Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Овчинников, Обобщенная интерполяционная конструкция Лионса–Петре и оптимальные теоремы вложения для пространств Соболева, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 1, 87–104

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8192>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 18:34:17

УДК 517.982

В. И. Овчинников

Обобщенная интерполяционная конструкция Лионса–Петре и оптимальные теоремы вложения для пространств Соболева

В работе найдено новое описание обобщенного метода средних Лионса–Петре, позволяющее вычислять интерполяционные орбиты пространств, построенных этим методом. В число таких пространств входят все пространства Лоренца с функциональными параметрами, пространства Орлича и близкие к ним. Это в свою очередь приводит к новым оптимальным теоремам вложения для пространств Соболева, построенных на основе конструкции Лионса–Петре, в перестановочно инвариантные пространства. Оказывается, что оптимальное пространство вложения тоже является обобщенным пространством Лионса–Петре, параметры которого явно вычисляются.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: теоремы вложения, пространства Соболева, перестановочно инвариантные пространства, интерполяционные орбиты, обобщенные пространства средних Лионса–Петре.

DOI: 10.4213/sm8192

Введение

В настоящей работе найден довольно широкий класс пространств, инвариантный относительно оптимальных вложений для пространств Соболева. Этот класс включает в себя все пространства Лоренца с функциональными параметрами, все пространства Орлича и многие другие пространства, связанные с пространствами Орлича. Пространства этого класса, связанного с обобщенной интерполяционной конструкцией Лионса–Петре, имеют три параметра: один функциональный и два числовых. В доказанных теоремах вложения указывается в явной форме пересчет параметров при переходе от пространства Соболева к наименьшему перестановочно инвариантному пространству, в которое вложено данное пространство Соболева. Удастся получить аналоги результатов А. Чианки (см. [1]) для пространств Орлича–Соболева любой гладкости, которая строго меньше размерности области определения функций из данных пространств. Эти результаты основаны на орбитальном описании оптимальных пространств в теоремах вложения, найденном в [2]. Для описания орбит потребовалось подробнее исследовать обобщенный метод средних Лионса–Петре.

Одна из версий построения интерполяционных пространств классического метода средних Лионса–Петре может быть описана следующим образом.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00378).

Пусть $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$ – двусторонние положительные геометрические прогрессии, и пусть $\{\gamma_k\}$ – третья геометрическая прогрессия, лежащая между $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$. Пусть знаменатель прогрессии γ лежит строго между знаменателями прогрессий α и β и поэтому найдется такое $0 < \theta < 1$, что $\gamma_k = C\alpha_k^{1-\theta}\beta_k^\theta$.

Пусть $\{X_0, X_1\}$ – банахова пара, и пусть $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$. Рассмотрим векторнозначные последовательности $x_k \in X_0 \cap X_1$ такие, что

$$\{\|x_k\alpha_k\|_{X_0}\} \in l_{p_0}, \quad \{\|x_k\beta_k\|_{X_1}\} \in l_{p_1}.$$

Нетрудно показать, что ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k x_k$$

абсолютно сходится в $X_0 + X_1$.

Множество всех таких сумм рядов обозначим $S(X_0, X_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1)$. Можно проверить, что S будет векторным пространством и что на нем естественным образом вводится норма; таким образом, мы приходим к банахову пространству, промежуточному для пары X_0, X_1 . Более того, оно оказывается интерполяционным пространством типа θ между X_0 и X_1 , т.е. для любого линейного ограниченного оператора $T: \{X_0, X_1\} \rightarrow \{X_0, X_1\}$ справедливо, что $T: S \rightarrow S$ и

$$\|T\|_{S \rightarrow S} \leq C \|T\|_{X_0 \rightarrow X_0}^{1-\theta} \|T\|_{X_1 \rightarrow X_1}^\theta,$$

где θ упомянуто выше, а C – константа, не зависящая от оператора, но зависящая от способа нормировки пространства S .

Знаменитая теорема Я. Петре о сокращении параметров (см. [3], [4]) утверждает, что

$$S(X_0, X_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1) = (X_0, X_1)_{\theta, p_\theta},$$

где $(X_0, X_1)_{\theta, p_\theta}$ – пространство Лионса–Петре и $1/p_\theta = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$.

Роль, которую играют пространства $(X_0, X_1)_{\theta, p}$ в современном анализе, трудно переоценить. Тем не менее с момента их появления постоянно делались попытки расширить это семейство пространств. В частности, потому что характеристическая функция интерполяционного функтора $(X_0, X_1)_{\theta, p}$ является всего лишь степенной (определение характеристической функции см. в [5] или [6]), и поэтому указанное семейство не включает естественным образом пространства, у которых есть более сложный функциональный параметр. Со времени появления пространств $(X_0, X_1)_{\theta, p}$ было предложено много способов преодоления этого недостатка. Ниже предлагается еще один подход. Благодаря этому удастся решить некоторые задачи об описании интерполяционных орбит, а это в свою очередь приводит к новому описанию оптимальных перестановочно инвариантных пространств в теоремах вложения для пространств Соболева, в частности для пространств Орлича–Соболева (см. также [1]). Данные результаты примыкают к результатам из [2]. Кроме того, в настоящей работе приводится доказательство некоторых утверждений из [2], использованных там в качестве иллюстраций к полученным оптимальным теоремам вложения и оставленных без доказательства.

Статья организована следующим образом. В § 1 рассматривается новое определение обобщенного метода средних Лионса–Петре. В § 2 для него доказывается аналог теоремы Петре о сокращении параметров. В § 3 доказывается теорема об описании интерполяционной орбиты обобщенного пространства средних. В § 4 результаты об интерполяционных орбитах применяются для доказательства оптимальных теорем вложения пространств Соболева в перестановочно инвариантные пространства.

§ 1. Обобщенный метод средних Лионса–Петре

1.1. Определение обобщенных пространств Лионса–Петре. Пусть теперь α , β и γ – произвольные двусторонние положительные последовательности.

Через $S(X_0, X_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1)$, где $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, вновь обозначим пространство, состоящее из

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k x_k \quad (\text{сходимость в } X_0 + X_1),$$

где

$$\{\|x_k \gamma_k\|_{X_0+X_1}\} \in l_1, \quad (1.1)$$

$$\{\|x_k \alpha_k\|_{X_0}\} \in l_{p_0}, \quad \{\|x_k \beta_k\|_{X_1}\} \in l_{p_1}. \quad (1.2)$$

Если из условий (1.2) вытекает (1.1), то последовательность γ будем называть *промежуточной между α и β* .

Например, если $p_0 = p_1 = 1$ и последовательность α возрастает, а β убывает, то постоянная последовательность γ будет промежуточной между α и β . Если α возрастает быстрее геометрической прогрессии, а β убывает быстрее геометрической прогрессии, то постоянная последовательность будет промежуточной между α и β независимо от p_0 и p_1 .

Очевидно, $S(X_0, X_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1)$ является банаховым интерполяционным пространством для пары $\{X_0, X_1\}$.

Нашей целью будет доказать аналог теоремы о сокращении параметров для этих пространств. Оказывается, что пространства S совпадают с пространствами $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$, введенными в [7] для описания интерполяционных орбит в парах пространств L_p . Эти пространства также названы обобщенными пространствами Лионса–Петре, потому что их конструкция совпадает с описанной выше, но там используются специальные последовательности α , β и γ , подобранные по интерполяционной функции φ .

Следует обратить внимание на то, что более общее определение метода средних рассмотрено В. И. Дмитриевым в [8] и [9] и подробно изложено в [10]. Однако основные результаты, полученные в упомянутых работах, в конечном итоге относятся к интерполяционным пространствам весьма общей природы, но со степенной характеристической функцией. В настоящей работе рассматривается менее общая ситуация, но для интерполяционных пространств с произвольной характеристической функцией (даже не квазистепенной). Данные

результаты дополняют изучение интерполяционного аналога пространств Орлича, построенного вещественным методом.

Напомним, что положительная функция $\varphi(s, t)$ двух положительных переменных s и t называется интерполяционной функцией, если она однородная первой степени, т.е. $\lambda\varphi(s, t) = \varphi(\lambda s, \lambda t)$ для всех $\lambda > 0$, $s > 0$, $t > 0$, и возрастает по s и t .

Через φ^* обозначается функция $1/\varphi(1/s, 1/t)$, которая оказывается характеристической функцией интерполяционного функтора $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$.

Напомним здесь первоначальное определение обобщенных пространств средних Лионса–Петре $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ (см. [7]).

Множество всех интерполяционных функций обычно обозначается через Φ . Через Φ_0 обозначается подмножество интерполяционных функций таких, что $\varphi(t, 1) \rightarrow 0$ и $\varphi(1, t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\varphi \in \Phi_0$, $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$. Пространство $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ состоит из $u \in X_0 + X_1$ таких, что

$$u = \sum_n \rho(t_n) u_n \quad (\text{абсолютная сходимость в } X_0 + X_1),$$

где $\{\|u_n\|_{X_0}\} \in l_{p_0}$, $\{t_n\|u_n\|_{X_1}\} \in l_{p_1}$, а $\rho(t) = \varphi(1, t)$ и $\{t_n\}$ – балансирующая последовательность для $\rho(t)$ (см. [7]).

Из этого определения пространств $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ видно, что эти пространства содержатся в классе пространств $S(X_0, X_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1)$. Нашей целью будет показать, что при естественных ограничениях на последовательности α , β и γ , гарантирующих, что γ является промежуточной последовательностью между α и β , никаких других пространств в этом классе нет.

Можно показать, что определение 1 укладывается в рамки общего метода средних, рассмотренного в [11]. Поэтому пространства $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ оказываются пространствами J -метода, а при известных ограничениях – и пространствами K -метода (см. [11; с. 543, 396]).

1.2. Конструкция Кальдерона–Лозановского для пространств L_p с весами. Как обычно, через $l_p(w)$, где $1 \leq p \leq \infty$, мы будем обозначать пространство двусторонних последовательностей с положительным весом $w = \{w_k\}$. По определению $\{\xi_k\} \in l_p(w)$, если $\xi w \in l_p$ с естественной нормой $\|\xi\|_{l_p(w)} = \|\xi w\|_{l_p}$.

Через $L_p(W)$ будем обозначать весовое пространство измеримых функций на пространстве $\mathfrak{M}$ с σ -конечной мерой μ , где W – это измеримая положительная функция на $\mathfrak{M}$. По определению $x \in L_p(W)$, если $xW \in L_p$ с естественной нормой $\|x\|_{L_p(W)} = \|xW\|_{L_p}$.

Пусть $\varphi(s, t)$ – интерполяционная функция и $L_{p_0}(W_0)$, $L_{p_1}(W_1)$ – весовые функциональные пространства на общем пространстве с мерой $\mathfrak{M}$.

Через $\varphi(L_{p_0}(W_0), L_{p_1}(W_1))$ обозначается пространство всех измеримых функций x на пространстве с мерой $\mathfrak{M}$ таких, что

$$|x(\mathbf{m})| = \varphi(|x_0(\mathbf{m})|, |x_1(\mathbf{m})|)$$

при почти всех $\mathfrak{m} \in \mathfrak{M}$ для некоторых $x_0 \in L_{p_0}(W_0)$ и $x_1 \in L_{p_1}(W_1)$. (На $[0, \infty) \times [0, \infty)$ функция φ продолжается по непрерывности, что возможно ввиду ее монотонности по s и t .)

Функционал

$$\inf_{\substack{x_0, x_1 \\ |x| = \varphi(|x_0|, |x_1|)}} \max(\|x_0\|_{L_{p_0}(W_0)}, \|x_1\|_{L_{p_1}(W_1)})$$

эквивалентен норме на $\varphi(L_{p_0}(W_0), L_{p_1}(W_1))$. Таким образом, это пространство оказывается банаховым функциональным пространством.

Если $p_0 = p_1 = p$, то

$$\varphi(L_p(W_0), L_p(W_1)) = L_p(\varphi^*(W_0, W_1)).$$

Если $p_0 \neq p_1$, то банахова пара $\{L_{p_0}(W_0), L_{p_1}(W_1)\}$ изоморфна паре $\{L_{p_0}, L_{p_1}\}$ пространств на том же пространстве $\mathfrak{M}$, но с другой мерой (см. [12]). А в этом случае

$$\varphi(L_{p_0}, L_{p_1}) = L_N,$$

где через L_N обозначено пространство Орлича, построенное по функции $N(t)$. В данном случае обратная функция к $N(t)$, т.е. $N^{-1}(t)$ равна $\varphi(t^{1/p_0}, t^{1/p_1})$ при $t \geq 0$.

1.3. K -функционал и K -монотонные интерполяционные конструкции. Пусть $\{X_0, X_1\}$ – банахова пара, $s > 0$, $t > 0$. Положим, как обычно,

$$K(s, t, x, \{X_0, X_1\}) = \inf_{x = x_0 + x_1} s\|x_0\|_{X_0} + t\|x_1\|_{X_1}.$$

Очевидно, что $K(s, t, x, \{X_0, X_1\})$ – интерполяционная функция. Поэтому она однозначно определяется своим сужением на полуось $\{(1, t)\}$, где $t > 0$. Обычно K -функционалом называют

$$K(t, x, \{X_0, X_1\}) = K(1, t, x, \{X_0, X_1\}).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Интерполяционная конструкция (функтор) $\mathfrak{F}$ называется K -монотонной на некоторой подкатегории банаховых пар, если для любых двух пар $\{X_0, X_1\}$ и $\{Y_0, Y_1\}$ из этой подкатегории найдется такая константа C , что для любых $x \in X_0 + X_1$ и $y \in Y_0 + Y_1$ таких, что

$$K(t, x, \{X_0, X_1\}) \leq K(t, y, \{Y_0, Y_1\}), \quad t > 0,$$

из $y \in \mathfrak{F}(Y_0, Y_1)$ следует, что $x \in \mathfrak{F}(X_0, X_1)$ и

$$\|x\|_{\mathfrak{F}(X_0, X_1)} \leq C\|y\|_{\mathfrak{F}(Y_0, Y_1)}.$$

Если речь идет об одной паре $\{X_0, X_1\}$, то интерполяционное пространство $\mathfrak{F}(X_0, X_1)$ называется K -монотонным с константой C .

Если оба пространства X_0 и X_1 оказались K -интерполяционными с константой 1, то пара $\{X_0, X_1\}$ называется относительно полной по Гальярдо.

Например, конструкция $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ является K -монотонной на категории всех банаховых пар, если функция φ невырождена (см. [13]). На категории относительно полных по Гальярдо пар эта конструкция K -монотонна при любых φ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Конструкция $S(X_0, X_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1)$ является K -монотонной на категории всех относительно полных по Гальярдо банаховых пар.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y \in S(Y_0, Y_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1)$. Это значит, что

$$y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k y_k,$$

где

$$\{\|y_k \alpha_k\|_{Y_0}\} \in l_{p_0}, \quad \{\|y_k \beta_k\|_{Y_1}\} \in l_{p_1}.$$

В силу абсолютной сходимости ряда в $Y_0 + Y_1$

$$K(t, y, \{Y_0, Y_1\}) \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k K(t, y_k, \{Y_0, Y_1\}) < \infty.$$

Пусть

$$K(t, x, \{X_0, X_1\}) \leq K(t, y, \{Y_0, Y_1\}).$$

Тогда

$$K(t, x, \{X_0, X_1\}) \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k K(t, y_k, \{Y_0, Y_1\}) < \infty$$

и по теореме о K -делимости Брудного–Кругляка (см. [11]) найдется последовательность $x_k \in X_0 + X_1$ такая, что

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k x_k$$

и

$$K(t, x_k, \{X_0, X_1\}) \leq 8K(t, y_k, \{Y_0, Y_1\}). \quad (1.3)$$

В относительно полных по Гальярдо парах из (1.3) следует, что $\|x_k\|_{X_0} \leq 8\|y_k\|_{Y_0}$ и $\|x_k\|_{X_1} \leq 8\|y_k\|_{Y_1}$. Поэтому

$$\{\|x_k \alpha_k\|_{X_0}\} \in l_{p_0}, \quad \{\|x_k \beta_k\|_{X_1}\} \in l_{p_1}.$$

Поскольку

$$\|x_k\|_{X_0+X_1} = K(1, x_k, \{X_0, X_1\}) \leq 8K(1, y_k, \{Y_0, Y_1\}) = 8\|y_k\|_{Y_0+Y_1},$$

то $x \in S(X_0, X_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1)$ и $\|x\|_{S(X_0, X_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1)} \leq 8\|y\|_{S(Y_0, Y_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1)}$.

Предложение доказано.

§ 2. Совпадение интерполяционных конструкций

ТЕОРЕМА 1. Пусть α , β и γ – произвольные двусторонние последовательности такие, что $\gamma \in l_{q_0}(1/\alpha) + l_{q_1}(1/\beta)$, где $1/q_0 + 1/p_0 = 1$ и $1/q_1 + 1/p_1 = 1$. Тогда γ – промежуточная последовательность между α и β , и если

$$\varphi(s, t) = K\left(s, t, \gamma, \left\{l_{q_0}\left(\frac{1}{\alpha}\right), l_{q_1}\left(\frac{1}{\beta}\right)\right\}\right) \in \Phi_0,$$

то

$$S(X_0, X_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1) = \varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$$

для любой полной по Гальярдо пары $\{X_0, X_1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первый шаг доказательства – это проверка искомого равенства на конкретной паре пространств последовательностей $\{l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-m})\}$.

Пусть $\varphi(s, t) = K(s, t, \gamma, \{l_{q_0}(1/\alpha), l_{q_1}(1/\beta)\}) \in \Phi_0$ и $x \in \varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-m}))_{p_0, p_1}$, где $\varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-m}))_{p_0, p_1} = \varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-m}))$ (см. [14]). Тогда найдутся $a \in l_{p_0}$ и $b \in l_{p_1}(2^{-m})$ такие, что $|x| = \varphi(|a|, |b|)$.

Без ограничения общности можно считать, что последовательность x нигде не обращается в нуль. Рассмотрим пару $\{l_\infty(1/|a|), l_\infty(1/|b|)\}$. Легко видеть, что эта пара вложена в пару $\{l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-m})\}$ и что

$$\begin{aligned} K\left(s, t, |x|, \left\{l_\infty\left(\frac{1}{|a|}\right), l_\infty\left(\frac{1}{|b|}\right)\right\}\right) &= K\left(s, t, \varphi(|a|, |b|), \left\{l_\infty\left(\frac{1}{|a|}\right), l_\infty\left(\frac{1}{|b|}\right)\right\}\right) \\ &\leq 2\varphi(s, t) = 2K\left(s, t, \gamma, \left\{l_{q_0}\left(\frac{1}{\alpha}\right), l_{q_1}\left(\frac{1}{\beta}\right)\right\}\right). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Так как интерполяция из любой банаховой пары в пару $\{l_\infty(1/|a|), l_\infty(1/|b|)\}$ описывается K -методом, то в силу (2.1) найдется такой линейный оператор $T: \{l_{q_0}(1/\alpha), l_{q_1}(1/\beta)\} \rightarrow \{l_\infty(1/|a|), l_\infty(1/|b|)\}$, что $x = T(\gamma)$.

В случае, если q_0 или q_1 равно ∞ , то в силу $\varphi \in \Phi_0$ мы можем в паре $\{l_{q_0}(1/\alpha), l_{q_1}(1/\beta)\}$ заменить соответствующее пространство l_∞ на c_0 . Если q_0 и q_1 оба равны ∞ , то это соответствует $p_0 = p_1 = 1$ и легко может быть рассмотрено отдельно с самого начала. Поскольку в наших приложениях этот случай не встречается, то мы его оставляем читателю.

Найденный оператор T порождается последовательностью функционалов f_m на $l_{q_0}(1/\alpha) + l_{q_1}(1/\beta)$, причем

$$\sup_m \frac{\|f_m\|_{l_{q_0}(1/\alpha)^*}}{|a_m|} < \infty,$$

т.е. при всех $m \in \mathbb{Z}$

$$\|f_m\|_{l_{q_0}(1/\alpha)^*} \leq C_0 |a_m|$$

для некоторой константы C_0 .

Обозначим через f_{mk} последовательность, задающую функционал f_m . Тогда при всех m

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (|f_{mk}| \alpha_k)^{p_0} \leq C_0^{p_0} |a_m|^{p_0}$$

(с соответствующими изменениями при $p_0 = \infty$).

Аналогично,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (|f_{mk}| \beta_k)^{p_1} \leq C_1^{p_1} |b_m|^{p_1}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (|f_{mk}| \alpha_k)^{p_0} &\leq C_0^{p_0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |a_m|^{p_0} = C_0^{p_0} \|a\|_{l_{p_0}}^{p_0}, \\ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (2^{-m} |f_{mk}| \beta_k)^{p_1} &\leq C_1^{p_1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (2^{-m} |b_m|)^{p_1} = C_1^{p_1} \|b\|_{l_{p_1}(2^{-m})}^{p_1}. \end{aligned}$$

Если обозначить через g_k последовательность столбцов матрицы f_{mk} , то, поменяв порядок суммирования, получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\|g_k\|_{l_{p_0}} \alpha_k)^{p_0} \leq C_0^{p_0} \|a\|_{l_{p_0}}^{p_0}, \quad (2.2)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\|g_k\|_{l_{p_1}(2^{-m})} \beta_k)^{p_1} \leq C_1^{p_1} \|b\|_{l_{p_1}(2^{-m})}^{p_1}. \quad (2.3)$$

При этом $T(\gamma) = x$, т.е.

$$x_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k f_{mk},$$

или

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k g_k,$$

где сходимость можно понимать и по норме в $l_{p_0} + l_{p_1}(2^{-m})$ в силу (2.2), (2.3). Таким образом, получили, что

$$\varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-m}) \subset S(l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-m}), \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1).$$

Пусть теперь $x \in S(l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-m}), \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1)$. Значит,

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k x_k,$$

где $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\|x_k\|_{l_{p_0}} \alpha_k)^{p_0} < \infty$ и $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\|x_k\|_{l_{p_1}} \beta_k)^{p_1} < \infty$.

Рассмотрим пару $\{l_{q_0}(1/\alpha), l_{q_1}(1/\beta)\}$ и оператор

$$T: \left\{ l_{q_0} \left(\frac{1}{\alpha} \right), l_{q_1} \left(\frac{1}{\beta} \right) \right\} \rightarrow \{l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-m})\},$$

который переводит последовательность ξ_k в $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \xi_k x_k$.

Поскольку $\sum_{k=-\infty}^{\infty} (\|x_k\|_{l_{p_0}} \alpha_k)^{p_0} < \infty$, получим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |x_{mk} \alpha_k|^{p_0} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_{mk} \alpha_k|^{p_0} < \infty.$$

Положим $a_m = (\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_{mk} \alpha_k|^{p_0})^{1/p_0}$; тогда $a \in l_{p_0}$, и если $\xi \in l_{q_0}$, то

$$|T(\xi)_m| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\xi_k| |x_{mk}| \leq \|\xi\|_{l_{q_0}(1/\alpha)} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_{mk} \alpha_k|^{p_0} \right)^{1/p_0} \leq \|\xi\|_{l_{q_0}(1/\alpha)} a_m.$$

Значит, оператор T действует из $l_{q_0}(1/\alpha)$ в $l_\infty(1/a)$ с нормой, не превосходящей единицы.

Аналогично, оператор T действует из $l_{q_1}(1/\beta)$ в $l_\infty(1/b)$, где

$$b_m = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_{mk}\beta_k|^{p_1} \right)^{1/p_1}$$

и $b \in l_{p_1}(2^{-m})$.

Таким образом, $T: \{l_{q_0}(1/\alpha), l_{q_1}(1/\beta)\} \rightarrow \{l_\infty(1/a), l_\infty(1/b)\}$ и $x = T(\gamma)$. Поэтому (см. [15]) $x \in l_\infty(\varphi^*(1/a, 1/b))$. Следовательно, $|x| \leq \varphi(a, b)$. Значит, $x \in \varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-m}))$. Таким образом, равенство интерполяционных функторов проверено на конкретной паре $\{l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-m})\}$.

Переходим к общему случаю. Пара $\{l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-m})\}$ замечательна тем, что она K_0 -насыщена, т.е. для любой интерполяционной функции $\omega(s, t) \in \Phi_0$ найдется элемент $w \in l_{p_0} + l_{p_1}(2^{-m})$ такой, что

$$\omega(s, t) \asymp K(s, t, w, \{l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-m})\})$$

(см. [16]).

Пусть $x \in \varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$; тогда $K(s, t, x, \{X_0, X_1\}) \leq \varphi(s, t)$ и поэтому $K(s, t, x, \{X_0, X_1\}) \in \Phi_0$. Тогда $w \in l_{p_0} + l_{p_1}(2^{-m})$, для которого

$$K(s, t, x, \{X_0, X_1\}) = \omega(s, t) \asymp K(s, t, w, \{l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-m})\}),$$

тоже попадет в $\varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-m}))$ в силу K -монотонности $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$. Но поскольку $\varphi(l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-m})) = S(l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-m}), \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1)$, получаем, что $w \in S(l_{p_0}, l_{p_1}(2^{-m}), \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1)$, откуда следует $x \in S(X_0, X_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1)$ в силу доказанной в предложении (§ 1) K -монотонности этой конструкции и эквивалентности K -функционалов x и w . Таким образом,

$$\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1} \subset S(X_0, X_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1).$$

Обратное вложение доказывается точно так же с учетом того, что для всех x из $S(X_0, X_1, \alpha, \beta, \gamma, p_0, p_1)$ интерполяционная функция $K(s, t, x, \{X_0, X_1\})$ принадлежит Φ_0 , так как по определению x — это предел в $X_0 + X_1$ элементов из $X_0 \cap X_1$.

Теорема 1 доказана.

§ 3. Вычисление орбит

3.1. Сохранение структуры. Для доказательства оптимальной теоремы вложения для пространств Орлича–Соболева нам понадобится следующая теорема об описании интерполяционных орбит. Напомним (см. [5]), что K -орбитой в паре $\{X_0, X_1\}$ пространства Y , промежуточного для пары $\{Y_0, Y_1\}$, называется множество всех $x \in X_0 + X_1$ таких, что

$$K(s, t, x, \{X_0, X_1\}) \leq K(s, t, y, \{Y_0, Y_1\}), \quad s > 0, \quad t > 0,$$

для какого-нибудь $y \in Y$. Это множество обозначается через $\text{KO}(Y, \{Y_0, Y_1\} \rightarrow \{X_0, X_1\})$.

Если интерполяция из пары $\{Y_0, Y_1\}$ в пару $\{X_0, X_1\}$ описывается K -методом, то, очевидно, K -орбита может совпадать с орбитой пространства Y при действии операторов из пары $\{Y_0, Y_1\}$ в пару $\{X_0, X_1\}$. Это позволяет использовать K -орбиты при вычислении орбит.

Напомним, что через $(X_0, X_1)_{\theta,1}$ обозначается классическое пространство Лионса–Петре, которое можно понимать и как $\varphi_{\{\theta\}}(X_0, X_1)_{1,1}$, где $\varphi_{\{\theta\}}(s, t) = s^{1-\theta}t^\theta$. Для краткости будем обозначать $(X_0, X_1)_{\theta,1}$ через X_θ .

Легко видеть, что любая вложенная пара не является K_0 -насыщенной, поскольку K -функционалы будут ограничены по одной из переменных. Однако никаких других ограничений может и не быть. Например, для пары пространств Лебега $\{L_1, L_\infty\}$ на ограниченном измеримом множестве положительной меры в $\mathbb{R}^n$, которая, очевидно, является вложенной парой, для любой ограниченной на полуоси $0 < t < \infty$ квазивиогнутой функции $\rho(t)$ такой, что $\rho(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, найдется $x \in L_1$, для которого

$$\rho(t) \asymp K(1, t, x, \{L_1, L_\infty\}) = \int_0^t x^*(u) du,$$

причем константы эквивалентности универсальны. Аналогично, для пары пространств $\{l_1, l_1(2^{-m})\}$ односторонних последовательностей с отрицательными индексами m и для любой ограниченной квазивиогнутой функции $\rho(t)$ такой, что $\rho(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, найдется $x \in l_1$ такой, что

$$\rho(t) \asymp K(1, t, x, \{l_1, l_1(2^{-m})\}) = \sum_{m=-1}^{-\infty} |x_m| \min(1, t 2^{-m}).$$

И здесь константы эквивалентности универсальны.

Вложенную пару $X_0 \supset X_1$ мы будем называть K_0 -насыщенной, если для любой ограниченной квазивиогнутой функции $\rho(t)$ такой, что $\rho(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, найдется $x \in X_0$, для которого

$$\rho(t) \asymp K(1, t, x, \{X_0, X_1\})$$

с универсальными константами.

ТЕОРЕМА 2. Для любой K_0 -насыщенной банаховой пары $X_0 \supset X_1$, $0 < \theta < 1$, интерполяционной функции $\varphi(s, t)$ такой, что $\varphi \in \Phi_0$, и любых $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$ справедливо

$$\text{KO}(\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}, \{X_0, X_\theta\}) = \tilde{\varphi}(X_0, X_\theta)_{p_0, p_\theta},$$

где $\tilde{\varphi}$ – некоторая интерполяционная функция¹ и $1/p_\theta = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \text{KO}(\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}, \{X_0, X_\theta\})$, т.е.

$$K(s, t, x, \{X_0, X_\theta\}) \leq K(s, t, u, \{X_0, X_\theta\}),$$

¹Эффективное описание $\tilde{\varphi}$ будет дано отдельно.

где $u \in \varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$. Последнее означает, что

$$u = \sum_n \rho(t_n) u_n,$$

где $\{\|u_n\|_{X_0}\} \in l_{p_0}$, $\{t_n\|u_n\|_{X_1}\} \in l_{p_1}$, а $\rho(t) = \varphi(1, t)$ и $\{t_n\}$ – балансирующая последовательность для $\rho(t)$ (см. [7]). В силу того, что пара $\{X_0, X_1\}$ предполагается вложенной, мы без ограничения общности можем считать, что $n < 0$. Следовательно,

$$K(s, t, x, \{X_0, X_\theta\}) \leq \sum_{n=-1}^{-\infty} \rho(t_n) K(s, t, u_n, \{X_0, X_\theta\}). \quad (3.1)$$

По формуле Холмстедта

$$\begin{aligned} K(1, t, u_n, \{X_0, X_\theta\}) &\asymp t \int_{t^{1/\theta}}^{\infty} s^{-\theta} K(1, s, u_n, \{X_0, X_1\}) \frac{ds}{s} \\ &= T_\theta(K(1, \bullet, u_n, \{X_0, X_1\}))(t), \end{aligned}$$

где через T_θ обозначен оператор Харди

$$f \mapsto t \int_{t^{1/\theta}}^{\infty} s^{-\theta} f(s) \frac{ds}{s}, \quad (3.2)$$

а через $K(1, \bullet, u_n, \{X_0, X_1\})$ обозначена функция от $s \in (0, \infty)$, равная $K(1, s, u_n, \{X_0, X_1\})$. Поэтому из (3.1) получаем

$$\begin{aligned} K(1, t, x, \{X_0, X_\theta\}) &\leq \sum_{n=-1}^{-\infty} \rho(t_n) T_\theta(K(1, \bullet, u_n, \{X_0, X_1\}))(t) \\ &\leq \sum_{n=-1}^{-\infty} \rho(t_n) T_\theta(\min(\|u_n\|_{X_0}, \|u_n\|_{X_1}))(t). \end{aligned}$$

Прямой проверкой можно убедиться в том, что оператор Харди с точностью до эквивалентности действует во множестве функций вида $\min(\alpha, \beta t)$, точнее,

$$T_\theta(\min(\alpha, \bullet \beta))(t) = t \int_{t^{1/\theta}}^{\infty} s^{-\theta} \min(\alpha, s\beta) \frac{ds}{s} \asymp \min(\alpha, t\alpha^{1-\theta}\beta^\theta), \quad (3.3)$$

где константы эквивалентности не зависят от α, β, t . Следовательно,

$$K(1, t, x, \{X_0, X_\theta\}) \leq C \sum_{n=-1}^{-\infty} \rho(t_n) \min(\|u_n\|_{X_0}, t\|u_n\|_{X_0}^{1-\theta}\|u_n\|_{X_1}^\theta).$$

По теореме о K -делимости найдется последовательность $v_n \in X_0$ такая, что

$$x = \sum_{n=-1}^{-\infty} \rho(t_n) v_n \quad (3.4)$$

и

$$K(s, t, v_n, \{X_0, X_\theta\}) \leq 8 \min(s \|u_n\|_{X_0}, t \|u_n\|_{X_0}^{1-\theta} \|u_n\|_{X_1}^\theta).$$

Поэтому $\|v_n\|_{X_0} \leq 8 \|u_n\|_{X_0}$ и $\|v_n\|_{X_\theta} \leq 8 \|u_n\|_{X_0}^{1-\theta} \|u_n\|_{X_1}^\theta$, откуда получаем, что $\{\|v_n\|_{X_0}\} \in l_{p_0}$ и $\{\|v_n\|_{X_\theta}\} \in l_{p_\theta}(t_n^\theta)$ в силу неравенства Гёльдера.

Ряд (3.4) сходится в X_0 , следовательно, $x \in S(X_0, X_\theta, \mathbf{1}, \{t_n^\theta\}, \{\rho(t_n)\}, p_0, p_\theta)$, т.е.

$$\text{KO}(\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}, \{X_0, X_\theta\}) \subset S(X_0, X_\theta, \mathbf{1}, \{t_n^\theta\}, \{\rho(t_n)\}, p_0, p_\theta).$$

Для того чтобы доказать обратное вложение, рассмотрим представление $x \in S(X_0, X_\theta, \mathbf{1}, \{t_n^\theta\}, \{\rho(t_n)\}, p_0, p_\theta)$,

$$x = \sum_{n=-1}^{-\infty} \rho(t_n) \tilde{x}_n,$$

где $\{\|\tilde{x}_n\|_{X_0}\} \in l_{p_0}$, $\{t_n^\theta \|\tilde{x}_n\|_{X_\theta}\} \in l_{p_\theta}$. Тогда

$$K(t, x, \{X_0, X_\theta\}) \leq \sum_{n=-1}^{-\infty} \rho(t_n) K(t, \tilde{x}_n, \{X_0, X_\theta\})$$

и, следовательно,

$$K(t, x, \{X_0, X_\theta\}) \leq \sum_{n=-1}^{-\infty} \rho(t_n) \min(\|\tilde{x}_n\|_{X_0}, t \|\tilde{x}_n\|_{X_\theta}).$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{\rho}(t) = \sum_{n=-1}^{-\infty} \rho(t_n) \min(\|\tilde{x}_n\|_{X_0}, t \|\tilde{x}_n\|_{X_\theta}).$$

Докажем, что в пространстве $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ найдется $\tilde{y}$ такой, что

$$K(t, \tilde{y}, \{X_0, X_\theta\}) \geq C \tilde{\rho}(t) \geq K(t, x, \{X_0, X_\theta\}),$$

т.е. что x принадлежит K -орбите $\tilde{y}$.

Обозначим для краткости $\tilde{\alpha}_n = \|\tilde{x}_n\|_{X_0}$, $\tilde{\beta}_n = \|\tilde{x}_n\|_{X_\theta}$, где $\{\tilde{\alpha}_n\} \in l_{p_0}$, $\{\tilde{\beta}_n t_n^\theta\} \in l_{p_\theta}$.

Нетрудно подобрать положительные последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ такие, что $\{a_n\} \in l_{p_0}$, $\{b_n t_n\} \in l_{p_1}$ и

$$\tilde{\alpha}_n \leq a_n, \quad \tilde{\beta}_n \leq a_n^{1-\theta} b_n^\theta$$

(a_n и b_n — это подходящие степени $\max(\tilde{\alpha}_n^{p_0}, (\tilde{\beta}_n t_n^\theta)^{p_\theta})$).

Рассмотрим пару $\{l_1, l_1(2^{-m})\}$. Как отмечено выше, эта пара K_0 -насыщена. Значит, для каждого $n < 0$ найдется $\xi_n \in l_1(2^{-m})$ такой, что

$$K(1, t, \xi_n, \{l_1, l_1(2^{-m})\}) \asymp \min(a_n, b_n t).$$

Очевидно, что $\|\xi_n\|_{l_1} \asymp a_n$, а $\|\xi_n\|_{l_1(2^{-m})} \asymp b_n$. Поэтому $\{\|\xi_n\|_{l_1}\} \in l_{p_0}$ и $\{\|\xi_n\|_{l_1(2^{-m})}\} \in l_{p_1}(t_n)$. Положим

$$y = \sum_{n=-1}^{-\infty} \rho(t_n) |\xi_n| \in l_1.$$

Тогда по определению и теореме 1 $y \in \varphi(l_1, l_1(2^{-m}))_{p_0, p_1}$.

Как известно, для любого $\chi \in l_1 + l_1(2^{-m})$

$$K(t, \chi, \{l_1, l_1(2^{-m})\}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |\chi_m| \min(1, t 2^{-m}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} K(t, y, \{l_1, l_1(2^{-m})\}) &= \sum_{n=-1}^{-\infty} \rho(t_n) K(t, |\xi_n|, \{l_1, l_1(2^{-m})\}) \\ &\asymp \sum_{n=-1}^{-\infty} \rho(t_n) \min(a_n, b_n t) \end{aligned}$$

в силу универсальности констант в определении K_0 -насыщенности.

По формуле Холмстедта, учитывая, что $(l_1, l_1(2^{-m}))_{\theta, 1} = l_1(2^{-\theta m})$, получаем

$$\begin{aligned} K(t, y, \{l_1, l_1(2^{-\theta m})\}) &\asymp T_{\theta} \left(\sum_{n=-1}^{-\infty} \rho(t_n) \min(a_n, \bullet b_n) \right) (t) \\ &= \sum_{n=-1}^{-\infty} \rho(t_n) T_{\theta}(\min(a_n, \bullet b_n))(t) \asymp \sum_{n=-1}^{-\infty} \rho(t_n) \min(a_n, a_n^{1-\theta} b_n^{\theta} t). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} K(t, x, \{X_0, X_{\theta}\}) &\leq C \tilde{\rho}(t) \leq C \sum_{n=-1}^{-\infty} \rho(t_n) \min(\tilde{\alpha}_n, \tilde{t} \tilde{\beta}_n) \\ &\leq C \sum_{n=-1}^{-\infty} \rho(t_n) \min(a_n, t a_n^{1-\theta} b_n^{\theta}) \asymp K(t, y, \{l_1, l_1(2^{-\theta m})\}), \end{aligned}$$

где $y \in \varphi(l_1, l_1(2^{-m}))_{p_0, p_1}$.

Поскольку пара $\{X_0, X_1\}$ предполагается K_0 -насыщенной, найдется $\tilde{y} \in X_0$ такой, что

$$K(1, t, y, \{l_1, l_1(2^{-m})\}) \asymp K(1, t, \tilde{y}, \{X_0, X_1\}).$$

Следовательно, $\tilde{y} \in \varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ в силу K -монотонности интерполяционной конструкции $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$.

Таким образом,

$$K(1, t, x, \{X_0, X_{\theta}\}) \leq C K(1, t, y, \{l_1, l_1(2^{-\theta m})\}) \asymp K(1, t, \tilde{y}, \{X_0, X_{\theta}\})$$

и $\tilde{y} \in \varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$, т.е. $x \in \text{KO}(\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}, \{X_0, X_{\theta}\})$.

Таким образом,

$$\text{KO}(\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}, \{X_0, X_\theta\}) = S(X_0, X_\theta, \mathbf{1}, \{t_n^\theta\}, \{\rho(t_n)\}, p_0, p_\theta).$$

По теореме 1 отсюда следует, что

$$\text{KO}(\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}, \{X_0, X_\theta\}) = \tilde{\varphi}(X_0, X_\theta)_{p_0, p_\theta},$$

где

$$\tilde{\varphi}(s, t) \asymp K(s, t, \{\rho(t_n)\}, \{l_{q_0}, l_{q_\theta}(t_n^{-\theta})\}).$$

(В конкретных ситуациях эту функцию удастся вычислить проще.)

Теорема 2 доказана.

Эта теорема легко обобщается следующим образом.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $Y_0 \supset Y_1$ – произвольная полная по Гальярдо вложенная пара, а $X_0 \supset X_1$ – K_0 -насыщенная пара. Тогда в условиях теоремы 2

$$\text{KO}(\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}, \{X_0, X_\theta\} \rightarrow \{Y_0, Y_1\}) = \tilde{\varphi}(Y_0, Y_1)_{p_0, p_\theta}. \quad (3.5)$$

Доказательство ничем не отличается от доказательства теоремы 2, которая является частным случаем теоремы 3 при $\{Y_0, Y_1\} = \{X_0, X_\theta\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Равенство банаховых пространств (3.5) на самом деле означает и эквивалентность норм с константами, не зависящими от пары $\{Y_0, Y_1\}$.

3.2. Вычисление функционального параметра. Характеристическая функция интерполяционного функтора $\tilde{\varphi}(Y_0, Y_1)_{p_0, p_\theta}$ эквивалентна $\tilde{\varphi}^*(\alpha, \beta)$.

С другой стороны, функтор $\tilde{\varphi}(Y_0, Y_1)_{p_0, p_\theta}$ является функтором K -орбиты пространства $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ из пары $\{X_0, X_\theta\}$ в пару $\{Y_0, Y_1\}$. Поэтому его характеристическая функция определяется сужением этого функтора на одномерные пары $\{\alpha\mathbb{R}, \beta\mathbb{R}\}$, т.е. с универсальной эквивалентностью норм

$$\tilde{\varphi}^*(\alpha, \beta)\mathbb{R} = \text{KO}(\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}, \{X_0, X_\theta\} \rightarrow \{\alpha\mathbb{R}, \beta\mathbb{R}\}).$$

Легко видеть, что орбита и K -орбита любого $a \in X_0 + X_\theta$ в одномерной паре изометрически совпадают. Поэтому орбита и K -орбита пространства $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ в одномерных парах тоже будут изометрически совпадать.

Таким образом, соответствующие нормы универсально эквивалентны в пространстве

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^*(\alpha, \beta)\mathbb{R} &= \text{KO}(\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}, \{X_0, X_\theta\} \rightarrow \{\alpha\mathbb{R}, \beta\mathbb{R}\}) \\ &= \text{Orb}(\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}, \{X_0, X_\theta\} \rightarrow \{\alpha\mathbb{R}, \beta\mathbb{R}\}). \end{aligned}$$

Характеристическая функция функтора орбиты промежуточного пространства называется нижним типом этого пространства (см., например, [5; п. 11]). Нижний тип пространства для данной пары обозначается через $\underline{\psi}(\alpha, \beta)$ и вычисляется по формуле

$$\underline{\psi}(\alpha, \beta) = \inf_{\substack{f \in X_0^* \\ \|f\|_{X_0^*} \leq 1/\alpha, \|f\|_{X_\theta^*} \leq 1/\beta}} \frac{1}{\|f\|_{\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}^*}}.$$

Поэтому

$$\tilde{\varphi}^*(\alpha, \beta) \asymp \underline{\psi}(\alpha, \beta) = \inf_{\substack{f \in X_0^* \\ \|f\|_{X_0^*} \leq 1/\alpha, \|f\|_{X_\theta^*} \leq 1/\beta}} \frac{1}{\|f\|_{\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}^*}},$$

или

$$\tilde{\varphi}(\alpha, \beta) \asymp \sup_{\substack{f \in X_0^* \\ \|f\|_{X_0^*} \leq \alpha, \|f\|_{X_\theta^*} \leq \beta}} \|f\|_{\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}^*}. \quad (3.6)$$

В частности, если $X_0 = L_1$, а $X_1 = L_\infty$ на ограниченной области в $\mathbb{R}^n$, то $X_0^* = L_\infty$, а $X_\theta^* = (L_1, L_\infty)_{\theta, 1}^* = \Lambda_{1-\theta}^* = M_{1-\theta}$, где

$$M_{1-\theta} = \left\{ x \in L_1 : \sup_{0 < t < \infty} x^*(t)t^\theta < \infty \right\}.$$

Норма сопряженного пространства к $\varphi(L_1, L_\infty)_{p_0, p_1}$ эквивалентна на L_∞ норме в пространстве $\varphi^*(L_\infty, L_1)_{q_0, q_1}$, так как $\varphi^*(X_0^*, X_1^*)_{q_0, q_1}^\circ = (\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}^\circ)^{*\circ}$ для любой плотной банаховой пары $\{X_0, X_1\}$, где через X° для промежуточного пространства X пары $\{X_0, X_1\}$ обозначено замыкание $X_0 \cap X_1$ в X (см. [13]).

Таким образом, для выбранной нами пары $\{L_1, L_\infty\}$ получим

$$\tilde{\varphi}(\alpha, \beta) \asymp \sup_{\substack{f \in L_\infty \\ \|f\|_{L_\infty} \leq \alpha, \|f\|_{M_{1-\theta}} \leq \beta}} \|f\|_{\varphi^*(L_\infty, L_1)_{q_0, q_1}}. \quad (3.7)$$

Супремум в (3.7) с точностью до эквивалентности достигается на функциях, неубывающая перестановка которых $f^*(u)$ равна $\min(\alpha, \beta u^{-\theta})$. Поэтому

$$\tilde{\varphi}(\alpha, \beta) \asymp \|Q_{\alpha, \beta}\|_{\varphi^*(L_\infty, L_1)_{q_0, q_1}}, \quad (3.8)$$

где $Q_{\alpha, \beta}(u) = \min(\alpha, \beta u^{-\theta})$ при $0 < u < 1$, а пространство $\varphi^*(L_\infty, L_1)_{q_0, q_1}$ рассматривается на $(0, 1)$.

§ 4. Теоремы вложения для пространств Соболева

Обозначим через Ω ограниченную область в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей. Пусть $m < n$ – натуральное число, а $E(\Omega)$ – интерполяционное между $L_1(\Omega)$ и $L_\infty(\Omega)$ пространство. Через $W_E^m(\Omega)$ обозначается пространство обобщенных функций f на Ω , для которых все производные до порядка m включительно принадлежат $E(\Omega)$ (см. [17]). В дальнейшем область Ω в обозначениях пространств по возможности будем опускать.

В [2] показано, что наименьшее пространство F , интерполяционное между $L_1(\Omega)$ и $L_\infty(\Omega)$, в которое вложено W_E^m , совпадает с интерполяционной орбитой пространства E при действии линейных операторов из пары $\{L_1, \Lambda_{m/n}\}$ в пару $\{\Lambda_{1-m/n}, L_\infty\}$. Более того, пространство F совпадает с K -орбитой пространства E , т.е.

$$\begin{aligned} F &= \text{Orb}(E, \{L_1, \Lambda_{m/n}\} \rightarrow \{\Lambda_{1-m/n}, L_\infty\}) \\ &= \text{KO}(E, \{L_1, \Lambda_{m/n}\} \rightarrow \{\Lambda_{1-m/n}, L_\infty\}). \end{aligned}$$

В частности, мы имеем классические вложения $W_1^m \subset \Lambda_{1-m/n}$ и $W_{\Lambda_{m/n}}^m \subset L_\infty$. На самом деле описание пространства вложения с помощью орбит основано на этих фундаментальных вложениях.

Мы рассмотрим $E = \varphi(L_1(\Omega), L_\infty(\Omega))_{p_0, p_1}$, где $\varphi \in \Phi_0$.

Так как $(L_1, L_\infty)_{1-m/n, 1} = \Lambda_{m/n}$, то по теореме 3, примененной к парам $\{X_0, X_1\} = \{L_1, L_\infty\}$, $\{Y_0, Y_1\} = \{\Lambda_{1-m/n}, L_\infty\}$, и (3.8) при $\theta = 1 - m/n$ получаем следующую оптимальную теорему вложения.

ТЕОРЕМА 4. *Если интерполяционная функция φ принадлежит Φ_0 , то*

$$W_{\varphi(L_1, L_\infty)_{p_0, p_1}}^m \subset \tilde{\varphi}(\Lambda_{1-m/n}, L_\infty)_{p_0, p_{1-m/n}}, \quad (4.1)$$

где $\tilde{\varphi}(\alpha, \beta) \asymp \|Q_{\alpha, \beta}^{\{m\}}\|_{\varphi^*(L_\infty, L_1)_{q_0, q_1}}$ и $Q_{\alpha, \beta}^{\{m\}}(u) = \min(\alpha, \beta/u^{1-m/n})$ при $0 < u < 1$ и $1/p_{1-m/n} = m/n p_0 + (1 - m/n)/p_1$.

Если $p_0 = p_1 = p$, то $\varphi(X_0, X_1)_{p_0, p_1}$ равно пространству Янсона $(X_0, X_1)_{\rho, p}$ (см. [7]), где $\rho(t) = \varphi(1, t)$, и тогда

$$W_{\varphi(L_1, L_\infty)_{p, p}}^m = W_{\Lambda_{\rho, p}}^m \subset (\Lambda_{1-m/n}, L_\infty)_{\sigma, p},$$

где $\sigma(t) = \tilde{\varphi}(1, t) \asymp \|Q_{1, t}^{\{m\}}\|_{\varphi^*(L_\infty, L_1)_{q, q}}$ и $1/q + 1/p = 1$, а $\varphi^*(L_\infty, L_1)_{q, q}$, равное $\Lambda_{\rho^*, q}$ при $\rho^*(t) = t/\rho(t)$, рассматривается на $(0, 1)$.

Таким образом, мы получаем оптимальные теоремы вложения для пространств Лоренца, анонсированные в [2].

Теорема 4 позволяет получить оптимальные теоремы вложения для пространств Орлича–Соболева для произвольной гладкости $m < n$.

В самом деле для пространства Орлича $E = L_N$ найдем функцию $\varphi(s, t)$ такую, что $L_N = \varphi(L_1, L_\infty)$. Как уже отмечалось, $N^{-1}(s) = \varphi(s, 1)$. Поскольку $\varphi(L_1, L_\infty) = \varphi(L_1, L_\infty)_{1, \infty}$ (см. [7]), из (4.1) вытекает

$$W_{L_N}^m \subset \tilde{\varphi}(\Lambda_{1-m/n}, L_\infty)_{1, n/m}, \quad (4.2)$$

где $\tilde{\varphi}(\alpha, \beta) \asymp \|Q_{\alpha, \beta}^{\{m\}}\|_{\varphi^*(L_\infty, L_1)_{\infty, 1}} = \|Q_{\alpha, \beta}^{\{m\}}\|_{\varphi^*(L_\infty, L_1)} = \|Q_{\alpha, \beta}^{\{m\}}\|_{L_M}$ и M – дополнительная к N выпуклая функция.

Заметим, что описание пространств $\tilde{\varphi}(\Lambda_{1-m/n}, L_\infty)_{1, n/m}$ и вычисление норм мы не представляем труда, поскольку $x \in \tilde{\varphi}(\Lambda_{1-m/n}, L_\infty)_{1, n/m}$ эквивалентно $\{K(w_k, x, \{\Lambda_{1-m/n}, L_\infty\})\} \in \tilde{\varphi}(l_1, l_{n/m}(w_k^{-1}))$, где w_k – любая балансирующая последовательность для вогнутой функции $K(t, x, \{\Lambda_{1-m/n}, L_\infty\})$ (описание обобщенного метода средних в терминах K -функционала см. в [7] или [14]).

Далее,

$$K(t^{1-m/n}, x, \{\Lambda_{1-m/n}, L_\infty\}) = \int_0^t x^*(u) du^{1-m/n} = \left(1 - \frac{m}{n}\right) \int_0^t x^*(u) u^{-m/n} du,$$

т.е. условие $x \in \tilde{\varphi}(\Lambda_{1-m/n}, L_\infty)_{1, n/m}$, означающее

$$\{K(w_k, x, \{\Lambda_{1-m/n}, L_\infty\})\} \in \tilde{\varphi}(l_1, l_{n/m}(w_k^{-1})),$$

эквивалентно условию

$$\left\{ \int_0^{w_k^{n/(n-m)}} x^*(u) u^{-m/n} du \right\} \in \tilde{\varphi}_{m/n}(l_1, l_\infty(w_k^{-n/(n-m)})),$$

где через $\tilde{\varphi}_{m/n}$ обозначена интерполяционная функция $\tilde{\varphi}(s, s^{m/n} t^{1-m/n})$.

А. Чианки рассмотрел случай $m = 1$ и описал оптимальное (наименьшее) пространство вложения в терминах пространств Лоренца–Орлича (см. [1]).

Напомним, что если $1 < q < \infty$ и D – функция Юнга, то через $L(q, D)$ обозначается пространство, состоящее из измеримых функций x таких, что $x^*(u) u^{-1/q}$ принадлежит пространству Орлича, соответствующему функции D . Это и есть пространство Орлича–Лоренца.

Таким образом, согласно [1] справедливо вложение

$$W_{L_N}^1 \subset L(n, D) \quad (4.3)$$

в подходящее пространство Орлича–Лоренца. Причем функция D может быть выбрана так, что пространство $L(n, D)$ оказывается наименьшим в классе перестановочно инвариантных пространств со свойством Фату. Описание функции D в [1] достаточно сложное.

Сравнение (4.2) и (4.3) с учетом оптимальности приводит нас к равенству

$$\tilde{\varphi}(\Lambda_{1-1/n}, L_\infty)_{1,n} = L(n, D), \quad (4.4)$$

которое позволяет вычислить функцию Юнга D по-новому, через равенство

$$D^{-1}(t) = \tilde{\varphi}(t, t^{1/n}),$$

вытекающее из (4.4) (подробнее см. [18]).

Список литературы

- [1] A. Cianchi, “Optimal Orlicz–Sobolev embeddings”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **20**:2 (2004), 427–474.
- [2] A. Gogatishvili, V. I. Ovchinnikov, “Interpolation orbits and optimal Sobolev’s embeddings”, *J. Funct. Anal.*, **253**:1 (2007), 1–17.
- [3] J. Peetre, “Sur le nombre de paramètres dans la définition de certains espaces d’interpolation”, *Ricerche Mat.*, **12** (1963), 248–261.
- [4] J.-L. Lions, J. Peetre, “Sur une classe d’espaces d’interpolation”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **19**:1 (1964), 5–68.
- [5] В. И. Дмитриев, С. Г. Крейн, В. И. Овчинников, “Основы теории интерполяции линейных операторов”, *Геометрия линейных пространств и теория операторов*, Изд-во Ярослав. гос. ун-та, Ярославль, 1977, 31–74.
- [6] S. Janson, “Minimal and maximal methods in interpolation”, *J. Funct. Anal.*, **44**:1 (1981), 50–73.
- [7] V. I. Ovchinnikov, “Interpolation orbits in couples of L_p spaces”, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, **334**:10 (2002), 881–884.
- [8] В. И. Дмитриев, “О методе Лионса–Петре построения интерполяционных пространств”, *Докл. АН СССР*, **198**:2 (1971), 747–750; англ. пер.: V. I. Dmitriev, “On the Lions–Peetre method for the construction of interpolation spaces”, *Soviet Math. Dokl.*, **12** (1971), 864–868.

- [9] В. И. Дмитриев, “Теоремы о параметрах для интерполяционного метода констант”, *Докл. АН СССР*, **216**:2 (1974), 257–258; англ. пер.: V. I. Dmitriev, “Theorems on parameters for the interpolation method of constants”, *Soviet Math. Dokl.*, **15** (1974), 773–775.
- [10] С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов, *Интерполяция линейных операторов*, Наука, М., 1978, 400 с.; англ. пер.: S. G. Kreĭn, Yu. I. Petunin, E. M. Semenov, *Interpolation of linear operators*, Transl. Math. Monogr., **54**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1982, xii+375 pp.
- [11] Yu. A. Brudnyi, N. Ya. Krugljak, *Interpolation functors and interpolation spaces*, v. I, North-Holland Math. Library, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1991, xvi+718 pp.
- [12] П. И. Лизоркин, “Интерполяция пространств L_p с весом”, *Докл. АН СССР*, **222**:1 (1975), 32–35; англ. пер.: P. I. Lizorkin, “Interpolation of weighted L_p spaces”, *Soviet Math. Dokl.*, **16**:3 (1975), 557–581.
- [13] Е. Д. Кравишвили, “Метод средних с произвольным функциональным параметром”, *Тр. матем. фак. Воронеж. гос. ун-та (Нов. сер.)*, **7** (2002), 58–72.
- [14] В. И. Овчинников, “Интерполяционные орбиты в парах пространств Лебега”, *Функц. анализ и его прил.*, **39**:1 (2005), 56–68; англ. пер.: V. I. Ovchinnikov, “Interpolation orbits in couples of Lebesgue spaces”, *Funct. Anal. Appl.*, **39**:1 (2005), 46–56.
- [15] В. И. Овчинников, “Интерполяционные теоремы, вытекающие из неравенства Гротендика”, *Функц. анализ и его прил.*, **10**:4 (1976), 45–54; англ. пер.: V. I. Ovchinnikov, “Interpolation theorems resulting from an inequality of Grothendieck”, *Funct. Anal. Appl.*, **10**:4 (1976), 287–294.
- [16] В. И. Овчинников, “Об оценках интерполяционных орбит”, *Матем. сб.*, **115(157)**:4(8) (1981), 642–652; англ. пер.: V. I. Ovchinnikov, “On estimates of interpolation orbits”, *Math. USSR-Sb.*, **43**:4 (1982), 573–583.
- [17] R. Kerman, L. Pick, “Optimal Sobolev imbeddings”, *Forum Math.*, **18**:4 (2006), 535–570.
- [18] А. М. Гришина, В. И. Овчинников, “Интерполяционная теорема для пространств Орлича–Лоренца”, *Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. Матем.*, 2013, № 2, 162–173.

Владимир Иванович Овчинников
(Vladimir I. Ovchinnikov)

Воронежский государственный университет
E-mail: vio@thebat.net

Поступила в редакцию
12.11.2012 и 28.10.2013