quad \rho = (c_2 r)^{1/(1-a)} \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow 0,$$

откуда

$$\tilde{x}_3 = \frac{1}{\varphi(\rho)} \sim \frac{1}{c_2} \rho^{-a} \sim c_2^{1/(a-1)} r^{a/(a-1)}, \quad r \rightarrow 0,$$

т.е. оба утверждения доказаны.

СЛЕДСТВИЕ 6. Если поверхность S аналитическая (и поэтому, в частности, k_2 – натуральное число) и k_1 – натуральное число, то S^* также является аналитической поверхностью с уплощениями в полюсах соответственно порядков $2k_1 - 2 > 0$ и $2k_2 - 2 > 0$, если $k_1 > 1$, $k_2 > 1$, и без уплощения в том полюсе, в котором число $k_i = 1$.

Приступаем теперь к доказательству теоремы 9. Пусть $p \geq 0$, $q \geq 0$ – произвольно заданные порядки уплощений в двух полюсах искомой поверхности вращения, и пусть $m \geq 2$ – заданный номер гармоники ее нетривиального б.м. изгиба. Построение такой поверхности мы проведем по идее работы [19]:

покажем, что можно так задать функцию $\alpha_m(\rho)$, чтобы она определяла m -ю нетривиальную гармонику б.м. изгибаия некоторой поверхности вращения S_0 с необходимыми условиями поведения в полюсах.

Положим

$$\alpha_m(\rho) = \frac{1}{\rho^{-k_1} + \rho^{k_2}} = \frac{\rho^{k_1}}{1 + \rho^{k_1+k_2}}, \quad 0 \leq \rho < \infty, \quad (43)$$

и покажем, что можно так подобрать положительные числа k_1 и k_2 , чтобы были выполнены все утверждения теоремы.

У нас есть формула (29), позволяющая найти уравнение меридиана $\varphi(\rho)$ поверхности по априори заданной гармонике поля ее б.м. изгибаия³. В данном случае встречающийся в формуле интеграл легко вычисляется и мы можем получить явный вид для $\varphi'(\rho)$. Но нам достаточно знать только поведение $\varphi'(\rho)$ при $\rho \rightarrow 0$ и $\rho \rightarrow \infty$. Имеем

$$\varphi'(\rho) \sim C_1 \rho^{(k_1^2 - k_1)/(m^2 - k_1)}, \quad \rho \rightarrow 0, \quad \varphi'(\rho) \sim C_2 \rho^{(k_2 + k_2^2)/(m^2 + k_2)}, \quad \rho \rightarrow \infty,$$

где C_1 и C_2 – некоторые положительные постоянные.

По этим эквивалентностям с учетом поведения $\alpha_m(\rho)$

$$\alpha_m(\rho) \sim \rho^{k_1}, \quad \rho \rightarrow 0, \quad \alpha_m(\rho) \sim \rho^{-k_2}, \quad \rho \rightarrow \infty,$$

мы из уравнения (19) находим поведение функции $\beta_m(\rho)$:

$$\beta_m(\rho) \sim -C_1 \frac{m^2 - k_1}{m^2 - 1} \rho^{(m^2 - 1)k_1/(m^2 - k_1)}, \quad \rho \rightarrow 0, \quad (44)$$

$$\beta_m(\rho) \sim -C_2 \frac{m^2 + k_2}{m^2 - 1} \rho^{-(m^2 - 1)k_2/(m^2 + k_2)}, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (45)$$

Обозначим координаты точек из $\mathbb{R}^3$ в стандартном базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ через x_1, x_2, x_3 . Точки поверхности вращения S_0 с меридианом $x_3 = \varphi(\rho)$ имеют координаты

$$x_1 = \rho \cos \theta, \quad x_2 = \rho \sin \theta, \quad x_3 = \varphi(\rho)$$

со следующим поведением функции $\varphi(\rho)$:

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 1, \quad \varphi(\rho) - 1 &\sim C'_1 \rho^{(k_1^2 + m^2 - 2k_1)/(m^2 - k_1)}, \quad \rho \rightarrow 0, \\ \varphi(\rho) &\sim C'_2 \rho^{(k_2^2 + m^2 + 2k_2)/(m^2 + k_2)}, \quad C'_2 = \frac{m^2 + k_2}{m^2 + k_2^2 + 2k_2} C_2 \rho \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (46)$$

Как в лемме 4, после применения указанного там проективного преобразования поверхность S_0 перейдет в поверхность S с координатами точек $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$ со следующим их поведением в полюсах:

$$\tilde{x}_3 = 1 - C'_1 r^b + o(r^b), \quad b = \frac{m^2 + k_1^2 - 2k_1}{m^2 - k_1}, \quad r \sim \rho \rightarrow 0, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_3 &= C''_2 r^{a/(a-1)} + o(r^{a/(a-1)}), \quad a = \frac{m^2 + k_2^2 + 2k_2}{m^2 + k_2}, \\ r &= \frac{1}{C'_2} \rho^{1-a} \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (48)$$

³Эта формула получена изменением соответствующей формулы из [19] так, чтобы было исключено использование второй производной меридиана и поля б.м. изгибаия.

По известной теореме Зауэра полю б.м. изгибаний поверхности S_0 с компонентами z_1, z_2, z_3 в стандартном базисе соответствует поле б.м. изгибаний поверхности S с компонентами (см., например, [9])

$$\tilde{z}_1 = \frac{1}{x_3}, \quad \tilde{z}_2 = \frac{z_2}{x_3}, \quad \tilde{z}_3 = -\frac{x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3}{x_3}. \quad (49)$$

Найдем главные части третьей компоненты в полюсах. С использованием формулы (21) имеем равенство

$$x_1 z_1 + x_2 z_2 = \operatorname{Re}[(x_1 + ix_2)(z_1 - iz_2)] = \rho \beta_m(\rho) \cos m\theta.$$

Отсюда, с учетом соотношения (45) для полюса с $x_3 = 1$, получаем главную часть для компоненты $\tilde{z}_3$

$$\tilde{z}_3 = \left[C_1 \frac{m^2 - k_1}{m^2 - 1} r^c - r^{k_1} + o(r^c) \right] \cos m\theta, \quad c = 1 + \frac{(m^2 - 1)k_1}{m^2 - k_1} > k_1, \quad r \rightarrow 0.$$

Следовательно, в окрестности этого полюса гармоника с номером m имеет главную часть r^{k_1} . Теперь вспомним, что по известному порядку уплощения p и по номеру m гармоники порядок ее малости ν_m определяется формулой (37), дающей решение уравнения $\nu_m^2 + (2k - 2)\nu_m - (2k - 1)m^2 = 0$. В нашем случае $2k = (m^2 + k_1^2 - 2k_1)/(m^2 - k_1)$. Если мы в уравнение для ν_m подставим значение $\nu_m = k_1$, то увидим, что оно выполнено. Значит, k_1 должно определяться равенством

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + (p+1)m^2}, \quad (50)$$

где p – данный порядок уплощения рассматриваемого полюса, m – данный номер гармоники.

Рассмотрим другой полюс. В его окрестности для нахождения главной части $\tilde{z}_3$ с использованием эквивалентности (44) и указанной в (46) связи между коэффициентами C_2 и C'_2 имеем следующие соотношения:

$$\frac{x_1 z_1 + x_2 z_2}{x_3} + z_3 = -\left[\frac{C_2}{C'_2} \frac{m^2 + k_2}{m^2 - 1} \rho^{-k_2} + \rho^{-k_2} \right] \cos m\theta = -\frac{k_2 + 2k_2 + 1}{m^2 - 1} \rho^{-k_2},$$

откуда, с учетом данной в (48) связи между r и ρ , получаем, что

$$\tilde{z}_3 \sim C_0 r^{(m^2 + k_2)/(1 + k_2)} \cos m\theta, \quad r \rightarrow 0. \quad (51)$$

Согласно формуле (48) в этом полюсе поверхность должна иметь уплощение порядка

$$q = \frac{m^2 - k_2^2}{k_2^2 + k_2}. \quad (52)$$

С другой стороны, нам известен порядок убывания гармоники $\tilde{z}_3$ при $r \rightarrow 0$. Согласно (51) он равен

$$\nu_m = \frac{m^2 + k_2}{1 + k_2}, \quad (53)$$

а это число определяется по значениям q и m . Если мы приравняем к нулю результат двух уравнений (52) и (53) как уравнений для k_2 , то окажется, что он совпадет с уравнением для определения ν по значениям порядка уплощения и номера гармоники. Поэтому искомое значение k_2 определяется по формуле

$$k_2 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4m^2(1+q)}}{2(1_q)}, \quad (54)$$

где q – заранее заданный порядок уплощения, а m – данный порядок гармоники. Меридиан искомой нежесткой поверхности определяется уравнением (29), в котором $\alpha_m(\rho)$ задается формулой (43) с показателями k_1, k_2 , вычисленными соответственно по равенствам (50) и (54). Теорема доказана.

13. Нам теперь надо использовать теоремы о жесткости для установления неизгибаемости некоторых классов поверхностей вращения. Для этого вспомним, что для изгибаемости поверхности в аналитическом относительно параметра классе изометрических деформаций необходимо, чтобы поверхность была нежесткой относительно б.м. изгибаний 1-го и 2-го порядков, см. [20], [9]. Поэтому, если она обладает жесткостью 1-го или 2-го порядков, она не будет допускать аналитических по параметру изгибаний. Меридиан поверхности вращения с осью вращения Oz в общем случае имеет параметрическое уравнение вида $x = f(t), z = g(t)$. Если в некотором участке изменения параметра t есть точка $t = t_0$, в которой $g'(t_0) = 0$, то при очень широких условиях на меридиан (в частности, при его аналитичности) сколь угодно узкая полоса поверхности (так называемый *желоб*) вокруг параллели $z = g(t_0)$ оказывается обладающей жесткостью 2-го порядка, поэтому такая поверхность “в целом” будет неизгибаемой. Отсюда имеем справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 10. *Если поверхность вращения изгибаема, ее меридиан необходимо однозначно проектируется на ось вращения.*

СЛЕДСТВИЕ 7. *Аналитическая торообразная поверхность вращения является неизгибаемой в классе аналитических по параметру изометрических деформаций.*

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Как было сказано выше, жесткость 2-го порядка желоба вращения доказана при очень широких условиях на меридиан (см. [21], [22]), поэтому эта теорема справедлива даже для поверхностей и деформаций класса гладкости C^1 при некоторых довольно слабых дополнительных условиях (например, эти условия выполнены, если производная $g'(t)$ имеет в точке $t = t_0$ нуль степенного порядка).

Итак, мы можем предположить, что поверхность гомеоморфна сфере и что $g'(t) > 0$ всюду, кроме полюсов. Дополнительно предположим, что поверхность аналитична в сколь угодно малых окрестностях полюсов и что мы ищем ее изгибания с сохранением аналитичности в этих окрестностях. Тогда работают все установленные выше признаки жесткости и мы на их основании можем утверждать справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 11. Если полюса описанной выше поверхности являются точками уплощения и порядки их уплощений не согласованы, тогда соответствующая поверхность вращения неизгибаема.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность рецензенту, критические замечания которого помогли улучшить изложение материала, особенно в начальных разделах 1–5.

Список литературы

- [1] Н. В. Ефимов, “Качественные вопросы теории деформаций поверхностей «в малом»”, Тр. МИАН СССР, **30**, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1949, 3–128.
- [2] Н. В. Ефимов, “О жесткости в малом”, Докл. АН СССР, **60**:5 (1948), 761–764.
- [3] И. Иванова-Каратопраклиева, И. Х. Сабитов, “Изгибание поверхностей. I”, Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом., **23**, ВИНТИ, М., 1991, 131–184; англ. пер.: I. Ivanova-Karatopraklieva, I. Kh. Sabitov, “Surface deformation. I”, *J. Math. Sci.*, **70**:2 (1994), 1685–1716.
- [4] С. Б. Климентов, И. Х. Сабитов, З. Д. Усманов, “Деформация поверхностей “в малом”: от Н. В. Ефимова до современных исследований”, *Математика, Современные проблемы математики и механики*, **6**, Вып. 2, Изд-во Моск. ун-а, М., 2011, 34–48.
- [5] И. Х. Сабитов, “Исследование жесткости и неизгибаемости аналитических поверхностей вращения с уплощением в полюсе”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **5** (1986), 29–36; англ. пер.: I. Kh. Sabitov, “A study of the rigidity and inflexibility of analytic surfaces of revolution with flattening at the pole”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **41**:5 (1986), 33–41.
- [6] И. Иванова-Каратопраклиева, И. Х. Сабитов, “Бесконечно малые изгибания второго порядка поверхностей вращения с уплощением в полюсе”, *Матем. заметки*, **45**:1 (1989), 28–35; англ. пер.: I. Ivanova-Karatopraklieva, I. Kh. Sabitov, “Second-order infinitesimal bendings of surfaces of rotation with densification at a pole”, *Math. Notes*, **45**:1 (1989), 19–24.
- [7] С. Э. Кон-Фоссен, “Нежесткие замкнутые поверхности”, *УМН*, **9**:1 (1954), 63–81; пер. с англ.: S. E. Chon-Vossen, “Unstarre geschlossene Flächen”, *Math. Ann.*, **102**:1 (1930), 10–29.
- [8] Н. В. Ефимов, “Некоторые предложения о жесткости и неизгибаемости”, *УМН*, **7**:5(51) (1952), 215–224.
- [9] И. Х. Сабитов, “Локальная теория изгибаний поверхностей”, *Геометрия – 3*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, **48**, ВИНТИ, М., 1989, 196–270; англ. пер.: I. Kh. Sabitov, “Local theory of bendings of surfaces”, *Geometry*, v. III, *Encyclopaedia Math. Sci.*, **48**, Springer-Verlag, Berlin, 1992, 179–250.
- [10] И. Х. Сабитов, “О связях между бесконечно малыми изгибаниями разных порядков”, *Укр. геом. сб.*, **35** (1992), 118–124; англ. пер.: I. Kh. Sabitov, “On the relations between infinitesimal bendings of different orders”, *J. Math. Sci.*, **72**:4 (1994), 3237–3241.
- [11] R. Connelly, H. Servatius, “Higher-order rigidity – What is the proper definition?”, *Discrete Comput. Geom.*, **11**:1 (1994), 193–200.
- [12] И. Х. Сабитов, “О жесткости “гофрированных” поверхностей вращения”, *Матем. заметки*, **14**:4 (1973), 517–522; англ. пер.: I. Kh. Sabitov, “The rigidity of “corrugated” surfaces of revolution”, *Math. Notes*, **14**:4 (1973), 854–857.

- [13] И. Х. Сабитов, “Возможные обобщения леммы Минагава–Раддо о жесткости поверхности вращения с закрепленной параллелью”, *Матем. заметки*, **19**:1 (1976), 123–132; англ. пер.: I. Kh. Sabitov, “Possible generalizations of the Minagawa–Rado lemma on the rigidity of a surface of revolution with a fixed parallel”, *Math. Notes*, **19**:1 (1976), 74–79.
- [14] А. В. Погорелов, *Внешняя геометрия выпуклых поверхностей*, Наука, М., 1969; англ. пер.: A. V. Pogorelov, *Extrinsic geometry of convex surfaces*, Transl. Math. Monogr., **35**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1973.
- [15] Дж. Л. Каждан, Ф. У. Уорнер, “Функции кривизны для открытых двумерных многообразий”, *Исследования по метрической теории поверхностей*, Новое в зарубежной науке, **18**, Мир, М., 1980, 60–80; пер. с англ.: J. L. Kazdan, F. W. Warner, “Curvature functions for open 2-manifolds”, *Ann. of Math. (2)*, **99** (1974), 203–219.
- [16] А. О. Гельфонд, *Решение уравнений в целых числах*, 4-е изд., Физматгиз, М., 1983; англ. пер. 3-го изд.: A. O. Gel'fond, *Solving equations in integers*, Mir, Moscow, 1981.
- [17] T. Nagell, *Introduction to number theory*, Wiley, New York, 1951.
- [18] А. Ю. Нестеренко, “Нахождение целочисленных решений системы связанных уравнений Пелля”, *Матем. заметки*, **86**:4 (2009), 588–600; англ. пер.: A. Yu. Nesterenko, “Determination of integer solutions of a system of simultaneous Pell equations”, *Math. Notes*, **86**:4 (2009), 556–566.
- [19] А. Д. Милка, “О точках относительной нежесткости выпуклой поверхности вращения”, *Укр. геом. сб.*, **1** (1965), 65–74.
- [20] Н. В. Ефимов, “Качественные вопросы теории деформаций поверхностей”, *УМН*, **3**:2 (1948), 47–158.
- [21] И. Х. Сабитов, “О бесконечно малых изгибах желобов вращения. I”, *Матем. сб.*, **98(140)**:1(9) (1975), 113–129; англ. пер.: I. H. Sabitov, “On infinitesimal bendings of troughs of revolution. I”, *Math. USSR-Sb.*, **27**:1 (1975), 103–117.
- [22] И. Х. Сабитов, “О бесконечно малых изгибах желобов вращения. II”, *Матем. сб.*, **99(141)**:1 (1976), 49–57; англ. пер.: I. H. Sabitov, “On infinitesimal bendings of troughs of revolution. II”, *Math. USSR-Sb.*, **28**:1 (1976), 41–48.

Идждад Хакович Сабитов
(Idzhad Kh. Sabitov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: isabitov@mail.ru

Поступила в редакцию
06.11.2012 и 22.04.2013