Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Аухадиев, С. А. Григорян, Е. В. Липачева, Операторный подход к квантованию полугрупп, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 3, 15–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8199>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 09:47:58

УДК 517.98+512.667.7+517.98:530.145.6

М. А. Аухадиев, С. А. Григорян, Е. В. Липачева

Операторный подход к квантованию полугрупп

Работа посвящена построению компактных квантовых полугрупп по полугрупповым C^* -алгебрам, порожденным “деформацией” алгебр непрерывных функций на компактных абелевых группах. Двойственное пространство к такой C^* -алгебре наделяется структурой банаховой $*$ -алгебры, содержащей алгебру мер на компактной группе. Строится слабая $*$ -алгебра Хопфа, плотная в такой компактной квантовой полугруппе. Показано существование инъективного функтора из построенной категории компактных квантовых полугрупп в категорию абелевых полугрупп.

Библиография: 25 названий.

Ключевые слова: C^* -алгебра, компактная квантовая полугруппа, функционал Хаара, алгебра Тёплица, изометрическое представление.

DOI: 10.4213/sm8199

Введение

Существуют два подхода к квантованию, которые различаются между собой, алгебраический и топологический. Первый из них заключается в деформировании универсальных обертывающих алгебр. Этот подход начался с работы В. Г. Дринфелда [1]. Теория компактных квантовых групп и полугрупп как деформации алгебры непрерывных функций на группе относится ко второму, более позднему подходу, начавшемуся с работы С. Л. Вороновича [2]. В работе [3] показано, что два этих подхода эквивалентны. Итак, продемонстрируем процесс квантования в рамках теории компактных квантовых полугрупп.

Пусть P – компактная полугруппа, т.е. хаусдорфово компактное пространство с непрерывной ассоциативной операцией $(x, y) \rightarrow xy$. Обозначим через $C(P)$ алгебру непрерывных функций на P . Тогда $C(P)$ – это коммутативная унитарная C^* -алгебра, в которой содержится вся топологическая информация о пространстве P . отождествим $C(P \times P)$ и $C(P) \otimes C(P)$. Здесь и далее в статье $\otimes$ обозначает минимальное C^* -тензорное произведение (см. [4]). Определим отображение $\Delta: C(P) \rightarrow C(P) \otimes C(P)$:

$$\Delta(f)(x, y) = f(xy).$$

Очевидно, что Δ – непрерывный, унитарный $*$ -гомоморфизм. Ассоциативность умножения в P выражается в следующем условии для Δ , которое называется *коассоциативностью*:

$$(\Delta \otimes \text{id})\Delta = (\text{id} \otimes \Delta)\Delta.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 12-01-97016р-поволжье_а и № 14-01-31358мол_а).

Таким образом, вся информация о компактной полугруппе P зашифрована в паре $(C(P), \Delta)$.

Теперь, наоборот, пусть $\mathcal{A}$ – некоторая коммутативная унитарная C^* -алгебра. Тогда по теореме Гельфанда $\mathcal{A}$ изоморфна алгебре непрерывных функций $C(P)$ на некотором компактном хаусдорфовом пространстве P . Если на $\mathcal{A}$ задан $*$ -гомоморфизм $\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, удовлетворяющий условию коассоциативности, то равенство $f(xy) = \Delta(f)(x, y)$ задает на P структуру полугруппы.

С точки зрения математики квантование – это переход от коммутативной алгебры $C(P)$ к некоммутативной унитарной C^* -алгебре $\mathcal{A}$. Из-за некоммутативности эта алгебра уже не соответствует никакой полугруппе. Однако алгебру $\mathcal{A}$ можно рассматривать как алгебру непрерывных функций на некотором воображаемом компактном геометрическом объекте. Этот объект называется *квантовым пространством*. Говоря другими словами, квантовое пространство – это объект категории, двойственной к категории унитарных C^* -алгебр, что показано в работе [5]. В литературе квантовое пространство, соответствующее C^* -алгебре $\mathcal{A}$, обозначается $\mathcal{QS}(\mathcal{A})$.

Унитарный $*$ -гомоморфизм $\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, удовлетворяющий условию коассоциативности, называется *копроизведением*. По аналогии с классическим случаем Δ превращает квантовое пространство $\mathcal{QS}(\mathcal{A})$ в квантовую полугруппу. Тогда алгебра $\mathcal{A}$ с заданным на ней копроизведением является *алгеброй функций на квантовой полугруппе*. Пару $(\mathcal{A}, \Delta)$ принято называть *компактной квантовой полугруппой* (см. [6]).

Компактная квантовая полугруппа $(\mathcal{A}, \Delta)$ называется *кокоммутативной*, если $\sigma\Delta = \Delta$, где $\sigma: \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ – переставляющее отображение: $\sigma(a \otimes b) = b \otimes a$.

Напомним, что согласно определению С. Л. Вороновича (см. [7]) компактная квантовая полугруппа $(\mathcal{A}, \Delta)$ является компактной квантовой группой, если каждое из множеств

$$(I \otimes \mathcal{A})\Delta(\mathcal{A}), \quad (\mathcal{A} \otimes I)\Delta(\mathcal{A}),$$

где I – единица алгебры $\mathcal{A}$, является линейно плотным в $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. В классическом случае, когда $\mathcal{A}$ коммутативна, $(\mathcal{A}, \Delta)$ при этом условии соответствует обычной группе и условие плотности вышеуказанных множеств соответствует обратимости элементов в P .

Теории компактных квантовых групп посвящено большое количество статей (см., например, [6]–[10]). Большинство из нетривиальных примеров, продемонстрированных в этих работах, построены по следующему принципу. На классической группе (например, $SU(2)$) рассматривается алгебра полиномов, в которой затем деформируется коммутационное соотношение с помощью параметра q , на ней задается структура $*$ -алгебры Хопфа (см. [11]). Далее алгебра пополняется по универсальной C^* -норме. Затем доказывается, что копроизведение продолжается с алгебры полиномов на полученную C^* -алгебру и превращает эту алгебру в компактную квантовую группу.

С другой стороны, вопрос о задании структуры компактной квантовой группы по конкретной C^* -алгебре остается открытым. Эта проблема не решена даже для алгебры Тёплица.

Работ, посвященных компактным квантовым полугруппам, не так уж много. Задача построения нетривиальной структуры компактной квантовой полугруппы на конкретной C^* -алгебре стала активно изучаться лишь в последние годы. К примеру, в работе [12] приводится определение копроизведения на прямой сумме алгебр Кунца.

Настоящая работа посвящена построению компактных квантовых полугрупп по полугрупповым C^* -алгебрам, порожденным “деформацией” представлений коммутативной C^* -алгебры непрерывных функций на компактной абелевой группе G мультипликаторами на $L^2(G)$. Такие алгебры образуют класс некоммутативных C^* -алгебр, близких по своим характеристикам к алгебре $C(G)$.

Статья построена следующим образом: §1–§4 посвящены описанию свойств C^* -алгебры $C_{\text{red}}^*(S)$; §5–§11 посвящены построению и исследованию компактной квантовой полугруппы по C^* -алгебре $C_{\text{red}}^*(S)$. (Краткое сообщение по настоящей статье доступно по ссылке [13].)

Основные утверждения настоящей статьи докладывались одним из авторов на конференциях “Некоммутативная геометрия и квантовые группы” в г. Осло в июне 2012 г. и “Операторная теория” в г. Тимишоара в июле 2012 г., а также на семинаре А. Я. Хелемского в МГУ 2 ноября 2012 г.

§ 1. Необходимые сведения

Пусть S – аддитивная абелева полугруппа с сокращением, содержащая нейтральный элемент, Γ – группа Гротендика, порожденная полугруппой S . Формально это можно записать следующим образом:

$$\Gamma = \{a - b \mid a, b \in S\}.$$

На S введем квазипорядок: $a \prec b$, если $b = a + c$, где $c \in S$. Этот квазипорядок называется *естественным*.

Квазипорядок называется *порядком*, если из условий $a \prec b$ и $b \prec a$ следует $a = b$. Квазипорядок является порядком тогда и только тогда, когда S не содержит группы, отличную от тривиальной. Далее везде предполагаем, что это условие выполнено.

Говорят, что порядок на S является *линейным*, если для любых двух элементов a и b справедливо $a \prec b$ либо $b \prec a$. Если естественный порядок на S является линейным, то $\Gamma = S \cup (-S)$, где $-S$ – множество элементов, противоположных к элементам S , и $S \cap (-S) = \{0\}$. Полугруппа с линейным порядком называется *упорядоченной* полугруппой.

Пусть $B(H)$ – алгебра ограниченных линейных операторов на гильбертовом пространстве H . Оператор T называется *изометрическим*, если $T^*T = I$ – тождественный на H оператор. Изометрический оператор называется *унитарным*, если дополнительно выполняется $TT^* = I$. Будем обозначать полугруппу изометрических операторов через $\text{Is}(H)$.

Полугрупповой гомоморфизм $\pi: S \rightarrow \text{Is}(H_\pi)$ называется *изометрическим представлением* полугруппы S , где H_π – гильбертово пространство. Везде в дальнейшем образ элемента a в $\text{Is}(H_\pi)$ будем обозначать через $T_\pi(a)$. Пусть $C_\pi^*(S)$ – замкнутая в операторной норме C^* -подалгебра алгебры $B(H_\pi)$, порожденная операторами $T_\pi(a)$ и сопряженными к ним $T_\pi(a)^*$.

Говорят, что два представления $\pi_1: S \rightarrow \text{Is}(H_{\pi_1})$ и $\pi_2: S \rightarrow \text{Is}(H_{\pi_2})$ порождают *канонически изоморфные* C^* -алгебры, если существует такой $*$ -изоморфизм $\tau: C_{\pi_1}^*(S) \rightarrow C_{\pi_2}^*(S)$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\pi_1} & C_{\pi_1}^*(S) \\ & \searrow \tau & \uparrow \pi_2 \\ & & C_{\pi_2}^*(S) \end{array} \quad (1.1)$$

коммутативна.

В работе [14] Л. А. Кобурн доказал, что все неунитарные изометрические представления полугруппы $\mathbb{Z}_+$ порождают канонически изоморфные C^* -алгебры. Позднее Р. Г. Дуглас в работе [15] и Г. Дж. Мерфи в [16] обобщили этот результат на все упорядоченные полугруппы. М. А. Аухадиев и В. Х. Тепоян в работе [17] доказали, что если все неунитарные изометрические представления полугруппы S порождают канонически изоморфные C^* -алгебры, то естественный порядок на полугруппе S является линейным порядком. Таким образом, условие упорядоченности полугруппы S является необходимым и достаточным условием, чтобы любые два неунитарных изометрических представления полугруппы S порождали канонически изоморфные C^* -алгебры.

Операторы вида $T_\pi(a)$ и $T_\pi(a)^*$ будем называть *элементарными мономами*, а конечное произведение элементарных мономов – *мономом*. Множество всех мономов образует полугруппу, которую мы обозначим S_π^* .

Из работ [15]–[17] вытекает, что свойство упорядоченности полугруппы S является необходимым и достаточным условием, чтобы любые два неунитарных изометрических представления π_1 и π_2 полугруппы S порождали $*$ -изоморфные полугруппы $S_{\pi_1}^*$ и $S_{\pi_2}^*$.

Представление $\pi: S \rightarrow \text{Is}(H_\pi)$ называется *инверсным представлением* полугруппы S , если S_π^* – инверсная полугруппа относительно $*$ -операции. Напомним, полугруппа называется *инверсной* (или *обобщенной группой* по Вагнеру), если с каждым элементом x она содержит единственный элемент x^* , называемый *инверсным* (обобщенно-обратным) к x , т.е. такой, что

$$xx^*x = x, \quad x^*xx^* = x^*.$$

Рассмотрим гильбертово пространство

$$l^2(S) = \left\{ f: S \rightarrow \mathbb{C} \mid \sum_{a \in S} |f(a)|^2 < \infty \right\}$$

со скалярным произведением

$$(f, g) = \sum_{a \in S} f(a) \overline{g(a)}.$$

Семейство функций $\{e_a\}_{a \in S}$, $e_a(b) = \delta_{a,b}$, образует ортонормированный базис в $l^2(S)$. Отображение $a \rightarrow T_a$, $T_a e_b = e_{a+b}$, есть изометрическое представление полугруппы S , которое называется *регулярным представлением*.

C^* -алгебра, порожденная операторами T_a и T_a^* , обозначается $C_{\text{red}}^*(S)$ и называется *приведенной полугрупповой C^* -алгеброй полугруппы S* . Полугруппу мономов, порожденную этим представлением, обозначим S_{red}^* .

В работе [18] показано, что каждое регулярное представление является инверсным. Таким образом, среди представлений полугруппы S существует по крайней мере одно инверсное представление.

§ 2. Алгебра $C_{\text{red}}^*(S)$

В этом параграфе рассмотрим некоторые свойства приведенной полугрупповой алгебры $C_{\text{red}}^*(S)$.

Начнем с леммы, которая справедлива не только для регулярного представления. Полугруппа S относительно естественного порядка является *направленным множеством*, т.е. для любых a и b из S найдется c такое, что $a \prec c$ и $b \prec c$, для чего достаточно взять $c = a + b$.

ЛЕММА 1. Пусть V – моном из S_{red}^* , где $\pi: S \rightarrow \text{Is}(H_\pi)$ – изометрическое представление. Тогда найдутся такие элементы a и b в S , что

$$\lim_{c \in S} T_\pi(c)^* V T_\pi(c) = T_\pi(a)^* T_\pi(b),$$

где $\lim$ – предел по направлению S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в представлении монома V в виде произведения элементарных мономов участвуют $\{T_\pi(a_i)^*\}_{i=1}^n$ и $\{T_\pi(b_j)\}_{j=1}^m$. Положим $c = a + b$, где $a = \sum_{i=1}^n a_i$, $b = \sum_{j=1}^m b_j$. Тогда из равенства $T_\pi(d)^* T_\pi(d) = I$ получаем

$$T_\pi(c)^* V T_\pi(c) = T_\pi(a)^* T_\pi(b).$$

Пусть теперь $c \prec d$, т.е. $d = c + k$ при некотором $k \in S$. Тогда

$$\begin{aligned} T_\pi(d)^* V T_\pi(d) &= T_\pi(k)^* (T_\pi(c)^* V T_\pi(c)) T_\pi(k) \\ &= T_\pi(k)^* T_\pi(a)^* T_\pi(b) T_\pi(k) = T_\pi(a)^* T_\pi(b). \end{aligned}$$

Отсюда получаем необходимое равенство.

Используя этот результат, введем следующее понятие. В условиях леммы 1 индексом монома V будем называть элемент $b - a$ группы Γ и будем писать $\text{ind } V = b - a$. Такое определение индекса совпадает с термином индекса для регулярного представления, введенного в работе [19]. Следующее утверждение немедленно следует из леммы 1.

ЛЕММА 2. Справедливо равенство

$$\text{ind}(V_1 \cdot V_2) = \text{ind } V_1 + \text{ind } V_2.$$

Следующая лемма справедлива уже для регулярного представления.

ЛЕММА 3. Пусть $\text{ind } V = a - b$ для монома V из S_{red}^* . Тогда либо $Ve_d = e_{d+(a-b)}$, либо $Ve_d = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $T_a e_b = e_{a+b}$, а $T_a^* e_b = e_{b-a}$, если $a \prec b$, и $T_a^* e_b = 0$ в противном случае, имеем

$$\text{если } Ve_d \neq 0, \quad \text{то } T_c^* V T_c e_d = Ve_d.$$

Переходя к пределу по сети S , получим $T_a^* T_b e_d = Ve_d$. Отсюда $Ve_d = e_{d+a-b}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что из леммы 3 следует, что мономы индекса 0 являются проекторами, собственными векторами которых являются элементы базиса e_a , $a \in S$. Поэтому S_{red}^* – инверсная полугруппа относительно инволюции.

Обозначим через $\mathfrak{A}_c$ замкнутое линейное пространство в $C_{\text{red}}^*(S)$, порожденное линейными комбинациями мономов индекса c .

ЛЕММА 4. Справедливы следующие утверждения:

- 1) $\mathfrak{A}_c \cdot \mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{c+b}$;
- 2) $\mathfrak{A}_0$ – коммутативная C^* -алгебра;
- 3) для любого $c = a - b$ справедливо $\mathfrak{A}_c = T_b^* \mathfrak{A}_0 T_a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть V и W – мономы с индексами c и b соответственно. Тогда $\text{ind}(V \cdot W) = c + b$. Следовательно, $V \cdot W$ из $\mathfrak{A}_{c+b}$.

2) Для любого монома $V \in \mathfrak{A}_0$ имеем: если $Ve_a \neq 0$, то $Ve_a = e_a$. Это значит, что все $V \in \mathfrak{A}_0$ диагонализуются относительно ортонормированного базиса $\{e_a\}_{a \in S}$. Следовательно, $\mathfrak{A}_0$ – коммутативная C^* -алгебра.

3) Пусть V – моном из $\mathfrak{A}_c$. Тогда

$$V = T_b^* T_b V T_a^* T_a.$$

Поэтому

$$c = \text{ind } V = \text{ind } T_b^* + \text{ind}(T_b V T_a^*) + \text{ind } T_a = a - b + \text{ind } T_b V T_a^*.$$

Следовательно, $T_b V T_a^* \in \mathfrak{A}_0$.

Обозначим через $P_a: l^2(S) \rightarrow l^2(S)$ ортопроектор на пространство $\mathbb{C}e_a$, $P_a f = (f, e_a)e_a$. Определим отображение $Q: B(l^2(S)) \rightarrow B(l^2(S))$ следующим образом:

$$Q(A) = \bigoplus_{a \in S} P_a A P_a,$$

где $A \in B(l^2(S))$.

Условным математическим ожиданием называется положительное, сохраняющее единицу отображение Φ C^* -алгебры $\mathfrak{A}$ на ее подалгебру $\mathfrak{B}$ такое, что $\Phi(B_1 A B_2) = B_1 \Phi(A) B_2$ для любых $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ и $A \in \mathfrak{A}$.

ЛЕММА 5. Сужение Q на $C_{\text{red}}^*(S)$ есть условное математическое ожидание из $C_{\text{red}}^*(S)$ на $\mathfrak{A}_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как e_a , $a \in S$, являются собственными векторами любого монома индекса 0, то мы имеем

$$Q(V) = V, \quad \text{если} \quad \text{ind } V = 0.$$

Пусть $\text{ind } V = c$. Тогда согласно лемме 3 $\text{ind } P_a V P_a = 0$ для любого $a \in S$. Отсюда $\text{ind } Q(V) = 0$. Таким образом, $Q(C_{\text{red}}^*(S)) = \mathfrak{A}_0$. Очевидно, Q является условным математическим ожиданием.

Пусть c – фиксированный элемент группы Γ и $Q_c: B(l^2(S)) \rightarrow B(l^2(S))$ – линейное отображение, заданное следующим равенством:

$$Q_c(A) = \bigoplus_{a \in S} P_{a+c} A P_a.$$

Здесь $P_{a+c} = 0$, если $a + c$ не принадлежит полугруппе S .

ЛЕММА 6. Оператор Q_c отображает алгебру $C_{\text{red}}^*(S)$ на пространство $\mathfrak{A}_c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V – моном индекса c . Тогда $V P_a = P_{a+c} V$ для любого $a \in S$. Отсюда $Q_c(V) = V$. Если же $\text{ind } V \neq c$, то $Q_c(V) = 0$. Поэтому $Q_c(C_{\text{red}}^*(S)) = \mathfrak{A}_c$.

ЛЕММА 7. Следующие условия эквивалентны:

- 1) $A = 0$;
- 2) $Q_c(A) = 0$ для всех $c \in \Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия $Q_c(A) = 0$ следует, что $P_a A P_b = 0$ для любых $a, b \in S$. Это равносильно условию $(A e_b, e_a) = 0$ для любых a и b из S . Поскольку семейство $\{e_a\}_{a \in S}$ образует ортонормированный базис в $l^2(S)$, получим $A = 0$. Обратное следует из леммы 6.

Для каждого A из $C_{\text{red}}^*(S)$ элемент $Q_c(A)$ назовем c -м коэффициентом элемента A ; будем обозначать его A_c . Следующее утверждение немедленно следует из приведенных лемм.

ТЕОРЕМА 1. C^* -алгебра $C_{\text{red}}^*(S)$ является градуированной C^* -алгеброй и формально представляется в виде ряда:

$$C_{\text{red}}^*(S) = \bigoplus_{c \in \Gamma} \mathfrak{A}_c,$$

и, кроме того,

$$\mathfrak{A}_c = T_a^* \mathfrak{A}_0 T_b, \quad \text{если} \quad c = b - a, \quad b, a \in S.$$

§ 3. Динамическая система, порожденная регулярным представлением

Пусть G – компактная абелева группа, группа характеров которой изоморфна аддитивной группе Γ . Для каждого $a \in \Gamma$ пусть χ^a – соответствующий характер.

Пространство $C(G, C_{\text{red}}^*(S))$ всех непрерывных функций на группе G со значениями в $C_{\text{red}}^*(S)$ является C^* -алгеброй относительно поточечного умножения, поточечной инволюции и с равномерной нормой:

$$f^*(\alpha) = (f(\alpha))^*, \quad \|f\|_\infty = \sup_{\alpha \in G} \|f(\alpha)\|, \quad f \in C(G, C_{\text{red}}^*(S)).$$

Обобщенным полиномом в $C(G, C_{\text{red}}^*(S))$ назовем функцию вида

$$P = \sum_{i=1}^n \chi^{a_i} A_{a_i},$$

где $A_{a_i} \in C_{\text{red}}^*(S)$, $a_i \in \Gamma$. Множество обобщенных полиномов $P(G, C_{\text{red}}^*(S))$ образует всюду плотную инволютивную подалгебру алгебры $C(G, C_{\text{red}}^*(S))$. Очевидно, A_{a_i} -й коэффициент полинома P определяется с помощью интеграла:

$$A_{a_i} = \int_G \chi^{-a_i}(\alpha) P(\alpha) d\mu(\alpha),$$

где $\alpha \in G$, μ – нормированная мера Хаара группы G .

Если $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ – фундаментальная последовательность обобщенных полиномов, сходящаяся к некоторому элементу $f \in C(G, C_{\text{red}}^*(S))$, то для любого $a \in \Gamma$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_G P_n(\alpha) \chi^{-a}(\alpha) d\mu(\alpha),$$

равный a -му коэффициенту f , который будем обозначать

$$A_a = \int_G \chi^{-a}(\alpha) f(\alpha) d\mu(\alpha).$$

Таким образом, каждая функция $f \in C(G, C_{\text{red}}^*(S))$ однозначно раскладывается в формальный ряд Фурье:

$$f \simeq \sum_{a \in \Gamma} \chi^a A_a,$$

с коэффициентами Фурье A_a . Множество тех $a \in \Gamma$, для которых $A_a \neq 0$, будем обозначать через $\text{sp}(f)$ и называть *спектром преобразования Фурье* функции f или просто *спектром* функции f .

Обозначим через $C^*(G, S)$ C^* -подалгебру алгебры $C(G, C_{\text{red}}^*(S))$, порожденную функциями

$$\widehat{T}_a = \chi^a T_a, \quad \widehat{T}_a^* = \chi^{-a} T_a^*$$

для всех $a \in S$.

ЛЕММА 8. Каждая функция $f \in C^*(G, S)$ раскладывается в формальный ряд:

$$f \simeq \sum_{a \in \Gamma} \chi^a A_a,$$

где A_a принадлежит пространству $\mathfrak{A}_a$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конечное произведение $\widehat{V}$ функций $\widehat{T}_a$ и $\widehat{T}_b^*$, $a, b \in S$, можно представить в виде

$$\widehat{V} = \chi^c V,$$

где V – моном из S_{red}^* , а $c = \text{ind } V$. Поэтому любой обобщенный полином P из $P(G, S) = P(G, C_{\text{red}}^*(S)) \cap C^*(G, S)$ раскладывается в ряд:

$$P = \sum_{i=1}^n \chi^{a_i} A_{a_i},$$

где $A_{a_i} \in \mathfrak{A}_{a_i}$.

ТЕОРЕМА 2. Существует $*$ -изоморфизм между алгебрами $C^*(G, S)$ и $C_{\text{red}}^*(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть e – единичный элемент группы G . Определим отображение $\widehat{e}: C^*(G, S) \rightarrow C_{\text{red}}^*(S)$, полагая $\widehat{e}(f) = f(e)$. Очевидно, $\widehat{e}$ – сюръективный $*$ -гомоморфизм. Покажем, что $\widehat{e}$ – $*$ -изоморфизм. Пусть $f \in \text{Ker } \widehat{e}$. Тогда

$$f \simeq \sum_{a \in \Gamma} \chi^a A_a,$$

где $A_a \in \mathfrak{A}_a$. Так как $f \in \text{Ker } \widehat{e}$, то $f(e) = 0$. С другой стороны, $f(e) = \bigoplus_{a \in \Gamma} A_a$. Применяя лемму 7, получим $A_a = 0$ для всех $a \in \Gamma$. Поэтому $f = 0$.

Отображение сдвига

$$\widehat{\alpha}: C(G, C_{\text{red}}^*(S)) \rightarrow C(G, C_{\text{red}}^*(S)), \quad \widehat{\alpha}(f) = f_\alpha,$$

где $f_\alpha(\beta) = f(\alpha\beta)$, является $*$ -автоморфизмом на алгебре $C(G, C^*(S))$ для всех $\alpha \in G$. Поэтому можно определить представление $\widehat{\tau}: G \rightarrow \text{Aut}(C(G, C_{\text{red}}^*(S)))$ группы G в группу $*$ -автоморфизмов C^* -алгебры $C(G, C_{\text{red}}^*(S))$ следующим образом: $\widehat{\tau}(\alpha) = \widehat{\alpha}$, $\alpha \in G$. Поскольку алгебра $P(G, S)$ инвариантна относительно сдвигов элементами группы G , то и ее пополнение – алгебра $C^*(G, S)$ – также инвариантна относительно сдвигов элементами группы G . Поэтому представление $\widehat{\tau}$ также является представлением группы G в группу $\text{Aut}(C^*(G, S))$. При этом $\widehat{\tau}$ действует на порождающих элементах алгебры $C^*(G, S)$ следующим образом: $\widehat{\tau}(\alpha)\widehat{T}_a = \chi^a(\alpha)\widehat{T}_a$, $a \in S$. Следовательно, тройка $(C^*(G, S), G, \widehat{\tau})$ – динамическая система. Определение динамической системы можно найти, например, в [20].

ТЕОРЕМА 3. Отображение $\widehat{\tau}$ порождает гомоморфизм τ группы G в группу $\text{Aut}(C_{\text{red}}^*(S))$.

Доказательство тривиально. Отметим, что τ действует на порождающих элементах алгебры $C_{\text{red}}^*(S)$ следующим образом: $\tau(\alpha)T_a = \chi^a(\alpha)T_a$, $a \in S$.

Таким образом, существует нетривиальная динамическая система $(C_{\text{red}}^*(S), G, \tau)$, которая будет играть важную роль в построении всей теории.

§ 4. Идеалы алгебры $C_{\text{red}}^*(S)$

Пусть $f \mapsto T_f$ – представление алгебры $C(G)$ операторами умножения на пространстве $L^2(G, d\mu)$, $T_f g = f \cdot g$. Это отображение есть *-изоморфизм между $C(G)$ и коммутативной подалгеброй алгебры $B(L^2(G, d\mu))$. Поэтому $\|T_f\| = \|f\|_\infty$.

Обозначим через $H^2(S)$ подпространство всех тех функций из гильбертова пространства $L^2(G, d\mu)$, спектр которых содержится в S , т.е. $f \in H^2(S)$ тогда и только тогда, когда $f = \sum_{a \in S} C_a^f \chi^a$. Преобразование Фурье отображает $H^2(S)$ на $l^2(S)$ и порождает изоморфизм между алгебрами операторов $B(H^2(S))$ и $B(l^2(S))$. Пусть $P_S: L^2(G, d\mu) \rightarrow H^2(S)$ – ортопроектор на $H^2(S)$.

ЛЕММА 9. Для любой $f \in C(G)$ справедливо равенство

$$\|P_S T_f P_S\| = \|f\|_\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что f – полином:

$$f = \sum_{a_i \in \Gamma, i=1}^n C_{a_i}^f \chi^{a_i}.$$

Так как $\|T_f\| = \|f\|_\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция

$$g = \sum_{j=1}^m C_{b_j}^g \chi^{b_j}$$

в $L^2(G, d\mu)$ такая, что $\|g\|_2 = 1$ и

$$\|T_f g\|_2 > \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Пусть a – такой элемент в S , что $a + b_j$ и $a + a_i + b_j$ принадлежат S для любых $1 \leq i \leq n$ и $1 \leq j \leq m$. Тогда функции $\chi^a g$ и $\chi^a f g$ принадлежат гильбертову пространству $H^2(S)$. Очевидно, $\|\chi^a g\|_2 = \|g\|_2 = 1$ и

$$P_S T_f P_S \chi^a g = \chi^a f g.$$

Отсюда

$$\|P_S T_f P_S \chi^a g\|_2 = \|f g\|_2 > \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

С помощью преобразования Фурье для $c \in S$ оператор $P_S T_{\chi^c} P_S$ на $H^2(S)$ переводится в оператор сдвига T_c на $l^2(S)$, следовательно, $P_S T_{\chi^{-c}} P_S$ переводится в T_c^* . Если $c \in \Gamma$ и $c = b - a$, где $a, b \in S$, то

$$P_S T_{\chi^c} P_S = P_S T_{\chi^{-a}} P_S T_{\chi^b} P_S = (P_S T_{\chi^{-a}} P_S)(P_S T_{\chi^b} P_S)$$

переводится в оператор $T_a^* T_b$, который в дальнейшем будем обозначать через T_c .

Обозначим через $\mathbb{T}_f$ образ оператора $P_S T_f P_S$ в $B(l^2(S))$. Функция f называется *символом* оператора $\mathbb{T}_f$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если функция $f \in C(G)$ раскладывается в формальный ряд:

$$f \simeq \sum_{c \in \Gamma} C_c^f \chi^c,$$

то $\mathbb{T}_f$ можно представить в виде формального ряда:

$$\mathbb{T}_f \simeq \bigoplus_{c \in \Gamma} C_c^f T_c,$$

$$\text{и } \|\mathbb{T}_f\| = \|f\|_\infty.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. C^* -подалгебра алгебры $B(l^2(S))$, порожденная операторами $\mathbb{T}_f$, $f \in C(G)$, совпадает с $C_{\text{red}}^*(S)$.

Таким образом, отображение $f \rightarrow \mathbb{T}_f$ есть изометрическое вложение $C(G)$ в $C_{\text{red}}^*(S)$.

Заметим, что $\mathbb{T}_f \cdot \mathbb{T}_g = \mathbb{T}_{f \cdot g}$ тогда и только тогда, когда спектры $\text{sp}(f)$ и $\text{sp}(g)$ функций f и g содержатся в S .

Коммутаторный идеал K алгебры $C_{\text{red}}^*(S)$ есть идеал, порожденный коммутантами $AB - BA$, где $A, B \in C_{\text{red}}^*(S)$. Отметим, что K – неунитальная C^* -алгебра.

Сужение представления $\tau: G \rightarrow \text{Aut}(C_{\text{red}}^*(S))$ (см. теорему 3) на K порождает представление $\tau_K: G \rightarrow \text{Aut } K$. Очевидно, для образующих справедливо

$$\tau_K(\alpha)(T_c T_d - T_d T_c) = \chi^{c+d}(\alpha)(T_c T_d - T_d T_c), \quad c, d \in \Gamma.$$

Следовательно, с помощью динамической системы $(C_{\text{red}}^*(S), G, \tau)$ можно построить две динамические системы, (K, G, τ_K) и $(C_{\text{red}}^*(S)/K, G, \tau_K)$, где $C_{\text{red}}^*(S)/K$ – факторалгебра.

ЛЕММА 10. Пусть $A \in C_{\text{red}}^*(S)$. Тогда найдется такая функция $f \in C(G)$, что

$$\mathbb{T}_f = \varinjlim_{c \in S} T_c^* A T_c.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как любой элемент из $C_{\text{red}}^*(S)$ можно приблизить в равномерной норме конечными линейными комбинациями мономов, утверждение достаточно доказать для конечных линейных комбинаций мономов из $C_{\text{red}}^*(S)$. Пусть

$$A = \sum_{i=1}^n C_i^A V_i, \quad C_i^A \in \mathbb{C}, \quad V_i \in S_{\text{red}}^*.$$

Тогда

$$\varinjlim_{c \in S} T_c^* A T_c = \sum_{i=1}^n C_i T_{d_i},$$

где $d_i = \text{ind } V_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Отсюда согласно следствию 1

$$\sum_{i=1}^n C_i T_{d_i} = \mathbb{T}_g, \quad g = \sum_{i=1}^n C_i \chi^{d_i}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Очевидно, что K порождается коммутантами вида $VW - WV$, где V и W – мономы. Поэтому если $A \in K$, то

$$\varinjlim_{c \in S} T_c^* A T_c = 0,$$

так как в силу леммы 1

$$\varinjlim_{c \in S} T_c^* V W T_c = \varinjlim_{c \in S} T_c^* W V T_c = T_d,$$

где $d = \text{ind}(V) + \text{ind}(W)$.

ЛЕММА 11. Факторалгебра $C_{\text{red}}^*(S)/K$ изоморфна алгебре $C(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $[T_c]$ – класс смежности монома T_c по идеалу K . Очевидно,

$$[T_c][T_d] = [T_{c+d}].$$

Согласно лемме 1 имеем

$$\varinjlim_{c \in S} T_c^* V T_c = T_d,$$

где $d = \text{ind } V$, и поскольку $T_c^* K T_c = K$, получаем $[V] = [T_d]$. Отсюда получаем, что если

$$A = \sum_{i=1}^n C_i^A V_i,$$

то для классов смежности выполняется

$$[A] = \sum_{i=1}^n C_i^A [T_{d_i}],$$

где $d_i = \text{ind } V_i$. Поэтому согласно лемме 10

$$[A] = [\mathbb{T}_f], \quad \text{где } f = \sum_{i=1}^n C_i^A \chi^{d_i}.$$

Очевидно, $\|[\mathbb{T}_f]\| \leq \|\mathbb{T}_f\|$. Покажем, что на самом деле $\|[\mathbb{T}_f]\| = \|\mathbb{T}_f\|$. Действительно, в противном случае найдется $A \in K$ такой, что $\|\mathbb{T}_f + A\| < \|\mathbb{T}_f\|$. Тогда

$$\varinjlim_{c \in S} \|T_c^* (\mathbb{T}_f + A) T_c\| < \|\mathbb{T}_f\|.$$

С другой стороны, в силу замечания 2

$$\varinjlim_{c \in S} \|T_c^* \mathbb{T}_f T_c + T_c^* A T_c\| \geq \varinjlim_{c \in S} \|T_c^* \mathbb{T}_f T_c\| - \varinjlim_{c \in S} \|T_c^* A T_c\| = \|\mathbb{T}_f\|.$$

Противоречие. Таким образом, $\|[\mathbb{T}_f]\| = \|\mathbb{T}_f\|$. Конечные линейные комбинации мономов плотны в $C_{\text{red}}^*(S)$. Поэтому для любого $A \in C_{\text{red}}^*(S)$ найдется такая функция $f \in C(G)$, что $[A] = [\mathbb{T}_f]$.

Поскольку $\|\mathbb{T}_f\| = \|f\|_\infty$, отображение $f \rightarrow [\mathbb{T}_f] = [A]$ является *-изоморфизмом между алгебрами $C(G)$ и $C_{\text{red}}^*(S)/K$.

ЛЕММА 12. *Элемент $A \in C_{\text{red}}^*(S)$ принадлежит K тогда и только тогда, когда*

$$\varinjlim_{c \in S} T_c^* A T_c = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varinjlim_{c \in S} T_c^* A T_c = 0$ и при этом $A \notin K$. Тогда $[A] = [\mathbb{T}_f] \neq 0$ для некоторой функции f и

$$[T_c^* A T_c] = [T_c^* \mathbb{T}_f T_c] = [\mathbb{T}_f].$$

Последнее равенство следует из леммы 10. Это приводит к противоречию. Обратное показано в замечании 2.

ТЕОРЕМА 4. *Короткая точная последовательность*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\text{id}} C_{\text{red}}^*(S) \xrightarrow{\xi} C(G) \longrightarrow 0,$$

где id – вложение, ξ – факторотображение, расщепима. Иными словами, существует морфизм $\rho: C(G) \rightarrow C_{\text{red}}^*(S)$ такой, что $\xi \circ \rho = \text{id}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим изометрическое отображение

$$\rho: C(G) \rightarrow C_{\text{red}}^*(S),$$

отображая f в $\mathbb{T}_f$. Равенство $C_{\text{red}}^*(S) = \rho(C(G)) \oplus K$ и справедливость теоремы следуют из леммы 11.

§ 5. Компактная квантовая полугруппа

Пусть K – компактная полугруппа и $C(K)$ – все непрерывные комплекснозначные функции на K . Компактную квантовую полугруппу $(C(K), \Delta)$, где $\Delta: C(K) \rightarrow C(K) \otimes C(K)$ – копроизведение, называют *квантованием* полугруппы K . Используя копроизведение Δ , можно задать на K структуру полугруппы, вообще говоря, отличную от исходной. Если копроизведение Δ на алгебре $C(K)$ связано с произведением на полугруппе K формулой $\Delta(f)(x, y) = f(xy)$, то пару $(C(K), \Delta)$ называют *естественным квантованием* полугруппы K .

Итак, главная цель в оставшихся параграфах статьи – сопоставить каждой абелевой полугруппе с сокращением компактную квантовую полугруппу. Для этого используется аппарат теории полугрупповых алгебр $C_{\text{red}}^*(S)$, в частности результаты, изложенные в § 1–§ 4.

В данном параграфе приведем определение компактной квантовой полугруппы, несколько отличное от общепринятого.

Пусть $\mathcal{A}$ – унитарная C^* -алгебра, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ – минимальное тензорное произведение. Пусть $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})^*$ – пространство, двойственное к C^* -алгебре $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$, т.е. пространство всех линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$. Для любых $\xi, \eta \in \mathcal{A}^*$ существует единственный функционал $\xi \otimes \eta$ на $\mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ такой, что

$$(\xi \otimes \eta)(A \otimes B) = \xi(A)\eta(B), \quad A, B \in \mathcal{A}.$$

Поэтому можно определить $(\mathcal{A})^* \otimes (\mathcal{A})^*$ как замыкание алгебраического тензорного произведения $(\mathcal{A})^* \odot (\mathcal{A})^*$ в банаховом пространстве $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})^*$. Отметим, что $(\mathcal{A})^* \otimes (\mathcal{A})^* = (\mathcal{A} \otimes \mathcal{A})^*$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ – конечномерная C^* -алгебра.

Каждое вложение $\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ задает структуру полной нормированной алгебры на $\mathcal{A}^*$: произведение функционалов $\xi, \eta \in \mathcal{A}^*$ есть функционал $\xi \times \eta \in \mathcal{A}^*$ такой, что

$$(\xi \times \eta)(A) = (\xi \otimes \eta)\Delta(A).$$

Заметим, что

$$\|\xi \times \eta\| \leq \|\xi\| \cdot \|\eta\|.$$

Вообще говоря, алгебра $\mathcal{A}^*$ не обязательно является ассоциативной.

Если $\Delta: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ является не только $*$ -вложением, но и $*$ -гомоморфизмом и при этом $\mathcal{A}^*$ является банаховой алгеброй, то Δ назовем копроизведением, а пару $(\mathcal{A}, \Delta)$ – компактной квантовой полугруппой.

Тот факт, что Δ является копроизведением, т.е. что $\mathcal{A}^*$ является ассоциативной алгеброй, формально записывается равенством

$$(\text{Id} \otimes \Delta)\Delta = (\Delta \otimes \text{Id})\Delta.$$

Если $\xi \times \eta = \eta \times \xi$ для всех $\xi, \eta \in \mathcal{A}^*$, то квантовая полугруппа $(\mathcal{A}, \Delta)$ называется *кокоммутативной*.

§ 6. Квантование полугруппы S

В этом параграфе построим копроизведение $\Delta: C_{\text{red}}^*(S) \rightarrow C_{\text{red}}^*(S) \otimes C_{\text{red}}^*(S)$ и укажем на некоторые свойства компактной квантовой полугруппы $(C_{\text{red}}^*(S), \Delta)$.

Алгебру конечных линейных комбинаций мономов из S_{red}^* обозначим $P(S)$.

Декартово произведение $\Gamma^2 = \Gamma \times \Gamma$ группы Γ есть группа относительно покоординатной групповой операции: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$. Очевидно, полугруппа $S^2 = S \times S$ порождает группу Γ^2 . Пусть $C_{\text{red}}^*(S^2)$ – C^* -алгебра на $l^2(S^2)$, порожденная регулярным представлением полугруппы S^2 .

ЛЕММА 13. *Верны следующие отождествления:*

$$l^2(S^2) = l^2(S) \otimes l^2(S), \quad C_{\text{red}}^*(S^2) = C_{\text{red}}^*(S) \otimes C_{\text{red}}^*(S).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $e_{(a,b)} \rightarrow e_a \otimes e_b$ продолжается линейно до изометрического отображения $U: l^2(S^2) \rightarrow l^2(S) \otimes l^2(S)$, переводящего базис $\{e_{(a,b)}\}_{(a,b) \in S^2}$ в пространстве $l^2(S^2)$ на базис $\{e_a \otimes e_b\}_{a,b \in S}$ в $l^2(S) \otimes l^2(S)$.

Определим теперь отображение $T_{(a,b)} \rightarrow T_a \otimes T_b$, $(a,b) \in S^2$. Очевидно,

$$T_{(a,b)} = U^* T_a \otimes T_b U.$$

Поэтому отображение $T_{(a,b)} \rightarrow T_a \otimes T_b$ продолжается до изоморфизма

$$C_{\text{red}}^*(S^2) \rightarrow C_{\text{red}}^*(S) \otimes C_{\text{red}}^*(S).$$

Отметим, что $(S_{\text{red}}^2)^* = S_{\text{red}}^* \times S_{\text{red}}^*$, где $(S_{\text{red}}^2)^*$ – инверсная полугруппа, порожденная мономами в $C_{\text{red}}^*(S^2)$ (см. § 2), и $P(S^2) = P(S) \odot P(S)$.

Построение квантовой структуры на $C_{\text{red}}^*(S)$ начнем с ее подалгебры $P(S)$. Определим $\Delta: P(S) \rightarrow P(S) \otimes P(S)$ с помощью равенства

$$\Delta\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i V_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i V_i \otimes V_i,$$

где V_i – моном.

Теперь задача состоит в том, чтобы показать, что это копроизведение продолжается до вложения $\Delta: C_{\text{red}}^*(S) \rightarrow C_{\text{red}}^*(S) \otimes C_{\text{red}}^*(S)$. С этой целью разобьем базис $\{e_c \otimes e_d\}_{c,d \in S}$ гильбертова пространства $l^2(S) \otimes l^2(S)$ на классы эквивалентности следующим образом.

Базисные элементы $e_c \otimes e_d$ и $e_l \otimes e_k$ гильбертова пространства $l^2(S) \otimes l^2(S)$ назовем *эквивалентными* ($e_c \otimes e_d \sim e_l \otimes e_k$), если $d - c = k - l$. Обозначим через H_c гильбертово подпространство в $l^2(S) \otimes l^2(S)$, порожденное множеством $\{e_l \otimes e_k \mid k - l = c, k, l \in S\}$. Очевидно, $l^2(S) \otimes l^2(S) = \bigoplus_{c \in \Gamma} H_c$. Каждое из пространств H_c является инвариантным относительно алгебры $\Delta(P(S))$. Действительно, пусть V – моном, $e_l \otimes e_k \in H_c$ и $(V \otimes V)e_l \otimes e_k \neq 0$. Тогда согласно лемме 3

$$(V \otimes V)(e_l \otimes e_k) = e_{l+d} \otimes e_{k+d},$$

где $d = \text{ind } V$.

ЛЕММА 14. *Отображение $\Delta: P(S) \rightarrow P(S) \odot P(S)$ продолжается до вложения $\Delta: C_{\text{red}}^*(S) \rightarrow C_{\text{red}}^*(S) \otimes C_{\text{red}}^*(S)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим пространство H_0 . Заметим, что оно порождается элементами $e_a \otimes e_a$, $a \in S$. Зафиксируем $Q \in P(S)$. Пусть $\rho: H_0 \rightarrow l^2(S)$ – биективное отображение проекции на первую компоненту:

$$\rho\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_{a_i} \otimes e_{a_i}\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_{a_i}.$$

Покажем, что коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} H_0 & \xrightarrow{\rho} & l^2(S) \\ \Delta_0(Q) = \Delta(Q)|_{H_0} \downarrow & & \downarrow Q \\ H_0 & \xrightarrow{\rho} & l^2(S) \end{array} \quad (6.1)$$

Достаточно проверить коммутативность диаграммы на базисных элементах $e_c \otimes e_c$ пространства H_0 . Пусть $Q = \sum_{i=1}^n \lambda_i V_i$. Тогда

$$\Delta_0(Q)(e_c \otimes e_c) = \sum_{i=1}^n \lambda_i V_i e_c \otimes V_i e_c = \sum_{i=1}^n \lambda'_i e_{c+\text{ind } V_i} \otimes e_{c+\text{ind } V_i},$$

где

$$\lambda'_i = \begin{cases} \lambda_i, & \text{если } c + \text{ind } V_i \in S, \\ 0, & \text{если } c + \text{ind } V_i \notin S. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\rho \Delta_0(Q)(e_c \otimes e_c) = \sum_{i=1}^n \lambda'_i e_{c+\text{ind } V_i}.$$

С другой стороны,

$$(Q\rho)(e_c \otimes e_c) = Q(e_c) = \sum_{i=1}^n \lambda_i V_i e_c = \sum_{i=1}^n \lambda'_i e_{c+\text{ind } V_i}.$$

Таким образом, диаграмма (6.1) коммутативна. Поэтому $\|\rho \Delta_0(Q)\| = \|Q\rho\|$. Учитывая, что ρ – биекция, получаем $\|\Delta_0(Q)\| = \|Q\|$ для всех $Q \in P(S)$.

Рассмотрим теперь пространство H_c , $c \in \Gamma$, порожденное множеством $\{e_a \otimes e_b \mid b - a = c, a, b \in S\}$. Заметим, что оператор $I \otimes T_c$ отображает пространство H_0 на H_c , где I – тождественный оператор. Действительно, для любых $a, b \in S$ имеем $e_a \otimes e_b = (I \otimes T_c)(a_a \otimes e_a)$, где $c = b - a \in \Gamma$. С другой стороны, если $a e_a \otimes e_a$ не обращается в нуль при действии оператора $I \otimes T_c$, то $(I \otimes T_c)(a_a \otimes e_a) = e_a \otimes e_{a+c} \in H_c$. Аналогично, оператор $I \otimes T_c^*$ пространство H_c отображает в H_0 .

Рассмотрим оператор $P_c: B(H_0) \rightarrow B(H_c)$, заданный для любого $A \in B(H_0)$ формулой

$$P_c(A) = (I \otimes T_c)A(I \otimes T_c^*).$$

Ясно, что $P_c(A): H_c \rightarrow H_c$.

Нетрудно видеть, что P_c – положительный оператор и $P_c(I) = (I \otimes T_c)(I \otimes T_c^*)$ есть единица в образе, т.е. в подалгебре $P_c(B(H_0))$. Следовательно, $\|P_c(A)\| \leq \|A\|$ для любого $A \in B(H_0)$. В частности, $\|P_c(\Delta_0(Q))\| \leq \|\Delta_0(Q)\| = \|Q\|$ для любого $Q \in P(S)$, так как $\Delta_0(Q) \in B(H_0)$. С другой стороны,

$$P_c(\Delta_0(Q)) = (I \otimes T_c)\Delta_0(Q)(I \otimes T_c^*) = \Delta_c(Q) = \Delta(Q)|_{H_c}.$$

Поэтому $\|\Delta_c(Q)\| \leq \|Q\|$ для любого $c \in \Gamma$.

Таким образом, отображение $\Delta: P(S) \rightarrow P(S) \odot P(S)$ изометрично и поэтому продолжается непрерывно до вложения $\Delta: C_{\text{red}}^*(S) \rightarrow C_{\text{red}}^*(S) \otimes C_{\text{red}}^*(S)$.

Определим вложение $\gamma: l^2(S) \rightarrow l^2(S) \otimes l^2(S)$ формулой

$$\gamma\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_{a_i}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (e_{a_i} \otimes e_{a_i}).$$

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $A \in C_{\text{red}}^*(S)$. Тогда справедливо равенство

$$\Delta(A) = \gamma \circ A.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению Δ на подалгебре $P(S)$ алгебры $C_{\text{red}}^*(S)$ имеем

$$\Delta\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i V_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i V_i \otimes V_i, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i V_i \in P(S).$$

Далее,

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i V_i e_a = \sum_{i=1}^n \lambda'_i e_{a+\text{ind } V_i},$$

где $\lambda'_i = \lambda_i$, если $a + \text{ind } V_i \in S$, и $\lambda'_i = 0$ в противном случае. Отсюда следует, что

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i V_i \otimes V_i\right)(e_a \otimes e_a) = \sum_{i=1}^n \lambda'_i e_{a+\text{ind } V_i} \otimes e_{a+\text{ind } V_i}.$$

Так как $P(S)$ плотно в $C_{\text{red}}^*(S)$, получим утверждение леммы.

ТЕОРЕМА 5. Пара $(C_{\text{red}}^*(S), \Delta)$ является компактной квантовой полугруппой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что произведение на банаховой алгебре $(C_{\text{red}}^*(S))^*$, индуцированное копроизведением Δ из леммы 4, ассоциативно. Действительно, для любого монома V и любых $\xi, \eta, \zeta \in (C_{\text{red}}^*(S))^*$ имеем следующее:

$$\begin{aligned} (\xi \times (\eta \times \zeta))(V) &= (\xi \otimes (\eta \times \zeta))\Delta(V) \\ &= \xi(V) \cdot (\eta \times \zeta)(V) = \xi(V) \cdot \eta(V) \cdot \zeta(V) = ((\xi \times \eta) \times \zeta)(V). \end{aligned}$$

§ 7. Слабая алгебра Хопфа

В 1998 г. Ф. Ли в [21] определил объект, который явился одним из естественных обобщений понятия алгебры Хопфа. Это обобщение основано на ослаблении свойств антипода и поэтому называется *слабой алгеброй Хопфа*. В той же работе было показано, что слабые алгебры Хопфа так же, как и алгебры Хопфа, дают решение квантового уравнения Янга–Бакстера. Пусть A – унитарная алгебра с заданным на ней копроизведением Δ . Через m обозначим отображение произведения трех элементов алгебры A , $m(a \otimes b \otimes c) = abc$, как и произведение двух элементов.

Пусть существует линейное отображение $T: A \rightarrow A$ такое, что

$$m(\text{id} \odot T \odot \text{id})(\Delta \odot \text{id})\Delta = \text{id}, \quad (7.1)$$

$$m(T \odot \text{id} \odot T)(\Delta \odot \text{id})\Delta = T. \quad (7.2)$$

Тогда A называется *слабой алгеброй Хопфа*, а T – *слабым антиподом*. Заметим, что слабая алгебра Хопфа может не являться биалгеброй, так как не требуется

существование коединицы. Очевидно, $T(1) = 1$. Любая алгебра Хопфа имеет единственный антипод. Однако слабая алгебра Хопфа может иметь более одного слабого антипода. Свойства слабых алгебр Хопфа рассмотрены подробно в [22].

Так же, как алгебры Хопфа тесно связаны с понятием группы, слабые алгебры Хопфа в свою очередь связаны с инверсными полугруппами.

Рассмотрим инверсную полугруппу M и полугрупповую алгебру $\mathbb{C}[M]$. На $\mathbb{C}[M]$ зададим копроизведение и слабый антипод с помощью равенств

$$\Delta(x) = x \otimes x, \quad \Delta\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) = \sum_i \lambda_i x_i \otimes x_i, \quad T(x) = x^*.$$

Тогда равенства (7.1), (7.2), очевидно, выполняются и $\mathbb{C}[M]$ является слабой алгеброй Хопфа. Этот пример является классическим.

Имеется также обратная связь между слабыми алгебрами Хопфа и инверсными полугруппами. Пусть A – слабая алгебра Хопфа. Тогда множество групповых элементов A является инверсной полугруппой, в которой инверсным к x является элемент $T(x)$. Таким образом, с каждой инверсной полугруппой ассоциирована классическая слабая алгебра Хопфа и, наоборот, с каждой слабой алгеброй Хопфа связана некоторая инверсная полугруппа.

Другим интересным примером является матричная алгебра $M_n(\mathbb{C})$, порожденная матричными единицами $E_{i,j}$. Копроизведение на ней задается с помощью порождающих элементов:

$$\Delta(E_{i,j}) = E_{i,j} \otimes E_{i,j},$$

и слабый антипод задается равенством

$$T(E_{i,j}) = E_{j,i}.$$

Матричные единицы образуют инверсную полугруппу. Таким образом, данная слабая алгебра Хопфа может быть определена так же, как и в первом случае.

Теорема, доказанная А. М. Вершиком в работе [23], описывает связь между полугрупповыми биалгебрами инверсных полугрупп и конечномерными биалгебрами.

ТЕОРЕМА 6 (см. [23]). *Полугрупповая биалгебра конечной инверсной полугруппы S с единицей, со сверткой в качестве умножения и поточечным коумножением есть полупростая кокоммутативная инволютивная биалгебра. Обратно, всякая конечномерная полупростая кокоммутативная инволютивная биалгебра изоморфна (как инволютивная биалгебра) полугрупповой алгебре конечной инверсной полугруппы с единицей.*

Из этого утверждения следует, что любая конечномерная полупростая кокоммутативная инволютивная биалгебра изоморфна слабой алгебре Хопфа. Этот результат позволяет судить о важности исследования такого объекта, как слабая алгебра Хопфа. Тем не менее изучение топологического варианта данного понятия в литературе не встречается.

Как было указано выше, алгебра $C_{\text{red}}^*(S)$ порождена изометрическими операторами $T_a, T_b^*, a, b \in S$. Так как регулярное представление является инверсным, полугруппа S_{red}^* , порожденная такими операторами, является инверсной (см. [17]). Для элемента T_a инверсным является T_a^* . Таким образом, мы получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7. *Компактная квантовая полугруппа $(C_{\text{red}}^*(S), \Delta)$ содержит плотную слабую алгебру Хопфа $(\mathbb{C}[S_{\text{red}}^*], \Delta, *)$.*

Этот результат аналогичен известному в теории квантовых групп результату о том, что компактная квантовая группа всегда содержит плотную $*$ -алгебру Хопфа (см. [7]).

§ 8. Компактная квантовая подгруппа

В литературе по теории квантовых групп встречается понятие квантовой подгруппы. В этом параграфе впервые приводится обобщение данного понятия на квантовые полугруппы. Начнем с классического коммутативного случая – алгебры функций на полугруппе.

Пусть $P' \subset P$ – подполугруппа в полугруппе P . Тогда существует естественный $*$ -эпиморфизм $\pi: C(P) \rightarrow C(P')$, действующий как сужение функций с полугруппы P на P' . Обозначим соответствующие копроизведения на этих алгебрах Δ и Δ' . Мы имеем следующее очевидное равенство:

$$\Delta' \pi = (\pi \otimes \pi) \Delta. \quad (8.1)$$

Пусть теперь $(\mathcal{A}, \Delta)$ и $(\mathcal{A}', \Delta')$ – компактные квантовые полугруппы. По аналогии с классическим примером $(\mathcal{A}', \Delta')$ называется *компактной квантовой подполугруппой* в $(\mathcal{A}, \Delta)$, если существует $*$ -эпиморфизм $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$, удовлетворяющий равенству (8.1). На самом деле коассоциативность Δ' следует из равенства (8.1) и коассоциативности Δ ; поэтому для определения квантовой полугруппы достаточно того, чтобы Δ' было унитарным $*$ -гомоморфизмом. Если $(\mathcal{A}, \Delta)$ – компактная квантовая группа, то $(\mathcal{A}', \Delta')$ является компактной квантовой подгруппой.

Замкнутый идеал $J \subset \mathcal{A}$ называется *коидеалом* в компактной квантовой полугруппе $(\mathcal{A}, \Delta)$, если

$$\Delta(J) \subseteq J \otimes \mathcal{A} + \mathcal{A} \otimes J.$$

ТЕОРЕМА 8. *Пусть J – коидеал в $(\mathcal{A}, \Delta)$. Существует копроизведение Δ_J , превращающее $\mathcal{A}/J$ в компактную квантовую подполугруппу в $(\mathcal{A}, \Delta)$ с помощью факторгомоморфизма $\pi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/J$. Любая компактная квантовая подполугруппа получается таким способом.*

Данное утверждение для случая квантовой группы доказано в [24]. В силу того, что в нем условие плотности множеств несущественно, аналогичные рассуждения подходят для общего случая.

Действием компактной квантовой полугруппы $(\mathcal{A}, \Delta)$ на унитарной C^* -алгебре B назовем унитарный $*$ -гомоморфизм $\delta: B \rightarrow B \otimes \mathcal{A}$ такой, что

$$(\delta \otimes \text{id})\delta = (\text{id} \otimes \Delta)\delta.$$

Действие δ называется *эргодическим*, если алгебра неподвижных точек

$$B^\delta = \{b \in B \mid \delta(b) = b \otimes 1\}$$

совпадает со множеством комплексных чисел.

Очевидно, можно определить действие любой компактной квантовой подполугруппы $(\mathcal{A}', \Delta')$ в $(\mathcal{A}, \Delta)$ на алгебре $\mathcal{A}$:

$$\delta = (\text{id} \otimes \pi)\Delta.$$

Тогда алгебра неподвижных точек $\mathcal{A}^\delta$ называется *пространством левых классов смежности*.

Пространство $\mathcal{A}^\delta$ вместе с отображением $\Delta|_{\mathcal{A}^\delta}: \mathcal{A}^\delta \rightarrow \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}^\delta$ называется *компактным квантовым левым факторпространством* $(\mathcal{A}, \Delta)/(\mathcal{A}', \Delta')$.

Покажем, что в этих терминах группа G является (квантовой) подгруппой в $(C_{\text{red}}^*(S), \Delta)$. Далее K обозначает коммутаторный идеал в алгебре $C_{\text{red}}^*(S)$.

ТЕОРЕМА 9. *Идеал K является коидеалом в $C_{\text{red}}^*(S)$. Компактная квантовая полугруппа $(C_{\text{red}}^*(S), \Delta)$ содержит классическую компактную квантовую подгруппу $(C(G), \Delta_G)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как доказано в лемме 11, факторгомоморфизм

$$\pi: C_{\text{red}}^*(S) \rightarrow C_{\text{red}}^*(S)/K$$

является $*$ -эпиморфизмом на алгебру $C(G)$. Здесь $\pi(T_a) = \chi^a$, χ^a – характер группы G . Для любого $a \in S$ имеем

$$(\pi \otimes \pi)\Delta(T_a) = (\pi \otimes \pi)(T_a \otimes T_a) = \chi^a \otimes \chi^a.$$

С другой стороны, классическое копроизведение на $C(G)$ действует на характере χ^a для любых $\alpha, \beta \in G$ следующим образом:

$$\Delta_G(\chi^a)(\alpha, \beta) = \chi^a(\alpha\beta) = \chi^a(\alpha)\chi^a(\beta) = (\chi^a \otimes \chi^a)(\alpha, \beta).$$

Так как характеры порождают алгебру $C(G)$, получаем

$$(\pi \otimes \pi)\Delta = \Delta_G\pi.$$

Покажем, что коммутаторный идеал K – коидеал. Пусть V, W – мономы. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \Delta(VW - WV) &= VW \otimes VW - WV \otimes WV \\ &= (VW - WV) \otimes VW + WV \otimes VW - WV \otimes WV \\ &= (VW - WV) \otimes VW + WV \otimes (VW - WV) \\ &\in K \otimes C_{\text{red}}^*(S) + C_{\text{red}}^*(S) \otimes K. \end{aligned}$$

В силу того, что K – замкнутый идеал и Δ – $*$ -гомоморфизм, получаем требуемое включение для всех элементов.

Таким образом, $(C(G), \Delta_G)$ – компактная квантовая подполугруппа в квантовой полугруппе $(C_{\text{red}}^*(S), \Delta)$. Формально это означает, что $G \subset QS(C_{\text{red}}^*(S))$. Более того, определено действие G на $QS(C_{\text{red}}^*(S))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Действие компактной квантовой подгруппы $(C(G), \Delta_G)$ на алгебре $C_{\text{red}}^*(S)$ является не эргодическим и совпадает с представлением $\tau: G \rightarrow \text{Aut} C_{\text{red}}^*(S)$, определенным в § 3. Пространство левых смежных классов совпадает с пространством $\mathfrak{A}_0$. Компактное квантовое факторпространство $(C_{\text{red}}^*(S), \Delta)/(C(G), \Delta_G)$ является компактной квантовой полугруппой $(\mathfrak{A}_0, \Delta|_{\mathfrak{A}_0})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a \in S$. Мы имеем

$$\tau(\alpha)(T_a) = \chi^a(\alpha)T_a.$$

Это означает, что

$$\tau(\cdot)(T_a) \in C(G, C_{\text{red}}^*(S)) = C_{\text{red}}^*(S) \otimes C(G).$$

Поэтому

$$\tau(\cdot)(\cdot): C_{\text{red}}^*(S) \rightarrow C_{\text{red}}^*(S) \otimes C(G).$$

При этом $\tau(\cdot)(T_a) = T_a \otimes \chi^a$. С другой стороны,

$$\delta(T_a) = (\text{id} \otimes \pi)(T_a \otimes T_a) = T_a \otimes \chi^a.$$

Как отмечалось выше, $\tau(\alpha)(V) = V$, если $V \in \mathfrak{A}_0$. Поэтому пространство $\mathfrak{A}_0$, определенное в § 7, является пространством левых смежных классов относительно действия δ .

§ 9. Двойственная алгебра и функционал Хаара

В предыдущем параграфе пространство $(C_{\text{red}}^*(S))^*$ было наделено структурой ассоциативной банаховой алгебры. При этом произведение в этой алгебре коммутативно, так как Δ кокоммутативно. Напомним, что функционалом Хаара называется состояние $h \in \mathscr{A}^*$ такое, что для любого $\varphi \in \mathscr{A}^*$ выполняется

$$h \times \varphi = \varphi \times h = \lambda_\varphi \cdot h,$$

где $\lambda_\varphi = \varphi(1)$.

ТЕОРЕМА 10. *Функционал Хаара в $(C_{\text{red}}^*(S))^*$ определяется равенством*

$$h(A) = (Ae_0, e_0)$$

для любого $A \in C_{\text{red}}^*(S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть V – моном из $C_{\text{red}}^*(S)$. Легко видеть, что (Ve_0, e_0) отлично от нуля только в случае $V = I$. Поэтому для любого $\varphi \in (C_{\text{red}}^*(S))^*$

$$h \times \varphi(V) = h(V) \cdot \varphi(V) = \begin{cases} 0, & V \neq I, \\ \varphi(I), & V = I. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $h \times \varphi = \varphi(I) \cdot h$.

Из равенства $C_{\text{red}}^*(S) = K \oplus \varrho(C(G))$ (см. теорему 4) следует

$$(C_{\text{red}}^*(S))^* = K^\perp \oplus \varrho(C(G))^\perp.$$

Определим отображения:

$$\begin{aligned} \Phi_c: C_{\text{red}}^*(S) &\rightarrow C_{\text{red}}^*(S), & A &\mapsto T_c^* A T_c, & c \in S, \\ \Phi_c^*: (C_{\text{red}}^*(S))^* &\rightarrow (C_{\text{red}}^*(S))^*, & (\Phi_c^* \xi)(A) &= \xi(\Phi_c(A)). \end{aligned}$$

Очевидно, эти отображения непрерывны.

ЛЕММА 15. *Для любого $c \in S$ отображение Φ_c^* действует на $K^\perp$ тождественно и $\Phi_c^*: (\varrho(C(G)))^\perp \rightarrow (\varrho(C(G)))^\perp$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку K – идеал, то $\Phi_c: K \rightarrow K$. Любой моном V из $\varrho(C(G))$ имеет вид $T_a^* T_b$ для некоторых $a, b \in S$. Поэтому

$$\Phi_c(V) = T_c^* T_a^* T_b T_c = T_a^* T_c^* T_c T_b = T_a^* T_b = V.$$

Следовательно, $\xi \in K^\perp$ тогда и только тогда, когда $\Phi_c^*(\xi) = \xi$.

Очевидно, $(\varrho(C(G)))^\perp$ является идеалом в $\mathfrak{A}^*$ относительно произведения $\times$. Обозначим через $M(G)$ пространство регулярных борелевских мер на группе G , двойственной к Γ .

ТЕОРЕМА 11. *Справедливы следующие утверждения:*

- 1) $K^\perp$ – банахова алгебра, изоморфная $M(G)$;
- 2) имеет место расщепимая точная последовательность

$$0 \rightarrow (\varrho(C(G)))^\perp \rightarrow (C_{\text{red}}^*(S))^* \rightarrow K^\perp = M(G) \rightarrow 0.$$

§ 10. Категория квантовых полурупп

Пусть $\mathcal{S}_{ab}$ – категория дискретных абелевых полурупп с сокращением, морфизмами в которой являются полугрупповые морфизмы. Обозначим через $\mathcal{QS}_{\text{red}}$ категорию, объектами в которой являются компактные квантовые полугруппы $(C_{\text{red}}^*(S), \Delta)$, построенные так, как описано в § 6 по всем полугруппам $S \in \text{Obj}(\mathcal{S}_{ab})$, а морфизмами – унитарные морфизмы компактных квантовых полугрупп.

Непрерывный $*$ -гомоморфизм $\pi: C_{\text{red}}^*(S_1) \rightarrow C_{\text{red}}^*(S_2)$ называется *унитарным морфизмом соответствующих компактных квантовых полугрупп*, если единица одной алгебры отображается в единицу другой и коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} C_{\text{red}}^*(S_1) & \xrightarrow{\pi} & C_{\text{red}}^*(S_2) \\ \Delta_1 \downarrow & & \downarrow \Delta_2 \\ C_{\text{red}}^*(S_1) \otimes C_{\text{red}}^*(S_1) & \xrightarrow{\pi \otimes \pi} & C_{\text{red}}^*(S_2) \otimes C_{\text{red}}^*(S_2) \end{array} \quad (10.1)$$

ЛЕММА 16. Пусть A – такая изометрия в $C_{\text{red}}^*(S)$, что $\Delta(A) = A \otimes A$. Тогда $A = T_c$, где $c \in S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что A отображает базис $\{e_a\}_{a \in S}$ в себя. Допустим,

$$Ae_a = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i e_{a_i}.$$

Тогда, с одной стороны,

$$(A \otimes A)(e_a \otimes e_a) = Ae_a \otimes Ae_a = \sum_{i,j=1}^{\infty} \lambda_i \lambda_j e_{a_i} \otimes e_{a_j}.$$

С другой стороны (см. следствие 3),

$$\Delta(A)(e_a \otimes e_a) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (e_{a_i} \otimes e_{a_i}).$$

Семейство $\{e_a \otimes e_b\}_{a,b \in S}$ образует ортонормированный базис в $l^2(S) \otimes l^2(S)$. Поэтому $\lambda_i \lambda_j = 0$, если $i \neq j$, и, следовательно, равны нулю все λ_j , за исключением одного ($Ae_a \neq 0$, так как A – изометрия). Значит, $Ae_a = \lambda e_b$. Применяя те же рассуждения, получим $\lambda = \lambda^2$. Отсюда $\lambda = 1$.

Пусть $Ae_a = e_b$ и $b = c - a$. Покажем, что для любого $d \in S$ справедливо $Ae_d = e_{d+c}$. Пусть, наоборот, $Ae_d = e_{d+k}$, $k \neq c$. Элемент $e_a \otimes e_d$ принадлежит гильбертову пространству H_l , где $l = d - a$, т.е. пространству, порожденному семейством базисных векторов $\{e_{a_i} \otimes e_{b_i}\}_{i=1}^{\infty}$, для которых $b_i - a_i = l$. Так как $\Delta(A)(e_a \otimes e_d)$ принадлежит H_l , получим

$$\Delta(A)(e_a \otimes e_d) = e_{a+c} \otimes e_{d+k}$$

и $(d + k) - (a + c) = l$. Отсюда $k = c$. По условию леммы A – изометрия, следовательно, $c \in S$ и $A = T_c$.

ТЕОРЕМА 12. Существует инъективный функтор из категории $\mathcal{S}_{\text{red}}$ в категорию $\mathcal{S}_{ab}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\pi: C_{\text{red}}^*(S_1) \rightarrow C_{\text{red}}^*(S_2)$ – морфизм в категории QS_{red} , где S_1, S_2 – полугруппы в категории S_{ab} . Из коммутативности диаграммы (10.1) следует $\Delta_2(\pi(T_a)) = \pi(T_a) \otimes \pi(T_a)$. По условию T_a и, следовательно, $\pi(T_a)$ – изометрии. По лемме 16 $\pi(T_a) = T_{a'}$, $a' \in S$. Таким образом, π порождает гомоморфизм $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$, $a \mapsto a'$.

Автоморфизм σ алгебры $C_{\text{red}}^*(S)$ назовем *автоморфизмом компактной квантовой полугруппы* $(C_{\text{red}}^*(S), \Delta)$, если $(\sigma \otimes \sigma)\Delta = \Delta\sigma$.

Обозначим через $\text{Aut}((C_{\text{red}}^*(S), \Delta))$ группу автоморфизмов компактной квантовой полугруппы $(C_{\text{red}}^*(S), \Delta)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. $\text{Aut}((C_{\text{red}}^*(S), \Delta))$ изоморфно $\text{Aut}(S)$ – группе автоморфизмов полугруппы S .

Заметим, что у полугрупп неотрицательных вещественных чисел $\mathbb{R}_+$ и неотрицательных рациональных чисел $\mathbb{Q}_+$ каждый морфизм является автоморфизмом и $\text{Aut}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$, $\text{Aut}(\mathbb{Q}_+) = \mathbb{Q}$. У полугруппы $\mathbb{Z}_+$ неотрицательных целых чисел группа $\text{Aut}(\mathbb{Z}_+)$ состоит из тривиального автоморфизма, а полугруппа морфизмов совпадает с $\mathbb{Z}_+$.

§ 11. Различные копроизведения на алгебре Тёплица

В работе [25] на алгебре Тёплица $\mathcal{T}$ была задана структура компактной квантовой полугруппы $(\mathcal{T}, \Delta)$. Возникает естественный вопрос: существует ли другое копроизведение на $\mathcal{T}$?

Как показывалось ранее, алгебра Тёплица порождается регулярным изометрическим представлением полугруппы $\mathbb{Z}_+$, а значит, $\mathcal{T} = C_{\text{red}}^*(\mathbb{Z}_+)$. Очевидно, что копроизведение на $C_{\text{red}}^*(\mathbb{Z}_+)$, описанное в § 6, совпадает с копроизведением на алгебре Тёплица. Однако $\mathbb{Z}_+$ не единственная абелева полугруппа, чье регулярное представление порождает алгебру $\mathcal{T}$.

Рассмотрим полугруппу $S = \{0, 2, 3, 4, \dots\}$. Очевидно, S порождает группу $\mathbb{Z}$:

$$\mathbb{Z} = S - S.$$

Тогда $C_{\text{red}}^*(S)$ есть алгебра Тёплица. Действительно, следующая комбинация мономов представляет собой оператор правостороннего сдвига на $l^2(S)$:

$$T = T_2(I - T_3^*T_2T_2^*T_3) + T_2^*T_3.$$

Далее, $(C_{\text{red}}^*(S), \Delta_S)$ является компактной квантовой полугруппой, где Δ_S задается, как в § 6. Но данное копроизведение Δ_S отличается от копроизведения Δ :

$$\Delta(T) = T \otimes T,$$

$$\Delta_S(T) = T_2 \otimes T_2 - T_2T_3^*T_2T_2^*T_3 \otimes T_2T_3^*T_2T_2^*T_3 + T_2^*T_3 \otimes T_2^*T_3.$$

Таким образом, компактные квантовые полугруппы $(C_{\text{red}}^*(S), \Delta_S)$ и $(\mathcal{T}, \Delta)$ не совпадают. Вообще говоря, с помощью конструкций, приведенных в § 6, на алгебре Тёплица можно задать столько структур компактных квантовых полугрупп, сколько существует полугрупп, порождающих $\mathbb{Z}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Не существует морфизма из $(C_{\text{red}}^*(S), \Delta_S)$ в $(\mathcal{T}, \Delta)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, π – морфизм соответствующих компактных квантовых полугрупп. Тогда в силу теоремы 12 найдется морфизм $\varphi: S \rightarrow \mathbb{Z}_+$. Обозначим $m = \varphi(2)$, $k = \varphi(3)$. Имеем

$$m + m + m = \varphi(2 + 2 + 2) = \varphi(3 + 3) = k + k.$$

Поэтому m четное и $k > m$. Следовательно, $\pi(T_2^*T_3)$ – изометрический оператор, каким не является $T_2^*T_3$. Это означает, что $\pi(I - T_3^*T_2T_2^*T_3) = 0$, и коммутаторный идеал (идеал компактных операторов) является ядром гомоморфизма π .

Список литературы

- [1] В. Г. Дринфельд, “Квантовые группы”, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика*. VIII, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **155**, Изд-во “Наука”, Ленинград. отд., Л., 1986, 18–49; англ. пер.: V. G. Drinfel’d, “Quantum groups”, *J. Soviet Math.*, **41**:2 (1988), 898–915; *Proceedings of the International congress of mathematicians*, v. 1, Berkeley, Calif., 1986, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, 798–820.
- [2] S. L. Woronowicz, “Twisted $SU(2)$ -group. An example of a non-commutative differential calculus”, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **23**:1 (1987), 117–181.
- [3] Н. Ю. Решетихин, Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, “Квантование групп Ли и алгебр Ли”, *Алгебра и анализ*, **1**:1 (1989), 178–206; англ. пер.: N. Yu. Reshetikhin, L. A. Takhtadzhyan, L. D. Faddeev, “Quantization of Lie groups and Lie algebras”, *Leningrad Math. J.*, **1**:1 (1990), 193–225.
- [4] Дж. Мерфи, *C^* -алгебры и теория операторов*, Факториал, М., 1997, 336 с.; пер. с англ.: G. J. Murphy, *C^* -algebras and operator theory*, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990, x+286 pp.
- [5] S. L. Woronowicz, “Unbounded elements affiliated with C^* -algebras and non-compact quantum groups”, *Comm. Math. Phys.*, 1991, № 2, 399–432.
- [6] A. Maes, A. Van Daele, “Notes on compact quantum groups”, *Nieuw Arch. Wisk.* (4), **16**:1-2 (1998), 73–112.
- [7] S. L. Woronowicz, “Compact quantum groups”, *Symétries quantiques* (Les Houches, 1995), North-Holland, Amsterdam, 1998, 845–884.
- [8] S. L. Woronowicz, “Compact matrix pseudogroups”, *Comm. Math. Phys.*, **111**:4 (1987), 613–665.
- [9] S. Vaes, A. Van Daele, “Hopf C^* -algebras”, *Proc. London Math. Soc.* (3), **82**:2 (2001), 337–384.
- [10] P. Podleś, “Symmetries of quantum spaces. Subgroups and quotient spaces of quantum $SU(2)$ and $SO(3)$ groups”, *Comm. Math. Phys.*, 1995, № 1, 1–20.
- [11] Ch. Kassel, *Quantum groups*, Grad. Texts in Math., **155**, Springer-Verlag, New York, 1995, xii+531 с.
- [12] K. Kawamura, “ C^* -bialgebra defined by the direct sum of Cuntz algebras”, *J. Algebra*, 2008, № 9, 3935–3959.
- [13] М. А. Аухадиев, С. А. Григорян, Е. В. Липачева, “О компактной квантовой полугруппе QS_{red} ”, *Изв. вузов. Матем.*, 2013, № 10, 63–68; англ. пер.: M. A. Aukhadiev, S. A. Grigoryan, E. V. Lipacheva, “On compact quantum semigroup QS_{red} ”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **57**:10 (2013), 54–58.
- [14] L. A. Coburn, “The C^* -algebra generated by an isometry”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:5 (1967), 722–726.
- [15] R. G. Douglas, “On the C^* -algebra of a one-parameter semigroup of isometries”, *Acta Math.*, **128**:1 (1972), 143–151.
- [16] G. J. Murphy, “Ordered groups and Toeplitz algebras”, *J. Operator Theory*, **18**:2 (1987), 303–326.
- [17] М. А. Аухадиев, В. Н. Тепоян, “Isometric representations of totally ordered semigroups”, *Lobachevskii J. Math.*, **33**:3 (2012), 239–243.
- [18] С. А. Григорян, А. Ф. Салахутдинов, “ C^* -алгебры, порожденные полугруппами с сокращением”, *Сиб. матем. журн.*, **51**:1 (2010), 16–25; англ. пер.: S. A. Grigoryan, A. F. Salakhutdinov, “ C^* -algebras generated by cancellative semigroups”, *Siberian Math. J.*, **51**:1 (2010), 12–19.
- [19] С. А. Григорян, А. Ф. Салахутдинов, “ C^* -алгебры, порожденные полугруппами”, *Изв. вузов. Матем.*, 2009, № 10, 68–71; англ. пер.: S. A. Grigoryan, A. F. Salakhutdinov, “ C^* -algebras generated by semigroups”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **53**:10 (2009), 61–63.

- [20] У. Браттели, Д. Робинсон, *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика. C^* - и W^* -алгебры, группы симметрий, разложение состояний*, Мир, М., 1982, 512 с.; пер. с англ.: O. Bratteli, D.W. Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics*, v.1: C^* - and W^* -algebras, symmetry groups, decomposition of states, Texts Monogr. Phys., Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1979, xii+500 pp.
- [21] S. Duplij, Fang Li, “Regular solutions of quantum Yang–Baxter equation from weak Hopf algebras”, presented at the 10th International colloquium “Quantum groups and integrable systems” (Prague, 2001), *Czechoslovak J. Phys.*, **51**:12 (2001), 1306–1311.
- [22] Fang Li, S. Duplij, “Weak Hopf algebras and singular solutions of quantum Yang–Baxter equation”, *Comm. Math. Phys.*, **225**:1 (2002), 191–217.
- [23] А. М. Вершик, “Двойственность Крейна, позитивные 2-алгебры и дилатация коумножений”, *Функц. анализ и его прил.*, **41**:2 (2007), 24–43; англ. пер.: A. M. Vershik, “Krein duality, positive 2-algebras, and dilation of comultiplications”, *Funct. Anal. Appl.*, **41**:2 (2007), 99–114.
- [24] C. Pinzari, “Embedding ergodic actions of compact quantum groups on C^* -algebras into quotient spaces”, *Internat. J. Math.*, **18**:2 (2007), 137–164.
- [25] М. А. Аухадиев, С. А. Григорян, Е. В. Липачева, “Infinite-dimensional compact quantum semigroup”, *Lobachevskii J. Math.*, **32**:4 (2011), 304–316.

Марат Альфредович Аухадиев
(Marat A. Aukhadiev)

Казанский государственный энергетический
университет

E-mail: m.aukhadiev@gmail.com

Поступила в редакцию
29.11.2012 и 10.12.2013

Сурен Аршакович Григорян
(Suren A. Grigoryan)

Казанский государственный энергетический
университет

E-mail: gsuren@inbox.ru

Екатерина Владимировна Липачева
(Ekaterina V. Lipacheva)

Казанский государственный энергетический
университет

E-mail: elipacheva@gmail.com