Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Седлецкий, Аппроксимация типа Мюнца–Саса в весовых пространствах, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 7, 97–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8196>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 16:22:33

УДК 517.538.2

А. М. Седлецкий

Аппроксимация типа Мюнца–Саса в весовых пространствах

Рассмотрен вопрос о полноте системы экспонент $\exp(-\lambda_n t)$, $\operatorname{Re} \lambda_n > 0$, в различных функциональных пространствах на полупрямой $\mathbb{R}_+$. Описаны широкие классы банаховых пространств E и F функций, определенных на $\mathbb{R}_+$, таких, что указанная система полна в пространствах E и F одновременно. Доказан критерий полноты этой системы в пространствах C_0 и L^p на полупрямой $\mathbb{R}_+$ с весом $(1+t)^\alpha$, когда $\alpha < 0$ и $\alpha < -1$ соответственно. Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: теоремы Мюнца и Саса, полнота системы экспонент, пространства с комбинированной нормой, весовые пространства, преобразования Лапласа.

DOI: 10.4213/sm8196

§ 1. Введение

Иницированная теоремой Вейерштрасса задача описания полных систем степеней

$$(x^{\mu_n})_{n=1}^\infty, \quad \operatorname{Re} \mu_n > -\frac{1}{p}, \quad (1.1)$$

в пространствах $L^p(0, 1)$, $0 < p < \infty$, и $C_0[0, 1] = \{f \in C[0, 1] : f(0) = 0\}$ (в случае C_0 в (1.1) следует полагать $p = \infty$) равносильна задаче описания полных систем экспонент

$$e(\Lambda) = (e^{-\lambda_n t})_{n=1}^\infty, \quad \operatorname{Re} \lambda_n > 0, \quad \Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^\infty, \quad (1.2)$$

где $\lambda_n = \mu_n + 1/p$, в пространствах $L^p = L^p(\mathbb{R}_+)$ и $C_0 = C_0[0, \infty) = \{f \in C[0, \infty) : f(t) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty\}$ (замена $x = e^{-t}$). Смысл перехода от системы (1.1) к системе (1.2) в том, что он открывает для исследования комплексно-аналитический путь, сводя все к задаче распределения в правой полуплоскости нулей преобразований Лапласа специального вида, хотя путь этот и вынуждает ограничиться показателями $1 \leq p < \infty$. В настоящей статье будем иметь дело только с системой (1.2).

Основополагающие результаты в решении поставленной задачи принадлежат Ч. Мюнцу [1] и О. Сасу [2] (см. также [3]); их теоремы сформулируем применительно к системе (1.2).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00281).

© А. М. Седлецкий, 2013

ТЕОРЕМА 1 (Мюнц). Пусть

$$0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots. \quad (1.3)$$

Тогда для полноты системы (1.2) в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ или $C_0[0, \infty)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = +\infty.$$

ТЕОРЕМА 2 (Саса). Для полноты системы (1.2) в пространстве $L^2(\mathbb{R}_+)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} = +\infty. \quad (1.4)$$

Под аппроксимацией типа Мюнца–Саса принято понимать теорию аппроксимационных свойств системы (1.2) в различных функциональных пространствах на полупрямой.

Известно (см., например, [4]), что для полноты системы (1.2) в L^p условие (1.4) (которое в настоящей статье будет фигурировать как условие Саса) необходимо при $1 \leq p \leq 2$ и достаточно при $p \geq 2$, а также достаточно в случае пространства C_0 . При $1 \leq p < 2$ оно не является достаточным (см. [5], [6]), а в случае C_0 не является необходимым (см. [7]); вопрос о его необходимости при $p > 2$ открыт.

Необходимые условия полноты системы (1.2) в пространстве C_0 даны А. Зигелем в [7] и Н. Левинсоном в [8]. В работе [8] утверждается, что если система (1.2) полна в C_0 , то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n + \exp(-\theta(|\lambda_n|))}{1 + |\lambda_n|^2} = +\infty,$$

где $\theta(t)$, $t > 0$, – положительная неубывающая функция такая, что справедливо $\theta(t)/(1 + t^2) \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

Главная трудность состоит в том, чтобы адекватным образом охарактеризовать поведение точек λ_n вблизи мнимой оси – границы полуплоскости аналитичности упомянутых выше преобразований Лапласа. И в этой связи стоит сказать, что условие (1.3) теоремы Мюнца представляет собой простейший (хотя и важный) вариант распределения точек λ_n , которые в данном случае вообще отделены от мнимой оси.

В статье М. Грама [5] была предпринята попытка поиска такого расположения точек λ_n в правой полуплоскости, при котором условие (1.4) достаточно для полноты системы (1.2) в пространстве L^p , $1 \leq p < 2$. В качестве искомого расположения в [5] предъявлено следующее: точки λ_n лежат на объединении полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq \delta > 0$ с конечным числом кругов, касающихся мнимой оси.

Автором в [9] было предложено гораздо более общее условие

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log \operatorname{dist}(iy, \Lambda)}{1 + y^2} dy > -\infty \quad (1.5)$$

и доказано, что при его выполнении условие (1.4) необходимо для полноты системы (1.2) в L^p , $p > 2$, и в C_0 . Спустя некоторое время В. И. Ладыгин (см. [10]) в предположении (1.5) доказал достаточность условия (1.4) для полноты в L^p , $1 \leq p < 2$ (об этих результатах см. также [11]).

Как замечено в [12], интеграл в (1.5) может расходиться только к $-\infty$, и поэтому упомянутое утверждение из [9] допускает следующую формулировку: для полноты системы (1.2) в L^p , $p > 2$, или в C_0 необходимо выполнение условия

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} + \int_{\mathbb{R}} \frac{\log(1/\operatorname{dist}(iy, \Lambda))}{1 + y^2} dy = +\infty. \quad (1.6)$$

Цель настоящей статьи – исследование условий полноты системы (1.2) в весовых пространствах на полупрямой $\mathbb{R}_+$. Один из основных ее результатов состоит в том, что *условие (1.6) необходимо и достаточно для полноты системы (1.2) в пространствах $C_{0,\alpha}$, $\alpha < 0$, и $L^{p,\alpha}$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha < -1$, т.е. в пространствах C_0 и L^p на правой полупрямой со степенным весом $(1+t)^\alpha$.*

Отметим, что если расходимость ряда в (1.6) показывает, что точек λ_n “достаточно много”, то расходимость интеграла говорит о “достаточно тесном” прилегании точек λ_n к мнимой оси.

Остановимся на распределении материала по параграфам.

В § 2 вводятся объекты, с которыми будем иметь дело, формулируются и доказываются касающиеся их вспомогательные утверждения. В частности, отпавляясь от двух банаховых пространств $E_1 = E_1(0, 1)$, $E_2 = E_2(1, \infty)$ функций, определенных соответственно на $(0, 1)$, $(1, \infty)$, мы задаем пространство (E_1, E_2) с комбинированной нормой, т.е. пространство функций f , определенных на полупрямой $\mathbb{R}_+$, с нормой

$$\|f|_{(0,1)}\|_{E_1} + \|f|_{(1,\infty)}\|_{E_2}.$$

Замыкание линейной оболочки системы всех экспонент $\exp(-\lambda t)$, $\operatorname{Re} \lambda > 0$, в норме пространства (E_1, E_2) может оказаться собственным подпространством, и тогда говорить о полноте системы (1.2) в (E_1, E_2) не имеет смысла. Чтобы все-таки это стало возможным, мы выделяем в (E_1, E_2) подпространство (обозначение $(E_1, E_2)_c$), удовлетворяющее условиям специального согласования компонент $f|_{(0,1)}$, $f|_{(1,\infty)}$ в общей граничной точке 1 интервалов $(0, 1)$, $(1, \infty)$.

В § 3 предъявлен широкий класс пространств $E_1(0, 1)$, $E_2(1, \infty)$ и весовых пространств $F = F(\mathbb{R}_+)$ на полупрямой $\mathbb{R}_+$ таких, что полнота системы (1.2) в пространстве $(E_1, E_2)_c$ равносильна ее полноте в пространстве F (теорема 3). Это позволяет в ряде случаев рассматривать задачу о полноте системы (1.2) в пространствах, более удобных для исследования. Доказательство теоремы 3

и вспомогательных по отношению к ней лемм из § 2 основано на технике свертков. Как в постановочном плане, так и с точки зрения применяемых подходов эта часть статьи является развитием работы [12], где впервые был рассмотрен вопрос об аппроксимации с помощью экспонент в пространствах с комбинированной нормой. Здесь же доказано отсутствие базисов вида (1.2) в пространствах, описываемых теоремой 3.

В § 4 доказан упоминавшийся результат о равносильности условия (1.6) и свойства системы (1.2) быть полной в $C_{0,\alpha}$, $\alpha < 0$, или в $L^{p,\alpha}$, $1 \leq p < \infty$, $\alpha < -1$ (теорема 5). С помощью теоремы 3 этот результат распространяется на обширный класс пространств с комбинированной нормой. Особенностью доказательства теоремы 5 является применение бесселевых потенциалов, что, по-видимому, ранее в аппроксимации типа Мюнца–Саса не встречалось.

Насколько существенны для доказанного критерия ограничения на параметр α ? В этом направлении доказано, что условие (1.6) уже не является достаточным для полноты системы (1.2) в пространствах

$$L^{2,\alpha}, \quad \alpha \geq -1, \quad L^{p,\alpha}, \quad p > 2, \quad \alpha > -1, \quad C_{0,\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

В § 5 мы возвращаемся к условию (1.4) и доказываем, что оно не является достаточным для полноты системы (1.2) в пространствах L^p , $p \geq 2$, и C_0 с весом Ω , как только $0 < \Omega(t) \rightarrow +\infty$, $t \rightarrow +\infty$.

§ 2. Функциональные пространства, функционалы и их преобразования Лапласа

2.1. Весовые пространства. Пусть $-\infty < a < b \leq +\infty$, $1 \leq p < \infty$. Пусть $\Omega(t)$ – вес на (a, b) т.е. измеримая почти всюду положительная функция на (a, b) . Тогда через

$$L^p((a, b), \Omega(t) dt) = L_{\Omega}^p(a, b)$$

обозначаем банахово пространство функций с нормой

$$\|f\|_{p,\Omega} = \|f\Omega^{1/p}\|_{L^p(a,b)}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

В случае конечного b будем предполагать выполненным условие $\Omega \in L^1(a, b)$, обеспечивающее топологическое вложение $C[a, b] \hookrightarrow L_{\Omega}^p(a, b)$ и, следовательно, принадлежность функций системы (1.2) пространству $L_{\Omega}^p(a, b)$.

Если B – банахово пространство, то B' обозначает сопряженное пространство, т.е. пространство всех функционалов на B (пишем “функционал” вместо “непрерывный линейный функционал”). Тогда

$$(L_{\Omega}^p(a, b))' = L^{p'}(a, b), \quad 1 \leq p < \infty, \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1,$$

при следующей реализации функционала $\varphi \in (L_{\Omega}^p(a, b))' = L^{p'}(a, b)$ (мы отождествляем функционал с представляющей его функцией или мерой):

$$(\varphi, f) = \int_a^b f(t)\Omega^{1/p}(t)\varphi(t) dt \quad \forall f \in L_{\Omega}^p(a, b).$$

Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$, $a > 0$. Через $W_{p,\Omega}^m(a, \infty)$ обозначаем *весовое соболевское пространство* на (a, ∞) , т.е. пространство функций f таких, что функции $f^{(j)}$, $j = \overline{0, m-1}$, абсолютно непрерывны на $[a, b]$ для любого $b \in (a, \infty)$, с нормой

$$\|f\|_{W_{p,\Omega}^m(a, \infty)} = \sum_{j=0}^m \|f^{(j)}\|_{L_\Omega^p(a, \infty)}.$$

Отметим, что $W_{p,\Omega}^0(a, \infty) = L_\Omega^p(a, \infty)$ и что пространство $W_{p,\Omega}^m(a, \infty)$ банахово. Пишем $W_{p,\Omega}^m$ вместо $W_{p,\Omega}^m(\mathbb{R}_+)$ и W_p^m вместо $W_{p,\Omega}^m$ в невесовом случае $\Omega \equiv 1$.

Рассмотрим $(m+1)$ -кратное прямое произведение пространств

$$L_\Omega^p(a, \infty) \times \cdots \times L_\Omega^p(a, \infty). \quad (2.1)$$

Его сопряженное пространство есть $(m+1)$ -кратное прямое произведение

$$(L^p(a, \infty))' \times \cdots \times (L^p(a, \infty))',$$

и общий вид функционала φ на пространстве (2.1) задается упорядоченным набором

$$\varphi = (\varphi_0, \dots, \varphi_m), \quad \varphi_j \in (L^p(a, \infty))' = L^{p'}(a, \infty), \quad j = \overline{0, m}, \quad (2.2)$$

при следующей реализации функционала:

$$(\varphi, f) = \sum_{j=0}^m \int_a^\infty f_j(t) \Omega^{1/p}(t) \varphi_j(t) dt$$

для любого элемента $f = (f_0, \dots, f_m)$ пространства (2.1) (см., например, [13; гл. 1, § 4, п. 6]).

Но $W_{p,\Omega}^m(a, \infty)$ есть замкнутое подпространство пространства (2.1); элементами $W_{p,\Omega}^m(a, \infty)$ являются упорядоченные наборы $(f, f', \dots, f^{(m)})$. Значит, каждый функционал на $W_{p,\Omega}^m(a, \infty)$ реализуется с помощью некоторого элемента (2.2):

$$(\varphi, f) = \sum_{j=0}^m \int_a^\infty f^{(j)}(t) \Omega^{1/p}(t) \varphi_j(t) dt, \quad f \in W_{p,\Omega}^m(a, \infty). \quad (2.3)$$

Теперь введем весовые пространства непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций на полупрямой $[a, \infty)$, $a > -\infty$, предполагая, что вес Ω непрерывен на $[a, \infty)$.

Через $C_{0,\Omega}[a, \infty)$ обозначаем пространство непрерывных на $[a, \infty)$ функций таких, что

$$f(t)\Omega(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty,$$

с нормой

$$\|f\|_{C_{0,\Omega}} = \sup(|f(t)|\Omega(t) : t \in [a, \infty)).$$

Через $C_{0,\Omega}^m[a, \infty)$ обозначаем пространство m раз непрерывно дифференцируемых на $[a, \infty)$ функций с нормой

$$\|f\|_{C_{0,\Omega}^m} = \sum_{j=0}^m \|f^{(j)}\|_{C_{0,\Omega}}.$$

Пространство $C_{0,\Omega}^m[a, \infty)$ является банаховым. Пишем $C_{0,\Omega}^m$ вместо $C_{0,\Omega}^m[0, \infty)$ и C_0^m вместо $C_{0,\Omega}^m$ в случае $\Omega(t) \equiv 1$.

Пусть $V[a, \infty)$ обозначает пространство всех функций ограниченной на $[a, \infty)$ вариации. Используя общий вид функционала на C и рассуждая так же, как при выводе формулы (2.3), делаем вывод, что каждый функционал $d\sigma$ на $C_{0,\Omega}^m[a, \infty)$ реализуется с помощью упорядоченного набора

$$\sigma = (\sigma_0, \dots, \sigma_m), \quad \sigma_j \in V[a, \infty), \quad j = \overline{0, m},$$

по правилу

$$(d\sigma, f) = \sum_{j=0}^m \int_a^\infty f^{(j)}(t) \Omega(t) d\sigma_j(t), \quad f \in C_{0,\Omega}^m[a, \infty). \quad (2.4)$$

Следующее тождество:

$$\int_{\mathbb{R}_+} f'(t) t e^{-t} dt = - \int_{\mathbb{R}_+} f(t) d(te^{-t}),$$

где $f \in C_0^1[0, \infty)$ или $f \in W_p^1(\mathbb{R}_+)$, показывает, что при $m > 0$ реализация функционала как на $C_{0,\Omega}^m$, так и на $W_{p,\Omega}^m$ не является однозначной (в случае W_p^1 при интегрировании по частям мы учли свойство: $f(t) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$, для $f \in W_p^1(\mathbb{R}_+)$; см. [12]). В связи с этим назовем реализацию (2.4) или (2.3) функционала *правильной*, если в ней не может быть понижен порядок ни одного слагаемого (т.е. порядок входящей в него производной).

2.2. Пространства функций на полупрямой с комбинированной нормой и их согласованные подпространства. Пусть $E_1 = E_1(0, 1)$ и $E_2 = E_2(1, \infty)$ – банаховы пространства функций, определенных соответственно на $(0, 1)$ и $(1, \infty)$. Через $E = (E_1, E_2)$ будем обозначать пространство функций f , определенных на полупрямой $\mathbb{R}_+$, таких, что

$$f_1 = f|_{(0,1)} \in E_1, \quad f_2 = f|_{(1,\infty)} \in E_2. \quad (2.5)$$

С нормой

$$\|f\|_E = \|f_1\|_{E_1} + \|f_2\|_{E_2}$$

E становится банаховым пространством. Используя обозначение (2.5), будем писать $f = (f_1, f_2)$.

Чтобы естественно подойти к очередному понятию, рассмотрим конкретный пример. Пусть $l, m \in \mathbb{Z}_+$, $E_1 = C^s[0, 1]$, $E_2 = C^m[1, \infty)$, $s, m \in \mathbb{Z}_+$,

$l = \min(s, m)$. Тогда пространство $E = (E_1, E_2)$ содержит функции f такие, что условие

$$f_1^{(j)}(1 - 0) = f_2^{(j)}(1 + 0), \quad j = \overline{0, l}, \quad (2.6)$$

нарушается хотя бы при одном j . Но из сходимости линейных комбинаций системы $e(\Lambda)$ в $E = (E_1, E_2)$ следует равномерная сходимость их и их производных до порядка l включительно как на $[0, 1]$, так и на $[1, 2]$, а следовательно, и на $[0, 2]$, т.е. сходимость по слабойшей из норм C^s и C^m , отнесенной к отрезку $[0, 2]$. А это влечет непрерывность функций $f^{(j)}(t)$ в точке $t = 1$. Значит, в этом случае говорить о полноте системы $e(\Lambda)$ в E не имеет смысла.

Поэтому для изучения полноты системы $e(\Lambda)$ нам следует выделить в пространстве E подпространство, состоящее из всех функций с условием (2.6). Условие (2.6) есть условие подходящего согласования компонент f_1 и f_2 , что дает повод назвать выделенное подпространство *согласованным*.

Теперь перейдем к понятию согласованного подпространства в общем случае. Пусть B_1, B_2 – банаховы пространства; если $B_1 \subseteq B_2$ и $\|f\|_{B_2} \leq M\|f\|_{B_1}$ для любого $f \in B_1$, то говорят, что B_1 *топологически вложено* в B_2 , и пишут $B_1 \hookrightarrow B_2$. В этом случае также говорят, что *норма в B_2 слабее нормы в B_1* . Пусть имеется банахово пространство $B(a, b)$ функций, определенных на (a, b) ; тогда через $B(a + h, b + h)$ обозначаем пространство функций f , определенных на $(a + h, b + h)$ с нормой $\|f(t)\| = \|f(t - h)\|_{B(a, b)}$, а через $B(a', b')$, где $a < a' < b' < b$, обозначаем подпространство в $B(a, b)$, состоящее из функций, равных нулю вне (a', b') .

Скажем, что пространства $E_1(0, 1), E_2(1, \infty)$ *топологически сравнимы относительно точки 1*, если при некотором $\varepsilon \in (0, 1)$ одно из пространств

$$E_1(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon), \quad E_2(1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$$

топологически вложено в другое; пространство со слабойшей нормой обозначим через E_w . В этом случае *согласованным подпространством* пространства $E = (E_1, E_2)$ назовем подпространство в E , замкнутое относительно нормы

$$\|f_1\|_{E_1} + \|f_2\|_{E_2} + \|f\|_{(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)}\|_{E_w}, \quad f = (f_1, f_2).$$

Согласованное подпространство пространства E обозначаем через $E_c = (E_1, E_2)_c$ (имея в виду слово co-ordinate).

Пространство E_c не всегда является собственным подпространством пространства E . Например, если $E_1 = L^1(0, 1)$, $E_2 = L^2(1, \infty)$, то $E_c = E$. Тем не менее для единообразия формулировок и в подобных случаях будем говорить о согласованных подпространствах и пользоваться введенным обозначением.

2.3. Преобразования Лапласа функционалов. Пусть φ (соответственно $d\sigma$) – функционал на $W_{p, \Omega}^m(\mathbb{R}_+)$ (соответственно на $C_{0, \Omega}^m[0, \infty)$). *Преобразованием Лапласа функционала φ* (соответственно $d\sigma$) называют функцию

$$(\varphi(t), e^{-zt}) \quad (\text{соответственно } (d\sigma(t), e^{-zt})), \quad \operatorname{Re} z > 0.$$

Если

$$\varphi = (\varphi_0, -\varphi_1, \dots, (-1)^m \varphi_m) \\ (\text{соответственно } d\sigma = (d\sigma_0, -d\sigma_1, \dots, (-1)^m d\sigma_m)),$$

то в силу формул (2.3), (2.4) при $\operatorname{Re} z > 0$ имеем

$$\Phi(z) := (\varphi(t), e^{-zt}) = \sum_{j=0}^m z^j \int_0^\infty e^{-zt} \Omega^{1/p}(t) \varphi_j(t) dt, \quad \varphi_j \in L^{p'}(\mathbb{R}_+), \quad (2.7)$$

$$\Phi(z) := (d\sigma(t), e^{-zt}) = \sum_{j=0}^m z^j \int_0^\infty e^{-zt} \Omega(t) d\sigma_j(t), \quad \sigma_j \in V[0, \infty). \quad (2.8)$$

Очевидно, что условие

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \Omega(t)}{t} \leq 0 \quad (2.9)$$

обеспечивает равномерную сходимость интегралов (2.7), (2.8) в каждой полуплоскости вида $\operatorname{Re} z \geq \delta > 0$ и, следовательно, аналитичность функции $\Phi(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$.

Так как неполнота системы элементов в банаховом пространстве B равносильна существованию нетривиального функционала на B , аннулирующего эту систему, то верна

ЛЕММА 1. Пусть E есть какое-нибудь из пространств $W_{p,\Omega}^m(\mathbb{R}_+)$, $p \geq 1$, или $C_{0,\Omega}^m[0, \infty)$, где вес Ω удовлетворяет условию (2.9).

Тогда для неполноты системы $e(\Lambda)$ в пространстве E необходимо и достаточно существование нетривиального функционала на E , преобразование Лапласа $\Phi(z)$ которого обращается в нуль в точках Λ .

Хорошо известно, что при $m = 0$ и $\Omega \equiv 1$ тривиальность функционала на E равносильна условию $\Phi(z) \equiv 0$. Переходя от функции $\Phi(z)$ к функции $\Phi(z + \epsilon)$ для любого $\epsilon > 0$, видим, что при $m = 0$ это верно для веса с условием (2.9). Нам понадобится данное утверждение и при $m > 0$; в этом случае оно уже нуждается в доказательстве.

ЛЕММА 2. Пусть $h \in L^1(0, a)$, $a > 0$, $h \equiv 0$ вне $(0, a)$, а вес $\Omega(t)$, $t \geq 0$, подчиняется условию: существует $M > 0$ такое, что

$$\Omega(t) \leq M\Omega(x), \quad \max(0, x - a) < t < x, \quad x > 0. \quad (2.10)$$

Тогда:

1) если $\sigma \in V[0, \infty)$ и $\Omega \in C[0, \infty)$, то

$$\frac{h * (\Omega d\sigma)}{\Omega} \in L^1(\mathbb{R}_+);$$

2) если $\varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p' \leq \infty$, то

$$\frac{h * (\Omega^{1/p} \varphi)}{\Omega^{1/p}} \in L^{p'}(\mathbb{R}_+).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем условие (2.10) и два следующих хорошо известных свойства свертки. Пусть $f \in L^1(\mathbb{R})$; тогда:

- (а) если $\sigma \in V[0, \infty)$, то $f * d\sigma \in L^1(\mathbb{R})$;
 - (б) если $g \in L^q(\mathbb{R})$, $1 \leq q \leq \infty$, то $f * g \in L^q(\mathbb{R})$.
- 1) Пусть $v(t) = \text{var}(\sigma(x) : 0 \leq x \leq t)$. Имеем

$$(h * (\Omega d\sigma))(x) = \int_{\mathbb{R}_+} h(x-t)\Omega(t) d\sigma(t), \quad x > 0, \quad (2.11)$$

где фактически (в силу того, что $\text{supp } h \subset [0, a]$) интегрирование ведется по отрезку $[\max(0, x-a), x]$. Пользуясь этим и применяя условие (2.10), получаем

$$|(h * (\Omega d\sigma))(x)| \leq M\Omega(x) \int_{\mathbb{R}_+} |h(x-t)| dv(t). \quad (2.12)$$

Но последний интеграл есть свертка $|h| * dv$, где $|h| \in L^1(\mathbb{R}_+)$, а $v \in V[0, \infty)$. По свойству свертки (а) этот интеграл лежит в $L^1(\mathbb{R}_+)$, и утверждение 1) доказано.

2) Доказательство отличается от приведенного лишь тем, что вместо свойства (а) применяется свойство свертки (б). Имеем

$$(h * (\Omega^{1/p}\varphi))(x) = \int_{\mathbb{R}_+} h(x-t)\Omega^{1/p}(t)\varphi(t) dt, \quad \varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}_+),$$

где фактическое множество интегрирования то же, что в (2.11). Значит, по условию (2.10) верна оценка, подобная (2.12),

$$|(h * (\Omega^{1/p}\varphi))(x)| \leq M\Omega^{1/p}(x) \int_{\mathbb{R}_+} |h(x-t)\varphi(t)| dt.$$

Последний интеграл есть свертка $|h| * |\varphi|$, где $|h| \in L^1(\mathbb{R}_+)$, а $|\varphi| \in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$. По свойству (б) эта свертка лежит в $L^{p'}(\mathbb{R}_+)$, что дает утверждение 2). Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Пусть $\Phi(z)$ – преобразование Лапласа (2.8) (или соответственно (2.7)) функционала $d\sigma$ (соответственно φ) на $C_{0,\Omega}^m = C_{0,\Omega}^m[0, \infty)$ (соответственно на $W_{p,\Omega}^m = W_{p,\Omega}^m(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$), $m \in \mathbb{Z}_+$, где положительный непрерывный вес Ω удовлетворяет условиям (2.9) и (2.10).

Тогда:

- 1) если $m \geq 1$, то при любом $a > 0$ функция

$$\Phi_a(z) := \Phi(z) \frac{1 - e^{-az}}{z}, \quad \text{Re } z > 0,$$

является преобразованием Лапласа некоторого функционала на $C_{0,\Omega}^{m-1}$ (соответственно на $W_{p,\Omega}^{m-1}$);

- 2) условие

$$\Phi(z) \equiv 0, \quad \text{Re } z > 0 \quad (2.13)$$

равносильно тривиальности функционала $d\sigma$ (соответственно φ).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Остановимся на случае пространства $C_{0,\Omega}^m$. Тогда $\Phi(z)$ имеет вид

$$\Phi(z) = \sum_{j=0}^m z^j \int_0^\infty e^{-zt} \Omega(t) d\sigma_j(t), \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \sigma_j \in V[0, \infty). \quad (2.14)$$

Умножим (2.14) на функцию

$$\frac{1 - e^{-az}}{z}, \quad a > 0,$$

являющуюся преобразованием Лапласа характеристической функции $\chi_a(t)$ интервала $(0, a)$. По теореме о преобразовании Лапласа свертки получим

$$\Phi_a(z) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} (\chi_a * (\Omega d\sigma_0)) dt + (1 - e^{-az}) \sum_{j=1}^m z^{j-1} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} \Omega(t) d\sigma_j(t). \quad (2.15)$$

Далее, заметим, что если $F(z)$ есть преобразование Лапласа меры $\Omega d\sigma$, то функция

$$F(z)e^{-az} = \int_a^\infty e^{-zt} \Omega(t-a) d\sigma(t-a)$$

есть преобразование Лапласа меры

$$\Omega(t) d\sigma^a(t), \quad (2.16)$$

где $d\sigma^a(t) \equiv 0$ на $[0, a)$ и

$$d\sigma^a(t) = g_a(t) d\sigma(t-a), \quad t \geq a, \quad g_a(t) = \frac{\Omega(t-a)}{\Omega(t)}.$$

По условию (2.10) и по непрерывности и положительности веса Ω имеем

$$g_a(t) \in L^\infty(\mathbb{R}_+) \cap C[a, \infty).$$

Поэтому мера (2.16) задает функционал на $C_{0,\Omega}^0$.

С использованием введенного обозначения формула (2.15) запишется в виде

$$\begin{aligned} \Phi_a(z) &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} ((\chi_a * (\Omega d\sigma_0))(t) dt + \Omega(t) d\sigma_1(t) - \Omega(t) d\sigma_1^a(t)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{m-1} z^j \int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} \Omega(t) (d\sigma_{j+1}(t) - d\sigma_{j+1}^a(t)), \quad \operatorname{Re} z > 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

По утверждению 1) леммы 2

$$(\chi_a * (\Omega d\sigma_0))(t) = \Omega(t)g(t), \quad g \in L^1(\mathbb{R}_+).$$

Значит, мера $(\chi_a * (\Omega d\sigma_0)) dt$ задает функционал на $C_{0,\Omega}^0$. Таким образом, функция (2.17) есть преобразование Лапласа функционала на $C_{0,\Omega}^{m-1}$, и в случае пространства $C_{0,\Omega}^m$ утверждение 1) доказано.

Случай пространства $W_{0,\Omega}^m$ рассматривается аналогично. Единственное изменение состоит в том, что вместо утверждения 1) леммы 2 используется утверждение 2).

Для дальнейшего будет важно следующее замечание. Если реализация функционала, присутствующего в формуле (2.14), правильная, то и реализация функционала, присутствующего в (2.17), также правильная.

Докажем его. Для этого в (2.17) рассмотрим член с индексом j

$$z^j \int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} \Omega(t) d\sigma_{j+1}(t) - z^j \int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} \Omega(t) d\sigma_{j+1}^a(t). \quad (2.18)$$

Первое слагаемое в (2.18), умноженное на z , присутствует в (2.14). Но в (2.14) по предположению его порядок понижен быть не может. Значит, порядок первого слагаемого в (2.18) не может быть понижен. Поэтому независимо от второго слагаемого в (2.18) порядок слагаемого в (2.17) с индексом j не может быть понижен. Так как здесь j произвольно, то реализация функционала в (2.17) является правильной.

2) Так как при любом z , $\operatorname{Re} z > 0$, функция e^{-zt} есть элемент рассматриваемого пространства, то тривиальность функционала влечет условие (2.13).

Пусть выполнено условие (2.13). Не снижая общности, считаем реализацию функционала $d\sigma$ (соответственно φ) правильной. Покажем, что

$$\begin{aligned} d\sigma_j(t) &\equiv 0 & (\text{соответственно } \varphi_j(t) &\equiv 0), \\ j = \overline{0, m}, & \quad t \geq 0 & (\text{соответственно } t > 0). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Этим доказательство леммы будет закончено.

Доказательство проведем индукцией по m . Сначала рассмотрим пространство $C_{0,\Omega}^m$. При $m = 0$ требуемое утверждение известно. Считаем, что оно верно для индекса $m - 1$, и докажем его справедливость для индекса m .

Итак, $\Phi(z) \equiv 0$, где $\Phi(z)$ имеет вид (2.14). Тогда и $\Phi_a(z) \equiv 0$. Значит, правая часть в (2.17) есть тождественный нуль. Как мы показали, присутствующая в этой формуле реализация функционала на $C_{0,\Omega}^{m-1}$ также правильная, и потому по предположению индукции имеем

$$(\chi_a * (\Omega d\sigma_0))(t) dt + \Omega(t) d\sigma_1(t) - \Omega(t) d\sigma_1^a(t) \equiv 0, \quad t \geq 0, \quad (2.20)$$

$$\Omega(t)(d\sigma_{j+1}(t) - d\sigma_{j+1}^a(t)) \equiv 0, \quad t \geq 0, \quad j = \overline{1, m-1}. \quad (2.21)$$

По смыслу меры $d\sigma^a$ второе слагаемое в (2.21) есть тождественный нуль на $[0, a)$ и, значит,

$$d\sigma_j(t) \equiv 0, \quad t \in [0, a), \quad j = \overline{2, m}.$$

Но $a > 0$ в наших рассуждениях произвольно, и мы доказали (2.19) в случае пространства $C_{0,\Omega}^m$ для индексов $j = \overline{2, m}$. Остается доказать это для индексов $j = 0, 1$.

Те же рассуждения, примененные к (2.20), показывают, что мера

$$(\chi_a * (\Omega d\sigma_0))(t) dt + \Omega(t) d\sigma_1(t)$$

является нулевой на $[0, a)$, откуда в силу произвольности $a > 0$

$$\left(\int_0^t \Omega(u) d\sigma_0(u) \right) dt = -\Omega(t) d\sigma_1(t), \quad t \geq 0. \quad (2.22)$$

Если меры $d\sigma_0$, $d\sigma_1$ нулевые, то доказывать нечего. Покажем, что нетривиальность этих мер (одновременная в силу (2.22)) приводит к противоречию с правильной реализацией функционала.

Так как мы уже доказали свойство (2.19) для индексов $j = \overline{2, m}$, то функционал, соответствующий преобразованию Лапласа (2.14), имеет вид

$$(d\sigma, f) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t)\Omega(t) d\sigma_0(t) - \int_{\mathbb{R}_+} f'(t)\Omega(t) d\sigma_1(t), \quad f \in C_{0,\Omega}^m. \quad (2.23)$$

Воспользовавшись свойством (2.22), проинтегрируем по частям во втором интеграле в (2.23). Считая, что $f \equiv 0$ вне некоторого отрезка $[0, b]$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} f'(t)\Omega(t) d\sigma_1(t) &= - \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_0^t \Omega(u) d\sigma_0(u) \right) df(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} f(t)\Omega(t) d\sigma_0(t). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Но функции из $C_{0,\Omega}^m$, равные нулю при всех достаточно больших t , плотны в $C_{0,\Omega}^m$, и потому (2.24) верно для всех $f \in C_{0,\Omega}^m$. Значит, (2.24) показывает, что порядок второго слагаемого в реализации (2.23) функционала может быть понижен. Получено противоречие с правильной реализацией функционала, означающее, что случай пространства $C_{0,\Omega}^m$ рассмотрен.

Случай пространства $W_{0,\Omega}^m$ рассматривается аналогично. Следует только по ходу дела вместо утверждения 1) леммы 2 применить утверждение 2). Лемма доказана.

Соединяя лемму 1 с утверждением 2) леммы 3, получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 4. Пусть E есть какое-нибудь из пространств $W_{p,\Omega}^m(\mathbb{R}_+)$, $p \geq 1$, или $C_{0,\Omega}^m[0, \infty)$, где положительный непрерывный вес Ω удовлетворяет условиям (2.9) и (2.10).

Тогда для неполноты системы $e(\Lambda)$ в пространстве E необходимо и достаточно существование нетривиального преобразования Лапласа $\Phi(z)$ функционала на E такого, что $\Phi(z)$ обращается в нуль в точках Λ .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Начиная с этого места через $e(\Lambda)$ обозначается более общая система кратных экспонент

$$e(\Lambda) = ((t^k e^{-\lambda_n t})_{k=0}^{m_n-1})_{n=1}^\infty, \quad \Lambda = (\lambda_n; m_n)_{n=1}^\infty, \quad \operatorname{Re} \lambda_n > 0, \quad m_n \in \mathbb{N}.$$

Тогда в леммах 4 и 1 обращение функции $\Phi(z)$ в нуль в каждой точке λ_n следует понимать с кратностью m_n .

§ 3. Пространства с одновременным свойством полноты экспонент

3.1. Пары пространств. Будем говорить, что пространство B_1 *топологически плотно вложено* в B_2 , и писать $B_1 \hookrightarrow B_2$, если $B_1 \hookrightarrow B_2$ и B_1 плотно в B_2 .

Через Ω_q обозначаем класс весов $\omega \in L^1(0, 1)$, для каждого из которых при некотором $\delta \in [0, 1]$ выполняются условия

$$m(t) := \inf(\omega(x) : 0 < t \leq x < \delta) > 0, \quad 0 < t < \delta, \\ \omega^{-1/q}(t) \in L^{q'}(\delta, 1).$$

Если $\delta = 0$ (соответственно $\delta = 1$) то первое (соответственно второе) из этих условий отсутствует.

ТЕОРЕМА 3. Пусть положительный непрерывный вес $\Omega(t)$, $t \geq 0$, удовлетворяет условиям (2.9) и (2.10), и пусть при некоторых $s \in \mathbb{Z}_+$, $p, q \in [1, \infty)$, $\omega \in \Omega_q$ пространство $E_1(0, 1)$ является промежуточным между $W_p^s(0, 1)$ и $L_\omega^q(0, 1)$ в том смысле, что

$$W_p^s(0, 1) \hookrightarrow E_1(0, 1) \hookrightarrow L_\omega^q(0, 1). \quad (3.1)$$

Тогда система $e(\Lambda)$ одновременно полна как в пространствах

$$(E_1(0, 1), W_{p, \Omega}^m(1, \infty))_c, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad \text{и} \quad L_\Omega^p(\mathbb{R}_+), \quad (3.2)$$

так и в пространствах

$$(E_1(0, 1), C_{0, \Omega}^m[1, \infty))_c, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad \text{и} \quad C_{0, \Omega}[0, \infty). \quad (3.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Постоянно будем пользоваться здесь таким очевидным фактом: если $B_1 \hookrightarrow B_2$ и B_1 содержит элементы некоторой системы, то неполнота этой системы в B_2 влечет ее неполноту в B_1 .

Так как $C^s[0, 1] \hookrightarrow W_p^s(0, 1)$, то вложения (3.1) влекут вложения

$$C^s[0, 1] \hookrightarrow E_1(0, 1) \hookrightarrow L_\omega^q(0, 1). \quad (3.4)$$

Будучи положительной и непрерывной, функция $\Omega(t)$ отграничена от нуля и бесконечности на отрезке $[0, 1]$, и потому

$$(W_p^l(0, 1), W_{p, \Omega}^l(1, \infty))_c = W_{p, \Omega}^l(\mathbb{R}_+), \quad (3.5)$$

$$(C^l[0, 1], C_{0, \Omega}^l[1, \infty))_c = C_{0, \Omega}^l[0, \infty). \quad (3.6)$$

По той же причине и в силу левых вложений (3.1), (3.4) компоненты левых пространств (3.2) и (3.3) топологически сравнимы относительно точки $t = 1$. Значит, соответствующие согласованные подпространства имеют смысл.

Правые вложения (3.1), (3.4) и условие (2.9) гарантируют принадлежность элементов системы $e(\Lambda)$ пространствам (3.2) и (3.3).

1) Докажем, что неполнота системы $e(\Lambda)$ в левом пространстве (3.2) (соответственно (3.3)) влечет ее неполноту в правом пространстве (3.2) (соответственно (3.3)). В существенном доказательство решается применением леммы 3.

Пусть система $e(\Lambda)$ неполна в левом пространстве (3.2) (соответственно (3.3)). Пусть $l = \max(s, m)$. Тогда, принимая во внимание левое условие (3.1) (соответственно (3.4)), имеем

$$W_p^l(0, 1) \hookrightarrow W_p^s(0, 1) \hookrightarrow E_1, \quad W_{p,\Omega}^l(1, \infty) \hookrightarrow W_{p,\Omega}^m(1, \infty) \\ (\text{соответственно } C^l[0, 1] \hookrightarrow C^s[0, 1] \hookrightarrow E_1, \quad C_{0,\Omega}^l[1, \infty) \hookrightarrow C_{0,\Omega}^m[1, \infty)).$$

Поэтому с учетом (3.5) и (3.6)

$$W_{p,\Omega}^l(\mathbb{R}_+) \hookrightarrow (E_1, W_{p,\Omega}^m(1, \infty))_c \\ (\text{соответственно } C_{0,\Omega}^l[0, \infty) \hookrightarrow (E_1(0, 1), C_{0,\Omega}^m[1, \infty))_c).$$

Так как по условию система $e(\Lambda)$ неполна в левом пространстве (3.2) (соответственно (3.3)), то по замечанию, сделанному в начале доказательства, она неполна в пространстве (3.5) (соответственно в пространстве (3.6)).

Итак, система неполна в пространстве $W_{p,\Omega}^l(\mathbb{R}_+)$ (соответственно в пространстве $C_{0,\Omega}^l[0, \infty)$). По лемме 4 найдется нетривиальное преобразование Лапласа $\Phi(z)$ функционала на пространстве $W_{p,\Omega}^l(\mathbb{R}_+)$ (соответственно на пространстве $C_{0,\Omega}^l[0, \infty)$), обращающееся в нуль в точках Λ . Перейдем к функции

$$\left(\frac{1 - e^{-z}}{z} \Phi(z) \right)^l. \quad (3.7)$$

По утверждению 1) леммы 3 функция (3.7) является преобразованием Лапласа некоторого функционала на $L_\Omega^p(\mathbb{R}_+)$ (соответственно на $C_{0,\Omega}[0, \infty)$). Но эта функция (вместе с $\Phi(z)$) нетривиальна и обращается в нуль в точках Λ . По лемме 4 система $e(\Lambda)$ неполна в правом пространстве (3.2) (соответственно (3.3)).

2) При доказательстве обратного утверждения, пользуясь условием $\omega \in \Omega_q$, мы можем дополнительно считать, что $\omega^{p/q} \in C^1[0, \delta]$, $\omega(0) = 0$ и $\omega^{p/q}(t)$ возрастает на $[0, \delta]$ вместе со своей производной. Действительно, положим

$$\omega_1^{p/q}(x) = \int_0^x m^{p/q}(t) dt, \quad 0 \leq x \leq \delta.$$

Тогда $\omega_1^{p/q} \in C[0, \delta]$, $\omega_1(0) = 0$, $\omega_1^{p/q}(x)$ возрастает и так как $m(t)$ есть положительная неубывающая миноранта веса $\omega(t)$ на $(0, \delta)$, то

$$0 < \omega_1(x) \leq x^{q/p} m(x) < \omega(x), \quad 0 < x < \delta.$$

Беря в качестве $\omega_2^{p/q}$ неопределенный интеграл от $\omega_1^{p/q}$, получаем, что $\omega_2^{p/q} \in C^1[0, \delta]$, $\omega_2(0) = 0$, $\omega_2^{p/q}(x)$ возрастает вместе со своей производной и

$$0 < \omega_2(x) < \omega_1(x) < \omega(x), \quad 0 < x < \delta.$$

Положив $\omega_2(t) = \omega(t)$, $\delta < t < 1$, на основании последнего неравенства и в силу правого вложения (3.1) имеем

$$E_1(0, 1) \hookrightarrow L_\omega^q(0, 1) \hookrightarrow L_{\omega_2}^q(0, 1),$$

и мы действительно можем считать, что вес ω обладает объявленными дополнительными свойствами.

Пусть система $e(\Lambda)$ неполна в правом пространстве (3.2) (или соответственно (3.3)). Используя правое вложение (3.1) и очевидные вложения

$$W_{p,\Omega}^m(1, \infty) \hookrightarrow L_\Omega^p(1, \infty), \quad C_{0,\Omega}^m[1, \infty) \hookrightarrow C_{0,\Omega}[1, \infty),$$

имеем

$$\begin{aligned} (E_1, W_{p,\Omega}^m(1, \infty))_c &\hookrightarrow (L_\omega^q(0, 1), L_\Omega^p(1, \infty))_c = (L_\omega^q(0, 1), L_\Omega^p(1, \infty)), \\ (E_1, C_{0,\Omega}^m(1, \infty))_c &\hookrightarrow (L_\omega^q(0, 1), C_{0,\Omega}[1, \infty))_c = (L_\omega^q(0, 1), C_{0,\Omega}[1, \infty)). \end{aligned}$$

Значит, предположив неполноту системы $e(\Lambda)$ в правом пространстве (3.2) (соответственно в правом пространстве (3.3)), достаточно доказать ее неполноту в пространстве

$$(L_\omega^q(0, 1), L_\Omega^p(1, \infty)) \quad (\text{соответственно } (L_\omega^q(0, 1), C_{0,\Omega}[1, \infty))). \quad (3.8)$$

Пусть система $e(\Lambda)$ неполна в $L_\Omega^p(\mathbb{R}_+)$ т.е. в правом пространстве (3.2). По лемме 4 найдется нетривиальное преобразование Лапласа

$$\Phi(z) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} \Omega^{1/p}(t) \varphi(t) dt, \quad \varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}_+), \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

обращающееся в нуль в точках Λ .

Положим $h \equiv 0$ вне $[0, \delta]$ и

$$h(t) = ((\omega^{p/q}(t))')^{1/p}, \quad 0 < t < \delta. \quad (3.9)$$

По соглашению $\omega^{p/q} \in C^1[0, \delta]$, и потому $(\omega^{p/q})' \in C[0, \delta]$. Так как функция $\omega^{p/q}(t)$ возрастает, то $(\omega^{p/q})' \geq 0$ и определенная формулой (3.9) функция $h(t)$ неотрицательна и интегрируема на $[0, \delta]$. Кроме того,

$$\int_0^x h^p(t) dt = \omega^{p/q}(x), \quad 0 < x < \delta. \quad (3.10)$$

В качестве претендента на функцию ψ (как функционала на левом пространстве (3.8)), аннулирующую систему $e(\Lambda)$, рассмотрим свертку

$$\psi = h * (\Omega^{1/p} \varphi).$$

Так как функция h принадлежит L^1 , то по лемме 2 (утверждение 2))

$$\frac{\psi}{\Omega^{1/p}} \in L^{p'}(\mathbb{R}_+).$$

В частности,

$$g_2(t) := \frac{1}{\Omega^{1/p}} \psi|_{(1,\infty)} \in L^{p'}(1, \infty).$$

Покажем, что

$$\frac{1}{\omega^{1/q}(t)} \psi(t)|_{(0,\delta)} \in L^\infty(0, \delta), \quad \psi(t)|_{(\delta,1)} \in L^\infty(\delta, 1). \quad (3.11)$$

Имеем

$$\psi(x) = \int_0^x h(t) \Omega^{1/p}(x-t) \varphi(x-t) dt, \quad x > 0. \quad (3.12)$$

Отсюда, используя свойства

$$\varphi|_{(0,1)} \in L^{p'}(0, 1), \quad \Omega|_{(0,1)} \in L^\infty(0, 1),$$

формулу (3.10), а также неотрицательность функции h , получаем

$$|\psi(x)| \leq M \|\varphi\|_{L^{p'}(0,\delta)} \left(\int_0^x h^p(t) dt \right)^{1/p} = C \omega^{1/q}(x), \quad 0 < x < \delta.$$

Первое условие (3.11) выполнено. Второе следует из (3.12) очевидным образом.

Докажем, что

$$\psi(t) = \omega^{1/q}(t) g_1(t), \quad 0 < t < 1, \quad g_1 \in L^{q'}(0, 1).$$

Действительно, свойство

$$\psi(t)|_{(0,\delta)} = \omega^{1/q}(t) g_1(t), \quad 0 < t < \delta, \quad g_1 \in L^{q'}(0, \delta),$$

следует из первого условия (3.11), а свойство

$$\psi(t)|_{(\delta,1)} = \omega^{1/q}(t) g_1(t), \quad \delta < t < 1, \quad g_1 \in L^{q'}(\delta, 1),$$

следует из второго условия (3.11) и второго условия в определении класса Ω_q .

Таким образом, преобразование Лапласа функции ψ имеет вид

$$\Psi(z) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} \psi(t) dt = \int_0^1 e^{-zt} \omega^{1/q}(t) g_1(t) dt + \int_1^\infty e^{-zt} \Omega^{1/p}(t) g_2(t) dt,$$

где $g_1 \in L^{q'}(0, 1)$, $g_2 \in L^{p'}(1, \infty)$. То есть $\Psi(z)$ – преобразование Лапласа функционала на левом пространстве (3.8). С другой стороны, для $\Psi(z)$ как для преобразования Лапласа свертки справедливо

$$\Psi(z) = \Phi(z) H(z),$$

где $H(z)$ – преобразование Лапласа функции h . Следовательно, $\Psi(z)$ обращается в нуль в точках Λ .

По лемме 1 система $e(\Lambda)$ неполна в левом пространстве (3.8), что и требовалось. Мы доказали, что неполнота системы $e(\Lambda)$ в правом пространстве (3.2) влечет ее неполноту в левом пространстве (3.2).

Требуется доказать то же утверждение для пространств (3.3).

В основном действуем так же, как в случае пространств (3.2). По предположению система $e(\Lambda)$ неполна в $C_{0,\Omega}[0, \infty)$. Значит, существует функция $\sigma \in V[0, \infty)$ такая, что преобразование Лапласа–Стилтьеса

$$\Phi(z) = \int_0^\infty e^{-zt} \Omega(t) d\sigma(t), \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

обращается в нуль в точках Λ . Положим $h \equiv 0$ вне $[0, \delta]$,

$$h(x) = \omega^{1/q}(x), \quad 0 \leq x \leq \delta,$$

считая, что функция $h(t)$ возрастает и непрерывна на $[0, \delta]$ и $h(0) = 0$. Мы вправе так считать, формально полагая $p = 1$ в соглашении, принятом в начале п. 2) доказательства.

Рассмотрим свертку

$$\psi(t) = (h * (\Omega d\sigma))(t).$$

По утверждению 1) леммы 2

$$g_2(t) := \frac{1}{\Omega} \psi|_{(1, \infty)} \in L^1(1, \infty).$$

Значит, если нам удастся показать справедливость свойства (3.11), то определенная выше функция $\Psi(z)$ будет преобразованием Лапласа функционала на правом пространстве (3.8). А поскольку $\Psi(z) = 0$ для $z \in \Lambda$ (снова в силу свойства свертки $\Psi = \Phi H$), то это будет означать неполноту системы $e(\Lambda)$ в правом пространстве (3.8). Доказательство теоремы будет закончено.

Имеем

$$\psi(x) = \int_0^x h(x-t) \Omega(t) d\sigma(t), \quad x > 0.$$

Отсюда и из непрерывности функций $h(t)$, $\Omega(t)$ сразу следует второе свойство (3.11). А оценка

$$|\psi(x)| \leq M(\operatorname{var} \sigma) h(x) = C \omega^{1/q}(x), \quad 0 < x < \delta,$$

дающая первое свойство (3.11), следует из положительности и возрастания $h(t)$.

Теорема 3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $l, m \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq p, q < \infty$, а непрерывный положительный вес $\Omega(t)$, $t \geq 0$, удовлетворяет условиям (2.9) и (2.10). Пусть $E_1(0, 1)$ – какое-нибудь из пространств

$$L_\omega^q(0, 1), \quad \omega \in \Omega_q, \quad W_q^l(0, 1), \quad C^l[0, 1]. \quad (3.13)$$

Тогда верно утверждение теоремы 3.

Действительно, в этом случае пространства (3.13) удовлетворяют условиям теоремы 3.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Функция $\Omega(t) \equiv 1$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Поэтому классы входящих в нее пространств $W_{p,\Omega}^m$ и $C_{0,\Omega}^m$ содержат невесовые пространства W_p^m и C_0^m .

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Следствие 1 соответствует той точке зрения (являющейся лейтмотивом статьи [12]), что в вопросе полноты системы $e(\Lambda)$ в пространстве $(E_1(0, 1), E_2(1, \infty))_c$ доминирующую роль играет вторая компонента E_2 .

3.2. Отсутствие базисов из экспонент.

ТЕОРЕМА 4. Пусть B – какое-нибудь из пространств

$$(E_1(0, 1), W_{p,\Omega}^m(\mathbb{R}_+))_c, \quad (E_1(0, 1), C_{0,\Omega}^m[0, \infty))_c,$$

где E_1, Ω, m, p те же, что в теореме 3.

Тогда:

1) неполнота системы $e(\Lambda)$ сохранится после присоединения к ней системы

$$e(M), \quad M = (\mu_k)_{k=1}^\infty, \quad \operatorname{Re} \mu_k > 0, \quad \mu_k \notin \Lambda,$$

как только

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{|\mu_k|} < +\infty; \quad (3.14)$$

2) если система $e(\Lambda)$ минимальна в B , то она неполна;

3) в B нет базисов вида $e(\Lambda)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) По теореме 3 можем считать, что B есть пространство L_Ω^p или $C_{0,\Omega}$. Пусть для определенности $B = L_\Omega^p$. Предположим, что система $e(\Lambda)$ неполна в B . Тогда по лемме 4 некоторое нетривиальное преобразование Лапласа

$$\Phi(z) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-zt} \Omega^{1/p}(t) f(t) dt, \quad f \in L^{p'}(\mathbb{R}_+), \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

обращается в нуль в точках Λ .

Воспользуемся следующим фактом (см. [11; § 3.3]). Если выполнено условие (3.14), то для любого $a > 0$ найдется нетривиальная функция

$$F(z) = \int_0^a e^{-zt} g(t) dt, \quad g \in C[0, 1],$$

обращающаяся в нуль в точках $\mu_k, k \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим функцию $\Phi(z)F(z)$ при каком-нибудь $a > 0$. Она нетривиальна, обращается в нуль в точках $(\lambda_n) \cup (\mu_k)$ и является преобразованием Лапласа свертки $g * (\Omega^{1/p} f)$. По лемме 2 эта свертка лежит в $(L_\Omega^p(\mathbb{R}_+))'$. По лемме 4 объединенная система $e(\Lambda) \cup e(M)$ неполна в B . Утверждение 1) доказано.

2) Пусть система $e(\Lambda)$ минимальна в B . Надо доказать ее неполноту. Если бы она была полной, то по утверждению 1) и система

$$e(\Lambda_1), \quad \Lambda_1 = \Lambda \setminus \lambda_1,$$

была бы полной. В частности, тогда и функцию $\exp(-\lambda_1 t)$ можно было бы сколь угодно хорошо приблизить линейными комбинациями этой системы. А это противоречило бы минимальности.

3) Так как одновременная полнота и минимальность есть необходимое условие базиса, то утверждение 3) следует из 2). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Утверждение 1) теоремы 4 сохраняет силу и тогда, когда $\mu_k = \lambda_s$. В этом случае под присоединением к $e(\Lambda)$ экспоненты $\exp(-\mu_k t)$ следует понимать увеличение на единицу кратности точки λ_s .

При доказательстве утверждения 2) для простоты первоначального восприятия негласно подразумевалось, что точка λ_1 проста. В кратном случае под Λ_1 следует понимать последовательность, полученную из Λ уменьшением на единицу кратности точки λ_1 , а вместо функции $\exp(-\lambda_1 t)$ рассматривать функцию $t^{m_1-1} \exp(-\lambda_1 t)$.

3.3. Пространства со степенными весами. Введем пространства

$$\begin{aligned} L^{p,\alpha} &:= L^p(\mathbb{R}_+, (1+t)^\alpha dt), \quad C_{0,\alpha} := C_{0,(1+t)^\alpha}[0, \infty), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \\ L_\alpha^p &:= L^p(\mathbb{R}_+, t^\alpha dt), \quad \alpha > -1. \end{aligned} \quad (3.15)$$

(Путаницы $C_{0,\alpha}$ с $C_{0,\Omega}$ быть не должно: Ω – вес, а α – показатель степени.) Ограничение $\alpha > -1$ диктуется условием $\omega = t^\alpha \in L^1(0, 1)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. При $p \geq 1$, $\alpha > -1$ система $e(\Lambda)$ полна (неполна) в пространствах $L^{p,\alpha}$ и L_α^p одновременно.

Действительно, так как при $t \geq 1$ веса t^α и $(1+t)^\alpha$ эквивалентны, то это утверждение получается применением следствия 1 к пространствам (3.2) с $m = 0$, $\Omega = (1+t)^\alpha$, $E_1 = L_{\omega_1}^p(0, 1)$, $\omega_1(t) = t^\alpha$, где следует положить $\omega(t) = t^\alpha$, если $\alpha \geq 0$, и $\omega(t) \equiv 1$, если $\alpha < 0$.

Автором в [11] и Б. Н. Хабибуллиным в [14] получен ряд результатов о полноте системы $e(\Lambda)$ в пространствах L_α^p , $\alpha > -1$. Следствие 2 позволяет переформулировать их для пространств $L^{p,\alpha}$, $\alpha > -1$. На этом останавливаться не будем.

В дальнейшем понадобится

ЛЕММА 5. Верны следующие топологически плотные вложения:

$$\begin{aligned} C_{0,\beta} &\hookrightarrow C_{0,\alpha}, \quad L^{p,\beta} \hookrightarrow L^{p,\alpha}, \quad \alpha < \beta; \\ C_{0,\beta} &\hookrightarrow L^{p,\alpha}, \quad \alpha < p\beta - 1; \\ L^{p,\alpha} &\hookrightarrow L^{2,-1}, \quad p > 2, \quad \alpha > -1. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С учетом того, что функции класса $C^\infty[0, \infty)$ с компактным носителем плотны в $C_{0,\alpha}$ и $L^{p,\alpha}$, первые два вложения очевидны, а остальные верны в силу следующих неравенств.

Если $\alpha < p\beta - 1$, то

$$\|g\|_{L^{p,\alpha}}^p = \int_0^\infty \frac{|g(t)|^p (1+t)^{p\beta}}{(1+t)^{p\beta-\alpha}} dt \leq \|g\|_{C_{0,\beta}}^p \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t)^{p\beta-\alpha}} = C \|g\|_{C_{0,\beta}}^p.$$

В обозначениях $r = p/2$, $r' = p/(p-2)$ по неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^{2,-1}}^2 &= \int_{\mathbb{R}_+} |f(t)|^2 (1+t)^{2\alpha/p} \frac{dt}{(1+t)^{1+2\alpha/p}} \\ &\leq \|f\|_{L^{p,\alpha}}^2 \left(\int_{\mathbb{R}_+} \frac{dt}{(1+t)^{(1+\alpha/r)r'}} \right)^{1/r'} = C \|f\|_{L^{p,\alpha}}^2, \end{aligned}$$

если

$$1 < \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) r' = \left(1 + \frac{2\alpha}{p}\right) \frac{p}{p-2} = \frac{p+2\alpha}{p-2},$$

т.е. если $p > 2$, $\alpha > -1$.

Третье вложение леммы 5 с $p = 2$, $\alpha = 0$ и теорема Саса дают

СЛЕДСТВИЕ 3. *Условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} = +\infty$$

необходимо для полноты системы $e(\Lambda)$ в пространстве $C_{0,\beta}$, $\beta > 1/2$.

§ 4. Критерий полноты в пространствах со степенным весом

4.1. Леммы. Пусть $u(t) \in L^1(\mathbb{R}, (1+t^2)^{-1} dt)$. Тогда интегралом Пуассона (для верхней полуплоскости) от функции $u(t)$ называют свертку с ядром Пуассона $P_y(t) = y/(t^2 + y^2)$, т.е. функцию

$$U(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(x-t) dt}{t^2 + y^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0.$$

Если $u \in L^\infty(\mathbb{R})$, то очевидна оценка

$$|U(x, y)| \leq \|u\|_\infty, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y > 0. \quad (4.1)$$

Хорошо известно, что если функция $u(t)$ непрерывна и ограничена на прямой, то функция $U(x, y)$ непрерывна в полуплоскости $x \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, и функция $u(x)$ служит для $U(x, y)$ функцией граничных значений, т.е. $U(x, 0) = u(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Пусть $0 < \beta < 1$. Определим пространство Λ_β следующим образом:

$$\Lambda_\beta = \{f : f \in L^\infty(\mathbb{R}), \|f(x+t) - f(x)\|_\infty \leq A|t|^\beta\}, \quad A = A(f) > 0.$$

Известно (см. [15; гл. 5, § 4]), что $\Lambda_\beta \subset C(\mathbb{R})$.

Интеграл Пуассона удобно рассматривать и как функцию комплексного переменного $z = x + iy$, т.е. наряду с $U(x, y)$ писать $U(x + iy) = U(z)$.

ЛЕММА 6. *Если $u \in \Lambda_\beta$, $0 < \beta < 1$, то $U(z)$ принадлежит классу $\operatorname{Lip} \beta$ в полуплоскости $y = \operatorname{Im} z \geq 0$, т.е.*

$$|U(z_1) - U(z_2)| \leq B|z_1 - z_2|^\beta, \quad \operatorname{Im} z_1, \operatorname{Im} z_2 \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать две оценки

$$|U(x, y_1) - U(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|^\beta \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad y_2 > y_1 \geq 0, \quad (4.2)$$

$$|U(x + \delta, y) - U(x, y)| \leq L\delta^\beta, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}_+, \quad \delta > 0. \quad (4.3)$$

Заметим, что функция

$$U(x + \delta, y) - U(x, y) \quad (4.4)$$

есть интеграл Пуассона от функции

$$u(t - \delta) - u(t).$$

После чего, применяя к функции (4.4) последовательно свойство (4.1) и условие $u \in \Lambda_\beta$, получаем оценку (4.3).

Для доказательства (4.2) воспользуемся следующим свойством (см. [15; гл. 5, § 4]): если $u \in \Lambda_\beta$, $0 < \beta < 1$, то

$$\left| \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \right| \leq Ay^{\beta-1} \quad \text{при } y > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Применяя его, получим

$$\begin{aligned} |U(x, y_2) - U(x, y_1)| &= \left| \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} dy \right| \\ &\leq A \int_{y_1}^{y_2} y^{\beta-1} dy \leq A \int_0^{y_2-y_1} y^{\beta-1} dy = C(y_2 - y_1)^\beta. \end{aligned}$$

А это и есть оценка (4.2). Лемма доказана.

Под преобразованием Фурье и обратным преобразованием Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ понимаем соответственно функции

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} f(x) dx, \quad t \in \mathbb{R},$$

а под преобразованием Фурье–Стилтьеса функции $\sigma(t) \in V(\mathbb{R})$ (т.е. функции ограниченной вариации на $\mathbb{R}$) понимаем функцию

$$\widehat{d\sigma}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} d\sigma(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

ЛЕММА 7. Пусть $h \in L^1(\mathbb{R})$, $\sigma \in V(\mathbb{R})$. Тогда

$$\widehat{h d\sigma} = \frac{1}{2\pi} h * \widehat{d\sigma}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\begin{aligned} \widehat{h d\sigma} &= \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} \widetilde{h}(t) d\sigma(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ixt} d\sigma(t) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iyt} h(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} h(y) dy \int_{\mathbb{R}} e^{-it(x-y)} d\sigma(t) = \frac{1}{2\pi} h * \widehat{d\sigma}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Изменение порядка интегрирования законно в силу абсолютной сходимости повторного интеграла:

$$\int_{\mathbb{R}} |d\sigma(t)| \int_{\mathbb{R}} |h(y)| dy \leq \|h\|_1 \cdot \text{var } \sigma.$$

Правая часть в (4.5) имеет смысл; как свертка интегрируемой и ограниченной функций она ограничена на прямой. Лемма доказана.

4.2. Критерий полноты. Как уже говорилось в § 1, условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{Re } \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} + \int_{\mathbb{R}} \frac{\log \text{dist}(iy, \Lambda)}{1 + y^2} dy = +\infty \quad (4.6)$$

необходимо для полноты системы $e(\Lambda)$ в пространствах $L^p(\mathbb{R}_+)$, $p > 2$, и $C_0[0, \infty)$. Оказывается, это условие является критерием полноты указанной системы в пространствах $C_{0,\alpha}$, $\alpha < 0$, и $L^{p,\alpha}$, $p \geq 1$, $\alpha < -1$, определенных в (3.15).

ТЕОРЕМА 5. 1) Условие (4.6) необходимо для полноты системы $e(\Lambda)$ в пространстве $C_{0,\alpha}$ и в пространстве $L^{p,\alpha}$, $p \geq 1$, при всех $\alpha \in \mathbb{R}$.

2) Условие (4.6) при $\alpha < 0$ достаточно для полноты системы $e(\Lambda)$ в пространстве $C_{0,\alpha}$, а при $\alpha < -1$ достаточно для полноты системы $e(\Lambda)$ в пространстве $L^{p,\alpha}$, $p \geq 1$.

3) Условие (4.6) необходимо и достаточно для полноты системы $e(\Lambda)$ в каждом из пространств

$$C_{0,\alpha}, \quad \alpha < 0, \quad L^{p,\alpha}, \quad p \geq 1, \quad \alpha < -1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо доказать лишь утверждения 1), 2).

1) По третьему вложению леммы 5 достаточно рассмотреть случай пространства $L^{p,\alpha}$. Но для этого пространства утверждение 1) есть частный случай следующей теоремы (см. [12; § 7]).

ТЕОРЕМА 6. Пусть вес $\Omega(t)$, $t > 0$, такой, что $\Omega(t)|_{(0,1)} \in \Omega_p$, и существует $r > 0$ такое, что

$$\frac{1}{\Omega(t)} = O(t^r), \quad t > 1,$$

кроме того,

$$e^{-at}\Omega(t)|_{(1,\infty)} \in L^1(1, \infty) \quad \forall a > 0.$$

Тогда условие (4.6) необходимо для полноты системы $e(\Lambda)$ в пространстве $L^p(\mathbb{R}_+, \Omega(t) dt)$, $1 \leq p < \infty$.

Действительно, вес $\Omega(t) = (1+t)^\alpha$ удовлетворяет условиям теоремы 6, и, значит, утверждение 1) верно.

2) Случай пространства $C_{0,\alpha}$. Надо доказать, что при $\alpha < 0$ условие (4.6) влечет полноту системы $e(\Lambda)$ в $C_{0,\alpha}$. В силу первого вложения леммы 5 достаточно считать, что $-1 < \alpha < 0$.

Предположим противное: при выполнении условия (4.6) система $e(\Lambda)$ неполна в $C_{0,\alpha}$, $-1 < \alpha < 0$.

Так как при $t \geq 0$ веса

$$(1+t)^\alpha, \quad (1+t^2)^{\alpha/2}$$

эквивалентны, то по лемме 4 и по формуле (2.8) найдется нетривиальная аналитическая функция вида

$$\Phi(z) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-zt} d\sigma(t)}{(1+t^2)^{-\alpha/2}}, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad \sigma \in V[0, \infty), \quad (4.7)$$

обращающаяся в нуль в точках Λ .

Функция $\Phi(z)$ ограничена в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, поэтому для ее нулей, в частности для точек λ_n , выполнено условие Бляшке (для полуплоскости)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1 + |\lambda_n|^2} < +\infty. \quad (4.8)$$

В теории бesselевых потенциалов (см. [15; гл. 5, § 3]) доказывается, что при $\beta > 0$ существует функция $G_\beta(x) \in L^1(\mathbb{R})$ такая, что

$$(1+t^2)^{-\beta/2} = 2\pi \widetilde{G}_\beta.$$

Но тогда формула (4.7) показывает (в силу непрерывности $\Phi(z)$ при $\operatorname{Re} z \geq 0$), что

$$\Phi(iy) = 2\pi \widehat{\widetilde{G}_\beta d\sigma}, \quad \beta = -\alpha > 0.$$

По лемме 7

$$\Phi(iy) = G_\beta * \widehat{d\sigma},$$

т.е. функция $\Phi(iy)$ есть бesselев потенциал порядка $\beta = -\alpha \in (0, 1)$ функции $d\sigma$. Так как $d\sigma \in L^\infty$, то (см. [15; гл. 5, пп. 6.16, 6.17]) $\Phi(iy) \in \Lambda_\beta$.

Функция $\Phi(z)$ представима интегралом Пуассона (для правой полуплоскости) от функции своих граничных значений, т.е.

$$\Phi(z) = \frac{x}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\Phi(it) dt}{x^2 + (y-t)^2}, \quad x = \operatorname{Re} z > 0, \quad y = \operatorname{Im} z \in \mathbb{R}.$$

По лемме 6 функция $\Phi(z)$ принадлежит классу $\operatorname{Lip} \beta$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geq 0$.

Теперь применим следующее хорошо известное свойство ограниченной аналитической функции в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log |\Phi(iy)|}{1+y^2} dy > -\infty.$$

Так как $\Phi(\lambda_n) = 0$, то это свойство может быть записано в виде

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log |\Phi(iy) - \Phi(\lambda_n)|}{1+y^2} dy \geq M > -\infty \quad \forall n,$$

где M от n не зависит. Но

$$|\Phi(iy) - \Phi(\lambda_n)| \leq K|iy - \lambda_n|^\beta \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad \lambda_n \in \Lambda,$$

в силу принадлежности $\Phi(z)$ классу $\text{Lip } \beta$. Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log |iy - \lambda_n|}{1 + y^2} dy \geq M_1 > -\infty.$$

Переходя здесь к нижней грани по $\lambda_n \in \Lambda$, получаем

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log \text{dist}(iy, \Lambda)}{1 + y^2} dy > -\infty,$$

или (что то же)

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log(1/\text{dist}(iy, \Lambda))}{1 + y^2} dy < +\infty.$$

Последнее вместе с (4.8) противоречит условию (4.6). Случай пространства $C_{0,\alpha}$ разобран.

Случай пространства $L^{p,\alpha}$. Пусть $\alpha < -1$. Тогда найдется близкое к нулю число $\beta < 0$ такое, что $\alpha < p\beta - 1$, и часть утверждения 2), относящаяся к пространству $L^{p,\alpha}$, следует из уже доказанной части, относящейся к пространству $C_{0,\beta}$, и из леммы 5.

Теорема 5 доказана.

По следствию 1 сфера действия теоремы 5 значительно расширяется.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть m, p, q те же, что в следствии 1, и пусть E_1 – какое-нибудь из пространств (3.13).

Тогда при замене пространств $L^{p,\alpha}$ и $C_{0,\alpha}$ на согласованные подпространства соответственно пространств

$$(E_1(0, 1), W_{p,(1+t)^\alpha}^m(1, \infty)), \quad (E_1(0, 1), C_{0,(1+t)^\alpha}^m[1, \infty))$$

утверждения теоремы 5 сохраняют силу.

4.3. О существенности ограничений на параметр α .

ТЕОРЕМА 7. Условие

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\log(1/\text{dist}(iy, \Lambda))}{1 + y^2} dy = +\infty, \tag{4.9}$$

а значит, и условие (4.6), не является достаточным для полноты системы $e(\Lambda)$ в каждом из следующих пространств:

$$\begin{aligned} L^{2,\alpha}, \quad \alpha \geq -1; \quad L^{p,\alpha}, \quad p > 2, \quad \alpha > -1; \\ C_{0,\alpha}, \quad \alpha > 0; \quad L^{p,\alpha}, \quad 1 \leq p < 2, \quad \alpha > -\frac{p}{2}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как доказали Г. Шапиро и А. Шилдс (см. [16]), если для точек z_n , $n \in \mathbb{N}$, единичного круга выполнено условие

$$\sum \frac{1}{-\log(1 - |z_n|)} < +\infty, \quad (4.10)$$

то z_n есть множество нулей суммы некоторого степенного ряда

$$S(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \quad (4.11)$$

такого, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 n < +\infty. \quad (4.12)$$

Фиксируем последовательность z_n , $0 < |z_n| < 1$, так, чтобы каждая точка окружности $|z| = 1$ была предельной для этой последовательности и чтобы выполнялось условие (4.10) (для этого достаточно, например, на окружности $|z| = 1 - \exp(-k^3)$ выбрать k точек с шагом $2\pi/k$ и затем взять их объединение по $k \in \mathbb{N}$).

Имея в виду коэффициенты c_n , соответствующие именно этому случаю, положим

$$\varphi(t) = \sqrt{1+t}, \quad 0 < t < 1; \quad \varphi(t) = c_n \sqrt{1+t}, \quad t \in (n, n+1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда (4.12) показывает, что функция $\varphi(t)$ принадлежит $L^2(\mathbb{R}_+)$ и, следовательно, в соответствии с формулой (2.3) задает нетривиальный функционал на пространстве $L^{2,-1}$. Преобразование Лапласа этого функционала по формуле (2.7) имеет вид

$$\Phi(w) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-wt} \frac{\varphi(t)}{\sqrt{1+t}} dt = \frac{1 - e^{-w}}{w} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-nw} \right), \quad \operatorname{Re} w > 0. \quad (4.13)$$

Обозначим через Λ последовательность нулей функции $\Phi(w)$. По лемме 1 система $e(\Lambda)$ неполна в пространстве $L^{2,-1}$. Остается показать, что выполнено условие (4.9).

Пусть (μ_n) , $n \in \mathbb{N}$, есть сужение Λ на полуполосу $\operatorname{Re} w > 0$, $0 \leq \operatorname{Im} w < 2\pi$. В силу (4.11) и (4.13)

$$\Phi(w) = \frac{1 - e^{-w}}{w} S(e^{-w}), \quad \operatorname{Re} w > 0, \quad 0 \leq \operatorname{Im} w < 2\pi.$$

Это означает, что

$$z_n = e^{-\mu_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(при подходящей нумерации последовательности μ_n). Из этой формулы и из того, что каждая точка окружности $|z| = 1$ является предельной для последовательности z_n , следует, что каждая точка отрезка $\operatorname{Re} w = 0$, $0 \leq \operatorname{Im} w < 2\pi$ является предельной для последовательности μ_n . Поэтому

$$\operatorname{dist}(iv, (\mu_n)) = \operatorname{dist}(iv, \Lambda) = 0, \quad 0 \leq v \leq 2\pi,$$

и условие (4.9) выполнено. Для случая пространства $L^{2,-1}$ теорема доказана.

Отсюда на основании леммы 5 следует справедливость теоремы для пространств

$$L^{p,\alpha}, \quad p \geq 2, \quad \alpha > -1, \quad C_{0,\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

Для рассмотрения недостающего случая $L^{p,\alpha}$, $1 \leq p < 2$, воспользуемся следующей теоремой из [11; § 10.5], относящейся к пространствам L_α^p (см. (3.15)).

Если система $e(\Lambda)$ неполна в $L_{\alpha_1}^{p_1}$, $p_1 \geq 1$, $\alpha_1 > -1$, то она неполна в L_α^p для всех p , α таких, что

$$1 \leq p \leq p_1, \quad \frac{\alpha}{p} \geq \frac{\alpha_1}{p_1}.$$

По следствию 2 эта теорема верна для пространств $L^{p,\alpha}$, и нам остается только, положив в ней $p_1 = 2$, $\alpha_1 > -1$, сослаться на доказанную часть теоремы 7, относящуюся к случаю $L^{2,\alpha}$.

§ 5. Недостаточность условия Саса для полноты в пространствах с растущим весом

Напомним, что условие (1.4) является достаточным для полноты системы $E(\Lambda)$ в пространствах L^p , $p \geq 2$, и C_0 . В связи с этим может представлять интерес

ТЕОРЕМА 8. Пусть вес $\Omega(t)$, $t \geq 0$, обладает свойством

$$0 < \Omega(t) \rightarrow +\infty, \quad t \rightarrow +\infty. \quad (5.1)$$

Тогда условие (1.4) не является достаточным для полноты системы $e(\Lambda)$ в каждом из пространств

$$L_\Omega^p(\mathbb{R}_+), \quad p \geq 2, \quad C_{0,\Omega}[0, \infty). \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам понадобится теорема Н. А. Давыдова (см. [17; гл. 2, § 13]), которую приведем в достаточном для наших целей упрощенном виде.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a(n) = \infty, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} (a(n))^{1/n} = 1. \quad (5.3)$$

Пусть n_k — такая последовательность натуральных чисел, что

$$a(n_{k+1}) > n_k \sum_{j=1}^k a(n_j), \quad a(n_j) > 1, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (5.4)$$

Тогда если

$$A(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a(n_k) z^{m_k}, \quad m_k = n_k[a(n_k)], \quad |z| < 1, \quad (5.5)$$

то найдется последовательность $0 < r_s \uparrow 1 - 0$, $s \rightarrow \infty$, такая, что

$$\lim_{r_s \rightarrow 1-0} A(r_s e^{i\theta}) = \infty$$

равномерно относительно $\theta \in [0, 2\pi]$.

Если $(z_n)_1^\infty$ – последовательность нулей функции $A(z)$, аналитической в круге $|z| < 1$, то для выполнения условия Бляшке

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty$$

необходима и достаточна ограниченность интеграла

$$\int_0^{2\pi} \log |A(re^{i\theta})| d\theta, \quad 0 < r < 1$$

(см., например, [18; гл. 9, § 3]). Отсюда и из теоремы 9 следует, что если выполнены ее условия, то для последовательности (z_n) нулей степенного ряда (5.5) условие Бляшке не имеет места. Это утверждение и лежит в основе доказательства теоремы 8.

Для любой функции Ω с условием (5.1) найдется возрастающая функция $0 < \omega(t) \uparrow \infty$, $t \rightarrow +\infty$, такая, что $\omega(t) \leq \Omega(t)$, $t \geq 0$. И так как неполнота системы $e(\Lambda)$ в $L_\omega^p(\mathbb{R}_+)$ (соответственно в $C_{0,\omega}[0, \infty)$) влечет ее неполноту в $L_\Omega^p(\mathbb{R}_+)$ (соответственно в $C_{0,\Omega}[0, \infty)$), то мы можем считать функцию $\Omega(t)$ монотонной и растущей к ∞ не слишком сильно в том смысле, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\Omega(t))^{1/t} = 1. \quad (5.6)$$

Нам надо построить нетривиальный функционал φ на пространстве (5.2), аннулирующий систему $e(\Lambda)$ и такой, что для последовательности (λ_n) нулей преобразования Лапласа $\Phi(w)$ этого функционала выполняется условие (1.4).

а) *Случай пространства $L_\Omega^p(\mathbb{R}_+)$, $p \geq 2$.*

Фиксируем $\gamma \in (0, 1/p)$, а затем положим

$$a_n = \Omega^\gamma(n), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (5.7)$$

Тогда в силу (5.6) для a_n верны условия (5.3). Теперь выберем последовательность натуральных чисел n_k так, чтобы одновременно выполнялись условие (5.4) и условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Omega^{p'(1/p-\gamma)}(n_k)} < \infty \quad (5.8)$$

(здесь существенно условие (5.1)).

Сохраняя за m_k обозначение из (5.5), зададим функцию $\varphi(t)$ следующим образом:

$$\Omega^{1/p} \varphi(t) = a(n_k), \quad t \in I_k = (m_k, m_k + 1); \quad \varphi(t) = 0, \quad t \notin \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k. \quad (5.9)$$

Тогда $\varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}_+)$. Действительно,

$$\|\varphi\|_{p'}^{p'} = \sum_{k=1}^{\infty} a^{p'}(n_k) \int_{m_k}^{m_k+1} \Omega^{-p'/p}(t) dt \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Omega^{p'(1/p-\gamma)}(n_k)} < \infty$$

в силу монотонности Ω и условия (5.8).

Используя формулу (2.7) при $m = 0$, получаем, что функция

$$\begin{aligned}\Phi(w) &= \int_0^\infty e^{-wt} \Omega^{1/p}(t) \varphi(t) dt = \sum_{k=1}^\infty a(n_k) \int_{m_k}^{m_k+1} e^{-wt} dt \\ &= \frac{1 - e^{-w}}{w} \sum_{k=1}^\infty a(n_k) e^{-wm_k}, \quad \operatorname{Re} w > 0,\end{aligned}\quad (5.10)$$

есть преобразование Лапласа нетривиального функционала на пространстве $L_\Omega^p(\mathbb{R}_+)$.

Обозначим через $\Lambda = (\lambda_n)$ последовательность нулей функции $\Phi(w)$, или, что то же, последовательность нулей ряда Дирихле в правой части (5.10). По лемме 1 система $e(\Lambda)$ неполна в $L_\Omega^p(\mathbb{R}_+)$.

Покажем, что для последовательности Λ выполнено условие (1.4). Достаточно убедиться, что

$$\sum (\operatorname{Re} \lambda_n : 0 < \operatorname{Re} \lambda_n < 1, 0 < \operatorname{Im} \lambda_n \leq 2\pi) = \infty. \quad (5.11)$$

Рассмотрим отображение $z = e^{-w}$ прямоугольника

$$0 < \operatorname{Re} w < 1, \quad 0 < \operatorname{Im} w \leq 2\pi \quad (5.12)$$

на кольцо $1/e < |z| < 1$. Так как $m_k \in \mathbb{N}$, то образом ряда Дирихле из (5.10) будет степенной ряд

$$\sum_{k=1}^\infty a(n_k) z^{m_k}.$$

Но это не что иное, как функция $A(z)$ из теоремы 9. Условия этой теоремы по построению выполнены. Значит, для последовательности (z_n) ее нулей выполнено условие

$$\sum (1 - |z_n|) = \infty. \quad (5.13)$$

Так как в круге $|z| \leq 1/e$ находится конечное число нулей (z_n) , то (5.13) верно и для тех точек z_n , которые лежат в кольце $1/e < |z| < 1$. Но эти точки суть образы тех нулей λ_n функции $\Phi(w)$, которые расположены в прямоугольнике (5.12), т.е.

$$z_n = e^{-\lambda_n}, \quad 0 < \operatorname{Re} \lambda_n < 1, \quad 0 < \operatorname{Im} \lambda_n \leq 2\pi.$$

Следовательно, условие (5.13) переходит в условие

$$\sum (1 - e^{-\operatorname{Re} \lambda_n} : 0 < \operatorname{Re} \lambda_n < 1, 0 < \operatorname{Im} \lambda_n \leq 2\pi) = \infty,$$

очевидно, равносильное условию (5.11).

Случай пространства $L_\Omega^p(\mathbb{R}_+)$, $p \geq 2$, разобран.

б) *Случай пространства $C_{0,\Omega}[0, \infty)$.*

Зададим последовательность a_n формулой (5.7) с $\gamma = 1/2$. Тогда для a_n верны условия (5.3). Выберем последовательность n_k , $k \in \mathbb{N}$, так, чтобы одновременно выполнялись условие (5.4) и условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Omega^{1/2}(n_k)} < \infty. \quad (5.14)$$

Число m_k определим так же, как в (5.5), а функцию φ – формулами (5.9) с $p = 1$. Тогда $\varphi \in L^1(\mathbb{R}_+)$. Действительно, в силу монотонности Ω и условия (5.14)

$$\|\varphi\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a(n_k) \int_{m_k}^{m_k+1} \frac{1}{\Omega(t)} dt < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Omega^{1/2}(n_k)} < \infty.$$

Значит, функция $\Phi(w)$, фигурирующая в (5.10) с $p = 1$, есть преобразование Лапласа функционала на пространстве $C_{0,\Omega}[0, \infty)$. Теперь повтор рассуждений, следующих за формулой (5.10), дает доказательство теоремы и в случае б).

Теорема 8 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Доказательство случая а) верно для всех $p > 1$. Но в формулировку включен только случай $p \geq 2$, так как при $1 \leq p < 2$ (в отличие от $p \geq 2$) верно более сильное утверждение (см. § 1): условие (1.4) недостаточно для полноты системы $e(\Lambda)$ в невесовом пространстве $L^p(\mathbb{R}_+)$.

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания, способствовавшие формированию адекватной терминологии и связанных с ней обозначений.

Список литературы

- [1] Ch. H. Müntz, “Über den Approximationssatz Weierstrass”, *Schwartz Festschrift*, Berlin, 1914, 303–312.
- [2] O. Szász, “Über die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen”, *Math. Ann.*, **77**:4 (1916), 482–496.
- [3] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, 2-е изд., Наука., М., 1965; англ. пер. 1-го изд.: N. I. Achieser, *Theory of approximation*, Ungar Publ., New York, 1956.
- [4] L. Schwartz, *Étude des sommes d'exponentielles*, Hermann, Paris, 1959.
- [5] M. M. Grum, “On the theorems of Müntz and Szász”, *J. London Math. Soc.*, **31** (1956), 433–437.
- [6] M. M. Grum, “Corrigendum and Addendum: On the theorems of Müntz and Szász”, *J. London Math. Soc.*, **32** (1957), 512.
- [7] A. R. Siegel, “On the Müntz–Szász theorem for $C[0, 1]$ ”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **36**:1 (1972), 161–166.
- [8] N. Levinson, “On the Szász–Müntz theorem”, *J. Math. Anal. Appl.*, **48**:1 (1974), 264–269.
- [9] А. М. Седлецкий, “К проблеме Мюнца–Саса для пространства $C[0, 1]$ ”, *Тр. МЭИ*, 1975, 89–98.
- [10] В. И. Ладыгин, “О проблеме Мюнца–Саса”, *Матем. заметки*, **23**:1 (1978), 91–103; англ. пер.: V. I. Ladygin, “The Müntz–Szász problem”, *Math. Notes*, **23**:1 (1978), 51–58.

- [11] А. М. Седлецкий, *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации*, Физматлит, М., 2005.
- [12] А. М. Седлецкий, “Аппроксимация типа Мюнца–Саса в прямых произведениях пространств”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **70**:5 (2006), 179–198; англ. пер.: A. M. Sedletskii, “Müntz–Szász type approximation in direct products of spaces”, *Izv. Math.*, **70**:5 (2006), 1031–1050.
- [13] М. Ш. Бирман, Н. Я. Виленкин, Е. А. Горин и др., *Функциональный анализ*, 2-е изд., ред. С. Г. Крейн, Наука, М., 1972; англ. пер. 1-го изд.: G. F. Votruba, L. F. Boron (eds.), *Functional analysis*, Wolters-Noordhoff Publ., Groningen, 1972.
- [14] Б. Н. Хабибуллин, “Полнота систем экспонент в пространствах функций на луче”, *Уфимск. матем. журн.*, **1**:1 (2009), 77–83.
- [15] И. М. Стейн, *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973; пер. с англ.: E. M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Math. Ser., **30**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.
- [16] H. S. Shapiro, A. L. Shields, “On the zeros of functions with finite Dirichlet integral and some related function spaces”, *Math. Z.*, **80**:1 (1962), 217–229.
- [17] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, ГИТТЛ, М.–Л., 1950.
- [18] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966; англ. пер.: G. M. Goluzin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Transl. Math. Monogr., **26**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.

А. М. Седлецкий (A. M. Sedletskii)

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

им. М. В. Ломоносова

E-mail: sedlet@mail.ru

Поступила в редакцию

26.11.2012 и 18.02.2013