Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Баскаков, Оценки функции Грина и параметров экспоненциальной дихотомии гиперболической подгруппы операторов и линейных отношений, *Матем. сб.*, 2015, том 206, номер 8, 23–62

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8193>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 13:55:29

УДК 517.984+517.986

А. Г. Баскаков

Оценки функции Грина и параметров экспоненциальной дихотомии гиперболической полугруппы операторов и линейных отношений

На основе применения уравнения Ляпунова, метода подобных операторов и методов гармонического анализа получены оценки параметров экспоненциальной дихотомии и функции Грина, построенной по гиперболической полугруппе операторов и гиперболическому линейному отношению. Оценки получены с использованием величин, которые определяют резольвентой инфинитезимального оператора полугруппы операторов и линейного отношения

Библиография: 51 название.

Ключевые слова: гиперболические полугруппы операторов, линейные отношения, метод подобных операторов, уравнение Ляпунова, спектр оператора.

DOI: 10.4213/sm8193

§ 1. Введение. Основные понятия и результаты

Пусть $\mathcal{H}$ – комплексное гильбертово пространство, $\text{End } \mathcal{H}$ – банахова алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в $\mathcal{H}$. Рассматривается сильно непрерывная полугруппа операторов (полугруппа класса C_0)

$$T: \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \rightarrow \text{End } \mathcal{H},$$

и пусть $A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – ее инфинитезимальный оператор (см. [1]).

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}(t) - Ax(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

где функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$ принадлежит одному из следующих банаховых пространств функций. Через $C_b = C_b(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ обозначим банахово пространство ограниченных непрерывных функций, определенных на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathcal{H}$ с нормой $\|x\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|$. Символ $L^p = L^p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $p \in [1, \infty]$, используется для обозначения банахова пространства (классов) измеримых по Бохнеру функций $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$, для которых конечна величина

$$\|x\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} \|x(t)\|^p dt \right)^{1/p}, \quad p \neq \infty, \quad \|x\|_\infty = \text{vraisup}_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|, \quad p = \infty.$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00066).

Если $p = 2$, то $L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением $\langle x, y \rangle = \int_{\mathbb{R}} (x(t), y(t)) dt$, $x, y \in L^2$. Символ $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ используется для обозначения одного из пространств $C_b(\mathbb{R}, \mathcal{H}), L^p(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, $p \in [1, \infty]$.

Слабым ограниченным решением уравнения (1.1), где $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, называется функция $x \in C_b \cap \mathcal{F}$ такая, что при всех $s \leq t$ из $\mathbb{R}$ верны равенства

$$x(t) = T(t-s)x(s) + \int_s^t T(t-\tau)f(\tau) d\tau, \quad s \leq t. \quad (1.2)$$

Важной является следующая задача: найти необходимые и достаточные условия на оператор A , обеспечивающие существование и единственность (слабого) решения $x \in C_b \cap \mathcal{F}$ для любой функции $f \in \mathcal{F}$. Эта задача эквивалентна непрерывной обратимости дифференциального оператора

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{F}} = \frac{d}{dt} - A: D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{H}),$$

определяемого следующим образом. Функция $x \in C_b \cap \mathcal{F}$ считается принадлежащей области определения $D(\mathcal{L}_{\mathcal{F}})$ оператора, если существует функция $f \in \mathcal{F}$ такая, что x – слабое решение дифференциального уравнения (1.1), т.е. верны равенства (1.2). Оператор $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ называется *непрерывно обратимым*, если его ядро $\text{Ker } \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ нулевое и образ $\text{Im } \mathcal{L}_{\mathcal{F}}$ совпадает с $\mathcal{F}$. Следовательно, $\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^{-1} \in \text{End } \mathcal{F}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Полугруппа операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ называется *гиперболической*, или *допускающей экспоненциальную дихотомию*, если спектр $\sigma(T(1))$ оператора $T(1)$ обладает свойством

$$\sigma(T(1)) \cap \mathbb{T} = \emptyset, \quad (1.3)$$

где $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ – единичная окружность.

Следующий результат содержится в работах [2]–[5].

ТЕОРЕМА 1. Для непрерывной обратимости оператора $\mathcal{L}: D(\mathcal{L}) \subset \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ необходимо и достаточно, чтобы полугруппа T была гиперболической.

Следующая теорема 2 была доказана Прюссом (см. [6], [7]) для полугрупп операторов класса C_0 (см. также [8] и [9] для вырожденных полугрупп операторов, где в качестве оператора A выступает линейное отношение [9]).

ТЕОРЕМА 2. Для того чтобы (сильно непрерывная) полугруппа операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ была гиперболической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:

$$\sigma(A) \cap (i\mathbb{R}) = \emptyset, \quad (1.4)$$

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|R(i\lambda, A)\| < \infty, \quad (1.5)$$

где $R(\cdot, A): \rho(A) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{H}$ – резольвента оператора A , $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ – его резольвентное множество.

Условие гиперболичности полугруппы операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ приводит к разложению

$$\sigma(T(1)) = \sigma_{\text{int}} \cup \sigma_{\text{out}}, \quad (1.6)$$

где $\sigma_{\text{int}} = \{\lambda \in \sigma(T(1)) : |\lambda| < 1\}$, $\sigma_{\text{out}} = \{\lambda \in \sigma(T(1)) : |\lambda| > 1\}$. Рассмотрим проектор Рисса (см. [1]–[3]),

$$P_{\text{int}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} (T(1) - \lambda I)^{-1} d\lambda, \quad (1.7)$$

построенный по множеству σ_{int} и положим $P_{\text{out}} = I - P_{\text{int}}$, где I – тождественный оператор из алгебры $\text{End } \mathcal{H}$. Тогда гильбертово пространство $\mathcal{H}$ представимо в виде прямой суммы

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{int}} \oplus \mathcal{H}_{\text{out}}$$

замкнутого линейного подпространства $\mathcal{H}_{\text{int}} = \text{Im } P_{\text{int}}$, являющегося образом проектора P_{int} , и подпространства $\mathcal{H}_{\text{out}} = \text{Im } P_{\text{out}}$. Из формулы (1.7) следует, что проекторы P_{int} , P_{out} перестановочны с операторами $T(t)$, $t \geq 0$, и, следовательно, подпространства $\mathcal{H}_{\text{int}}$, $\mathcal{H}_{\text{out}}$ инвариантны относительно операторов $T(t)$, $t \geq 0$. При этом отметим, что эти подпространства ненулевые, если одновременно $\sigma_{\text{int}} \neq \emptyset$, $\sigma_{\text{out}} \neq \emptyset$ для множеств из разложения (1.6). Рассмотрим (более подробно см. [4] и [10]) полугруппу операторов

$$T_{\text{int}}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}_{\text{int}}, \quad T_{\text{int}}(t) = T(t)|_{\mathcal{H}_{\text{int}}}, \quad t \geq 0,$$

и группу операторов $T_{\text{out}}: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}_{\text{out}}$, определенную равенствами:

$$T_{\text{out}}(t) = \begin{cases} T(t)|_{\mathcal{H}_{\text{out}}}, & t \geq 0, \\ (T(-t)|_{\mathcal{H}_{\text{out}}})^{-1}, & t < 0. \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 3 (см. [2]–[4]). *Если полугруппа T гиперболична, то оператор $\mathcal{L}$ непрерывно обратим и обратный оператор $\mathcal{L}^{-1} \in \text{End } \mathcal{F}$ определяется формулой*

$$(\mathcal{L}^{-1}f)(t) = (G * f)(t) = \int_{\mathbb{R}} G(t-s)f(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad f \in \mathcal{F}. \quad (1.8)$$

Функция Грина $G = G_A: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ имеет вид

$$G(t) = \begin{cases} T(t)P_{\text{int}}, & t \geq 0, \\ -T_{\text{out}}(t)P_{\text{out}}, & t < 0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Для гиперболической полугруппы T можно вывести (более подробно см. [2], [4]) существование постоянных $M_{\pm} \geq 1$, $0 < \gamma_{\pm} \leq \infty$, таких, что функция Грина G допускает оценки вида

$$\|G(u)\| = \begin{cases} M_+ e^{-\gamma_+ u}, & u \geq 0, \\ M_- e^{\gamma_- u}, & u < 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Отметим, что полагается $\gamma_- = \infty$, если полугруппа T экспоненциально устойчива, т.е.

$$\|T(t)\| \leq M_+ e^{-\gamma_+ t}, \quad t \geq 0,$$

что эквивалентно условию $\sigma_{\text{out}} = \emptyset$ (соответственно полагается $\gamma_+ = \infty$, если $\sigma_{\text{int}} = \emptyset$.)

Пару чисел γ_+, γ_- из (1.10) будем называть *показателями экспоненциальной дихотомии* функции T , а две упорядоченных пары чисел $(M_-, \gamma_-), (M_+, \gamma_+)$ – *параметрами экспоненциальной дихотомии*. Если полугруппа T экспоненциально устойчива, то пару чисел (M_+, γ_+) назовем *параметрами экспоненциальной устойчивости* полугруппы T .

Из представления (1.8) обратного к $\mathcal{L}$ оператора (при условии (1.3) гиперболичности полугруппы T или условиях (1.4), (1.5)) следует, что норма оператора $\mathcal{L}^{-1}: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ допускает оценки вида

$$\|\mathcal{L}^{-1}\| \leq \|G\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \|G(\tau)\| d\tau \leq \frac{M_-}{\gamma_-} + \frac{M_+}{\gamma_+}. \quad (1.11)$$

Оценки (1.11) дают возможность получать условия разрешимости в пространстве $C_b(\mathbb{R}, \mathcal{H})$ нелинейного уравнения вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t, x(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.12)$$

где $f: \mathbb{R} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – непрерывная (по первому аргументу) функция равномерно относительно второго аргумента из любого шара из $\mathcal{H}$ и удовлетворяющая условию Липшица по второй переменной:

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq \ell \|x - y\|, \quad x, y \in \mathcal{H},$$

где $\ell > 0$ – некоторая постоянная. Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 4. Уравнение (1.12) имеет слабое решение $x_* \in C_b = C_b(\mathbb{R}, \mathcal{H})$, если выполнено условие $q = \|G\|_1 \ell < 1$. При этом

$$\|x_*\|_{\infty} \leq \frac{\|G\|_1}{1 - \|G\|_1 \ell} \|f_0\|_{\infty},$$

где $f_0(t) = f(t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО аналога теоремы 4 имеется в статье [11]; там же имеется определение слабого решения нелинейного уравнения. Оно основано на применении принципа сжимающих отображений [12] к интегральному уравнению

$$x(t) = (\Phi(x))(t) = \int_{\mathbb{R}} G(t-s)f(s, x(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\Phi: C_b \rightarrow C_b$ – сжимающее отображение с константой сжатия $\|\mathcal{L}^{-1}\| \ell \leq \|G\|_1 \ell < 1$.

Таким образом, из теоремы 4 следует важность получения оценки для $\|G\|_1$. В настоящей статье для оценок используются следующие величины (см. также

формулы из теоремы 8):

$$\gamma(A) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|R(i\lambda, A)\|, \quad (1.13)$$

$$\nu(A) = \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|R(it, A)x\|^2 dt, \quad (1.14)$$

$$\nu(A^*) = \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|R(it, A^*)x\|^2 dt, \quad (1.15)$$

$$k_c(T) = \sup_{0 \leq t \leq c} \|T(t)\|, \quad c > 0, \quad (1.16)$$

$$\beta(A) = \sup_{\mu \in \Theta(A)} \operatorname{Re} \mu, \quad (1.17)$$

где $\Theta(A) = \{(Ax, x); \|x\| \leq 1, x \in D(A)\}$ – числовая область оператора A (см. [13]). Таким образом, в оценках (1.13)–(1.15) используются величины, построенные по резольвенте оператора A .

Конечность величины $\gamma(A)$ следует из теоремы 2. Она важна тем, что дает равенство $\|\mathcal{L}^{-1}\| = \gamma(A)$ для нормы обратного оператора к дифференциальному оператору $\mathcal{L} = \frac{d}{dt} - A: D(\mathcal{L}) \subset L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \mathcal{H})$. Для доказательства этого равенства в лемме 4 статьи [4] использовалось равенство Парсеваля. Величина $\gamma(A)$ использовалась в работах [14], [4], [15] для оценок норм обратных операторов к дифференциальным операторам. В статье [16] она называлась *частотной характеристикой* оператора A .

В монографии [14] для $A \in \operatorname{End} \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ – конечномерное пространство, использовалась величина $\nu(A)$. Она называлась *интегральным критерием качества дихотомии*. В статье [10] установлена оценка $\gamma(A) \leq 2\nu(A)$. Отметим еще (без доказательства) оценку $\gamma(A) \leq (\nu(A)\nu(A^*))^{1/2}$.

Использование величины $\beta(A)$, определяемой равенством (1.17) по числовой области $\Theta(A)$ оператора A , является важным в связи со следующей теоремой (см. [17; теорема I.4.2 и п. I.4.4]).

ТЕОРЕМА 5. *Для того чтобы оператор $A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ с плотной в $\mathcal{H}$ областью определения $D(A)$ был инфинитезимальным оператором полугруппы операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \operatorname{End} \mathcal{H}$, удовлетворяющей оценке*

$$\|T(t)\| \leq e^{wt}, \quad t \geq 0, \quad (1.18)$$

где $w \in \mathbb{R}$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\operatorname{Re}(Ax, x) \leq w(x, x), \quad x \in D(A), \quad (1.19)$$

$$\operatorname{Re}(A^*y, y) \leq w(y, y), \quad y \in D(A^*). \quad (1.20)$$

Таким образом, выполнение оценки (1.18) эквивалентно выполнению условий $\beta(A) \leq w$, $\beta(A^*) \leq w$, т.е. числовые области $\Theta(A)$ и $\Theta(A^*)$ операторов A , A^* лежат в полуплоскости $\mathbb{C}_w = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq w\}$ (выполнены условия (1.19), (1.20)). Однако не для всякой полугруппы $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \operatorname{End} \mathcal{H}$ найдется $w \in \mathbb{R}$ такое, что верна оценка (1.18). В § 4 приведен пример полугруппы операторов, инфинитезимальный оператор которой и его сопряженный

оператор имеют числовые области, совпадающие со всей комплексной плоскостью.

В условиях следующей теоремы для инфинитезимального оператора A группы операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ делается

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. *Величины*

$$\beta_{\min}(A) = -\beta(-A) = \inf\{\text{Re } \lambda : \lambda \in \Theta(A)\}, \quad \beta_{\max}(A) = \beta(A)$$

конечны, и $\beta_{\min}(A) < 0$, $\beta_{\max}(A) > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Условия предположения 1 выполнены для оператора

$$A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad \overline{D(A)} = \mathcal{H},$$

если $D(A^*) = D(A)$ и оператор $2^{-1}(A + A^*): D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ допускает ограниченное расширение на $\mathcal{H}$ до (самосопряженного) оператора $B \in \text{End } \mathcal{H}$, спектр $\sigma(B)$ которого удовлетворяет условиям $\sigma(B) \cap \mathbb{R}_- \neq \emptyset$, $\sigma(B) \cap \mathbb{R}_+ \neq \emptyset$, где $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0]$. В частности, перечисленным условиям удовлетворяет оператор $A = iA_0 + B$, где $A_0: D(A_0) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – самосопряженный оператор и $B = B^* \in \text{End } \mathcal{H}$ имеет спектр, для которого $\sigma(B) \cap \mathbb{R}_\pm \neq \emptyset$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $T: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ – гиперболическая группа операторов, для которой выполнено предположение 1. Тогда функция Грина $G_A: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ допускает оценки вида

$$\|G_A(t)\| \leq \begin{cases} (2|\beta_{\min}(A)|\nu(A))^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\nu(A)}t\right\}, & t \geq 0, \\ (2\beta_{\max}(A)\nu(A))^{1/2} \exp\left\{\frac{1}{2\nu(A)}t\right\}, & t < 0, \end{cases} \quad (1.21)$$

$$\|G_A\|_1 \leq 2\nu(A)(2\beta_{\max}(A)\nu(A))^{1/2} + (2|\beta_{\min}(A)|\nu(A))^{1/2}. \quad (1.22)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. В условиях теоремы 2 нормы проекторов P_{int} , P_{out} , участвующих в определении функции Грина (формула (1.9)), допускают оценки

$$\max\{\|P_{\text{int}}\|, \|P_{\text{out}}\|\} \leq (2 \min\{|\beta_{\min}(A)|, \beta_{\max}(A)\} \nu(A))^{1/2}.$$

При доказательстве теоремы 6 существенно используется теорема 6 из статьи [10], в которой на основе использования уравнения Ляпунова получено необходимое и достаточное условие гиперболичности групп операторов (см. также монографию [3; теорема 4.40]). Доказательство теоремы 6 ведется на основе построения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ индефинитной метрики, задаваемой самосопряженным оператором $W \in \text{End } \mathcal{H}$, относительно которого решение соответствующего дифференциального уравнения экспоненциально убывает при $t \rightarrow \infty$. В [10] построен пример гиперболической полугруппы компактных операторов, для которых определяемый из уравнения Ляпунова оператор $W = W^* \in \text{End } \mathcal{H}$ не является обратимым, т.е. для полугрупп операторов не представляется возможность получения таким способом аналогов

теоремы 6. Для конечномерного пространства $\mathcal{H}$ аналоги теоремы 6 получены в работах [14], [18]–[22].

Предположим, что $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ – экспоненциально устойчивая полугруппа операторов. Тогда (см. [3], [10] и [23]) уравнение Ляпунова

$$A^*X + XA = -I \quad (1.23)$$

имеет решение $W = W^* \in \text{End } \mathcal{H}$, которое определяется формулой

$$Wx = - \int_0^\infty T(t)^* T(t)x dt, \quad x \in \mathcal{H}. \quad (1.24)$$

Таким образом, $WD(A) \subset D(A^*)$ и $A^*Wx + WAx = -x$, $x \in D(A)$. При этом оператор W отрицательно определен, но не обязательно непрерывно обратим.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ – экспоненциально устойчивая полугруппа операторов и оператор W непрерывно обратим. Тогда имеют место оценки

$$\|T(t)\| \leq \sqrt{\|W\| \|W^{-1}\|} \exp\left\{-\frac{1}{2\|W\|}t\right\}, \quad t \geq 0. \quad (1.25)$$

Отметим, что для экспоненциально устойчивой группы операторов $T: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ оператор W обратим (см. [10] и теорему 17). Из замечания 2 (см. § 2) следует, что $\|W\| = \nu(A)$.

В случае конечномерного пространства $\mathcal{H}$ оценка (1.25) приведена в [14; п. 9.3].

В § 3 предложен другой способ получения оценки функции Грина, основанный на использовании методов гармонического анализа.

Наряду с определяемыми формулами (1.13)–(1.17) величинами в теореме 8 вводятся в рассмотрение новые величины $\nu_\varepsilon(A)$, $\nu_\varepsilon(A^*)$. Они определяются по произвольному линейному оператору $A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, имеющему непустое резольвентное множество $\rho(A)$ и для которого конечны величины

$$s(A) = \sup\{\text{Re } \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}, \quad s_0(A) = \inf\left\{a > s(A) : \sup_{\text{Re } \lambda \geq a} \|R(\lambda, A)\| < \infty\right\}.$$

Величину $s(A)$ называют (см. [7], [23]) *спектральной границей* оператора A , а величину $s_0(A)$ – *абсциссой равномерной ограниченности резольвенты* оператора A .

Для произвольной (сильно непрерывной) полугруппы операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ величина

$$w_0(T) = \inf\left\{w \in \mathbb{R} : \sup_{t \geq 0} e^{-wt} \|T(t)\| < \infty\right\}$$

называется *типом полугруппы T* или *постоянной роста полугруппы T* (см. [7], [23]).

Отметим, что $s(A) \leq s_0(A) \leq w_0(T)$ для инфинитезимального оператора A полугруппы T . При этом $s_0(A) = w_0(T)$ в силу теоремы 2. Для полугрупп операторов в банаховом пространстве эти величины могут не совпадать [7].

ТЕОРЕМА 8. *Оператор $A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ с $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$ является инфинитезимальным оператором экспоненциально устойчивой полугруппы операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда для некоторого $\varepsilon > 0$ выполнены условия:*

- 1) $s_0(A) < 0$;
- 2) $\nu_\varepsilon(A) = \sup_{a>0} \sup_{\|x\| \leq 1} a \int_{-\infty}^{\infty} \|R(a + s_0(A) + \varepsilon + i\lambda, A)x\|^2 d\lambda < \infty$;
- 3) $\nu_\varepsilon(A^*) = \sup_{a>0} \sup_{\|x\| \leq 1} a \int_{-\infty}^{\infty} \|R(a + s_0(A) + \varepsilon + i\lambda, A^*)x\|^2 d\lambda < \infty$.

При выполнении этих условий полугруппа $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ допускает оценку

$$\|T(t)\| \leq \frac{e}{2\pi} \sqrt{\nu_\varepsilon(A)\nu_\varepsilon(A^*)} \exp\{(s_0(A) + \varepsilon)t\}, \quad t \geq 0. \quad (1.26)$$

При этом условия 1)–3) будут выполнены для любого $\varepsilon > 0$.

Теорема 8 существенно используется в § 3 при доказательстве теоремы 18, где получены оценки функции Грина для секториальных операторов.

Учитывая трудность получения оценок величин $\nu_\varepsilon(A)$ и $\nu_\varepsilon(A^*)$, в следующих теоремах используются величины $\gamma(A)$, $\nu(A)$, $\nu(A^*)$, $k_c(T)$, заданные формулами (1.13)–(1.16).

Приводимые далее в теоремах 9–11 оценки получены для гиперболической полугруппы операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ с инфинитезимальным оператором A .

ТЕОРЕМА 9. *Функция Грина $G_A: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ допускает оценки вида*

$$\|G_A(t)\| \leq \frac{1}{|t|} \frac{\sqrt{\nu(A)\nu(A^*)}}{(1 - \alpha\gamma(A))^2} \exp\{-\alpha|t|\}, \quad t \neq 0, \quad (1.27)$$

для любого числа $\alpha > 0$, удовлетворяющего условию $\alpha < 1/\gamma(A)$. В частности (при $\alpha = (2\gamma(A))^{-1}$), имеют место оценки

$$\|G_A(t)\| \leq \frac{4}{|t|} \sqrt{\nu(A)\nu(A^*)} \exp\left\{-\frac{|t|}{2\gamma(A)}\right\}, \quad t \neq 0. \quad (1.28)$$

СЛЕДСТВИЕ 2. *Если T – экспоненциально устойчивая полугруппа операторов, то $w_0(T) \leq (\gamma(A))^{-1}$.*

Из теоремы 9 вытекают следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 10. *Пусть $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ – экспоненциально устойчивая полугруппа операторов. Тогда она допускает оценки вида*

$$\|T(t)\| \leq \begin{cases} k_c(T), & 0 \leq t \leq c, \\ \frac{1}{t} \frac{\sqrt{\nu(A)\nu(A^*)}}{(1 - \alpha\gamma(A))^2} \exp\{-\alpha t\}, & t > c, \end{cases} \quad (1.29)$$

для любого числа $\alpha > 0$, удовлетворяющего условию $\alpha < 1/\gamma(A)$, и для любого $c > 0$.

В следующей теореме для оценки величины $k_c(T)$ используется величина $\beta(A)$, определенная равенством (1.17). При этом используется теорема 5.

ТЕОРЕМА 11. *Если $\beta(A) < \infty$ и $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ – экспоненциально устойчивая полугруппа операторов, то*

$$\|T(t)\| \leq \begin{cases} e^{\beta(A)t}, & 0 \leq t \leq c, \\ \frac{4}{t} \sqrt{\nu(A)\nu(A^*)} \exp\left\{-\frac{1}{2\gamma(A)}t\right\}, & t > c, \end{cases} \quad (1.30)$$

для любого числа $c > 0$. При этом

$$\|\mathcal{L}^{-1}\| \leq \|G_A\|_1 \leq \frac{e^{\beta(A)c} - 1}{\beta(A)} + \frac{8}{c} \sqrt{\nu(A)\nu(A^*)} \gamma(A).$$

Пусть

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dt} - Q: D(\mathcal{L}) = W_2^1(\mathbb{R}, H) \subset L^2(\mathbb{R}, H) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, H), (\mathbb{R}, H),$$

где $W_2^1(\mathbb{R}, H) = \{x \in L^2(\mathbb{R}, H) : x \text{ – абсолютно непрерывна и } \dot{x} \in L^2(\mathbb{R}, H)\}$ – пространство Соболева и $Q \in C_b(\mathbb{R}, \text{End } H)$, есть непрерывно обратимый оператор. В статье [15] было доказано, что оператор $\mathcal{L}$ непрерывно обратим в $C_b(\mathbb{R}, \text{End } H)$ и верна оценка

$$\|\mathcal{L}^{-1}\|_\infty \leq 4(\|\mathcal{L}^{-1}\|_2 + \|Q\|_\infty \|\mathcal{L}^{-1}\|_2^2),$$

где $\|\mathcal{L}^{-1}\|_\infty, \|\mathcal{L}^{-1}\|_2$ – норма оператора $\mathcal{L}^{-1}$ соответственно в C_b и L^2 . При доказательстве использовались совершенно другие методы (они затем были использованы в теории вейвлетов [24]).

Результаты § 5 связаны с оценками функции Грина, построенной по гиперболическому линейному отношению. Приведем основные используемые здесь понятия из теории линейных отношений; они изложены в статьях [9], [25]–[27] (см. также монографии [28], [29]).

Пусть $\mathcal{X}$ – комплексное банахово пространство. Любое линейное подпространство $\mathcal{A}$ из декартова произведения $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ называется *линейным отношением* на банаховом пространстве $\mathcal{X}$. Далее любой линейный оператор A такой, что $D(A): \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, отождествляется с линейным отношением

$$\mathcal{A} = \{(x, Ax) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} : x \in D(A)\},$$

являющимся графиком оператора A . Таким образом, имеют место включения

$$\text{End } \mathcal{X} \subset LO(\mathcal{X}) \subset LR(\mathcal{X}),$$

где $LO(\mathcal{X})$ – множество линейных операторов, действующих в $\mathcal{X}$, а $LR(\mathcal{X})$ – множество линейных отношений на $\mathcal{X}$. Множество замкнутых в $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ линейных отношений обозначим через $LRC(\mathcal{X})$.

Подпространство

$$D(\mathcal{A}) = \{x \in \mathcal{X} : \text{существует } y \in \mathcal{X} \text{ такой, что } (x, y) \in \mathcal{A}\}$$

называется *областью определения* отношения $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$. Через $\mathcal{A}x$, где $x \in D(\mathcal{A})$, обозначим множество $\{y \in \mathcal{X} : (x, y) \in \mathcal{A}\}$. Подпространства $\text{Ker } \mathcal{A} = \{x \in D(\mathcal{A}) : (x, 0) \in \mathcal{A}\}$, $\text{Im } \mathcal{A} = \bigcup_{x \in D(\mathcal{A})} \mathcal{A}x$ называется соответственно *ядром* и *образом* отношения $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$.

Суммой двух отношений $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in LR(\mathcal{X})$ называется линейное подпространство из $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ вида

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} : x \in D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B}), y \in \mathcal{A}x + \mathcal{B}x\},$$

где $\mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ – алгебраическая сумма двух подмножеств $\mathcal{A}x, \mathcal{B}x$. *Произведением* линейных отношений $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in LR(\mathcal{X})$ называется линейное подпространство из $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ вида

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = \{(x, z) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} : \text{существует } y \in D(\mathcal{A}) \text{ такой, что } (x, y) \in \mathcal{B}, (y, z) \in \mathcal{A}\}.$$

Если $\mathcal{A} \in LR(\mathcal{X})$, то обратное отношение $\mathcal{A}^{-1} \in LR(\mathcal{X})$ определяется равенством $\mathcal{A}^{-1} = \{(y, x) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X} : (x, y) \in \mathcal{A}\}$. Ясно, что $D(\mathcal{A}^{-1}) = \text{Im } \mathcal{A}$ и $\text{Im } \mathcal{A}^{-1} = D(\mathcal{A})$.

Отношение $\mathcal{A}$ из $LRC(\mathcal{X})$ назовем *непрерывно обратимым*, если $\mathcal{A}^{-1} \in \text{End } \mathcal{X}$, т.е. $\text{Ker } \mathcal{A} = \{0\}$ (отношение $\mathcal{A}$ инъективно) и $\text{Im } \mathcal{A} = \mathcal{X}$ (отношение $\mathcal{A}$ сюръективно). *Резольвентным множеством* отношения $\mathcal{A}$ называется множество $\rho(\mathcal{A})$ всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \in \text{End } \mathcal{X}$, т.е. отношение $\mathcal{A} - \lambda I$ непрерывно обратимо. *Спектром* отношения $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ называется множество $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$.

Следует отметить, что множество $\rho(\mathcal{A})$ открыто, спектр $\sigma(\mathcal{A})$ отношения $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ замкнут. Функция

$$R(\cdot, \mathcal{A}) : \rho(\mathcal{A}) \rightarrow \text{End } \mathcal{X}, \quad R(\lambda, \mathcal{A}) = (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}, \quad \lambda \in \rho(\mathcal{A}),$$

называется *резольвентой* отношения $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$.

Замкнутое линейное подпространство $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$ назовем *инвариантным* для отношения $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ с непустым $\rho(\mathcal{A})$, если оно инвариантно относительно всех операторов $R(\lambda, \mathcal{A})$, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$. *Сужением* отношения $\mathcal{A}$ на подпространство $\mathcal{X}_0$ назовем отношение $\mathcal{A}_0 \in LRC(\mathcal{X}_0)$, резольвентой которого является сужение $R_0 : \rho(\mathcal{A}) \rightarrow \text{End } \mathcal{X}_0$, $R_0(\lambda) = R(\lambda, \mathcal{A})|_{\mathcal{X}_0}$, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, резольвенты $R(\cdot, \mathcal{A}) : \rho(\mathcal{A}) \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ на подпространство $\mathcal{X}_0$ и обозначим его через $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}|_{\mathcal{X}_0}$.

Если $\mathcal{X} = \mathcal{X}_0 \oplus \mathcal{X}_1$ – прямая сумма инвариантных относительно $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ подпространств и $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}|_{\mathcal{X}_0}$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_{\mathcal{X}_1}$, то будем говорить, что отношение $\mathcal{A}$ является *прямой суммой* отношений $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$, и использовать запись $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$. Оператор $B \in \text{End } \mathcal{X}$ назовем *перестановочным* с отношением $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$, если $(Bx, By) \in \mathcal{A}$ для любых $(x, y) \in \mathcal{A}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отношение $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ назовем *гиперболическим* (относительно окружности $\mathbb{T}$), если выполнено условие

$$\sigma(\mathcal{A}) \cap \mathbb{T} = \emptyset. \quad (1.31)$$

Условие (1.31) для отношения $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ влечет представление

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_{\text{int}} \cup \sigma_{\text{out}}, \quad (1.32)$$

где $\sigma_{\text{int}} = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}) : |\lambda| < 1\}$, $\sigma_{\text{out}} = \{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}) : |\lambda| > 1\}$. Следующий результат следует из [25] (см. также теорему 4.2 из [26] и теорему 5.2.10 из [27]).

ТЕОРЕМА 12. Пусть $\mathcal{A}$ – гиперболическое линейное отношение на пространстве $\mathcal{X}$. Тогда пространство $\mathcal{X}$ допускает представление в виде

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\text{int}} \oplus \mathcal{X}_{\text{out}}, \quad (1.33)$$

прямой суммы замкнутых инвариантных относительно линейного отношения $\mathcal{A}$ подпространств $\mathcal{X}_{\text{int}}$, $\mathcal{X}_{\text{out}}$, и $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1$, где $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{X}_{\text{int}}$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \upharpoonright \mathcal{X}_{\text{out}} \in LRC(\mathcal{X}_{\text{out}})$ обладают следующими свойствами:

- 1) $\mathcal{A}_0 \in \text{End } \mathcal{X}_0$, $\sigma(\mathcal{A}_0) = \sigma_{\text{int}}$;
- 2) $\mathcal{A}_1 0 = \mathcal{A} 0$, $D(\mathcal{A}) = \mathcal{X}_{\text{int}} \oplus D(\mathcal{A}_1)$, $\sigma(\mathcal{A}_1) = \sigma_{\text{out}}$.

Разложение (1.33) пространства $\mathcal{X}$ осуществляет перестановочный с отношением $\mathcal{A}$ проектор Рисса

$$P_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} R(\lambda, \mathcal{A}) d\lambda \in \text{End } \mathcal{X}. \quad (1.34)$$

При этом $\mathcal{X}_{\text{int}} = \text{Im } P_0$, $\mathcal{X}_{\text{out}} = \text{Im } P_1$, где $P_1 = I - P_0$ – дополнительный к P_0 проектор.

Через $\ell^p = \ell^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$, где $p \in [1, \infty]$, обозначим банахово пространство двусторонних последовательностей $x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{X}$, для которых конечна величина

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|^p \right)^{1/p}, \quad p \in [1, \infty), \quad \|x\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|x(n)\|, \quad p = \infty,$$

принимаемая за норму в пространстве ℓ^p .

Рассмотрим разностное включение

$$x(n) \in Ax(n-1) + f(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.35)$$

где $f \in \ell^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$ и $A \in LRC(\mathcal{X})$. Под решением этого включения понимается двусторонняя последовательность $x \in \ell^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$, удовлетворяющая (1.35) для каждого $n \in \mathbb{Z}$, т.е. $(x(n-1), x(n) - f(n)) \in A$, $n \in \mathbb{Z}$. Построим линейное отношение $\mathcal{A} \in LRC(\ell^p)$ на банаховом пространстве $\ell^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$. Оно состоит из пар $(x, y) \in \ell^p \times \ell^p$ таких, что

$$(x(k-1), y(k)) \in A, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Отметим, что замкнутость отношения A влечет замкнутость отношения $\mathcal{A}$. Основываясь на теореме 12 и результатах статьи [30] (где рассматривался случай $A \in LO(\mathcal{X})$), М. С. Бичегкуев в статье [31] получил следующий результат.

ТЕОРЕМА 13. Следующие условия эквивалентны:

- 1) разностное включение (1.35) имеет единственное решение $x \in \ell^p$ для любой последовательности $f \in \ell^p$;
- 2) отношение A гиперболично;
- 3) отношение $I - A$ непрерывно обратимо.

Если выполнено одно из этих условий, то оператор $\mathcal{A}^{-1} \in \text{End } \ell^p$ допускает представление вида

$$(\mathcal{A}^{-1}f)(n) = (G * f)(n) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} G(n - m)f(m), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad f \in \ell^p, \quad (1.36)$$

где функция $G: \mathbb{Z} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$, называемая функцией Грина для разностного включения (1.35), имеет вид

$$G(k) = \begin{cases} \mathcal{A}_0^k P_0, & k \geq 0, \\ -\mathcal{A}_1^k P_1, & k \leq -1, \end{cases} \quad (1.37)$$

где $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, P_0, P_1$ определены в теореме 12.

Для оценки функции Грина G используется величина

$$\gamma_{\mathbb{T}}(A) = \sup_{\gamma \in \mathbb{T}} \|R(\gamma, A)\|.$$

Из формулы (1.36) следует, что норма оператора $\mathcal{A}^{-1} \in \text{End } \ell^p$ допускает оценку

$$\|\mathcal{A}^{-1}\| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \|G(k)\|$$

в любом из банаховых пространств $\ell^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$, $p \in [1, \infty]$.

ТЕОРЕМА 14. Пусть отношение $A \in LR(\mathcal{X})$ гиперболично. Тогда имеет место оценка

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|G(k)\| \leq \begin{cases} 4\gamma_{\mathbb{T}}(A)^2 - 2\gamma_{\mathbb{T}}(A), & \text{если } \sigma_{\text{int}} \neq \emptyset, \sigma_{\text{out}} = \emptyset, \\ 4\gamma_{\mathbb{T}}(A)^2 + 2\gamma_{\mathbb{T}}(A), & \text{если } \sigma_{\text{int}} = \emptyset, \sigma_{\text{out}} \neq \emptyset, \\ 8\gamma_{\mathbb{T}}(A)^2, & \text{если } \sigma_{\text{int}} \neq \emptyset, \sigma_{\text{out}} \neq \emptyset. \end{cases} \quad (1.38)$$

Оценка (1.38) может быть использована в вопросах разрешимости в $\ell^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$ нелинейного разностного включения

$$x(n) \in Ax(n-1) + g(n-1, x(n-1)), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.39)$$

где A – гиперболическое линейное отношение на $\mathcal{X}$ и $g: \mathbb{Z} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ – отображение со свойствами:

- 1) $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|g(n, m) < \infty\|$ для любого $m \in \mathbb{Z}$,
- 2) $\sup_{n \in \mathbb{Z}} \|g(n, k) - g(m, \ell)\| \leq \ell|k - m|$, $k \in \mathbb{Z}$, для некоторого $\ell > 0$.

ТЕОРЕМА 15. Разностное включение (1.39) разрешимо в пространстве $\ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$, если выполнено условие

$$8\gamma_{\mathbb{T}}(A)^2 \ell < 1.$$

В § 6 приведены примеры гиперболических полугрупп операторов. Приводимые здесь примеры и результаты тесно связаны с результатами статей [32]–[37]. В § 7 обсуждаются некоторые из полученных результатов.

§ 2. Оценки параметров экспоненциальной дихотомии и функции Грина в случае группы операторов

Всюду в этом параграфе $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ – сильно непрерывная полугруппа операторов. Если она является гиперболической, то используются введенные в § 1 обозначения.

Пусть A – инфинитезимальный оператор гиперболической полугруппы операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$. Рассмотрим в банаховой алгебре $\text{End } \mathcal{H}$ уравнение Ляпунова

$$A^*X + XA = F \in \text{End } \mathcal{H}. \quad (2.1)$$

С левой частью этого уравнения свяжем трансформатор (следуя терминологии М. Г. Крейна)

$$\mathcal{L}: D(\mathcal{L}) \subset \text{End } \mathcal{H} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}, \quad \mathcal{L}X = A^*X + XA$$

с областью определения

$$D(\mathcal{L}) = \{X \in \text{End } \mathcal{H} : Xx \in D(A^*) \text{ для всех } x \in D(A) \\ \text{и оператор } A^*X + XA: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \text{ ограничен на } D(A)\}.$$

Если $X \in D(\mathcal{L})$, то в силу плотности $D(A)$ в $\mathcal{H}$ расширение оператора $A^*X + XA$ на пространство $\mathcal{H}$ определено корректно и будет обозначаться тем же символом $A^*X + XA$.

Введем в рассмотрение замкнутые подпространства из алгебры $\text{End } \mathcal{H}$ вида

$$\begin{aligned} \text{End}_* \mathcal{H} &= \{X \in \text{End } \mathcal{H} : P_{\text{int}}^* X P_{\text{out}} = P_{\text{out}}^* X P_{\text{int}} = 0\} \\ &= \{X \in \text{End } \mathcal{H} : P_{\text{int}}^* X P_{\text{int}} + P_{\text{out}}^* X P_{\text{out}} = X\}, \\ \text{End}_0 \mathcal{H} &= \{X \in \text{End } \mathcal{H} : P_{\text{int}} X P_{\text{out}}^* = P_{\text{out}} X P_{\text{int}}^* = 0\} \\ &= \{X \in \text{End } \mathcal{H} : P_{\text{int}} X P_{\text{int}}^* + P_{\text{out}} X P_{\text{out}}^* = X\}. \end{aligned}$$

Следующие две теоремы были получены в работах [3], [10]. Они существенно используются при доказательстве теорем 6, 7.

ТЕОРЕМА 16 (см. [3]). *Пусть полугруппа $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ гиперболична. Тогда уравнение (2.1) разрешимо для любого оператора F из подпространства $\text{End}_* \mathcal{H}$, причем существует единственное решение W , принадлежащее подпространству $\text{End}_* \mathcal{H}$. Оно представимо формулой*

$$\begin{aligned} Wx &= - \int_0^\infty G_A(t)^* F G_A(t) x dt + \int_\infty^0 G_A(t)^* F G_A(t) x dt \\ &= - \int_0^\infty T(t)^* P_{\text{int}}^* F T(t) P_{\text{int}} x dt + \int_\infty^0 T(t)^* P_{\text{out}}^* F T(t) P_{\text{out}} x dt, \quad x \in \mathcal{H}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В частности, если $F = -P_{\text{int}}^* P_{\text{int}} - P_{\text{out}}^* P_{\text{out}}$, то оператор W имеет вид

$$Wx = \int_0^\infty T(t)^* P_{\text{int}}^* T(t) P_{\text{int}} x dt - \int_{-\infty}^0 T(t)^* P_{\text{out}}^* T(t) P_{\text{out}} x dt, \quad x \in \mathcal{H}. \quad (2.3)$$

ТЕОРЕМА 17 (см. [10]). Для того чтобы (сильно непрерывная) группа операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ была гиперболической, необходимо и достаточно, чтобы существовали равномерно отрицательно определенные операторы $F \ll 0$, $F_* \ll 0$ из алгебры $\text{End } \mathcal{H}$ такие, что уравнение (2.1) и уравнение

$$AX + XA^* = F_* \quad (2.4)$$

имели соответственно непрерывно обратимые самосопряженные решения $W \in \text{End}_* \mathcal{H}$, $W_* \in \text{End}_0 \mathcal{H}$. Решение W определяется формулой (2.2), а оператор W_* имеет вид

$$W_* x = - \int_0^\infty G_A(t) F_* G_A(t)^* x \, dt + \int_\infty^0 G_A(t) F_* G_A(t)^* x \, dt, \quad x \in \mathcal{H}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В статье [10] было установлено, что для гиперболической полугруппы операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ преобразование Фурье $\hat{G}_A: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ функции Грина совпадает с сужением резольвенты оператора A на мнимую ось $i\mathbb{R}$, т.е. верны равенства

$$\hat{G}_A(\lambda)x = \int_{\mathbb{R}} G_A(t) x e^{-i\lambda t} \, dt = R(i\lambda, A)x, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Поэтому из формул (2.2)–(2.5) следует (если использовать тождество Планшереля), что верны равенства

$$(\widetilde{W}x, x) = \int_{\mathbb{R}} \|G_A(t)x\|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|R(i\lambda, A)x\|^2 \, d\lambda, \quad x \in \mathcal{H},$$

если $F = P_{\text{int}}^* P_{\text{int}} - P_{\text{out}}^* P_{\text{out}}$, $\widetilde{W} = W_+ + W_-$, где

$$W_+ x = \int_0^\infty G_A(t)^* G_A(t) x \, dt, \quad W_- x = \int_\infty^0 G_A(t)^* G_A(t) x \, dt.$$

Следовательно,

$$\|\widetilde{W}\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |(\widetilde{W}x, x)| = \sup_{\|x\| \leq 1} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|R(i\lambda, A)x\|^2 \, d\lambda = \nu(A). \quad (2.6)$$

Пусть $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ – (сильно непрерывная) группа операторов. Наряду с группой T рассмотрим группу операторов $\tilde{T}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, $\tilde{T}(t) = T(-t)$, $t \in \mathbb{R}$. Ее инфинитезимальным оператором является оператор $-A$.

Для доказательства теоремы 6 используется

ЛЕММА 1. *Имеют место оценки*

$$e^{t\beta_{\min}(A)} \|x\| \leq \|T(t)x\| \leq e^{t\beta_{\max}(A)} \|x\|, \quad t \geq 0, \quad (2.7)$$

$$e^{t\beta_{\max}(A)} \|x\| \leq \|T(t)x\| \leq e^{-t\beta_{\min}(A)} \|x\|, \quad t \leq 0, \quad x \in \mathcal{H}. \quad (2.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценки (2.7) (правая часть) следуют из теоремы 5, где $w = \beta_{\max}(A)$. Поскольку $\beta_{\max}(-A) = -\beta_{\min}(A)$, то

$$\|x\| = \|T(-t)T(t)x\| \leq \|T(-t)\| \|T(t)x\| \leq e^{-t\beta_{\min}(A)} \|T(t)x\|, \quad t \geq 0.$$

Следовательно, имеет место и левая часть оценок (2.7). Оценки (2.8) следуют из оценок (2.7), примененных к полугруппе операторов $\tilde{T}$. При этом следует учесть равенство $\beta_{\min}(-A) = -\beta_{\max}(A)$. Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Рассмотрим операторы W_+ , W_- , $\widetilde{W}$ из замечания 2 и будем учитывать, что $\|\widetilde{W}\| = \nu(A)$ (см. (2.6)). Поскольку операторы W_+ , W_- равномерно положительны, то

$$(W_{\pm}x, x) \leq (\widetilde{W}x, x) \leq \|\widetilde{W}\| \|x\|^2 = \nu(A) \|x\|^2, \quad x \in \mathcal{H}. \quad (2.9)$$

Из леммы 1 следуют оценки

$$\begin{aligned} (W_+x, x) &= \int_0^\infty (T(\tau)P_{\text{int}}x, T(\tau)P_{\text{int}}x) d\tau = \int_0^\infty \|(T(\tau)P_{\text{int}}x)\|^2 d\tau \\ &\geq \int_0^\infty e^{2t\beta_{\min}(A)\tau} \|P_{\text{int}}x\|^2 d\tau = \frac{1}{2|\beta_{\min}(A)|} \|P_{\text{int}}x\|^2. \end{aligned}$$

Следовательно, имеют место оценки

$$|(W_+x, x)| \geq \frac{1}{2|\beta_{\min}(A)|} \|P_{\text{int}}x\|^2, \quad x \in \mathcal{H}. \quad (2.10)$$

Пусть x_0 – произвольный вектор из $D(A)$. Рассмотрим функцию $u: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{H}$, $u(t) = G(t)x_0$, $t \geq 0$. При $t \geq 0$ получаем равенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(W_+u(t), u(t)) &= \frac{d}{dt}(P_{\text{int}}^*W_+P_{\text{int}}u(t), u(t)) = \frac{d}{dt}(W_+P_{\text{int}}u(t), P_{\text{int}}u(t)) \\ &= (W_+P_{\text{int}}Au(t), P_{\text{int}}u(t)) + (W_+P_{\text{int}}u(t), P_{\text{int}}Au(t)) \\ &= (P_{\text{int}}^*W_+P_{\text{int}}Au(t), u(t)) + (P_{\text{int}}^*A^*W_+P_{\text{int}}u(t), u(t)) \\ &= ((A^*W_+ + W_+A)u(t), u(t)) = -(P_{\text{int}}^*P_{\text{int}}u(t), u(t)) \\ &= -(P_{\text{int}}u(t), P_{\text{int}}u(t)) = -\|P_{\text{int}}u(t)\|^2. \end{aligned}$$

Из оценки (2.9) при $x = P_{\text{int}}u(t)$ получаем, что

$$\begin{aligned} (W_+u(t), u(t)) &= (W_+P_{\text{int}}u(t), P_{\text{int}}u(t)) \\ &\leq \|\widetilde{W}\| \|P_{\text{int}}u(t)\|^2 = \nu(A) \|P_{\text{int}}u(t)\|^2, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}(W_+u(t), u(t)) \leq -\frac{1}{\nu(A)}(W_+u(t), u(t)), \quad t \geq 0,$$

и, следовательно,

$$(W_+u(t), u(t)) \leq \exp\left\{-\frac{1}{\nu(A)}t\right\}(W_+u(0), u(0)) = \exp\left\{-\frac{1}{\nu(A)}t\right\}(W_+x_0, x_0). \quad (2.11)$$

Используя оценки (2.9), (2.10), (2.11), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2|\beta_{\min}(A)|} \|P_{\text{int}}u(t)\|^2 &\leq (W_+u(t), u(t)) \leq \exp\left\{-\frac{1}{\nu(A)}t\right\}(W_+x_0, x_0) \\ &\leq \exp\left\{-\frac{1}{\nu(A)}t\right\}(\widetilde{W}x_0, x_0) \leq \nu(A) \exp\left\{-\frac{1}{\nu(A)}t\right\} \|x_0\|^2, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Поскольку $u(t) = P_{\text{int}}T(t)x_0 = G_A(t)x_0$, $t \geq 0$, и так как $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$, то

$$\|G_A(t)x\|^2 \leq 2|\beta_{\min}(A)|\nu(A) \exp\left\{-\frac{1}{\nu(A)}t\right\}\|x\|^2, \quad t \geq 0,$$

для любого вектора x из $\mathcal{H}$. Таким образом,

$$\|G_A(t)x\| \leq (2|\beta_{\min}(A)|\nu(A))^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{\nu(A)}t\right\}, \quad t \geq 0. \quad (2.12)$$

Оценка $\|G_A(t)\|$ при $t < 0$ получается из предыдущей, если рассмотреть группу операторов $\tilde{T}(t) = T(-t)$, $t \in \mathbb{R}$, при $t \geq 0$. Так как генератором является оператор $(-A)$, то $G_{(-A)}(t) = T(-t)P_{\text{out}}$ при $t > 0$. Поскольку $\beta_{\min}(-A) = -\beta_{\max}(A)$, то при $t < 0$ получаем, что

$$\|G_A(t)\| = \|G_{-A}(-t)\| \leq (2\beta_{\max}(A)\nu(A))^{1/2} \exp\left\{-\frac{1}{\nu(A)}t\right\}, \quad t < 0. \quad (2.13)$$

Из полученных оценок (2.12), (2.13) следуют доказываемые оценки (1.21) и (1.22). Теорема 6 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Пусть $W = W^*$ – оператор, определенный формулой (1.24) и удовлетворяющий уравнению Ляпунова (1.23), x_0 – произвольный вектор из $D(A)$ и $x(t) = T(t)x_0$, $t \geq 0$. Имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Wx(t), x(t)) &= (W\dot{x}(t), x(t)) + (Wx(t), \dot{x}(t)) \\ &= (WAx(t), x(t)) + (Wx(t), Ax(t)) \\ &= ((WA + A^*W)x(t), x(t)) = -(x(t), x(t)) = -\|x(t)\|^2, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Из неравенств

$$(Wy, y) \leq \|W\| \|y\|^2, \quad y \in D(A),$$

следует, что

$$\frac{d}{dt}(Wx(t), x(t)) = -\|x(t)\|^2 \leq -\frac{1}{\|W\|}(Wx(t), x(t)), \quad t \geq 0.$$

Поэтому

$$(Wx(t), x(t)) \leq \exp\left\{-\frac{1}{\|W\|}t\right\}(Wx_0, x_0) \leq \|W\| \exp\left\{-\frac{1}{\|W\|}t\right\}\|x_0\|^2.$$

Поскольку

$$(Wx(t), x(t)) \geq \frac{1}{\|W^{-1}\|}\|x(t)\|^2, \quad t \geq 0,$$

то

$$\|x(t)\|^2 = \|T(t)x_0\|^2 \leq \|W^{-1}\| \|W\| \exp\left\{-\frac{1}{\|W\|}t\right\}\|x_0\|^2, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad x_0 \in D(A). \quad (2.14)$$

В силу ограниченности полугруппы операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ на любом конечном промежутке $[0, r]$, $r > 0$, и плотности $D(A)$ в пространстве $\mathcal{H}$ из (2.14) следует, что

$$\|T(t)\|^2 \leq \|W^{-1}\| \|W\| \exp\left\{-\frac{1}{\|W\|}t\right\}, \quad t \geq 0.$$

Из этого неравенства следует оценка (1.25). Теорема доказана.

§ 3. Оценки функции Грина, построенной по гиперболической полугруппе операторов; доказательство теорем 8–11

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8. Необходимость. Пусть $\tilde{T}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ – (сильно непрерывная) ограниченная полугруппа операторов с инфинитезимальным оператором $\tilde{A}: D(\tilde{A}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Тогда $s(\tilde{A}) \leq s_0(\tilde{A}) = w_0(\tilde{T}) \leq 0$.

Для любого числа $a > 0$ полугруппа операторов $\tilde{T}_a(t) = e^{-at}\tilde{T}(t)$, $t \geq 0$, является экспоненциально устойчивой полугруппой операторов с инфинитезимальным оператором $\tilde{A} - aI$. Тогда из равенства (2.5) следует представление

$$\begin{aligned} \tilde{T}(t)x &= e^{at}\tilde{T}_a(t)x = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(a+i\lambda)t} R(-a+i\lambda, \tilde{A})x d\lambda \\ &= \frac{e^{at}}{2\pi t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} R(-a+i\lambda, \tilde{A})^2 x d\lambda, \quad x \in \mathcal{H}, \quad a > 0. \end{aligned}$$

Из этого представления для любых $x, y \in \mathcal{H}$ получаем оценки

$$\begin{aligned} |(\tilde{T}(t)x, y)| &= \frac{e^{at}}{2\pi t} \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} (R(-a+i\lambda, \tilde{A})x, R(-a-i\lambda, \tilde{A}^*)y) d\lambda \right| \\ &\leq \frac{e^{at}}{2\pi ta} \sup_{\|x\| \leq 1} \left(a \int_{-\infty}^{\infty} \|R(-a+i\lambda, \tilde{A})x\|^2 d\lambda \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\sup_{\|y\| \leq 1} \left(a \int_{-\infty}^{\infty} \|R(-a-i\lambda, \tilde{A}^*)y\|^2 d\lambda \right)^{1/2} \right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для любого числа $\varepsilon > 0$ полугруппа операторов

$$\tilde{T}_\varepsilon: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}, \quad \tilde{T}_\varepsilon(t) = e^{(-s_0(A)-\varepsilon)t}T(t), \quad t \geq 0,$$

ограничена. Ее инфинитезимальным оператором является оператор $\tilde{A}_\varepsilon = A - (s_0(A) + \varepsilon)I$. Применяя полученную оценку (3.1) к полугруппе операторов $\tilde{T}_\varepsilon$, получаем, что для любого $a > 0$ верны оценки

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}_\varepsilon(t)\| &= e^{(-s_0(A)-\varepsilon)t} \|T(t)\| \\ &\leq \frac{e^{at}}{2\pi ta} \sup_{\|x\| \leq 1} \left(a \int_{-\infty}^{\infty} \|R(a+s_0(A)+\varepsilon+i\lambda, A)x\|^2 d\lambda \right)^{1/2} \\ &\quad \times \sup_{\|x\| \leq 1} \left(a \int_{-\infty}^{\infty} \|R(a+s_0(A)+\varepsilon+i\lambda, A)x\|^2 d\lambda \right)^{1/2}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Из этих оценок при $a = t^{-1}$ получаем, что

$$\|T_\varepsilon(t)\| \leq \frac{e}{2\pi} (\nu_\varepsilon(A) \nu_\varepsilon(A^*))^{1/2}, \quad t > 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &= e^{(s_0(A)+\varepsilon)t} \|T_\varepsilon(t)\| \\ &\leq \frac{e}{2\pi} (\nu_\varepsilon(A) \nu_\varepsilon(A^*))^{1/2} e^{(s_0(A)+\varepsilon)t}, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

для любого $\varepsilon > 0$. Таким образом, из (3.2) следует оценка (1.26).

Достаточность условий теоремы следует из теоремы Гомилко [38], примененной к полугруппе операторов $\tilde{T}_\varepsilon: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$. А именно, выполнение условий 1)–3) теоремы 8 влечет ограниченность полугруппы $\tilde{T}_\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$. Поэтому полугруппа $T(t) = e^{(s_0(A)+\varepsilon)t} T_\varepsilon(t)$, $t \geq 0$, будет экспоненциально устойчивой, если положить $\varepsilon = -1/2s_0(A)$. Теорема 8 доказана.

Теорема 8 может быть использована для оценки параметров экспоненциальной устойчивости аналитических полугрупп операторов. Их инфинитезимальными операторами являются секториальные операторы (см. [7], [39]).

Оператор $A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ называется *секториальным* с углом $\Theta \in (\pi/2, \pi)$, если для некоторого $b \in \mathbb{R}$ сектор

$$\Omega = \Omega(a, \Theta) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg(\lambda - a) < \Theta, \lambda \neq a\}$$

содержится в резольвентном множестве $\rho(A)$ оператора A и для каждого $\delta \in (0, \Theta - \pi/2)$ существует число $M_\delta \geq 1$ такое, что

$$\sup_{\lambda \in \Omega(b, \Theta - \delta)} \|(b - \lambda)R(\lambda, A)\| = M_\delta < \infty. \quad (3.3)$$

Пусть $A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – секториальный оператор, спектр которого находится в полуплоскости $\mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda < 0\}$. Из свойств секториальных операторов (см. [7], [39]) следует, что оператор A является инфинитезимальным оператором некоторой аналитической полугруппы операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, причем имеют место равенства

$$s(A) = s_0(A) = w_0(T).$$

Сразу отметим, что секториальность оператора A не обеспечивает выполнение условий (1.19), (1.20) теоремы 5. Более того, в § 4 будет построен пример секториального оператора, спектр которого отрицательный. Оператор имеет компактную резольвенту и его числовая область заполняет $\mathbb{C}$.

Поскольку $s(A) < 0$, то полугруппа операторов T экспоненциально устойчива. Из условия (3.3) следует, что можно в (3.3) считать $b < 0$. Более того, существует постоянная $M > 0$, для которой

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda - 2^{-1}s(A)|} \quad (3.4)$$

для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, лежащих в полуплоскости

$$\mathbb{C}_0^+ = \{\mu \in \mathbb{C} : \text{Re } \mu > 2^{-1}s(A) = 2^{-1}s_0(A)\}.$$

ТЕОРЕМА 18. Пусть $A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – секториальный оператор, для которого $s(A) < 0$ и резольвента которого удовлетворяет оценке (3.4) в полуплоскости $\mathbb{C}_0^+$. Тогда полугруппа $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, инфинитезимальным оператором которой является оператор A , допускает оценки

$$\|T(t)\| \leq \frac{eM}{4} \exp\left\{\frac{-s(A)}{2}t\right\}, \quad t > 0, \quad (3.5)$$

$$\|G_A\|_1 = \int_0^\infty \|T(\tau)\| d\tau \leq \frac{eM}{2s(A)}. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для получения оценок используем теорему 8, положив $\varepsilon = 2^{-1}s(A)$. Для такого ε получаем оценку величин $\nu_\varepsilon(A)$ и $\nu_\varepsilon(A^*)$:

$$\begin{aligned} \nu_\varepsilon(A) &= \sup_{a>0} \sup_{\|x\| \leq 1} a \int_{-\infty}^\infty \left\| R\left(a + \frac{s(A)}{2} + i\lambda, A\right)x \right\|^2 d\lambda \\ &\leq \sup_{a>0} \int_{-\infty}^\infty \frac{aM}{a^2 + \lambda^2} d\lambda = \frac{\pi}{2}M. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\left\| R\left(a + \frac{s(A)}{2} + i\lambda, A^*\right) \right\| = \left\| R\left(a + \frac{s(A)}{2} - i\lambda, A\right) \right\|,$$

то той же константой $\frac{\pi}{2}M$ оценивается величина $\nu_\varepsilon(A^*)$. Теперь оценка (3.5) следует из (1.26), а оценка (3.6) – из (3.5). Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Используя представление функции $\hat{G}_A$ в виде (2.5) равенства $\frac{d}{d\lambda} R(i\lambda, A) = iR(i\lambda, A)^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, и свойства преобразования Фурье, получаем оценки

$$\begin{aligned} |(itG_A(t)x, y)| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\mathbb{R}} (R(i\lambda, A)^2 x, y) e^{i\lambda t} d\lambda \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |(R(i\lambda, A)^2 x, y)| d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |(R(i\lambda, A)x, R(-i\lambda, A^*)y)| d\lambda \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|R(i\lambda, A)x\| \|R(-i\lambda, A^*)y\| d\lambda \\ &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|R(i\lambda, A)x\|^2 d\lambda \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \|R(i\lambda, A^*)y\|^2 d\lambda \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{\nu(A)\nu(A^*)} \|x\| \|y\|, \quad x, y \in \mathcal{H}, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Учитывая произвольность векторов $x, y \in \mathcal{H}$, положим $y = itG_A(t)x$. Тогда

$$\|itG_A(t)x\|^2 \leq \sqrt{\nu(A)\nu(A^*)} \|x\| \|itG_A(t)x\|, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Следовательно, имеют место доказываемые оценки (1.27), (1.28). Теорема доказана.

Теорема 10 (оценки (1.29)) непосредственно следует из теоремы 9.

Теорема 11 (оценки (1.30)) следует из теорем 5 и 9.

§ 4. О числовой области инфинитезимального оператора полугруппы операторов

В связи с теоремой 6 важную роль играет вопрос оценок величин $\beta_{\min}(A)$, $\beta_{\max}(A)$ для инфинитезимального оператора A полугруппы операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$. Эти величины могут быть бесконечными, и, более того, здесь будет построен пример полугруппы операторов, инфинитезимальный оператор которой имеет компактную резольвенту и линейные комбинации собственных векторов которого плотны во всем пространстве. В этом примере числовая область инфинитезимального оператора будет заполнять всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$.

ПРИМЕР 1. Полугруппа операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, где $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, вида

$$(T(t)x)(s) = \begin{cases} 2x(s+t), & s \in [-t, 0], \\ x(s+t), & s \in \mathbb{R} \setminus [-t, 0], \end{cases}$$

такова, что $\beta_{\max}(A) = \infty$ для ее инфинитезимального оператора A . Этот факт следует из равенств $\|T(t)\| = 2$, $t \in \mathbb{R}$, и теоремы 5.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H} = \bigoplus_{n \geq 2} \mathbb{C}^n$ последовательностей $x = (x_2, x_3, \dots)$, где $x_n \in \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, со скалярным произведением $\langle x, y \rangle = \sum_{n=2}^{\infty} (x_n, y_n)$, $x_n, y_n \in \mathbb{C}^n$. Определим последовательность $\mathcal{N}_n \in \text{End } \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, нильпотентных операторов равенствами:

$$\mathcal{N}_n x = \left(\sum_{k=2}^n x_k, 0, \dots, 0 \right) \in \mathbb{C}^n, \quad n \geq 2.$$

Индекс нильпотентности каждого оператора $\mathcal{N}_n$ равен двум, т.е. $\mathcal{N}_n^2 = 0$. Рассмотрим семейство векторов $x(\alpha) = (x_1(\alpha), \dots, x_n(\alpha)) \in \mathbb{C}^n$, $\alpha \in \mathbb{T}$, где

$$x_1(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_k(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{n-1}}, \quad 2 \leq k \leq n, \quad \|x(\alpha)\| = 1.$$

Числовая область $\Theta(\mathcal{N}_n)$ нильпотентного оператора $\mathcal{N}_n$ содержит множество комплексных чисел вида

$$(\mathcal{N}_n x(\alpha), x(\alpha)) = \left\{ \sum_{k=2}^n x_k(\alpha) \overline{x_1(\alpha)}; \alpha \in \mathbb{T} \right\} = \left\{ \frac{\alpha \sqrt{n-1}}{2}; \alpha \in \mathbb{T} \right\}.$$

Таким образом,

$$\Theta(\mathcal{N}_n) \supset \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \frac{1}{2} \sqrt{n-1} \right\} = \mathbb{T} \left(\frac{1}{2} \sqrt{n-1} \right)$$

– окружность радиуса $\frac{1}{2} \sqrt{n-1}$. В силу теоремы Хаусдорфа [13] множество $\Theta(\mathcal{N}_n)$ выпукло и поэтому содержит круг

$$\mathbb{D} \left(\frac{1}{2} \sqrt{n-1} \right) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \frac{1}{2} \sqrt{n-1} \right\}.$$

Далее рассмотрим операторы

$$A_n = -\frac{\sqrt{n-1}}{4}I_n + \mathcal{N}_n, \quad n \geq 2,$$

где I_n – тождественный оператор в $\mathbb{C}^n$. По ним построим полугруппу операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ формулой

$$T(t)x = (e^{tA_2}x_2, e^{tA_3}x_3, \dots), \quad x = (x_n) \in \mathcal{H}, \quad t \geq 0.$$

Поскольку

$$e^{tA_n} = \exp\left\{-\frac{\sqrt{n-1}}{4}t\right\}(I + \mathcal{N}_n), \quad t \geq 0,$$

то

$$\|e^{tA_n}\| \leq \exp\left\{-\frac{\sqrt{n-1}}{4}t\right\}\left(1 + \frac{\sqrt{n-1}}{2}t\right), \quad t \geq 0, \quad n \geq 2.$$

Так как

$$\begin{aligned} \|T(t)x\| &= \left(\sum_{n \geq 2} \|e^{tA_n}x_n\|^2\right)^{1/2} \leq \sup_{n \geq 0} \|e^{tA_n}\| \left(\sum_{n \geq 0} \|x_n\|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \max_{a \geq 0} \exp\left\{\frac{-at}{4}\right\} \left(1 + \frac{at}{2}\right) \|x\| = \frac{2}{\sqrt{e}} \|x\|, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

то полугруппа операторов T ограничена, причем

$$\sup_{n \geq 0} \|T(t)\| \leq \frac{2}{\sqrt{e}}.$$

Нетрудно видеть, что $\|T(t)\| \leq Me^{-t/4}$, $t \geq 0$, т.е. построенная полугруппа экспоненциально устойчива. Ввиду того, что полугруппа T непрерывна на каждом конечномерном подпространстве $\mathcal{H}_n = \{x = (x_k) \in \mathcal{H} : x_k = 0, k \geq n+1\}$, $n \geq 2$, и эта система подпространств плотна в $\mathcal{H}$, то из ограниченности полугруппы операторов T следует ее сильная непрерывность на $\mathcal{H}$.

Пусть A – инфинитезимальный оператор построенной полугруппы операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$. Так как подпространства $\mathcal{H}_n$, $n \geq 2$, являются инвариантными для A , то числовая область W_n сужения $A|_{\mathcal{H}_n}$ оператора A на $\mathcal{H}_n$ содержится в числовой области $\Theta(A)$ оператора A . Поскольку

$$W_n \supset \bigcup_{k=2}^n \Theta(A_k) \supset \bigcup_{k=2}^n \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda + \frac{\sqrt{k-1}}{4} \right| \leq \frac{\sqrt{k-1}}{2} \right\}$$

(использовалось равенство $\Theta(A_k) = -\sqrt{k-1}/4 + \Theta(\mathcal{N}_k)$) и так как множество

$$\bigcup_{k=2}^{\infty} \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \left| \lambda + \frac{\sqrt{k-1}}{4} \right| \leq \frac{\sqrt{k-1}}{2} \right\}$$

совпадает с $\mathbb{C}$, то $\Theta(A) = \mathbb{C}$. Из определения оператора A следует, что собственные и присоединенные векторы этого оператора порождают пространство $\mathcal{H}$, причем оператор A имеет компактную резольвенту.

Рассмотрим теперь последовательность операторов $\tilde{A}_n = A_n + \Lambda_n \in \text{End } \mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, где $\Lambda_n x = (x_k/k)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$. Определим полугруппу операторов $\tilde{T}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ равенствами

$$\tilde{T}(t)x = (e^{t\tilde{A}_2}x_2, e^{t\tilde{A}_3}x_3, \dots) \quad x = (x_n) \in \mathcal{H}, \quad t \geq 0.$$

Ее инфинитезимальным оператором является оператор $\tilde{A} = A + \Lambda: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, где $\Lambda \in \text{End } \mathcal{H}$, $\Lambda x = (\Lambda_n x_n)$, $x = (x_n) \in \mathcal{H}$. Эта полугруппа операторов сильно непрерывна (так как $\tilde{A}$ есть ограниченное возмущение оператора A), числовая область $\Theta(\tilde{A})$ оператора $\tilde{A}$ совпадает с $\mathbb{C}$, резольвента оператора $\tilde{A}$ компактна, а линейная оболочка собственных векторов оператора $\tilde{A}$ плотна в пространстве $\mathcal{H}$ (присоединенных векторов оператор $\tilde{A}$ не имеет).

§ 5. Доказательство теорем 14, 15

Пусть $A \in LRC(\mathcal{X})$ – гиперболическое отношение на банаховом пространстве $\mathcal{X}$, т.е. выполнено условие (1.31). Поэтому спектр $\sigma(A)$ отношения A представим в виде (1.32). Рассмотрим величины $r_{\text{int}} \geq 0$, $0 \leq r_{\text{out}} \leq \infty$, положив $r_{\text{int}} = 0$, если $\sigma_{\text{int}} = \emptyset$, и $r_{\text{int}} = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma_{\text{int}}\} = r(A_0)$, если $\sigma_{\text{int}} \neq \emptyset$. Положим $r_{\text{out}} = \infty$, если $\sigma_{\text{out}} = \emptyset$, и $r_{\text{out}} = \max\{|\lambda|; \lambda \in \sigma_{\text{out}}\}$, если $\sigma_{\text{out}} \neq \emptyset$.

Резольвента $R(\cdot, A): \rho(A) \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ отношения A является псевдорезольвентой (см. [1]), которая в силу условия (1.31) теоремы 14 является голоморфной на открытом множестве $\{\lambda \in \mathbb{C} : r_{\text{int}} < \rho < r_{\text{out}}\}$. Поэтому, используя функциональное исчисление для линейных отношений [25] или теорему 5.9.3 из [1] (см. также доказательство теоремы 6.1 из [27]) для псевдорезольвент, получаем представление

$$G(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}(\rho)} \gamma^n R(\gamma, A) d\gamma, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (5.1)$$

где $\mathbb{T}(\rho) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = \rho\}$ – окружность радиуса ρ , удовлетворяющего условию $r_{\text{int}} < \rho < r_{\text{out}}$.

При $n = 0$ получаем формулу (см. также формулу (1.34))

$$P_0 = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}(\rho)} R(\gamma, A) d\gamma$$

для проектора Рисса $P_0 \in \text{End } \mathcal{X}$, построенного по спектральному множеству σ_{int} .

Вначале предположим, что $\sigma_{\text{int}} \neq \emptyset$, и оценим нормы $\|G(n)\|$ операторов $G(n)$, $n \leq 0$.

Из представления (1.37) функции Грина G следует, что

$$\|G(n)\| \leq \rho^{n+1} \max_{\gamma \in \mathbb{T}} \|R(\gamma\rho, A)\|, \quad n \leq 0,$$

где $\rho \in (r_{\text{int}}, 1)$. Представим отношение $A - \gamma\rho I$, где $\gamma \in \mathbb{T}$, $\rho \in (r_{\text{int}}, 1)$, в следующем виде:

$$A - \gamma\rho I = (A - \gamma I)(I - (-\gamma)(1 - \rho)R(\gamma, A)). \quad (5.2)$$

Так как оператор

$$C = (-\gamma)(1 - \rho)R(\gamma, A)$$

удовлетворяет оценке $\|C\| \leq (1 - \rho)\gamma_{\mathbb{T}}(A)$, $\gamma \in \mathbb{T}$, то $\|C\| < 1$ для $\rho \in (1 - 1/\gamma_{\mathbb{T}}(A), 1)$. Поскольку спектральный радиус ограниченного оператора не превосходит его нормы, то выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbb{T}}(A) &= \sup_{\gamma \in \mathbb{T}} \|R(\gamma, A)\| \geq \sup_{\gamma \in \mathbb{T}} r(R(\gamma, A)) \\ &= \sup_{\gamma \in \mathbb{T}, \lambda \in \sigma(A)} \frac{1}{|\gamma - \lambda|} = \frac{1}{\text{dist}(\mathbb{T}, \sigma(A))} \geq \frac{1}{\text{dist}(\mathbb{T}, \sigma_{\text{int}})} = \frac{1}{1 - r_{\text{int}}} . \end{aligned}$$

При этом использовалось равенство

$$\sigma(R(\gamma, A)) = \left\{ \frac{1}{\lambda - \gamma} ; \lambda \in \sigma(A) \right\}, \quad (5.3)$$

которое следует из теоремы 2.4 статьи [25]. Следовательно, $r_{\text{int}} \leq 1 - 1/\gamma_{\mathbb{T}}(A)$ и $\gamma_{\mathbb{T}}(A) \geq 1$.

Тогда из равенства (5.2) следует, что отношение $A - \gamma\rho I$ будет непрерывно обратимо, причем $(A - \gamma\rho I)^{-1} = (I - C)^{-1}R(\gamma, A)$ и имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|R(\gamma\rho, A)\| &= \|R(\gamma, A)\| \|(I - C)^{-1}\| \\ &\leq \gamma_{\mathbb{T}}(A) \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \rho)^k \gamma_{\mathbb{T}}(A)^k = \frac{\gamma_{\mathbb{T}}(A)}{1 - (1 - \rho)\gamma_{\mathbb{T}}(A)} \end{aligned}$$

для всех $\gamma \in \mathbb{T}$ и $\rho \in (1 - 1/\gamma_{\mathbb{T}}(A), 1)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{k \leq 0} \|G(k)\| &\leq \inf_{\rho \in (1 - 1/\gamma_{\mathbb{T}}(A), 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho \gamma_{\mathbb{T}}(A)}{1 - (1 - \rho)\gamma_{\mathbb{T}}(A)} \rho^k \\ &= \inf_{\rho \in (1 - 1/\gamma_{\mathbb{T}}(A), 1)} \frac{\gamma_{\mathbb{T}}(A)}{(1 - \rho) - (1 - \rho)^2 \gamma_{\mathbb{T}}(A)} . \end{aligned} \quad (5.4)$$

Точная нижняя грань достигается в точке $\rho_{\min} = \sqrt{1 - 1/\gamma_{\mathbb{T}}(A)}$. Чтобы избежать громоздкого выражения для оценки, положим $\rho = 1 - 1/(2\gamma_{\mathbb{T}}(A))$ в правой части оценки (5.4). Тогда верна оценка

$$\sum_{k \leq 0} \|G(k)\| < 4\gamma_{\mathbb{T}}(A)^2 - 2\gamma_{\mathbb{T}}(A). \quad (5.5)$$

Пусть теперь $\sigma_{\text{out}} \neq \emptyset$. Из представления (5.3), где $1 < |\gamma| < r_{\text{out}}$, следует, что

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbb{T}}(A) &= \sup_{\gamma \in \mathbb{T}} \|R(\gamma, A)\| \geq \sup_{\gamma \in \mathbb{T}} r(R(\gamma, A)) \\ &= \sup_{\gamma \in \mathbb{T}, \lambda \in \sigma(A)} \frac{1}{|\gamma - \lambda|} \geq \frac{1}{\text{dist}(\mathbb{T}, \sigma_{\text{out}})} = \frac{1}{r_{\text{out}} - 1} . \end{aligned}$$

Поэтому $r_{\text{out}} \geq 1 + 1/\gamma_{\mathbb{T}}(A)$. Отношение $A - \gamma\rho I$ запишем в виде

$$A - \gamma\rho I = (A - \gamma I)(I - (\rho - 1)\gamma R(\gamma, A)), \quad \gamma \in \mathbb{T}, \quad \rho \in (1, r_{\text{out}}).$$

Поскольку

$$(\rho - 1)\|R(\gamma, A)\| \leq (\rho - 1)\gamma_{\mathbb{T}}(A) < (r_{\text{out}} - 1)\gamma_{\mathbb{T}}(A) \leq 1,$$

то отношение $A - \gamma\rho I$ непрерывно обратимо для всех $\gamma \in \mathbb{T}$, $\rho \in (1, 1 + 1/\gamma_{\mathbb{T}}(A))$ и

$$R(\gamma\rho, A) = \sum_{n=-\infty}^{-1} ((\rho - 1)\gamma)^n R(\gamma, A)^{n+1}, \quad \gamma \in \mathbb{T}, \quad \rho \in \left(1, 1 + \frac{1}{\gamma_{\mathbb{T}}(A)}\right).$$

Следовательно,

$$\|R(\gamma\rho, A)\| \leq \sum_{n=-\infty}^{-1} (\rho - 1)^n \gamma_{\mathbb{T}}(A)^{n+1} = \frac{\gamma_{\mathbb{T}}(A)}{1 - (\rho - 1)\gamma_{\mathbb{T}}(A)}$$

для всех $\gamma \in \mathbb{T}$ и $\rho \in (1, 1 + 1/\gamma_{\mathbb{T}}(A))$. Поэтому из формулы (5.1) получаем оценку

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{-1} \|G(k)\| &\leq \inf_{\rho \in (1, 1 + 1/\gamma_{\mathbb{T}}(A))} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^{n+1} \gamma_{\mathbb{T}}(A)}{1 - (\rho - 1)\gamma_{\mathbb{T}}(A)} \\ &= \inf_{\rho \in (1, 1 + 1/\gamma_{\mathbb{T}}(A))} \frac{\rho \gamma_{\mathbb{T}}(A)}{(\rho - 1)(1 - (\rho - 1)\gamma_{\mathbb{T}}(A))}. \end{aligned}$$

Положим $\rho = 1 + 1/(2\gamma_{\mathbb{T}}(A))$, тогда

$$\sum_{k \geq 1} \|G(k)\| < 4\gamma_{\mathbb{T}}(A)^2 + 2\gamma_{\mathbb{T}}(A). \quad (5.6)$$

Из полученных оценок (5.5) и (5.6) следуют доказываемые оценки теоремы. Теорема 14 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 15. Поскольку отношение $\mathcal{A} \in LRC(\ell^\infty)$ непрерывно обратимо, то каждое решение $x_0 \in \ell^\infty(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$ нелинейного разностного включения (1.39) есть решение разностного уравнения

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} G(n - m)f(m, x(m)) = (\Phi(x))(n), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.7)$$

Верно и обратное. Определяемое правой частью этого уравнения отображение $\Phi: \ell^\infty \rightarrow \ell^\infty$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|G(k)\|_\ell < 1.$$

Следовательно, уравнение (5.7) разрешимо в силу принципа сжимающих отображений, а его решение является решением разностного включения (1.39). Теорема доказана.

§ 6. Об условиях гиперболичности некоторых классов полугрупп операторов. Примеры

Рассмотрим оператор вида

$$\mathcal{L} = A - B: D(\mathcal{L}) = D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H},$$

где $A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – антисамосопряженный (т.е. iA – самосопряженный) оператор с областью определения $D(A)$ и B – обратимый самосопряженный оператор из алгебры $\text{End } \mathcal{H}$. В силу теоремы Стоуна (см. [1; теорема 22.4.3]) оператор A является инфинитезимальным оператором некоторой сильно непрерывной группы изометрических операторов $U: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$. Следовательно, оператор $\mathcal{L}$ будет инфинитезимальным оператором некоторой группы операторов $T: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ класса C_0 (см. [1; теорема 13.2.1]).

Если A и B – перестановочные операторы, то оператор $A - B$ – нормальный оператор, и поэтому его спектр $\sigma(A - B)$ содержится в множестве

$$\{\lambda - \mu : \lambda \in \sigma(A) \subset i\mathbb{R}, \mu \in \sigma(B) \subset \mathbb{R}\}.$$

Следовательно, $\sigma(\mathcal{L}) \cap (i\mathbb{R}) = \emptyset$, причем $\text{dist}(\sigma(\mathcal{L}), i\mathbb{R}) \geq \|B^{-1}\| = r(B^{-1}) = \sup\{\alpha^{-1} : \alpha \in \sigma(B)\}$. Поэтому $\gamma(\mathcal{L}) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|R(i\lambda, \mathcal{L})\| \leq \|B^{-1}\|$. Таким образом, в силу теоремы 2 (выполнены условия (1.4), (1.5)) полугруппа операторов T является гиперболической. Если операторы A и B не перестановочны, то такой результат, вообще говоря, не верен.

Введем в рассмотрение величины и понятия, в терминах которых будет сформулирован результат об условиях гиперболичности рассматриваемой полугруппы операторов T .

Рассмотрим два множества

$$\sigma_+ = \sigma_+(B) = \{\lambda \in \sigma(B) : \lambda > 0\}, \quad \sigma_- = \sigma_-(B) = \{\lambda \in \sigma(B) : \lambda < 0\}$$

и две величины

$$\mathfrak{x}(B) = \mathfrak{x}_+(B) + \mathfrak{x}_-(B), \quad \mathfrak{x}(B) = \{\mathfrak{x}_-(B), \mathfrak{x}_+(B)\},$$

где

$$\mathfrak{x}_+(B) = \min\{\lambda; \lambda \in \sigma_+\}, \quad \mathfrak{x}_-(B) = |\max\{\lambda; \lambda \in \sigma_-\}|,$$

т.е. $\mathfrak{x}_\pm(B) = \text{dist}(\sigma_\pm, i\mathbb{R})$, $\sigma(B) = \sigma_+ \cup \sigma_-$. Далее считается, что оба множества σ_+ , σ_- непусты.

Через $P_+ = P(\sigma_+, B)$, $P_- = P(\sigma_-, B)$ обозначим проекторы Рисса, построенные по множествам σ_+ и σ_- соответственно. Ввиду самосопряженности оператора B эти проекторы являются ортогональными.

Наряду с оператором A рассмотрим трансформатор (оператор в пространстве операторов) $\text{ad}_A: D(\text{ad}_A) \subset \text{End } \mathcal{H} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ с областью определения $D(\text{ad}_A)$, состоящим из таких операторов $X \in \text{End } \mathcal{H}$, которые переводят область определения $D(A)$ в область определения $D(A)$; при этом оператор $AX - XA$ допускает расширение с областью определения $D(A)$ до некоторого оператора Y из $\text{End } \mathcal{H}$, обозначаемого тем же символом $AX - XA$ или $[A, X]$. При этом полагаем $\text{ad}_A X = Y$.

ТЕОРЕМА 19 (см. [32]). Пусть обратимый оператор B принадлежит области определения $D(\text{ad}_A)$ трансформатора ad_A и выполнено одно из следующих условий:

- 1) $\|AB - BA\| < \mathfrak{x}_0(B)\mathfrak{x}(B)$,
- 2) $\|[B, AB - BA]\| < \mathfrak{x}_0(B)\mathfrak{x}(B)^2$,
- 3) $\|ad_B^n(AB - BA)\| < \mathfrak{x}_0(B)\mathfrak{x}(B)^{n+1}$, $n \geq 2$,

где ad_B^n – n -я степень ограниченного трансформатора $\text{ad}_B: \text{End } \mathcal{H} \dashrightarrow \text{End } \mathcal{H}$, определенного формулой $\text{ad}_B X = BX - XB$, $X \in \text{End } \mathcal{H}$. Тогда полугруппа T (инфинитезимальным оператором которой является оператор $\mathcal{L} = \mathcal{A} - \mathcal{B}$) гиперболична и имеют место соответствующие (каждому из условий теоремы) оценки:

$$1') \quad \gamma(\mathcal{L}) \leq \frac{\mathfrak{x}(B)}{\mathfrak{x}_0(B)\mathfrak{x}(B) - \|AB - BA\|},$$

$$2') \quad \gamma(\mathcal{L}) \leq \frac{\mathfrak{x}(B)^2}{\mathfrak{x}_0(B)\mathfrak{x}(B)^2 - \|[B, AB - BA]\|},$$

$$3') \quad \gamma(\mathcal{L}) \leq \frac{\mathfrak{x}(B)^{n+1}}{\mathfrak{x}_0(B)\mathfrak{x}(B)^{n+1} - \|ad_B^n(AB - BA)\|}, \quad n \geq 2,$$

где $\gamma(\mathcal{L}) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} \|R(i\lambda, \mathcal{L})\|$.

Важно отметить, что ввиду антисамосопряженности оператора A и самосопряженности оператора B получаем, что $\text{Re}(Ax + Bx, x) = (Bx, x)$, $x \in \mathcal{H}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \beta_{\min}(A + B) &= \min\{\lambda; \lambda \in \sigma(B)\}, \\ \beta_{\max}(A + B) &= \max\{\lambda; \lambda \in \sigma(B)\} = r(B) = \|B\|. \end{aligned}$$

Рассмотрим конкретный пример дифференциального оператора, удовлетворяющего условиям теоремы 19.

ПРИМЕР 3. Пусть $A = \frac{d}{dt}: D(A) = W_2^1(\mathbb{R}, H) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – оператор дифференцирования, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R}, H)$ суммируемых с квадратом нормы функций, определенных на $\mathbb{R}$ со значениями в комплексном гильбертовом пространстве H . Напомним, что $\langle x, y \rangle = \int_{\mathbb{R}} (x(t), y(t)) dt$, $x, y \in \mathcal{H}$ – скалярное произведение в $\mathcal{H}$, если $(\cdot, \cdot)$ – скалярное произведение в H . Его областью определения служит пространство Соболева $W_2^1(\mathbb{R}, H)$, содержащееся в $L_2(\mathbb{R}, H)$. Оператор A является инфинитезимальным оператором группы (изометрических) операторов сдвигов функций из $L_2(\mathbb{R}, H)$ и поэтому является антисамосопряженным.

Если $B \in \text{End } \mathcal{H}$ – оператор умножения на ограниченную непрерывную функцию $Q: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, т.е. $(Bx)(t) = Q(t)x(t)$, $x \in \mathcal{H}$, $t \in \mathbb{R}$, то B принадлежит $D(\text{ad}_A)$, если функция Q непрерывно дифференцируема и ее производная $\dot{Q}: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ ограничена на $\mathbb{R}$. В этом случае $\text{ad}_A B$ – оператор умножения на производную $\dot{Q}$ функции Q , т.е.

$$((\text{ad}_A B)x)(t) = \dot{Q}(t)x(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Непосредственно из теоремы 19 следует

ТЕОРЕМА 20. Пусть $Q: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } H$ – непрерывно дифференцируемая ограниченная функция с ограниченной производной $\dot{Q}$, значения которой являются самосопряженными обратимыми операторами, и выполнено одно из следующих условий:

- 1) $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|\dot{Q}(t)\| < \mathfrak{x}_0(Q)\mathfrak{x}(Q)$,
- 2) $\sup_{t \in \mathbb{R}} \|Q(t)\dot{Q}(t) - \dot{Q}(t)Q(t)\| < \mathfrak{x}_0(Q)\mathfrak{x}(Q)^2$,

где

$$\mathfrak{x}_+(Q) = \inf_{t \in \mathbb{R}} \min\{\lambda : \lambda \in \sigma(Q(t)) \cap (\mathbb{R}_+)\},$$

$$\mathfrak{x}_-(Q) = \inf_{t \in \mathbb{R}} \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(Q(t)) \cap (\mathbb{R}_-)\}, \quad \text{где } \mathbb{R}_- = (-\infty, 0].$$

Тогда дифференциальный оператор $\mathcal{L} = \frac{d}{dt} - Q: W_2^1(\mathbb{R}, H) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ обратим и обратный оператор допускает соответствующую условиям 1), 2) оценку:

$$1') \quad \|\mathcal{L}^{-1}\| \leq \frac{\mathfrak{x}(Q)}{\mathfrak{x}_0(Q)\mathfrak{x}(Q) - \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\dot{Q}(t)\|},$$

$$2') \quad \|\mathcal{L}^{-1}\| \leq \frac{\mathfrak{x}(Q)^2}{\mathfrak{x}_0(Q)\mathfrak{x}(Q)^2 - \sup_{t \in \mathbb{R}} \|Q(t)\dot{Q}(t) - \dot{Q}(t)Q(t)\|}.$$

Отметим, что из статьи [2] следует, что рассматриваемый дифференциальный оператор $\mathcal{L} = \frac{d}{dt} - Q$ является инфинитезимальным оператором сильно непрерывной группы операторов $T_u: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, определенной равенствами

$$(T_u(t)x)(s) = \mathcal{U}(s, s-t)x(s-t), \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathcal{H},$$

где $\mathcal{U}(\tau, s) = U(\tau)U(s)^{-1}$, $s, \tau \in \mathbb{R}$, $U: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } H$ – операторная функция Коши, т.е. $\dot{U}(t) = Q(t)U(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $U(0) = I$ (см. [40; гл. III]). В условиях теоремы 14 полугруппа операторов T_u является гиперболической.

Непосредственно из теоремы 20 и сделанного замечания после формулировки теоремы 11 следует

ТЕОРЕМА 21. Пусть функция Q ограничена, непрерывно дифференцируема, $\dot{Q} \in C_b(\mathbb{R}, \text{End } H)$ и выполнено условие 2) теоремы 20. Тогда оператор

$$\mathcal{L} = \frac{d}{dt} - Q: C_b^1(\mathbb{R}, H) \subset C_b \rightarrow C_b = C_b(\mathbb{R}, H),$$

где $C_b^1(\mathbb{R}, H) = \{x \in C_b(\mathbb{R}, H) : \dot{x} \in C_b(\mathbb{R}, H)\}$, непрерывно обратим и его норма $\|\mathcal{L}^{-1}\|_\infty$ допускает оценку

$$\|\mathcal{L}^{-1}\|_\infty \leq 4(\varphi(Q) + \|Q\|_\infty \varphi(Q)^2),$$

где $\varphi(Q) = \mathfrak{x}(Q)^2(\mathfrak{x}_0(Q)\mathfrak{x}(Q)^2 - \|[Q, \dot{Q}]\|_\infty)$, $\|[Q, \dot{Q}]\|_\infty$ – норма функции $Q\dot{Q} - \dot{Q}Q = [Q, \dot{Q}]$ в $C_b(\mathbb{R}, \text{End } H)$.

Для оценки величин, определяемых формулами (1.13)–(1.17) и используемых в теоремах 6, 7, 9–11, 18, 21, можно применить метод подобных операторов, изложенный в работах [34]–[37]. Отметим, что метод подобных операторов

может быть применен для более широкого класса операторов, чем рассматриваемые здесь.

Пусть $A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ – самосопряженный полуограниченный сверху оператор с компактной резольвентой и его спектр $\sigma(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ обладает свойствами

$$d_n = \text{dist}(\{\lambda_n\}, \sigma(A) \setminus \{\lambda_n\}) \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty, \\ \dots \leq \lambda_n < \lambda_{n-1} < \dots < \lambda_1.$$

Полуограниченность сверху оператора A означает конечность величины $\beta(A) = \max\{\lambda_n, n \geq 1\} = \lambda_1$. Пусть $P_n, n \geq 1$, – проекторы Рисса (они являются ортопроекторами), построенные по одноточечным множествам $\{\lambda_n\}, n \geq 1$. Тогда $AP_n = \lambda_n P_n, n \geq 1$, и $x = \sum_{n \geq 1} P_n x, x \in \mathcal{H}$. Оператор A является секториальным, и, более того, он является инфинитезимальным оператором полугруппы операторов

$$T_A(t)x = \sum_{n \geq 1} e^{\lambda_n t} P_n x, \quad t \geq 0, \quad x \in \mathcal{H},$$

для которой $\|T_A(t)\| = e^{\lambda_1 t}, t \geq 0$. Оператор iA является антисамосопряженным и поэтому является инфинитезимальным оператором группы изометрий

$$T_{iA}: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}, \quad T_{iA}(t)x = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{i\lambda_n t} P_n x, \quad x \in \mathcal{H}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

По любому натуральному числу m в алгебре $\mathcal{H}$ определим два трансформатора

$$J_m: \text{End } \mathcal{H} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}, \quad \Gamma_m: \text{End } \mathcal{H} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}.$$

Трансформатор J_m (оператор блочной диагонализации) задается формулой

$$J_m X = P_{(m)} X P_{(m)} + \sum_{n \geq m+1} P_n X P_n, \quad X \in \text{End } \mathcal{H},$$

где сходимость ряда понимается в сильной операторной топологии и проектор $P_{(m)}$ имеет вид: $P_{(m)} = \sum_{k=1}^m P_k$. Нетрудно показать, что J_m – проектор и $\|J_m\| = 1$ (см. [36], [37]), при этом ряд для определения JX безусловно сильно сходится. Если образ $\text{Im } P_n$ каждого проектора $P_n, n \geq 1$, одномерен, то $P_n x = (x, e_n) e_n, n \geq 1$, где e_n – собственный вектор оператора A , отвечающий собственному значению λ_n . В этом случае матрица оператора $Y = J_m X$ относительно ортонормированного базиса $\{e_n, n \geq 1\}$ будет иметь вид $(y_{ij=1})_{i,j}^\infty$, где $y_{ij} = \delta_{ij} x_{ij}, \delta_{ij}$ – символ Кронекера, для $\max\{i, j\} \geq m+1$ и $y_{ij} = x_{ij}$, если $\max\{i, j\} \leq m$. Здесь $x_{ij} = (X e_j, e_i), i, j \geq 1$, – матрица оператора $X \in \text{End } \mathcal{H}$.

Трансформатор Γ_m определим, используя трансформатор $\text{ad}_A: D(\text{ad}_A) \subset \text{End } \mathcal{H} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$,

$$\text{ad}_A X = AX - XA, \quad X \in D(\text{ad}_A),$$

с областью определения $D(\text{ad}_A)$, состоящей из операторов $X \in \text{End } \mathcal{H}$, обладающих свойствами:

- 1) $X D(A) \subset D(A)$,
- 2) оператор $AX - XA: D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ допускает ограниченное расширение Y на пространстве $\mathcal{H}$ (и полагается $\text{ad}_A X = Y$).

Трансформатор Γ_m определяется на каждом операторе $X \in \text{End } \mathcal{H}$ как (единственное) решение Y_m уравнения

$$AY - YA = X - J_m X,$$

удовлетворяющее условию $J_m Y_m = 0$. Таким образом, $(\Gamma_m X)D(A) \subset D(A)$ для любого оператора $X \in \text{End } \mathcal{H}$. Трансформатор Γ_m является ограниченным оператором, и имеет место оценка (см. [34], [36])

$$\|\Gamma_m\| \leq \frac{\pi}{2} \max\{\alpha_m^{-1}, \beta_m^{-1}\},$$

где $\alpha_m = \text{dist}(\sigma_m, \sigma(A) \setminus \sigma_m)$, $\beta_m = \min\{\lambda_i - \lambda_j, i \neq j, i, j \geq m+1\}$. Следовательно, $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\Gamma_m\| = 0$. Отметим еще, что оператор $\Gamma_m X$, где $X \in \text{End } \mathcal{H}$, вполне определяется операторами вида (операторными блоками)

$$P_i(\Gamma_m X)P_j = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} P_i X P_j, & \max\{i, j\} \geq m+1, i \neq j, \\ 0, & \max\{i, j\} \leq m, \\ 0, & i = j. \end{cases}$$

Следовательно, если $\lambda_k, k \geq 1$, – простые собственные значения оператора A , то матрица $(y_{ij})_{i,j=1}^\infty$ оператора $Y = \Gamma X$ имеет вид

$$y_{ij} = \begin{cases} 0, & i, j \leq m, \\ \frac{x_{ij}}{\lambda_i - \lambda_j}, & \max\{i, j\} \geq m+1, i \neq j, \\ 0, & i = j, \end{cases}$$

где $i, j \geq 1$, $x_{ij} = (X e_j, e_i)$, $i, j \geq 1$, – матрица оператора $X \in \text{End } \mathcal{H}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Два линейных оператора $A_i: D(A_i) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, называются *подобными*, если существует непрерывно обратимый оператор $U \in \text{End } \mathcal{H}$ такой, что $UD(A_2) = D(A_1)$ и $A_1 Ux = U A_2 x$, $x \in D(A_2)$. Оператор U называется *оператором преобразования* оператора A_1 в оператор A_2 .

Подобные операторы обладают рядом совпадающих спектральных свойств. Имеет место следующая лемма, непосредственно вытекающая из определения 3.

ЛЕММА 2. Пусть $A_i: D(A_i) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, $i = 1, 2$, – два подобных оператора и $U \in \text{End } \mathcal{H}$ – оператор преобразования оператора A_1 в A_2 . Тогда:

1) $\sigma(A_1) = \sigma(A_2)$, $\sigma_d(A_1) = \sigma_d(A_2)$, $\sigma_c(A_1) = \sigma_c(A_2)$, $\sigma_r(A_1) = \sigma_r(A_2)$, где $\sigma(A_i)$, $\sigma_d(A_i)$, $\sigma_c(A_i)$, $\sigma_r(A_i)$, $i = 1, 2$, – соответственно спектр, дискретный, непрерывный и остаточный спектры операторов A_i , $i = 1, 2$;

2) если оператор A_2 допускает разложение $A_2 = A_{21} \oplus A_{22}$, где $A_{2k} = A_2|_{\mathcal{H}_k}$, $k = 1, 2$, – сужение A_2 на $\mathcal{H}_k$ относительно прямой суммы $\mathcal{H} =$

$\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ инвариантных относительно A_2 подпространств $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$, то подпространства $\mathcal{H}_k = U(\mathcal{H}_k)$, $k = 1, 2$, инвариантны относительно оператора A_1 и $A_1 = A_{11} \oplus A_{12}$, где $A_{1k} = A|_{\mathcal{H}_k}$, $k = 1, 2$, относительно разложения $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$; кроме того, если P_1 – проектор, осуществляющий разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ (т.е. $\mathcal{H}_1 = \text{Im } P_1$ – образ проектора P_1 , $\mathcal{H}_2 = \text{Im } P_2$, $P_2 = I - P_1$ – дополнительный к P_1 проектор), то проектор $\tilde{P}_1$, осуществляющий разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$, определяется формулой

$$\tilde{P}_1 = UP_1U^{-1};$$

3) если A_2 – инфинитезимальный оператор сильно непрерывной полугруппы операторов $T_2: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}_2$, то оператор A_1 является инфинитезимальным оператором сильно непрерывной полугруппы операторов

$$T_1: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}_1, \quad T_1(t) = UT_2(t)U^{-1}, \quad t \geq 0.$$

Следующий результат (см. [34]–[37]) является основным при использовании метода подобных операторов в вопросах получения оценок параметров экспоненциальной дихотомии и функции Грина возмущенного самосопряженного оператора A с перечисленными выше свойствами.

ТЕОРЕМА 22. Пусть $B \in \text{End } \mathcal{H}$ и натуральное число m выбрано так, что выполнено условие

$$4\gamma_m \|B\| = 2\pi \max\{\alpha_m^{-1}, \beta_m^{-1}\} \|B\| < 1. \quad (6.1)$$

Тогда оператор $A - B$ подобен оператору $A - J_m X_*$, где оператор $X_* \in \text{End } \mathcal{H}$ является решением (нелинейного) уравнения

$$X = B\Gamma_m X - (\Gamma_m X)(J_m B) - (\Gamma_m X)J_m(B\Gamma_m X) + B = \Phi_m(X). \quad (6.2)$$

Данное решение можно найти методом простых итераций, полагая $X_0 = 0$, $X_1 = B, \dots$ (оператор $\Phi_m: \text{End } \mathcal{H} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ является сжимающим в шаре $\{X \in \text{End } \mathcal{H} : \|X - B\| \leq 3\|B\|\}$, и оператор X_* лежит в этом шаре). Преобразование подобия оператора $A - B$ в оператор $A - J_m X_*$ осуществляет оператор $I + \Gamma_m X_* \in \text{End } \mathcal{H}$, т.е.

$$(A - B)(I + \Gamma_m X_*) = (I + \Gamma_m X_*)(A - J_m X_*),$$

при этом $\|\Gamma_m X_*\| < 1$.

Из теоремы 18 и леммы 2 следует

ТЕОРЕМА 23. Пусть $B \in \text{End } \mathcal{H}$ и натуральное число m удовлетворяет условию (6.1). Оператор $A - B$ и подобный ему (в силу теоремы 18) оператор $A(m) = A - J_m X_*$ являются инфинитезимальными операторами аналитических полугрупп операторов $T_{A-B}, T_{A(m)}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ соответственно, причем верны равенства

$$T_{A-B}(t) = (I + \Gamma_m X_*)^{-1} T_{A(m)}(t) (I + \Gamma_m X_*), \quad t \geq 0, \quad (6.3)$$

где X_* – решение нелинейного уравнения (6.2), удовлетворяющего условию $\|X_* - B\| \leq 3\|B\|$. Если полугруппа операторов $T_{A(m)}$ гиперболическая, то гиперболической будет полугруппа операторов T_{A-B} и функции Грина $G_{A(m)}$, $G_{A-B}: \mathbb{R} \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$, по ним построенные, связаны соотношением подобия

$$G_{A-B}(t) = (I + \Gamma_m X_*)^{-1} G_{A(m)}(t) (I + \Gamma_m X_*), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (6.4)$$

причем

$$\|G_{A-B}(t)\| \leq \frac{1 + 4\gamma_m \|B\|}{1 - 4\gamma_m \|B\|} \|G_{A(m)}(t)\|, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (6.5)$$

Таким образом, метод подобных операторов позволяет благодаря равенствам (6.3), (6.4) свести изучение полугруппы операторов T_{A-B} к изучению полугруппы операторов $T_{A(m)}$ и получать оценки функции Грина G_{A-B} , используя оценки функции Грина $G_{A(m)}$ при условии гиперболичности полугруппы операторов $T_{A(m)}$.

Из вида оператора $A - J_m X_*$ следует, что он перестановочен со всеми проекторами $P_{(m)} = \sum_{k=1}^m P_k$, P_j , $j \geq m+1$. Следовательно, подпространства $\mathcal{H}_{(m)} = \text{Im } P_{(m)}$, $\mathcal{H}_j = \text{Im } P_j$, $j \geq m+1$, являются инвариантными относительно оператора $A - J_m X_*$. Таким же свойством инвариантности эти подпространства обладают и для операторов $T_{A(m)}(t)$, $t \geq 0$.

Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ представимо в виде

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{(m)} \oplus \mathcal{H}^{(m)}, \quad \mathcal{H}^{(m)} = \bigoplus_{k=m+1}^{\infty} \mathcal{H}_k$$

ортогональной прямой суммы подпространств $\mathcal{H}_{(m)}$, $\mathcal{H}_{(k)}$, $k \geq m+1$. Поэтому полугруппа операторов $T_{A(m)}$ и функция Грина $G_{A(m)}$ (при условии гиперболичности полугруппы $T_{A(m)}$) допускают разложения вида

$$T_{A(m)}(t) = e^{A_{(m)}t} \oplus e^{A_{m+1}t} \oplus e^{A_{m+2}t} \oplus \dots, \quad (6.6)$$

$$G_{A(m)}(t) = G_{(m)}(t) \oplus G_{A_{m+1}}(t) \oplus G_{A_{m+2}}(t) \oplus \dots, \quad (6.7)$$

где $A_{(m)} = A(m) | \mathcal{H}_{(m)}$, $A_{m+1} = A(m) | \mathcal{H}_{m+1}$, $A_{m+2} = A(m) | \mathcal{H}_{m+2}$, $\dots$, функция Грина $G_{(m)}$ построена по оператору $A_{(m)}$, $G_{A_{m+1}}$ строится по оператору A_{m+1} и т.д. Отметим, что операторы $A_{(m)}$, A_{m+1} , $\dots$ действуют в конечномерных пространствах $\mathcal{H}_{(m)}$, $\mathcal{H}_{m+1}$, $\dots$ соответственно, при этом из теоремы 18 (из равенства (6.2)) следует, что эти операторы определяются равенствами

$$\begin{aligned} A_{(m)} &= P_{(m)} A P_{(m)} - P_m X_* P_m: \mathcal{H}_{(m)} \rightarrow \mathcal{H}_{(m)}, \\ A_k &= P_k A P_k - P_k X_* P_k = \lambda_k P_k - P_k B P_k - P_k (X_* - B) P_k \in \text{End } \mathcal{H}_k, \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$k \geq m+1.$$

Из уравнения (6.2), решением которого является оператор X_* , и определения трансформаторов Γ_m , J_m следуют равенства

$$P_k (X_* - B) P_k = P_k B \Gamma_m (X_* P_k), \quad k \geq m+1.$$

Поскольку (используются равенства $\Gamma_m(P_j X_* P_k) = (\lambda_j - \lambda_k)^{-1} P_j X_* P_k$, $j \geq m+1$, $j \neq k$)

$$\begin{aligned} \|\Gamma_m(X_* P_k)x\|^2 &= \left\| \sum_{j \geq m+1, j \neq k} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_k} P_j X_* P_k x \right\|^2 \\ &= \sum_{j \geq m+1, j \neq k} \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_k)^2} \|X_* P_k x\|^2 \leq \left(\sum_{j \geq m+1, j \neq k} \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_k)^2} \|P_k x\|^2 \right) \|X\|_* \\ &\leq \frac{1}{\inf_{j \geq m+1, j \neq k} |\lambda_k - \lambda_j|^2} \|X_*\|^2 \|x\|^2 = \frac{1}{d_{k,m}} \|X_*\|^2 \|x\|^2, \quad x \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

то $\|\Gamma_m(X_* P_k)\| \leq d_k^{-1} \|X_*\|$, $k \geq m+1$, и поэтому

$$\|P_k(X_* - B)P_k\| \leq d_{k,m}^{-1} \|B\| \|X_*\| \leq 4d_{k,m}^{-1} \|B\|^2, \quad k \geq m+1. \quad (6.9)$$

Из представления (6.7) функции Грина $G_{A(m)}$ оператора $A(m)$ следует, что

$$\begin{aligned} \|G_{A(m)}(t)x\|^2 &= \|G_{(m)}(t)P_{(m)}x\|^2 + \sum_{k \geq m+1} \|G_k(t)P_kx\|^2 \\ &\leq \left(\sup_{k \geq m+1} \{\|G_{(m)}(t)\|^2, \|G_k(t)\|^2\} \right) \|x\|^2, \quad x \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Поэтому имеют место оценки (см. (6.5))

$$\begin{aligned} \|G_{A-B}(t)\| &\leq \frac{1 + 4\gamma_m \|B\|}{1 - 4\gamma_m \|B\|} \|G_{A(m)}(t)\| \leq \|G_{A-B}(t)\| \\ &\leq \frac{1 + 4\gamma_m \|B\|}{1 - 4\gamma_m \|B\|} \sup_{k \geq m+1} \{\|G_{(m)}(t)\|, \|G_k(t)\|\}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Таким образом, благодаря методу подобных операторов удается “расщепить” оператор $A - B$ и свести оценку функции Грина G_{A-B} к оценке функций Грина $G_{(m)}$, G_k , $k \geq m+1$, которые строятся по операторам, действующим в конечномерных пространствах. Из представления (6.8) операторов A_k , $k \geq m+1$, следует, что

$$e^{A_k t} = e^{\lambda_k t} e^{B_k t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad k \geq m+1,$$

где $B_k = P_k B P_k - C_k \in \text{End } \mathcal{H}_k$, $C_k = P_k(X_* - B)P_k$, $k \geq m+1$, причем из оценки (6.9) следует, что $\|C_k\| \leq 4d_k^{-1} \|B\|^2$. Следовательно $\|B_k\| \leq \|B\| + 4d_k^{-1} \|B\|^2$. Поэтому существует натуральное число $\ell = \ell(m) \geq m+1$ такое, что

$$|\lambda_k| > \|B\| + 4d_k^{-1} \|B\|^2, \quad \lambda_k < 0, \quad k \geq \ell. \quad (6.11)$$

Из этих оценок и представления (6.6) следует, что операторная экспонента $t \mapsto e^{A_k t}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}_k$ экспоненциально убывает и, следовательно, $G_k(t) = e^{A_k t}$; $G_k(t) = 0$, $t < 0$, $k \geq \ell$. Поэтому вопрос о гиперболичности полугруппы операторов T_{A-B} свелся к вопросу о гиперболичности групп операторов $e^{A_{(m)} t}$, $e^{A_k t}$, $m+1 \leq k < \ell$. Итак, установлена

ТЕОРЕМА 24. *Полугруппа операторов $T_{A-B}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ гиперболична тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

$$\sigma(A(m)) \cap (i\mathbb{R}) = \emptyset, \quad \sigma(A_k) \cap (i\mathbb{R}) = \emptyset, \quad m+1 \leq k < \ell,$$

где число ℓ таково, что имеет место (6.11). При выполнении этих условий функция Грина G_{A-B} допускает оценки (6.10).

Отметим, что если число m выбрано достаточно большим (удовлетворяющим наряду с условием (6.1) также оценке (6.11), где $\ell = m$), то гиперболичность полугруппы T_{A-B} эквивалентна выполнению условия $\sigma(A(m)) \cap (i\mathbb{R}) = \emptyset$. Важно отметить также, что оператор $A(m)$ представим в виде

$$A(m) = A^0(m) - X_*(m) \in \text{End } \mathcal{H}_{(m)},$$

где

$$A^0(m) = P_{(m)}AP_{(m)} - P_{(m)}BP_{(m)}: \mathcal{H}_{(m)} \rightarrow \mathcal{H}_{(m)}, \quad X_*(m) = P_{(m)}(X_* - B)P_{(m)}.$$

При этом $\lim_{m \rightarrow \infty} \|X_*(m)\| = 0$.

Пусть $\mathcal{H} = L^2[0, 1]$ – гильбертово пространство суммируемых с квадратом модуля комплекснозначных функций, определенных на промежутке $[0, 1]$ и со скалярным произведением $(x, y) = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)} dt$, $x, y \in \mathcal{H}$. В качестве примера оператора, удовлетворяющего перечисленным выше условиям, является дифференциальный оператор

$$A - B = \frac{d^2}{dt^2} - b: D(A - B) = D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H},$$

где $A = \frac{d^2}{dt^2}$, $B \in \text{End } \mathcal{H}$, – оператор умножения на существенно ограниченную функцию $b: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ (далее $\|b\|_\infty = \text{vrai sup}_{t \in [0, 1]} |b(t)|$) и $D(A) = \{x \in \mathcal{H} : x \text{ абсолютно непрерывна и } \dot{x} \in L^2[0, 1]\}$.

Оператор A является самосопряженным оператором с компактной резольвентой. Его спектр совпадает с множеством $\{-(\pi n)^2, n \geq 1\}$, собственные функции $e_n(t) = \sqrt{2} \sin \pi n t$, $t \in [0, 1]$, $n \geq 1$, образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H} = L^2[0, 1]$, причем $Ae_n = -(\pi n)^2 e_n$, $n \geq 1$. Оператор B ограничен и $\|B\| = \|b\|_\infty$. Проектор Рисса P_n , построенный по одноточечному множеству $\{-\pi^2 n^2\}$ имеет вид $P_n x = (x, e_n) e_n$, $n \geq 1$, причем $AP_n = -(\pi n)^2 P_n$. В данном случае используемые в теореме 20 величины имеют вид

$$d_k = \pi^2(2k - 1), \quad k \geq 2, \quad d_1 = 3\pi^2; \quad d_{k,m} \geq 2m + 3.$$

§ 7. Комментарии к полученным результатам и некоторые дополнительные утверждения

Для оценки параметров экспоненциальной устойчивости сильно непрерывной полугруппы операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ можно использовать теорему Хилле–Филлипса–Иосида (см. [1]). Имеет место

ТЕОРЕМА 25. *Для того чтобы числа (M, w) , где $M \geq 1$, $w < 0$, были параметрами экспоненциальной устойчивости полугруппы T с инфинитезимальным оператором A , необходимо и достаточно, чтобы для всех $\lambda \in \mathbb{C}_w = \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu > w\}$ и $n \in \mathbb{N}$ имели место оценки*

$$\|R(\lambda, A)^n\| \leq M(\operatorname{Re} \lambda - w)^{-n}, \quad n \geq 1, \quad \operatorname{Re} \lambda > w. \quad (7.1)$$

Условие (7.1) является труднопроверяемым из-за необходимости оценок норм степеней операторов $R(\lambda, A)$, $\lambda \in \mathbb{C}_w$.

Если $\mathcal{H}$ – конечномерное пространство и оператор $A \in \operatorname{End} \mathcal{H}$ имеет спектр $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ с $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$, $1 \leq i \leq m$, то экспоненциальная устойчивость операторнозначной функции $t \mapsto e^{At}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \operatorname{End} \mathcal{H}$ следует из следующей оценки Гельфанда–Шилова (см. [41; гл. II, § 6] и [40; гл. I, упражнение 16]):

$$\|e^{At}\| \leq \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} (2t\|A\|)^k \right) e^{\varkappa t}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (7.2)$$

где $\varkappa = \max_{1 \leq i \leq m} \operatorname{Re} \lambda_i$, $n = \dim \mathcal{H}$. Эта оценка может быть использована для оценок параметров экспоненциальной устойчивости полугруппы операторов T_{A-B} из § 6. А именно, после преобразования подобия оценка функции Грина G_{A-B} была сведена к оценке функции Грина $G_{A(m)}$, построенной по оператору $A(m)$. Оценка функции Грина при условии $\sigma(A(m)) \subset \mathbb{C}_- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0\}$ позволяет получить, используя оценки (7.2), достаточное условие экспоненциального убывания полугруппы операторов T_{A-B} и соответствующие оценки параметров экспоненциальной устойчивости.

Экспоненциальное убывание полугруппы операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \operatorname{End} \mathcal{H}$, удовлетворяющей условию $\int_0^\infty \|T(t)x\|^2 dt < \infty$, $x \in \mathcal{H}$, было установлено А. Пэзи (см. [42], [43]). Из принципа равномерной ограниченности для операторов (см. [1]) следует конечность величины

$$\nu(T) = \sup_{\|x\| \leq 1} \int_0^\infty \|T(t)x\|^2 dt. \quad (7.3)$$

Поскольку полугруппа T экспоненциально убывает, то $G_A(t) = T(t)$, $t \geq 0$, и поэтому из равенства (7.3) следует, что $\nu(T) = \nu(A)$. Следовательно, применима теорема 7 для оценки такой полугруппы операторов. Итак, имеет место

ТЕОРЕМА 26. *Пусть полугруппа операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \operatorname{End} \mathcal{H}$, удовлетворяет условию Пэзи (конечна величина (7.3)). Тогда T – экспоненциально устойчивая полугруппа операторов и для нее верна оценка*

$$\|T(t)\| \leq \sqrt{\nu(T)\|W^{-1}\|} \exp\left\{-\frac{1}{2\nu(T)}t\right\}, \quad t \geq 0,$$

при условии непрерывной обратимости решения $W \in \operatorname{End} \mathcal{H}$ уравнения Ляпунова (1.23), определяемого формулой (1.24).

При условии, что оператор $A: D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ представим в виде $A = A_0 + B$, где $A_0^* = -A_0$, $B \in \text{End } \mathcal{H}$, он является инфинитезимальным оператором (см. [1]) сильно непрерывной группы операторов $T: \mathbb{R}_+ \rightarrow \text{End } \mathcal{H}$ с числовой областью, для которой $|\beta_{\min}(A)| \leq \|B\|$, $\beta_{\max}(A) \leq \|B\|$. Поэтому выполнено предположение 1 из § 2 и, следовательно, для такого оператора верно утверждение теоремы 6, в которой (в оценках (1.21) и (1.22)) величины $|\beta_{\min}(A)|$, $\beta_{\max}(A)$ могут быть заменены на число $\|B\|$.

Комментируя результаты § 6, отметим, что если линейное отношение $\mathcal{A} \in LRC(\mathcal{X})$ является линейным замкнутым оператором, то в статье [30] было установлено, что оператор $\mathcal{A} \in LO(\ell^p)$ обратим одновременно во всех пространствах $\ell^p = \ell^p(\mathbb{Z}, \mathcal{X})$, $p \in [1, \infty]$, и получены следующие оценки для функции Грина $G: \mathbb{Z} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ вида

$$\begin{aligned} \|G(k)\| &\leq \|\mathcal{A}^{-1}\|, & k \in \mathbb{Z}, \\ \|G(k)\| &\leq 2\|\mathcal{A}^{-1}\| \left(1 + \frac{1}{2\|\mathcal{A}^{-1}\|}\right)^{1-k}, & k \geq 1, \\ \|G(k)\| &\leq 2\|\mathcal{A}^{-1}\| \left(1 - \frac{1}{2\|\mathcal{A}^{-1}\|}\right)^{1-k}, \end{aligned}$$

если $\|\mathcal{A}^{-1}\| > 1$, $k \leq -1$, и $G(k) = 0$, если $\|\mathcal{A}^{-1}\| \leq 1$ (если $\mathcal{X}$ – гильбертово пространство, то во всех этих оценках величина $\|\mathcal{A}^{-1}\|$ может быть заменена на величину $\gamma_{\mathbb{T}}(A)$). Кроме того, верна оценка

$$\|\mathcal{A}^{-1}\|_q \leq 8\|\mathcal{A}^{-1}\|_p^2 - \|\mathcal{A}^{-1}\|_p + 1,$$

где символы $\|\mathcal{A}^{-1}\|_q$, $\|\mathcal{A}^{-1}\|_p$ обозначают норму оператора $\mathcal{A}^{-1}$ в пространствах ℓ^q и ℓ^p соответственно. В частности, если $p = 2$ и $\mathcal{X}$ – гильбертово пространство, то $\|\mathcal{A}^{-1}\|_2 = \gamma_{\mathbb{T}}(A)$, и поэтому

$$\|\mathcal{A}^{-1}\|_q \leq 8\gamma_{\mathbb{T}}(A)^2 - \gamma_{\mathbb{T}}(A) + 1, \quad q \in [1, \infty].$$

Если оператор A принадлежит алгебре $\text{End } \mathcal{X}$, то $\mathcal{A} \in \text{End } \ell^p$, $p \in [1, \infty]$, и для оценки функции Грина $G: \mathbb{Z} \rightarrow \text{End } \mathcal{X}$ можно использовать результаты статей [43]–[47] об оценках элементов обратных матриц для ограниченных операторов (см. также [48]). Так, из [43; теорема 3], в частности, следует оценка $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \|G(k)\| \leq 16\mathfrak{x}(A)\gamma_{\mathbb{T}}(A)$, где $\mathfrak{x}(A) = \max\{1, \|A\|\}$, в предположении, что $\mathcal{X}$ – гильбертово пространство.

В монографии [14; п. 8.5] для оператора $A \in \text{End } \mathcal{X}$, $\dim \mathcal{X} < \infty$, для которого $r(A) < 1$, получены оценки норм степеней оператора A вида

$$\|A^k\| \leq \sup_{|\lambda|=r(A)^{1/2}} \|R(\lambda, A)\| (r(A))^{(k+1)/2}, \quad k \geq 2.$$

Такие оценки верны и для $A \in \text{End } \mathcal{X}$ в случае произвольного банахова пространства $\mathcal{X}$, если $r(A) < 1$.

Пусть $\dim \mathcal{X} = m < \infty$ и $A \in \text{End } \mathcal{X}$ с $r(A) < 1$. Для оценок величин $\|A^n\|$, $n \geq m$, можно использовать отмеченный нами метод Гельфанда–Шилова, который ими применялся для оценки (7.2) операторной экспоненты. Предположим вначале, что собственные значения оператора A простые, и пусть $\sigma(A) =$

$\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$. Тогда согласно метода Гельфанда–Шилова, основанного на использовании интерполяционного многочлена в форме Ньютона, для любого $n \geq m$ оператор A^n представим в виде

$$A^n = a_1 I + a_2 A + \dots + a_m A^{m-1},$$

где числа $a_k \in \mathbb{C}$, $1 \leq k \leq m$, допускают оценки вида

$$|a_1| \leq \max_{\lambda \in \mathcal{B}} |\lambda^n| = r(A)^n,$$

$$|a_{k+1}| \leq \frac{1}{k!} n(n-1) \dots (n-k-1) \max_{\lambda \in \mathcal{B}} |\lambda|^{n-k} = C_n^k r(A)^{n-k}, \quad 1 \leq k \leq m-1.$$

Здесь символ $\mathcal{B}$ обозначает выпуклую оболочку в $\mathbb{C}$ собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ оператора A . Если собственные значения не являются простыми, то следует рассмотреть последовательность операторов (A_k) из $\text{End } \mathcal{X}$, сходящуюся к A и в которой каждый оператор имеет простые собственные значения.

Из приведенных оценок следует

ТЕОРЕМА 27. *Имеют место оценки*

$$\|A^n\| \leq \sum_{k=0}^{m-1} C_n^k r(A)^{n-k}, \quad n \geq m.$$

М. Гилем в работе [49] разработан метод оценки норм степеней оператора $A \in \text{End } \mathbb{C}^m$ (а также e^{tA}), использующий величину

$$g(A) = \left(N^2(A) - \sum_{k=1}^m |\lambda_k(A)|^2 \right)^{1/2} \leq \frac{1}{2} N^2(A^* - A),$$

где $N(A) = (\text{tr}(AA^*))^{1/2}$ – норма Гильберта–Шмидта оператора A . А именно, имеют место оценки

$$\|A^n\| \leq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\gamma_{m,k} n! g^k(A) r(A)^{n-k}}{(n-k)! k!}, \quad n \geq 1,$$

где

$$\gamma_{m,k} = \sqrt{\frac{C_{m-1}^k}{(m-1)!}}, \quad 1 \leq k \leq m-1, \quad \gamma_{m,0} = 1.$$

Отметим, что в статье [50; теоремы 3–5] получены оценки решений дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами, основываясь на использовании дифференциального матричного уравнения Ляпунова. В статье [51] приведено подробное доказательство теоремы 13.

Список литературы

- [1] Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, ИЛ, М., 1962, 829 с.; пер. с англ.: E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, rev. ed., Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **31**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1957, xii+808 pp.

- [2] А. Г. Баскаков, “Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов”, *Функц. анализ и его прил.*, **30**:3 (1996), 1–11; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Semigroups of difference operators in spectral analysis of linear differential operators”, *Funct. Anal. Appl.*, **30**:3 (1996), 149–157.
- [3] C. Chicone, Yu. Latushkin, *Evolution semigroups in dynamical systems and differential equations*, Math. Surveys Monogr., **70**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, x+361 pp.
- [4] А. Г. Баскаков, Ю. Н. Синтяев, “Разностные операторы в исследовании дифференциальных операторов: оценки решений”, *Дифференц. уравнения*, **46**:2 (2010), 210–219; англ. пер.: A. G. Baskakov, Yu. N. Sinyayev, “Finite-difference operators in the study of differential operators: Solution estimates”, *Differ. Equ.*, **46**:2 (2010), 214–223.
- [5] А. Г. Баскаков, “Исследование линейных дифференциальных уравнений методами спектральной теории разностных операторов и линейных отношений”, *УМН*, **68**:1(409) (2013), 77–128; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Analysis of linear differential equations by methods of the spectral theory of difference operators and linear relations”, *Russian Math. Surveys*, **68**:1 (2013), 69–116.
- [6] J. Prüss, “On the spectrum of C_0 -semigroups”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **284**:2 (1984), 847–857.
- [7] K.-J. Engel, R. Nagel, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, Grad. Texts in Math., **194**, Springer-Verlag, New York, 2000, xxii+586 pp.
- [8] А. Г. Чшиев, “Теорема Герхарда–Прюсса для некоторого класса вырожденных полугрупп операторов”, *Матем. заметки*, **94**:3 (2013), 426–440; англ. пер.: A. G. Chshiev, “The Gearhart–Prüss theorem for a class of degenerate semigroups of operators”, *Math. Notes*, **94**:3 (2013), 400–413.
- [9] А. Г. Баскаков, “Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов”, *Матем. заметки*, **84**:2 (2008), 175–192; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Linear relations as generators of semigroups of operators”, *Math. Notes*, **84**:2 (2008), 166–183.
- [10] А. Г. Баскаков, А. А. Воробьев, М. Ю. Романова, “Гиперболические полугруппы операторов и уравнение Ляпунова”, *Матем. заметки*, **89**:2 (2011), 190–203; англ. пер.: A. G. Baskakov, A. A. Vorobjev, M. Yu. Romanova, “Hyperbolic operator semigroups and Lyapunov’s equation”, *Math. Notes*, **89**:2 (2011), 194–205.
- [11] А. Г. Баскаков, К. С. Кобычев, “Оценки оператора вложения пространства Соболева периодических функций и оценки решений дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами”, *Дифференц. уравнения*, **47**:5 (2011), 611–620; англ. пер.: A. G. Baskakov, K. S. Kobychiev, “Estimates for the embedding operator of a Sobolev space of periodic functions and for the solutions of differential equations with periodic coefficients”, *Differ. Equ.*, **47**:5 (2011), 609–619.
- [12] Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Элементы функционального анализа*, 2-е изд., Наука, М., 1965, 520 с.; англ. пер.: L. A. Lusternik, V. I. Sobolev, *Elements of functional analysis*, Hindustan Publishing Corp., Delhi; John Wiley & Sons, Inc., New York, 1974, x+322 pp.
- [13] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972, 740 с.; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Grundlehren Math. Wiss., **132**, Springer-Verlag, New York, 1966, xix+592 pp.
- [14] С. К. Годунов, *Современные аспекты линейной алгебры*, Научн. кн., Новосибирск, 1997, 390 с.; англ. пер.: S. K. Godunov, *Modern aspects of linear algebra*, Transl. Math. Monogr., **175**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, xvi+303 pp.
- [15] А. Г. Баскаков, “Оценки ограниченных решений линейных дифференциальных уравнений”, *Дифференц. уравнения*, **39**:3 (2003), 413–415; англ. пер.:

- A. G. Baskakov, "Estimates of bounded solutions of linear differential equations", *Differ. Equ.*, **39**:3 (2003), 447–450.
- [16] А. И. Перов, "Частотные признаки существования ограниченных решений", *Дифференц. уравнения*, **43**:7 (2007), 896–904; англ. пер.: A. I. Perov, "Frequency tests for the existence of boundary solutions", *Differ. Equ.*, **43**:7 (2007), 916–924.
- [17] С. Г. Крейн, *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве*, Наука, М., 1967, 464 с.; англ. пер.: S. G. Kreĭn, *Linear differential equations in Banach space*, Transl. Math. Monogr., **29**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971, v+390 pp.
- [18] С. К. Годунов, Ю. М. Нечепуренко, "Оценки для главной и жесткой компонент на основе интегрального критерия качества дихотомии", *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **40**:1 (2000), 35–42; англ. пер.: S. K. Godunov, Yu. M. Nechipurenko, "Bounds for the principal and stiff components based on the integral performance criterion for dichotomy", *Comput. Math. Math. Phys.*, **40**:1 (2000), 32–39.
- [19] Ю. М. Нечепуренко, "Об оценке нормы матричной экспоненты", *Докл. РАН*, **377**:5 (2001), 597–600; англ. пер.: Yu. M. Nechipurenko, "On a bound for the norm of a matrix exponential", *Dokl. Math.*, **63**:2 (2001), 233–236.
- [20] Ю. М. Нечепуренко, "Новая оценка нормы матрицы Грина", *Докл. РАН*, **378**:4 (2001), 450–451; англ. пер.: Yu. M. Nechipurenko, "A new bound for the norm of the Green matrix", *Dokl. Math.*, **63**:3 (2001), 362–363.
- [21] Ю. М. Нечепуренко, "Оценка нормы матричной экспоненты через норму решения уравнения Ляпунова и границы хаусдорфова множества", *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **42**:2 (2002), 131–141; англ. пер.: Yu. M. Nechipurenko, "Bounds for the matrix exponential based on the Lyapunov equation and limits of the Hausdorff set", *Comput. Math. Math. Phys.*, **42**:2 (2002), 125–134.
- [22] А. Я. Булгаков, "Обоснование гарантированной точности выделения инвариантных подпространств несамосопряженных матриц", Тр. Ин-та матем. СО АН СССР, **15**, Новосибирск, 1989, 12–93; англ. пер.: A. Ya. Bulgakov, "The basis of guaranteed accuracy in the problem of separation of invariant subspaces for nonselfadjoint matrices. I", *Siberian Adv. Math.*, **1**:1 (1991), 64–108.
- [23] T. Eisner, *Stability of operators and operator semigroups*, Oper. Theory Adv. Appl., **209**, Birkhäuser Verlag, Basel, 2010, viii+204 pp.
- [24] A. Aldroubi, A. Baskakov, I. Krishtal, "Slanted matrices, Banach frame, and sampling", *J. Funct. Anal.*, **255**:7 (2008), 1667–1691.
- [25] А. Г. Баскаков, К. И. Чернышов, "Спектральный анализ линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов", *Матем. сб.*, **193**:11 (2002), 3–42; англ. пер.: A. G. Baskakov, K. I. Chernyshov, "Spectral analysis of linear relations and degenerate operator semigroups", *Sb. Math.*, **193**:11 (2002), 1573–1610.
- [26] А. Г. Баскаков, "Спектральный анализ дифференциальных операторов с неограниченными операторными коэффициентами, разностные отношения и полугруппы разностных отношений", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **73**:2 (2009), 3–68; англ. пер.: A. G. Baskakov, "Spectral analysis of differential operators with unbounded operator-valued coefficients, difference relations and semigroups of difference relations", *Izv. Math.*, **73**:2 (2009), 215–278.
- [27] А. Г. Баскаков, "Теория представлений банаховых алгебр, абелевых групп и полугрупп в спектральном анализе линейных операторов", *Функциональный анализ, СМФН*, **9**, МАИ, М., 2004, 3–151; англ. пер.: A. G. Baskakov, "Representation theory for Banach algebras, Abelian groups, and semigroups in the spectral analysis of linear operators", *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **137**:4 (2006), 4885–5036.
- [28] R. Cross, *Multivalued linear operators*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., **213**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1998, x+335 pp.

- [29] A. Favini, A. Yagi, *Degenerate differential equations in Banach spaces*, Monogr. Text-books Pure Appl. Math., **215**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1999, xii+313 pp.
- [30] А. Г. Баскаков, А. И. Пастухов, “Спектральный анализ оператора взвешенного сдвига с неограниченными операторными коэффициентами”, *Сиб. матем. журн.*, **42**:6 (2001), 1231–1243; англ. пер.: A. G. Baskakov, A. I. Pastukhov, “Spectral analysis of a weighted shift operator with unbounded operator coefficients”, *Siberian Math. J.*, **42**:6 (2001), 1026–1035.
- [31] М. С. Бичегкуев, “Об ограниченных решениях разностных включений”, *Изв. вузов. Матем.*, **8** (2008), 16–24; англ. пер.: M. S. Bichegkuev, “Bounded solutions of difference inclusions”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **52**:8 (2008), 12–19.
- [32] А. Г. Баскаков, “Дихотомия спектра несамосопряженных операторов”, *Сиб. матем. журн.*, **32**:3 (1991), 24–30; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Dichotomy of the spectrum of non-self-adjoint operators”, *Siberian Math. J.*, **32**:3 (1991), 370–375.
- [33] А. Г. Баскаков, В. В. Юргелас, “Индефинитная диссипативность и обратимость линейных дифференциальных операторов”, *Укр. матем. журн.*, **41**:12 (1989), 1613–1618; англ. пер.: A. G. Baskakov, V. V. Yurgelas, “Indefinite dissipativity and invertibility of linear differential operators”, *Ukrainian Math. J.*, **41**:12 (1989), 1385–1389.
- [34] А. Г. Баскаков, “Методы абстрактного гармонического анализа в теории возмущений линейных операторов”, *Сиб. матем. журн.*, **24**:1 (1983), 21–39; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Methods of abstract harmonic analysis in the perturbation of linear operators”, *Siberian Math. J.*, **24**:1 (1983), 17–32.
- [35] А. Г. Баскаков, “Теорема о расщеплении оператора и некоторые смежные вопросы аналитической теории возмущений”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:3 (1986), 435–457; англ. пер.: A. G. Baskakov, “A theorem on splitting an operator, and some related questions in the analytic theory of perturbations”, *Math. USSR-Izv.*, **28**:3 (1987), 421–444.
- [36] А. Г. Баскаков, “Спектральный анализ возмущенных неквазианалитических и спектральных операторов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:4 (1994), 3–32; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Spectral analysis of perturbed nonquasianalytic and spectral operators”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **45**:1 (1995), 1–31.
- [37] А. Г. Баскаков, А. В. Дербушев, А. О. Щербаков, “Метод подобных операторов в спектральном анализе несамосопряженного оператора Дирака с негладким потенциалом”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:3 (2011), 3–28; англ. пер.: A. G. Baskakov, A. V. Derbushev, A. O. Shcherbakov, “The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials”, *Izv. Math.*, **75**:3 (2011), 445–469.
- [38] А. М. Гомилко, “Об условиях на производящий оператор равномерно ограниченной C_0 -полугруппы операторов”, *Функц. анализ и его приложения*, **33**:4 (1999), 66–69; англ. пер.: A. M. Gomilko, “Conditions on the generator of a uniformly bounded C_0 -semigroup”, *Funct. Anal. Appl.*, **33**:4 (1999), 294–296.
- [39] Д. Хенри, *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*, Мир, М., 1985, 376 с.; пер. с англ.: D. Henry, *Geometric theory of semilinear parabolic equations*, Lecture Notes in Math., **840**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1981, iv+348 pp.
- [40] Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970, 534 с.; англ. пер.: Yu. L. Daletskii, M. G. Krein, *Stability of solutions of differential equations in Banach space*, Transl. Math. Monogr., **43**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974, vi+386 pp.
- [41] И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, *Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений*, Обобщенные функции, Вып. 3, Физматлит, М., 1958, 274 с.; англ. пер.: I. M. Gel’fand, G. E. Shilov, *Generalized functions*, v. 3: *Theory of differential equations*, Academic Press, New York–London, 1967, x+222 pp.

- [42] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, Appl. Math. Sci., **44**, Springer-Verlag, New York, 1983, viii+279 pp.
- [43] А. Г. Баскаков, “Оценки элементов обратных матриц и спектральный анализ линейных операторов”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **61**:6 (1997), 3–26; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Estimates for the entries of inverse matrices and the spectral analysis of linear operators”, *Izv. Math.*, **61**:6 (1997), 1113–1135.
- [44] А. Г. Баскаков, “Теорема Винера и асимптотические оценки элементов обратных матриц”, *Функц. анализ и его прил.*, **24**:3 (1990), 64–65; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Wiener’s theorem and the asymptotic estimates of the elements of inverse matrices”, *Funct. Anal. Appl.*, **24**:3 (1990), 222–224.
- [45] А. Г. Баскаков, “Абстрактный гармонический анализ и асимптотические оценки элементов обратных матриц”, *Матем. заметки*, **52**:2 (1992), 17–26; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Abstract harmonic analysis and asymptotic estimates of elements of inverse matrices”, *Math. Notes*, **52**:2 (1992), 764–771.
- [46] А. Г. Баскаков, “Асимптотические оценки элементов матриц обратных операторов и гармонический анализ”, *Сиб. матем. журн.*, **38**:1 (1997), 14–28; англ. пер.: A. G. Baskakov, “Asymptotic estimates for the entries of the matrices of inverse operators and harmonic analysis”, *Siberian Math. J.*, **38**:1 (1997), 10–22.
- [47] A. G. Baskakov, I. A. Krishtal, “Memory estimation of inverse operators”, *J. Funct. Anal.*, **267**:8 (2014), 2551–2605.
- [48] A. G. Baskakov, I. A. Krishtal, “Spectral analysis of operators with the two-point Bohr spectrum”, *J. Math. Anal. Appl.*, **302**:2 (2005), 420–439.
- [49] M. I. Gil’, “Difference equations in normed spaces. Stability and oscillations”, North-Holland Math. Stud., **206**, Elsevier, Amsterdam, 2007, xvi+362 pp.
- [50] Г. В. Демиденко, И. И. Матвеева, “Об устойчивости решений линейных систем с периодическими коэффициентами”, *Сиб. матем. журн.*, **42**:2 (2001), 332–348; англ. пер.: G. V. Demidenko, I. I. Matveeva, “On stability of solutions to linear systems with periodic coefficients”, *Siberian Math. J.*, **42**:2 (2001), 282–296.
- [51] М. С. Бичегкуев, “К спектральному анализу разностных и дифференциальных операторов в весовых пространствах”, *Матем. сб.*, **204**:11 (2013), 3–20; англ. пер.: M. S. Bichegkuev, “Spectral analysis of difference and differential operators in weighted spaces”, *Sb. Math.*, **204**:11 (2013), 1549–1564.

Анатолий Григорьевич Баскаков
(Anatoliy G. Baskakov)

Воронежский государственный университет
E-mail: anatbaskakov@yandex.ru

Поступила в редакцию
20.11.2012 и 24.04.2015