Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Артемов, Преобразование Пуассона для однополостного гиперболоида, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 5, 33–58

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm820>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 14:42:36

УДК 517.98

А. А. Артемов

Преобразование Пуассона для однополостного гиперboloида

Работа посвящена изучению преобразования Пуассона и нахождению полной асимптотики (не только главного члена) этого преобразования на бесконечности для одного важного подкласса класса полупростых симметрических пространств G/H с некомпактной H , а именно для вещественных гиперболических пространств (однополостных гиперboloидов) $SO_0(1, n-1)/SO_0(1, n-2)$. Разложения получены для *произвольных* (не только K -финитных) функций. Описаны операторы, действующие в функциях на границе, которые участвуют в коэффициентах разложений. Исследованы приводимость и неприводимость собственных для оператора Лапласа–Бельтрами подпространств функций на гиперboloиде. Описана структура представлений, действующих в пространствах собственных функций. Приводится описание ядра и замыкания образа преобразования Пуассона.

Библиография: 21 название.

§ 0. Введение

Классическое преобразование Пуассона восстанавливает функцию, гармоническую в круге, по ее значениям на границе. А именно пусть $f(z)$ — функция, гармоническая и ограниченная в круге $|z| < 1$, тогда она имеет радиальные граничные значения почти всюду на окружности $|z| = 1$:

$$\lim_{r \rightarrow 1} f(re^{i\alpha}) = \varphi(e^{i\alpha}), \quad (0.1)$$

и функция f выражается через функцию φ с помощью известного преобразования Пуассона (теорема Фату):

$$f(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\alpha-\beta)+r^2} \varphi(e^{i\beta}) d\beta. \quad (0.2)$$

Это преобразование было обобщено сначала на классические ограниченные области (Хуа Ло-кен), затем на римановы симметрические пространства G/K , где G — некомпактная полупростая группа Ли, K — ее максимальная компактная подгруппа (Г. Фюрстенберг, А. Кораньи, С. Хелгасон и др.). При этом рассматривались не только гармонические функции, но и функции, которые являются собственными для алгебры всех инвариантных дифференциальных операторов.

Для *римановых* симметрических пространств G/K гармонический анализ в основном построен. В частности, преобразование Пуассона было использовано

в работе М. Кашивары и др. [1] при описании подпространств, которые состоят из функций, собственных для каждого оператора из $\mathbb{D}(G/H)$ – алгебры всех дифференциальных операторов на G/H , инвариантных относительно G . В [1] было показано, что на римановом симметрическом пространстве G/K всякая функция класса C^∞ из собственного подпространства для $\mathbb{D}(G/K)$ есть преобразование Пуассона некоторой гиперфункции на границе пространства G/K .

В настоящее время актуальным является изучение преобразования Пуассона для более широкого класса однородных пространств G/H , а именно для полупростых симметрических пространств G/H (в другой терминологии – аффинных (или псевдоримановых) симметрических пространств). Здесь подгруппа H может быть уже некомпактной, и тогда пространство G/H – не римановым. Переход к некомпактным H приводит к резкому увеличению трудностей.

Как показало развитие гармонического анализа на однородных пространствах, преобразование Пуассона оказывается одним из основных и естественных инструментов этой теории. Оно теснейшим образом связано с векторами (вообще говоря, обобщенными) в пространствах представлений, инвариантными относительно H . Роль H -инвариантов в определении двух важнейших преобразований в гармоническом анализе – преобразования Фурье и преобразования Пуассона – была проявлена в работах В. Ф. Молчанова, см., например, [2], [3].

К настоящему времени основным общим результатом, относящимся к преобразованию Пуассона для полупростых симметрических пространств G/H , остается анонсированный в 1979 году результат Т. Осимы [4], который состоит в том, что для гомоморфизма $\chi: \mathbb{D}(G/H) \rightarrow \mathbb{C}$ общего положения пространство собственных гиперфункций на G/H (а следовательно, и C^∞ -функций на G/H), отвечающих этому гомоморфизму, состоит из преобразований Пуассона гиперфункций на границе пространства G/H . Для частного случая (для гиперболических пространств) этот факт доказан Дж. Секигучи, см. [5].

Вернемся к теореме Фату (см. (0.1), (0.2)). В более общем случае риманова симметрического пространства G/K имеет место соотношение, аналогичное (0.1): если функция f на G/K есть преобразование Пуассона функции φ на границе, то φ есть коэффициент в главном члене асимптотики f на бесконечности.

Возникает естественная задача для пространств G/H : найти связь с φ не только главного члена асимптотики, но и всех членов асимптотического разложения, стало быть, описать *всю* асимптотику (не только ее главный член) преобразования Пуассона на бесконечности. Для пространств G/K близкую задачу рассматривал Хариш-Чандра [6], [7]: он изучал асимптотическое разложение матричных элементов группы G в базисе из K -финитных векторов, см. также [8]. Развивая методы Хариш-Чандры, Э. ван ден Бан и Г. Шлихткрюль (см. [9], [10]) изучали асимптотические разложения для произвольных собственных функций на G/K . В частности, их результат позволяет охарактеризовать пространство собственных функций из $C^\infty(G/K)$, которые получаются преобразованием Пуассона функций класса C^∞ на границе (надо наложить некоторое условие на рост на бесконечности).

Для полупростых симметрических пространств G/H асимптотическое разложение K -финитных собственных функций изучалось в работах Э. ван ден Бана и Г. Шлихткрюля [11], [12]. Их разложение есть ряд по экспонентам $\exp \nu(X)$, где X располагается в открытой камере Вейля в картановском подпространстве $\mathfrak{a}$

пространства G/H , а ν пробегает некоторое дискретное бесконечное множество в дуальном пространстве $\mathfrak{a}_c^*$.

Заметим еще раз, что преобразование Пуассона является одним из основных инструментов гармонического анализа на однородных пространствах G/H . Так, например, асимптотика преобразования Пуассона оказывается необходимой для изучения граничных и так называемых канонических представлений, введенных в работах Березина и Вершика–Гельфанда–Граева, которые, в свою очередь, тесно связаны с построением квантования (исчисления символов) в духе Березина. Преобразования Пуассона и Фурье являются сплетающими операторами для канонических представлений и представлений основной серии, связанной с G/K . Структура граничных представлений определяется мероморфной структурой преобразования Пуассона. Асимптотика преобразования Пуассона используется и для диагонализации представлений в обобщенных функциях, сосредоточенных на границе, и т.д. (см., например, [13]).

В настоящей работе мы исследуем асимптотическое разложение преобразования Пуассона на бесконечности для одного важного подкласса класса полупростых симметрических пространств G/H с некомпактной H , а именно однополостных гиперболоидов $SO_0(1, n-1)/SO_0(1, n-2)$. Мы рассматриваем произвольные (не только K -финитные) функции и разложения в ряды не только по экспонентам, но и по степеням некоторых других функций. Автор выражает благодарность В. Ф. Молчанову за постановку задачи. Случай однополостного гиперболоида существенно отличается от случая гиперболоидов с произвольной сигнатурой $SO_0(p, q)/SO_0(p, q-1)$. Поэтому его рассмотрению мы и посвятили настоящую работу. Мы ограничились случаем $n > 3$. Случай $n = 3$ практически содержится в нашей работе, лишь в отдельных формулах имеются небольшие отличия, см. также [14]. Случай произвольной сигнатуры (p, q) рассмотрен в [15].

В работе приводится описание представлений группы $G = SO_0(1, n-1)$, связанных с конусом. Они реализуются в функциях на компактном многообразии S – границе гиперболоида $X = G/H$, $H = SO_0(1, n-2)$. Также дается описание H -инвариантных векторов $\theta_{\sigma, \varepsilon}$, $\sigma \in \mathbb{C}$, $\varepsilon = 0, 1$, в этих представлениях, которые оказываются обобщенными функциями.

Затем мы даем описание пространств $\mathcal{H}_{\sigma, \varepsilon} \subset C^\infty(X)$, собственных для оператора Δ с собственным числом $\sigma\sigma^*$ ($\sigma^* = 2 - n - \sigma$) и четности $\varepsilon = 0, 1$. Мы выясняем, когда эти пространства неприводимы, и указываем структуру инвариантных подпространств в случае, когда они приводимы.

Далее мы определяем преобразование Пуассона, отвечающее H -инварианту θ .

Основной результат работы заключается в следующем. Введем на X полярные координаты t, s , где $t \in \mathbb{R}$, $s \in S$. Пусть φ – функция на S класса C^∞ и четности ε . Обозначим через ψ “базисную” функцию $1 - \text{th } t$. Тогда для σ общего положения ($\sigma \notin n/2 + \mathbb{Z}$, $\sigma \notin -1 - \mathbb{N}$) имеет место разложение

$$(P_{\sigma, \varepsilon} \varphi)(t, s) = (\text{ch } t)^\sigma \sum_{r=0}^{\infty} (C_{\sigma, \varepsilon, r} \varphi)(s) \psi^r + (\text{ch } t)^{\sigma^*} \sum_{r=0}^{\infty} (D_{\sigma, \varepsilon, r} \varphi)(s) \psi^r, \quad (0.3)$$

где $C_{\sigma,\varepsilon,r}$ и $D_{\sigma,\varepsilon,r}$ – некоторые операторы в пространстве $\mathcal{D}_\varepsilon(S)$ функций φ класса C^∞ и четности ε . Эти операторы явно вычислены. Замечательным фактом оказывается то, что операторы $C_{\sigma,\varepsilon,r}$ – это *интегральные* операторы, а $D_{\sigma,\varepsilon,r}$ – это *дифференциальные* операторы. В частности, при $r = 0$ оператор C только множителем отличается от сплетающего оператора $A_{\sigma,\varepsilon}$, а оператор D только множителем (обозначим его $y_0(\sigma, \varepsilon)$) отличается от тождественного оператора.

В частности, мы можем написать решение “задачи Дирихле” на гиперboloиде X . Задача состоит в следующем:

$$\begin{aligned}\Delta f &= \sigma \sigma^* f, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} (\operatorname{ch} t)^{-\sigma} f(t, s) &= \varphi(s),\end{aligned}$$

где $\operatorname{Re} \sigma > (2 - n)/2$, σ – общего положения, φ – функция четности ε . Решение задачи дается при помощи преобразования Пуассона:

$$f(t, s) = \frac{1}{y_0(\sigma^*, \varepsilon)} (P_{\sigma^*, \varepsilon} \varphi)(t, s).$$

Ограничение $\sigma \notin -1 - \mathbb{N}$ для (0.3) можно убрать, если нормализовать преобразование Пуассона надлежащим образом.

Для *K-финитных* функций φ разложение (0.3) есть разложение в абсолютно сходящиеся ряды. Для *произвольных* функций φ (не обязательно *K-финитных*) мы можем утверждать лишь только то, что разложение (0.3) является *асимптотическим* разложением (точный смысл указан в теореме 5.2).

Главные трудности, которые приходится преодолевать при доказательстве разложений (0.3), связаны именно со случаем произвольной φ . Доказательство требует различного рода оценок и т. д. Основная идея связана со сдвигом по параметру σ (см. рекуррентные соотношения (5.17)).

В случае $\sigma \in \frac{n}{2} + \mathbb{Z}$ справедливо разложение, аналогичное (0.3), но в “малой” асимптотике (т.е. в слагаемом с $(\operatorname{ch} t)^{\sigma^*}$ при $\operatorname{Re} \sigma > (2 - n)/2$ и $(\operatorname{ch} t)^\sigma$ при $\operatorname{Re} \sigma < (2 - n)/2$) появляется множитель $\ln \operatorname{ch} t$. Явные выражения операторов C и D сильно усложняются, поэтому чтобы не загромождать текст длинными формулами, мы не стали рассматривать в тексте эти σ .

Приведем здесь некоторые обозначения и формулы, используемые в работе: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$; $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ – соответственно целые, вещественные, комплексные числа. Если M – многообразие, то $\mathcal{D}(M)$ обозначает пространство Шварца комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций на M с компактным носителем, снабженное обычной топологией, а $\mathcal{D}'(M)$ обозначает пространство обобщенных функций на M , т.е. пространство непрерывных антилинейных функционалов на $\mathcal{D}(M)$. Значение функционала $F \in \mathcal{D}'(M)$ на $f \in \mathcal{D}(M)$ мы обозначаем через (F, f) . Будем обозначать $\mathfrak{g} = \operatorname{Lie} G$. Знак сравнения $\equiv$ обозначает сравнение по модулю 2.

Мы используем обобщенные функции на прямой $x_\pm^\lambda$, $(x \pm i0)^\lambda$, $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda \operatorname{sgn} x$ из [16]. Для сокращения записи будем использовать обозначение

$$x^{\lambda, \varepsilon} = |x|^\lambda \operatorname{sgn}^\varepsilon x = x_+^\lambda + (-1)^\varepsilon x_-^\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad \varepsilon = 0, 1. \quad (0.4)$$

Дельта-функция Дирака и ее k -производная обозначаются $\delta(x)$ и $\delta^{(k)}(x)$, $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера, $F(a, b; c; x)$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

Обобщенные степени:

$$a^{(m)} = a(a-1) \cdots (a-m+1), \quad a^{[m]} = a(a+1) \cdots (a+m-1).$$

§ 1. Группа $\mathrm{SO}_0(1, n-1)$ и ее представления, связанные с конусом

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$, $n > 3$, билинейную форму

$$[x, y] = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i y_i, \quad (1.1)$$

$\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 1$. Пусть G – связная группа всех линейных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющих форму (1.1). В стандартных обозначениях (см. [17]) $G = \mathrm{SO}_0(1, n-1)$. Мы будем рассматривать действие группы G на $\mathbb{R}^n$ справа $x \mapsto xg$ и, следовательно, записывать x в виде строки $x = (x_1, \dots, x_n)$. Обозначим через A подгруппу группы G , состоящую из матриц

$$a_t = \begin{pmatrix} \mathrm{ch} t & 0 & \mathrm{sh} t \\ 0 & E_{n-2} & 0 \\ \mathrm{sh} t & 0 & \mathrm{ch} t \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

где $t \in \mathbb{R}$, E_r – единичная матрица порядка r . Пусть K обозначает максимальную компактную подгруппу в G , состоящую из матриц, сохраняющих координату x_1 ; эта подгруппа изоморфна $\mathrm{SO}(n-1)$.

Элемент Казимира из универсальной обертывающей алгебры группы G есть

$$\Delta_{\mathfrak{g}} = \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j (E_{ij} - \lambda_i \lambda_j E_{ji})^2 \quad (1.3)$$

(E_{ij} – стандартный матричный базис).

Пусть X_0 обозначает конус $[x, x] = 0$, $x \neq 0$ в $\mathbb{R}^n$. Группа G действует на нем, на каждом поле $x_1 > 0$ и $x_1 < 0$, транзитивно. Пусть S есть сечение конуса гиперплоскостью $x_1 = 1$, так что S состоит из точек $s = (1, s_2, \dots, s_n)$, $s_2^2 + \cdots + s_n^2 = 1$, поэтому S есть единичная сфера в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Действие группы K вращениями на S : $s \mapsto sk$, $k \in K$, транзитивно, S есть симметрическое пространство группы K , стационарной подгруппой точки $s^0 = (1, 0, \dots, 0, 1)$ служит подгруппа K_{00} , изоморфная $\mathrm{SO}(n-2)$.

Пусть ds есть евклидова мера на S : $ds = |s_j|^{-1} ds_2 \cdots \widehat{ds_j} \cdots ds_n$, где дифференциал с крышкой надо опустить (при разных j эти выражения определяют одну и ту же меру). Эта мера инвариантна относительно подгруппы K . Объем всего S равен $\mathrm{vol} S = \Omega_{n-1}$, где

$$\Omega_r = \frac{2\pi^{r/2}}{\Gamma(\frac{r}{2})} \quad (1.4)$$

есть объем единичной сферы в $\mathbb{R}^r$. Пусть Δ_S есть оператор Лапласа–Бельтрами на S , отвечающий евклидовой метрике.

Обозначим через R представление группы K вращениями в $\mathcal{D}(S)$:

$$(R(k)\varphi)(s) = \varphi(sk).$$

Оно унитарно относительно скалярного произведения

$$(\psi, \varphi) = \int_S \psi(s) \overline{\varphi(s)} ds. \quad (1.5)$$

Приведем некоторые сведения о гармоническом анализе на сфере S^{r-1} : $x_1^2 + \dots + x_r^2 = 1$ в $\mathbb{R}^r$, $r \geq 3$, см. [18]. Представление $R^{(r)}$ группы $\mathrm{SO}(r)$ вращениями в пространстве $\mathcal{D}(S^{r-1})$ разлагается в прямую сумму попарно неэквивалентных неприводимых представлений $R_m^{(r)}$ в пространствах $H_m^{(r)}$, $m \in \mathbb{N}$. Пространство $H_m^{(r)}$ состоит из ограничений на S^{r-1} однородных гармонических многочленов от $x_1, \dots, x_r$ степени однородности m . Оно является собственным подпространством для оператора Лапласа–Бельтрами на S^{r-1} , отвечающего евклидовой метрике, с собственным значением $m(2 - r - m)$. Сферической (зональной) функцией относительно стационарной подгруппы, скажем, точки $(0, \dots, 0, 1)$ в $H_m^{(r)}$, является функция $\psi_m^{(r)}(s_n)$, где $\psi_m^{(r)}(t) = C_m^{(r-2)/2}(t)/C_m^{(r-2)/2}(1)$, $C_m^\lambda(t)$ – многочлен Гегенбауэра. Размерность пространства $H_m^{(r)}$ равна

$$d_m^{(r)} = \frac{2m + r - 2}{(r - 2)!} \cdot \frac{(r + m - 3)!}{m!}. \quad (1.6)$$

Применим это к нашему случаю и приведем некоторые факты из [19], [20]. Представление R группы K распадается в прямую сумму попарно неэквивалентных представлений в пространствах $H_m = H_m^{(n-1)}$, $m \in \mathbb{N}$, собственных для оператора Δ_S :

$$\Delta_S \varphi = \lambda_m \varphi, \quad \lambda_m = m(3 - n - m). \quad (1.7)$$

Сферической (зональной) функцией в H_m относительно K_{00} служит функция

$$\psi_m(s) = \psi_m^{(n-1)}(s_n), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (1.8)$$

Ее скалярный квадрат связан с размерностью $d_m = d_m^{(n-1)}$ пространства H_m :

$$(\psi_m, \psi_m) = \frac{\mathrm{vol} S}{d_m}. \quad (1.9)$$

Пусть E_m – проектор в $\mathcal{D}(S)$ (или в $L^2(S)$) на подпространство H_m :

$$(E_m \varphi)(s^0 k) = \frac{(R(k)\varphi, \psi_m)}{(\psi_m, \psi_m)}, \quad \varphi \in \mathcal{D}(S). \quad (1.10)$$

Из (1.10) с помощью неравенства Коши–Буняковского и (1.9) мы находим оценку для компонент Фурье:

$$|(E_m \varphi)(s)| \leq \sqrt{\frac{d_m}{\mathrm{vol} S}} \|\varphi\|, \quad (1.11)$$

где норма отвечает скалярному произведению (1.5). В частности, из (1.11) получаем оценку

$$|\psi_m(s)| \leq 1. \quad (1.12)$$

Применим (1.11) к $\Delta_S^k \varphi$ вместо φ . Используя перестановочность Δ_S и E_m и равенство (1.7), получаем оценку

$$|E_m \varphi(s)| \leq \sqrt{\frac{d_m}{\text{vol } S}} |\lambda_m|^{-k} \|\Delta_S^k \varphi\|. \quad (1.13)$$

Поскольку размерность d_m (см. (1.6)) при $m \rightarrow \infty$ растет как Cm^{n-3} , а $|\lambda_m|$ (см. (1.7)) растет как m^2 , из (1.13) следует быстрое убывание как компонент Фурье $\varphi_m = E_m \varphi$, так и их норм, т.е. для всякого $h \in \mathbb{N}$ существует постоянная C такая, что

$$|\varphi_m(s)| \leq C(m+1)^{-h}, \quad \|\varphi_m\| \leq C(m+1)^{-h}. \quad (1.14)$$

Всякая функция $\varphi \in \mathcal{D}(S)$ разлагается в сумму своих проекций (компонент Фурье):

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m. \quad (1.15)$$

И обратно, если последовательность функций $\varphi_m \in H_m$ быстро убывает в смысле (1.14), то ряд $\sum \varphi_m$ сходится абсолютно и равномерно к некоторой функции $\varphi \in \mathcal{D}(S)$, компонентами которой и являются φ_m .

Определим действие группы G на S формулой $s \mapsto sg/(sg)_1$. Ограничение этого действия на K есть действие группы K вращениями, рассмотренное выше.

Пусть σ — комплексное число. Представление T_σ группы G действует в $\mathcal{D}(S)$ по формуле:

$$T_\sigma(g)\varphi(s) = \varphi\left(\frac{sg}{(sg)_1}\right)(sg)_1^\sigma.$$

Оно непрерывно и бесконечно дифференцируемо. Ограничение представления T_σ на подгруппу K есть представление R .

Обозначим $\sigma^* = 2 - n - \sigma$. Форма (1.5) инвариантна относительно пары (T_σ, T_{σ^*}) , так что

$$(T_\sigma(g)\psi, \varphi) = (\psi, T_{\sigma^*}(g^{-1})\varphi). \quad (1.16)$$

Для исследования неприводимости представлений T_σ достаточно проследить за тем, как действует группа A (см. (1.2)) или ее направляющий вектор

$$L_A = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} a_t \in \mathfrak{g}$$

на сферические функции ψ_m . Поскольку A коммутирует с K_{00} , оператор $T_\sigma(L_A)$ переводит функции, постоянные на K_{00} -орбитах, т.е. функции, зависящие только от s_n , в такие же функции и индуцирует на них следующий дифференциальный оператор: $\sigma s_n + (1 - s_n^2) \frac{d}{ds_n}$. Поэтому

$$T_\sigma(L_A)\psi_m = \frac{1}{2m+n-3} \{m(\sigma+n-3+m)\psi_{m-1} + (m+n-3)(\sigma-m)\psi_{m+1}\}. \quad (1.17)$$

Отсюда вытекает следующий результат.

Представления T_σ неприводимы, кроме случаев: а) $\sigma \in \mathbb{N}$; б) $\sigma \in 2 - n - \mathbb{N}$. Если $\sigma \in \mathbb{N}$, то в $\mathcal{D}(S)$ есть неприводимое инвариантное конечномерное подпространство $V_{\sigma,1} = \sum_{m=0}^{\sigma} H_m$, факторпространство по которому неприводимо. Если $\sigma \in 2 - n - \mathbb{N}$, то в $\mathcal{D}(S)$ есть неприводимое инвариантное подпространство $V_{\sigma,2} = \sum_{m \geq 3-n-\sigma} H_m$, факторпространство по которому конечномерно и неприводимо.

Элемент (1.3) в представлении T_σ переходит в скалярный оператор:

$$T_\sigma(\Delta_g) = \sigma^* \sigma E, \quad (1.18)$$

где E – тождественный оператор в $\mathcal{D}(S)$.

Определим оператор A_σ на $\mathcal{D}(S)$ формулой

$$(A_\sigma \varphi)(s) = \int_S (-[s, \tilde{s}])^{\sigma^*} \varphi(\tilde{s}) d\tilde{s}. \quad (1.19)$$

Интеграл здесь абсолютно сходится при $\operatorname{Re} \sigma < 3 - n$, на остальные σ продолжается по аналитичности. Оператор A_σ является непрерывным оператором в $\mathcal{D}(S)$. Он есть мероморфная функция от σ с простыми полюсами в точках $\sigma = (2 - n)/2 + k$, $k \in \mathbb{N}$, так что оператор

$$\tilde{A}_\sigma = \frac{1}{\Gamma(\frac{2-n}{2} - \sigma)} A_\sigma$$

является целой функцией от σ , не обращающейся в нуль.

Пространства H_m являются собственными для оператора A_σ :

$$A_\sigma \varphi = a(\sigma, m) \varphi, \quad \varphi \in H_m, \quad (1.20)$$

где

$$a(\sigma, m) = (-1)^m 2^{-\sigma} \pi^{\frac{n-2}{2}} \frac{\Gamma(3 - n - \sigma) \Gamma(\frac{2-n}{2} - \sigma)}{\Gamma(3 - n - \sigma - m) \Gamma(m - \sigma)}. \quad (1.21)$$

Оператор A_σ сплетает представления T_σ и T_{σ^*} : $T_{\sigma^*} A_\sigma = A_\sigma T_\sigma$.

Из (1.20), (1.21) следует, что

$$A_{\sigma^*} A_\sigma = \gamma(\sigma) E, \quad (1.22)$$

где

$$\gamma(\sigma) = (-1)^{n-1} 2^{n-2} \pi^{n-4} \Gamma(\sigma+1) \Gamma(\sigma^*+1) \Gamma\left(\frac{2-n}{2} - \sigma\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{2} + \sigma\right) \sin^2(\sigma\pi). \quad (1.23)$$

Таким образом, для нецелых σ представления T_σ и T_{σ^*} эквивалентны. Для целых σ имеется частичная эквивалентность.

С формой (1.5) оператор A_σ взаимодействует так:

$$(A_\sigma \psi, \varphi) = (\psi, A_{\bar{\sigma}} \varphi). \quad (1.24)$$

Для всякого $\sigma \in \mathbb{C}$ определим формулой (1.16) представление группы G в пространстве $\mathcal{D}'(S)$, которое мы тоже обозначим T_σ . В (1.16) ψ есть обобщенная функция из $\mathcal{D}'(S)$, φ – функция из $\mathcal{D}(S)$ и (ψ, φ) – значение функционала ψ на функции φ . Только что определенное представление T_σ есть расширение старого представления T_σ , если мы с помощью (1.5) сопоставим функции $\psi \in \mathcal{D}(S)$ функционал $\varphi \mapsto (\psi, \varphi)$ из $\mathcal{D}'(S)$. Аналогично распространим оператор A_σ на $\mathcal{D}'(S)$ – с помощью (1.24).

§ 2. Собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами на однополостном гиперboloиде в $\mathbb{R}^n$

Множество X в $\mathbb{R}^n$, задаваемое уравнением $[x, x] = 1$, называется однополостным гиперboloидом. Он есть однородное пространство G/H , где H есть стационарная подгруппа точки $x^0 = (0, \dots, 0, 1)$ из X . Группа H изоморфна $SO_0(1, n-2)$. Метрика $[dx, dx]$ на X (с лоренцевой сигнатурой) инвариантна относительно G . Она порождает меру dx и оператор Лапласа–Бельтрами Δ на X , инвариантные относительно G :

$$dx = |x_1|^{-1} dx_2 \cdots dx_n, \quad \Delta = D_2 + D_1(2 - n - D_1),$$

где

$$D_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad D_1 = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Введем на X полярные координаты t, s , $t \in \mathbb{R}, s \in S$, следующим образом:

$$x = (\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t \cdot v), \quad s = (1, v).$$

Эти координаты связаны с разложением Картана–Берже $G = HAK$, см., например, [3]. В этих координатах мера dx и оператор Δ имеют вид:

$$dx = C(\operatorname{ch} t)^{n-1} dt ds, \quad \Delta = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} - (n-2) \operatorname{th} t \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} \Delta_S.$$

Заметим, что

$$\frac{x}{\operatorname{ch} t} \rightarrow (\pm 1, v), \quad t \rightarrow \pm \infty. \quad (2.1)$$

Таким образом, множество $S \cup (-S)$ является границей гиперboloида X (в смысле Ф. И. Карпелевича).

Пусть U обозначает представление группы G в пространстве $C^\infty(X)$ сдвигами: $(U(g)f)(x) = f(xg)$. Это представление непрерывно и бесконечно дифференцируемо.

Оно порождает представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G и ее универсальной обертывающей алгебры, которые мы обозначим тем же символом U . Образ элемента Казимира $\Delta_{\mathfrak{g}}$ (1.3) есть оператор Лапласа–Бельтрами Δ :

$$\Delta = U(\Delta_{\mathfrak{g}}). \quad (2.2)$$

Для $\sigma \in \mathbb{C}, \varepsilon = 0, 1$ обозначим через $\mathcal{H}_{\sigma, \varepsilon}$ подпространство в $C^\infty(X)$, состоящее из функций $f(x)$, удовлетворяющих соотношениям:

$$\Delta f = \sigma^* \sigma f, \quad f(-x) = (-1)^\varepsilon f(x). \quad (2.3)$$

Оно замкнуто. Понятно, что $\mathcal{H}_{\sigma, \varepsilon} = \mathcal{H}_{\sigma^*, \varepsilon}$. Пусть $U_{\sigma, \varepsilon}$ обозначает ограничение на $\mathcal{H}_{\sigma, \varepsilon}$ представления U .

Разделим переменные t и s в уравнении (2.3): $f(t, s) = R(t)V(s)$. Тогда функция V на S должна входить в одно из пространств H_m , а функция R на вещественной оси должна удовлетворять уравнению

$$-\frac{d^2 R}{dt^2} - (n-2) \operatorname{th} t \frac{dR}{dt} + \left(\frac{m(3-n-m)}{\operatorname{ch}^2 t} - \sigma^* \sigma \right) R = 0. \quad (2.4)$$

Из (2.3) для функции $R(t)$ получаем следующее условие четности:

$$R(-t) = (-1)^{\varepsilon+m} R(t). \quad (2.5)$$

Вообще, для данных σ и m фиксируем базис $R(\sigma, l, m; t)$, где $l = 0, 1$, решений уравнения (2.4), состоящий из четной: $l = 0$, и нечетной: $l = 1$, функций (как именно см. ниже (2.12)). Таким образом, решение уравнения (2.4), удовлетворяющее (2.5), есть с точностью до множителя функция $R(\sigma, l, m; t)$ с условием $l \equiv \varepsilon + m$.

ТЕОРЕМА 2.1. *Для всякой функции $f \in \mathcal{H}_{\sigma, \varepsilon}$ существуют функции φ_m на S из H_m такие, что f представляется в виде суммы ряда*

$$f(t, s) = \sum_{m=0}^{\infty} R(\sigma, l, m; t) \varphi_m(s), \quad (2.6)$$

где $l \equiv \varepsilon + m$. Этот ряд сходится в топологии пространства $C^\infty(X)$. В частности, равенство (2.6) можно дифференцировать по t и применять оператор Δ_S сколько угодно раз.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем в каждом H_m базис φ_{mj} , $j = 1, \dots, d_m$, ортонормальный относительно формы (1.5). Из (1.11) мы имеем оценку:

$$|\varphi_{mj}(s)| \leq \sqrt{\frac{d_m}{\operatorname{vol} S}}. \quad (2.7)$$

Возьмем функцию $f(t, s)$ из $\mathcal{H}_{\sigma, \varepsilon}$. Для всякого $t \in \mathbb{R}$ разложим ее как функцию от s по базису φ_{mj} :

$$f(t, s) = \sum_m \sum_j c_{mj}(t) \varphi_{mj}(s), \quad (2.8)$$

где коэффициенты Фурье $c_{mj}(t)$ вычисляются по формуле:

$$c_{mj}(t) = \int_S f(t, s) \overline{\varphi_{mj}(s)} ds. \quad (2.9)$$

Покажем, что ряд (2.8) сходится в топологии пространства $C^\infty(X)$. Эту топологию можно задать с помощью системы норм

$$\|g\|_{T, N} = \max_{0 \leq k, r \leq N} \max_{|t| \leq T} \max_{s \in S} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^k \Delta_S^r g(t, s) \right|,$$

где $T, N \in \mathbb{N}$. Для нашей функции f положим

$$M(T, k, h) = \max_{0 \leq i \leq k} \max_{|t| \leq T} \max_{s \in S} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^i \Delta_S^h f(t, s) \right|, \quad (2.10)$$

где $T, k, h \in \mathbb{N}$. Используя самосопряженность оператора Δ_S относительно формы (1.5), формулу (1.7) и оценку (2.7), мы получаем из (2.9) и (2.10) следующую оценку для производных от коэффициентов Фурье:

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^k c_{mj}(t) \right| \leq M(T, k, h) |\lambda_m|^{-h} \sqrt{\frac{d_m}{\text{vol } S}},$$

где h — произвольное число из $\mathbb{N}$, и затем оценку для норм членов ряда (2.8):

$$\|c_{mj} \varphi_{mj}\|_{T, N} \leq M(T, N, h) |\lambda_m|^{N-h} \frac{d_m}{\text{vol } S}.$$

Поэтому мажорантой для ряда с $m > 0$, составленного из (T, N) -норм ряда (2.8), служит ряд

$$\frac{1}{\text{vol } S} M(T, N, h) \sum_{m > 0} d_m^2 |\lambda_m|^{N-h}. \quad (2.11)$$

Поскольку, как мы уже говорили, $d_m \sim C m^{n-3}$ и $|\lambda_m| \sim m^2$, ряд (2.11) сходится при $2(n - 3 + N - h) < -1$, так что достаточно взять $h > N + n - 5/2$, чтобы получить сходимость ряда (2.8) по норме $\|\cdot\|_{T, N}$.

Подставим (2.8) в (2.3). Теперь мы имеем право применить Δ к правой части (2.8) почленно. Тогда для коэффициентов Фурье $c_{mj}(t)$ мы получаем как раз уравнение (2.4) и еще условие (2.5). Следовательно, существуют числа α_{mj} такие, что

$$c_{mj}(t) = \alpha_{mj} R(\sigma, l, m; t), \quad l \equiv \varepsilon + m.$$

Подставляя это представление в (2.8), получаем (2.6), где

$$\varphi_m(s) = \sum_j \alpha_{mj} \varphi_{mj}(s).$$

Напишем явные выражения для радиальной составляющей $R(\sigma, l, m; t)$. Положим $z = \text{th}^2 t$ и сделаем в уравнении (2.4) замену функции:

$$R(t) = (\text{ch } t)^\sigma (\text{th } t)^l v(z).$$

Тогда уравнение (2.4) дает для $v(z)$ гипергеометрическое уравнение с параметрами

$$a = \frac{l - \sigma + m}{2}, \quad b = \frac{l + 3 - n - \sigma - m}{2}, \quad c = l + \frac{1}{2}.$$

Таким образом, базис решений уравнения (2.4) состоит из следующих двух функций ($l = 0, 1$):

$$R(\sigma, l, m; t) = (\text{ch } t)^\sigma (\text{th } t)^l F\left(\frac{l - \sigma + m}{2}, \frac{l + 3 - n - \sigma - m}{2}; l + \frac{1}{2}; \text{th}^2 t\right), \quad (2.12)$$

где F — гипергеометрическая функция Гаусса. Эти функции определены для всех $\sigma \in \mathbb{C}$ и всех $m \in \mathbb{Z}$. Они инвариантны относительно замены $m \mapsto 3 - n - m$ (это

сразу видно из (2.12)), а также замены $\sigma \mapsto \sigma^*$: $R(\sigma, l, m; t) = R(\sigma^*, l, m; t)$ (это вытекает из [21; 2.1(23)]).

Пусть $\sigma \in \mathbb{N}$ или $\sigma^* \in \mathbb{N}$. При условии $\varepsilon \equiv \sigma$ обозначим через $\mathcal{H}_{\sigma, \varepsilon, 1}$ подпространство в $\mathcal{H}_{\sigma, \varepsilon}$, натянутое на подпространства $R(\sigma, l, m; t)H_m$, для которых $\sigma - m \geq 0$. При условии $\varepsilon \equiv \sigma + 1$ обозначим через $\mathcal{H}_{\sigma, \varepsilon, 2}$ подпространство в $\mathcal{H}_{\sigma, \varepsilon}$, натянутое на подпространства $R(\sigma, l, m; t)H_m$, для которых $\sigma + m + n - 3 \geq 0$. Эти определения корректны: они инвариантны относительно замены $\sigma \mapsto \sigma^*$, т.е. $\mathcal{H}_{\sigma, \varepsilon, i} = \mathcal{H}_{\sigma^*, \varepsilon, i}$.

ТЕОРЕМА 2.2. *Представление $U_{\sigma, \varepsilon}$ неприводимо, за исключением $\sigma \in \mathbb{N}$ и $\sigma^* \in \mathbb{N}$. Если $\sigma \in \mathbb{N}$, $\sigma \equiv \varepsilon$, или $\sigma^* \in \mathbb{N}$, $\sigma^* \equiv \varepsilon$, то имеется единственное нетривиальное подпространство – это $\mathcal{H}_{\sigma, \varepsilon, 1}$. Если $\sigma \in \mathbb{N}$, $\sigma \equiv \varepsilon + 1$, или $\sigma^* \in \mathbb{N}$, $\sigma^* \equiv \varepsilon + 1$, то имеется единственное нетривиальное подпространство – это $\mathcal{H}_{\sigma, \varepsilon, 2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проследить за тем, как действует оператор $U(L_A)$ на функции

$$h(\sigma, \varepsilon, m; x) = R(\sigma, l, m; t)\psi_m(s), \quad l \equiv \varepsilon + m, \quad (2.13)$$

для краткости мы будем их обозначать h_m . Ниже, в § 4, будут доказаны следующие формулы:

$$U(L_A)h_m = -\frac{1}{2m+n-3} \left\{ m(\sigma+1-m)(\sigma^*+1-m)h_{m-1} + (m+n-3)(\sigma-m)(\sigma^*-m)h_{m+1} \right\}, \quad m \equiv \varepsilon, \quad (2.14)$$

$$U(L_A)h_m = -\frac{1}{2m+n-3} \left\{ mh_{m-1} + (m+n-3)h_{m+1} \right\}, \quad m \equiv \varepsilon + 1. \quad (2.15)$$

Из них мы видим, что на луче m , $m \in \mathbb{N}$, барьером для движения слева направо служит точка $\sigma \in \mathbb{N}$ при условии $\sigma \equiv \varepsilon$ или точка $\sigma^* \in \mathbb{N}$ при условии $\sigma^* \equiv \varepsilon$, а барьером для движения справа налево служит точка $\sigma + 1$ при условии $\sigma \equiv \varepsilon + 1$ или точка $\sigma^* + 1$ при условии $\sigma^* \equiv \varepsilon + 1$. Из этого и вытекают утверждения теоремы.

Для изучения асимптотики преобразования Пуассона при $t \rightarrow \pm\infty$ запишем функцию R с помощью степенных рядов по $1 - \xi$, где $\xi = \text{th } t$:

$$R(\sigma, l, m; t) = g(\sigma, l, m)(\text{ch } t)^\sigma V(\sigma, m; \xi) + g(\sigma^*, l, m)(\text{ch } t)^{\sigma^*} V(\sigma^*, m; \xi), \quad (2.16)$$

где

$$V(\sigma, m; \xi) = F\left(-\sigma + m, 3 - n - \sigma - m; \frac{4-n}{2} - \sigma; \frac{1-\xi}{2}\right), \quad (2.17)$$

$$g(\sigma, l, m) = \frac{\Gamma\left(\sigma + \frac{n-2}{2}\right) \Gamma\left(l + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{l+1+\sigma-m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l+n-2+\sigma+m}{2}\right)}. \quad (2.18)$$

Формула (2.16) получается из (2.12) с помощью преобразования [21; 2.10(1)] (см. также [21; 2.1(23)] для $l = 1$) и квадратичного преобразования [21; 2.1(27)].

Функция V определена для $\sigma \neq (4 - n)/2 + \mathbb{N}$. Поэтому разложение (2.16) справедливо для $\sigma \neq n/2 + \mathbb{Z}$.

Обозначим через $v_r(\sigma, m)$ коэффициенты степенного ряда (2.16) по степеням $1 - \xi$, т.е.

$$V(\sigma, m; \xi) = \sum_{r=0}^{\infty} v_r(\sigma, m)(1 - \xi)^r.$$

Напишем явный вид коэффициентов v_r . Он сразу следует из (2.17) в силу [21; 2.1(2)]. Кроме того, нам потребуется дальше выражение коэффициента v_r через собственные числа сплетающих операторов, см. (1.21):

$$v_r(\sigma, m) = (-1)^r 2^r \frac{(\sigma - m)^{[r]} (\sigma + m + n - 3)^{[r]}}{\left(\sigma + \frac{n-4}{2}\right)^{[r]} r!} = (-1)^r \binom{\sigma}{r} \frac{a(\sigma^* + r, m)}{a(\sigma^*, m)}.$$

Мы видим, что v_r являются многочленами от m степени $2r$, инвариантными при замене m на $3 - n - m$. Поэтому они являются многочленами степени r от λ_m , см. (1.7). Нормируем эти многочлены так, чтобы старший коэффициент (при λ_m^r) был равен 1, и обозначим эти нормированные многочлены от λ через $\overset{\circ}{v}_r(\sigma, \lambda)$. Следовательно,

$$v_r(\sigma, m) = (-1)^r \frac{1}{2^r r! \left(\sigma + \frac{n-4}{2}\right)^{(r)}} \overset{\circ}{v}_r(\sigma, \lambda),$$

где $\lambda = \lambda_m$. Напишем явный вид многочленов $\overset{\circ}{v}_r$:

$$\overset{\circ}{v}_r(\sigma, \lambda) = \prod_{j=0}^{r-1} [(\sigma - j)(\sigma - j + n - 3) + \lambda].$$

§ 3. Инварианты подгруппы H

Укажем элементы, инвариантные относительно подгруппы H (см. § 2), в представлениях группы G , описанных в § 1. Как правило, эти инварианты являются обобщенными функциями (функционалами), они принадлежат $\mathcal{D}'(S)$ или его подфакторам, см. [2].

ТЕОРЕМА 3.1. *Пространство инвариантных относительно H элементов в представлении T_σ имеет размерность 2. Базис в этом пространстве инвариантов состоит из двух обобщенных функций ($\varepsilon = 0, 1$) $\theta_{\sigma, \varepsilon} = [x^0, s]^{\sigma, \varepsilon} = s_n^{\sigma, \varepsilon}$ для $\sigma \neq -1, -2, \dots$ и из двух обобщенных функций $(s_n)^{-m-1}$, $\delta^{(m)}(s_n)$ для $\sigma = -m - 1$, $m \in \mathbb{N}$. (Здесь δ — дельта-функция Дирака.)*

Оператор A_σ переводит $\theta_{\sigma, \varepsilon}$ в $\theta_{\sigma^*, \varepsilon}$ с некоторым множителем:

$$A_\sigma \theta_{\sigma, \varepsilon} = j(\sigma, \varepsilon) \theta_{\sigma^*, \varepsilon}, \quad (3.1)$$

где

$$j(\sigma, \varepsilon) = 2^{-\sigma} \pi^{\frac{n-4}{2}} \Gamma(\sigma + 1) \Gamma\left(\frac{2-n}{2} - \sigma\right) \left[(-1)^\varepsilon \sin\left(\sigma + \frac{n}{2}\right)\pi - \sin\frac{n\pi}{2}\right]. \quad (3.2)$$

Из (3.1) и (1.22) следует, что множитель $\gamma(\sigma)$ из (1.22) можно записать, кроме (1.23), еще так (для разных ε получается одно и то же):

$$\gamma(\sigma) = j(\sigma, \varepsilon) j(\sigma^*, \varepsilon). \quad (3.3)$$

Обобщенная функция

$$\tilde{\theta}_{\sigma, \varepsilon} = \frac{\theta_{\sigma, \varepsilon}}{\Gamma\left(\frac{\sigma+1+\varepsilon}{2}\right)}$$

определена для всех $\sigma \in \mathbb{C}$ и инвариантна относительно $T_\sigma(H)$. Она только множителем отличается от $\theta_{\sigma, \varepsilon}$ для $\sigma \neq -1, -2, \dots$.

§ 4. Преобразование Пуассона

Определим в соответствии с [3] преобразование Пуассона $P_{\sigma, \varepsilon}$, порожденное H -инвариантом $\theta_{\sigma, \varepsilon}$, следующим образом (см. (0.4)):

$$(P_{\sigma, \varepsilon} \varphi)(x) = \int_S (T_\sigma(g^{-1}) \theta_{\sigma, \varepsilon})(s) \varphi(s) ds = \int_S [x, s]^{\sigma, \varepsilon} \varphi(s) ds, \quad (4.1)$$

где $x = x^0 g$. Преобразование Пуассона – это линейный непрерывный оператор из $\mathcal{D}(S)$ в $C^\infty(X)$, сплетающий представления T_{σ^*} и U :

$$U(g) P_{\sigma, \varepsilon} = P_{\sigma, \varepsilon} T_{\sigma^*}(g), \quad g \in G. \quad (4.2)$$

Отсюда (см. (1.18), (2.2))

$$\Delta \circ P_{\sigma, \varepsilon} = \sigma^* \sigma P_{\sigma, \varepsilon}. \quad (4.3)$$

С оператором A_σ он взаимодействует следующим образом:

$$P_{\sigma, \varepsilon} A_\sigma = j(\sigma, \varepsilon) P_{\sigma^*, \varepsilon}. \quad (4.4)$$

Кроме того, $(P_{\sigma, \varepsilon} \varphi)(x)$ имеет четность ε :

$$(P_{\sigma, \varepsilon} \varphi)(-x) = (-1)^\varepsilon (P_{\sigma, \varepsilon} \varphi)(x). \quad (4.5)$$

Образ преобразования $P_{\sigma, \varepsilon}$ лежит в $\mathcal{H}_{\sigma, \varepsilon}$ (это следует из (4.3), (4.5)).

Преобразование $P_{\sigma, \varepsilon}$ есть мероморфная функция от σ с полюсами в точках $\sigma = -1 - \varepsilon - 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Чтобы охватить все значения σ , мы можем рассмотреть преобразование $\tilde{P}_{\sigma, \varepsilon}$, отвечающее H -инварианту $\tilde{\theta}_{\sigma, \varepsilon}$, см. § 3, т.е.

$$\tilde{P}_{\sigma, \varepsilon} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\sigma+1+\varepsilon}{2}\right)} P_{\sigma, \varepsilon}. \quad (4.6)$$

Однако мы рассмотрим $\sigma \neq -1 - \varepsilon - 2k$ (общий случай) и преобразование $P_{\sigma, \varepsilon}$, а затем отдельно рассмотрим исключенные точки.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(S)$. Разложим ее в ряд Фурье $\varphi = \sum E_m \varphi$, см. (1.15). Тогда разложение (2.6) преобразования Пуассона $P_{\sigma, \varepsilon} \varphi \in \mathcal{H}_{\sigma, \varepsilon}$ имеет следующий вид:

$$(P_{\sigma, \varepsilon} \varphi)(t, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \chi(\sigma, \varepsilon, m) R(\sigma, l, m; t) (E_m \varphi)(s), \quad (4.7)$$

где коэффициенты χ , назовем их коэффициентами Пуассона, даются следующей формулой (где $l \equiv \varepsilon + m$):

$$\chi(\sigma, \varepsilon, m) = (-1)^{\varepsilon+m} 2^{1-\sigma} \pi^{n/2} \frac{\Gamma(\sigma+1)}{\Gamma(l+\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{\sigma-m+2-l}{2}) \Gamma(\frac{\sigma+n-1+m-l}{2})}. \quad (4.8)$$

Радиальный множитель в (4.7), т.е. функция

$$\Psi(\sigma, \varepsilon, m; t) = \chi(\sigma, \varepsilon, m) R(\sigma, l, m; t), \quad l \equiv \varepsilon + m, \quad (4.9)$$

в терминах функции V , см. (2.17), представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Psi(\sigma, \varepsilon, m; t) = & (-1)^{\varepsilon} \{ (\operatorname{ch} t)^{\sigma} a(\sigma^*, m) V(\sigma, m; \xi) \\ & + (\operatorname{ch} t)^{\sigma^*} j(\sigma, \varepsilon) V(\sigma^*, m; \xi) \}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

где a и j даются формулами (1.21) и (3.2) соответственно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разложим $P_{\sigma, \varepsilon} \varphi \in \mathcal{H}_{\sigma, \varepsilon}$ в ряд (2.6). Элементы $k \in K$ сохраняют координату t . Поэтому из (4.2) с $g = k$ мы получаем, что для всякого m отображение $\varphi \mapsto \varphi_m$ пространства $\mathcal{D}(S)$ в подпространство H_m перестановочно с вращениями на $k \in K$. Поскольку представления группы K в H_m неприводимы и для разных m не эквивалентны, отображение $\varphi \mapsto \varphi_m$ только множителем, обозначим его $\chi(\sigma, \varepsilon, m)$, отличается от проектора E_m , так что $\varphi_m = \chi(\sigma, \varepsilon, m) E_m \varphi$, и мы получаем разложение (4.7).

Возьмем теперь $\varphi \in H_m$. Тогда $\varphi = E_m \varphi$ и от ряда (4.7) останется только одно слагаемое:

$$(P_{\sigma, \varepsilon} \varphi)(t, s) = \Psi(\sigma, \varepsilon, m; t) \varphi(s), \quad (4.11)$$

где функция $\Psi(\sigma, \varepsilon, m; t)$ определена формулой (4.9). Подставив в (4.9) вместо R его выражение (2.16), получим:

$$\begin{aligned} \Psi(\sigma, \varepsilon, m; t) = & \chi(\sigma, \varepsilon, m) \{ g(\sigma, l, m) (\operatorname{ch} t)^{\sigma} V(\sigma, m, \xi) \\ & + g(\sigma^*, l, m) (\operatorname{ch} t)^{\sigma^*} V(\sigma^*, m, \xi) \}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Предположим на момент, что $\operatorname{Re} \sigma > (2-n)/2$. Тогда $\operatorname{Re} \sigma^* < (2-n)/2$ и правая часть (4.12) при $t \rightarrow +\infty$ ведет себя как

$$(\operatorname{ch} t)^{\sigma} \chi(\sigma, \varepsilon, m) g(\sigma, \varepsilon, m). \quad (4.13)$$

Левая часть (4.11) ведет себя как

$$(\operatorname{ch} t)^{\sigma} (-1)^{\varepsilon} \int_S (-[s, \tilde{s}])^{\sigma} \varphi(\tilde{s}) d\tilde{s} = (\operatorname{ch} t)^{\sigma} (-1)^{\varepsilon} a(\sigma^*, m) \varphi(s)$$

(мы использовали (2.1), (1.19), (1.20)), так что из (4.11) при $t \rightarrow +\infty$ имеем:

$$\Psi(\sigma, \varepsilon, m; t) \sim (\text{ch } t)^\sigma (-1)^\varepsilon a^*(\sigma^*, m). \quad (4.14)$$

Сравнивая (4.13) и (4.14), получаем:

$$(-1)^\varepsilon a(\sigma^*, m) = \chi(\sigma, \varepsilon, m) g(\sigma, \varepsilon, m). \quad (4.15)$$

В силу аналитичности входящих сюда величин мы можем теперь снять ограничение $\text{Re } \sigma > (2 - n)/2$.

Подставляя в (4.15) выражения (1.21) для a и (2.18) для g , получаем (4.8).

Применим к $\varphi \in H_m$ равенство (4.4) и используем (1.20) и (4.12). Приравнявая соответствующие коэффициенты, получаем соотношение

$$a(\sigma, m) \chi(\sigma, \varepsilon, m) = j(\sigma, \varepsilon) \chi(\sigma^*, \varepsilon, m). \quad (4.16)$$

Из (4.15) и (4.16) находим, что $\chi(\sigma, \varepsilon, m) g(\sigma^*, \varepsilon, m) = (-1)^\varepsilon j(\sigma, \varepsilon)$. Вместе с (4.15) это доказывает (4.10).

Теперь мы в состоянии доказать формулы (2.14), (2.15) из §2. В силу (4.2) действие оператора $U(L_A)$ на функции $\Psi_m = P_{\sigma, \varepsilon} \psi_m$ точно такое же, как действие (1.17) оператора $T_{\sigma^*}(L_A)$ на функции ψ_m , т.е.

$$U(L_A) \Psi_m = \frac{m}{2m + n - 3} (-\sigma - 1 + m) \Psi_{m-1} + \frac{m + n - 3}{2m + n - 3} (2 - n - \sigma - m) \Psi_{m+1}. \quad (4.17)$$

В силу (4.9) функции Ψ_m и h_m (см. (2.13)) отличаются друг от друга тем же множителем χ : $\Psi_m = \chi(\sigma, \varepsilon, m) h_m$. Подставляя это в (4.17) и используя (4.8), получаем (2.14) и (2.15).

Теперь укажем ядро и замыкание образа преобразования Пуассона. Чтобы охватить и целые отрицательные σ , вместо $P_{\sigma, \varepsilon}$ рассмотрим преобразование $\tilde{P}_{\sigma, \varepsilon}$ (см. (4.6)), которое отвечает H -инварианту $\tilde{\theta}_{\sigma, \varepsilon}$ (см. §3). Оно определено для всех $\sigma \in \mathbb{C}, \varepsilon = 0, 1$.

ТЕОРЕМА 4.2. *Для всех σ, ε , кроме: а) $\sigma \in \mathbb{N}, \sigma \equiv \varepsilon$, б) $\sigma \in 2 - n - \mathbb{N}, \sigma^* \equiv \varepsilon + 1$, ядро преобразования Пуассона $\tilde{P}_{\sigma, \varepsilon}$ есть $\{0\}$, а замыкание образа есть все $\mathcal{H}_{\sigma, \varepsilon}$. В случае а) имеем $\text{Ker } \tilde{P}_{\sigma, \varepsilon} = V_{\sigma^*, 2}$, $\text{Im } \tilde{P}_{\sigma, \varepsilon} = \mathcal{H}_{\sigma, \varepsilon, 1}$ (конечномерное подпространство). В случае б) имеем $\text{Ker } \tilde{P}_{\sigma, \varepsilon} = V_{\sigma^*, 1}$, $\text{Im } \tilde{P}_{\sigma, \varepsilon} = \mathcal{H}_{\sigma, \varepsilon, 2}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Преобразование Пуассона $\tilde{P}_{\sigma, \varepsilon}$ переводит функции φ из H_m в функции $\tilde{\chi}(\sigma, \varepsilon, m) R(\sigma, l, m; t) \varphi(s)$, где (из (4.8) и [21; 1.2(15)])

$$\tilde{\chi}(\sigma, \varepsilon, m) = \frac{\chi(\sigma, \varepsilon, m)}{\Gamma(\frac{\sigma+1+\varepsilon}{2})} = \frac{(-1)^\varepsilon + m 2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma(l + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{-\sigma^*+1+m-l}{2})} \frac{\Gamma(\frac{\sigma+2-\varepsilon}{2})}{\Gamma(\frac{\sigma+2-m-l}{2})}. \quad (4.18)$$

Эти коэффициенты $\tilde{\chi}(\sigma, \varepsilon, m)$ как функции от σ являются целыми функциями. Поэтому ядро $\text{Ker } \tilde{P}_{\sigma, \varepsilon}$ в $\mathcal{D}(S)$ натянута на H_m с такими m , для которых $\tilde{\chi}(\sigma, \varepsilon, m) = 0$, а образ $\text{Im } \tilde{P}_{\sigma, \varepsilon}$ в $\mathcal{H}_{\sigma, \varepsilon}$ порождается $R(\sigma, l, m; t)H_m$ с такими m , для которых $\tilde{\chi}(\sigma, \varepsilon, m) \neq 0$. В (4.18) дробь $\Gamma\left(\frac{\sigma+2-\varepsilon}{2}\right)/\Gamma\left(\frac{\sigma+2-m-l}{2}\right)$, где $l \equiv \varepsilon + m$, как функция от σ имеет нули в $\sigma \in \mathbb{N}$, $\sigma \equiv \varepsilon$ при $m \geq \sigma + 1$, а дробь $1/\Gamma\left(\frac{-\sigma^*+1+m-l}{2}\right)$ имеет нули для целых σ таких, что $\sigma^* \geq 0$ и $\sigma^* \equiv \varepsilon + 1$ при $m \leq \sigma^*$. Из этих фактов и вытекают утверждения теоремы.

§ 5. Асимптотическое поведение преобразования Пуассона

Напишем разложение преобразования Пуассона в ряд по степеням $1 - \text{th } t$ (разложениям по другим функциям будет посвящена отдельная работа) сначала для K -финитных функций $\varphi \in \mathcal{D}(S)$, т.е. для линейных комбинаций функций из H_m . Оказывается, что в этом случае разложение дается абсолютно сходящимися рядами.

Определим для $\sigma \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{N}$ дифференциальный оператор $L_{\sigma, r}$ на S , полагая при $r = 1, 2, \dots$

$$L_{\sigma, r} = \overset{\circ}{v}_r(\sigma^*, \Delta_S) = \prod_{j=1}^r [(\sigma + j)(\sigma + j + n - 3) + \Delta_S]$$

(Δ_S см. в §1, $\overset{\circ}{v}_r$ см. в §2), а при $r = 0$ полагая $L_{\sigma, r} = 1$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть σ находится в общем положении, а именно $\sigma \notin n/2 + \mathbb{Z}$ и $\sigma \notin -1 - \varepsilon - 2\mathbb{N}$. Для K -финитной функции $\varphi \in \mathcal{D}(S)$ ее преобразование Пуассона $(P_{\sigma, \varepsilon}\varphi)(t, s)$ разлагается следующим образом по степеням $1 - \text{th } t$:

$$\begin{aligned} (P_{\sigma, \varepsilon}\varphi)(t, s) &= (\text{ch } t)^\sigma \sum_{r=0}^{\infty} x_r(\sigma, \varepsilon) (A_{\sigma^*+r}\varphi)(s) (1 - \text{th } t)^r \\ &\quad + (\text{ch } t)^{\sigma^*} \sum_{r=0}^{\infty} y_r(\sigma, \varepsilon) (L_{\sigma, r}\varphi)(s) (1 - \text{th } t)^r, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где

$$\begin{aligned} x_r(\sigma, \varepsilon) &= (-1)^{\varepsilon+r} \binom{\sigma}{r}, \\ y_r(\sigma, \varepsilon) &= (-1)^\varepsilon j(\sigma, \varepsilon) \frac{1}{2^r r! (\sigma + \frac{n}{2})^{[r]}} \\ &= (-1)^r 2^{-\sigma-r} \pi^{\frac{n-4}{2}} \frac{1}{r!} \Gamma(\sigma+1) \Gamma\left(\frac{2-n}{2} - \sigma - r\right) \\ &\quad \times \left[\sin\left(\sigma + \frac{n}{2}\right) \pi - \sin\left(\varepsilon + \frac{n}{2}\right) \pi \right]. \end{aligned}$$

Оба ряда в (5.1) сходятся абсолютно и равномерно по $t \in \mathbb{R}$, $s \in S$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай, когда φ является сферической гармоникой: $\varphi \in H_m$. Тогда справедлива формула (4.11). Разложим обе функции V в (4.10) в гипергеометрические ряды согласно (2.17). Тогда мы получим разложение функции Ψ в сумму двух степенных рядов по степеням $1 - \xi$, $\xi = \text{th } t$:

$$\begin{aligned} \Psi(\sigma, \varepsilon, m; t) &= (\text{ch } t)^\sigma \sum_{r=0}^{\infty} x_r(\sigma, \varepsilon) a(\sigma^* + r, m) (1 - \xi)^r \\ &\quad + (\text{ch } t)^{\sigma^*} \sum_{r=0}^{\infty} y_r(\sigma, \varepsilon) \prod_{j=1}^r [(\sigma + j)(\sigma + j + n - 3) + \lambda_m] (1 - \xi)^r, \end{aligned}$$

где λ_m из (1.7). Выражения для коэффициентов этих степенных рядов получаются из формул:

$$\begin{aligned} a(\sigma^*, m) \frac{(-\sigma + m)^{[r]} (\sigma^* + 1 - m)^{[r]}}{\left(\frac{4-n}{2} - \sigma\right)^{[r]}} &= (-1)^r 2^r \frac{\Gamma(\sigma + 1)}{\Gamma(\sigma + 1 - r)} a(\sigma^* + r, m), \\ (-\sigma^* + m)^{[r]} (\sigma^* + 1 - m)^{[r]} &= \prod_{j=1}^r [(\sigma + j)(\sigma + j + n - 3) + m(3 - n - m)]. \end{aligned}$$

Абсолютная сходимость рядов вытекает из абсолютной сходимости гипергеометрических рядов.

Равенство (4.4) дает два соотношения для операторов, участвующих в (5.1), а именно:

$$L_{\sigma, r} A_\sigma = \omega_r(\sigma) A_{\sigma+r}, \quad (5.2)$$

$$A_{\sigma^*+r} A_\sigma = \frac{j(\sigma, \varepsilon) j(\sigma^*, \varepsilon)}{\omega_r(\sigma^*)} L_{\sigma^*, r}, \quad (5.3)$$

где

$$\omega_r(\sigma) = j(\sigma, \varepsilon) \frac{x_r(\sigma^*, \varepsilon)}{y_r(\sigma, \varepsilon)} = 2^r (\sigma + n - 2)^{[r]} \left(\sigma + \frac{n}{2} \right)^{[r]}.$$

От формулы (5.2) можно перейти к (5.3) (и наоборот) с помощью формул (1.22) и (3.3).

Мы можем убрать ограничение $\sigma \notin -1 - \varepsilon - 2\mathbb{N}$ из теоремы 5.1, перейдя от $P_{\sigma, \varepsilon}$ к $\tilde{P}_{\sigma, \varepsilon}$, см. § 3. Тогда коэффициенты x_r и y_r нужно заменить соответственно на

$$\tilde{x}_r(\sigma, \varepsilon) = \frac{x_r(\sigma, \varepsilon)}{\Gamma\left(\frac{\sigma+1+\varepsilon}{2}\right)}, \quad \tilde{y}_r(\sigma, \varepsilon) = \frac{y_r(\sigma, \varepsilon)}{\Gamma\left(\frac{\sigma+1+\varepsilon}{2}\right)}. \quad (5.4)$$

Пусть теперь φ — произвольная функция из $\mathcal{D}(S)$ (не обязательно K -финитная). Разложим ее по ее компонентам Фурье (см. § 1):

$$\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} E_m \varphi.$$

В силу непрерывности преобразования Пуассона имеем:

$$P_{\sigma,\varepsilon}\varphi = \sum_m P_{\sigma,\varepsilon}(E_m\varphi).$$

Записав каждое слагаемое здесь в соответствии с формулами (4.11) и (4.10), получим, что $P_{\sigma,\varepsilon}\varphi$ есть сумма:

$$(P_{\sigma,\varepsilon}\varphi)(t, s) = (\text{ch } t)^\sigma (P_{\sigma,\varepsilon}^+\varphi)(\xi, s) + (\text{ch } t)^{\sigma^*} (P_{\sigma,\varepsilon}^-\varphi)(\xi, s),$$

где $\xi = \text{th } t$ и операторы $P_{\sigma,\varepsilon}^\pm$ определяются следующим образом:

$$(P_{\sigma,\varepsilon}^+\varphi)(\xi, s) = \sum_m (-1)^\varepsilon a(\sigma^*, m) V(\sigma, m; t) (E_m\varphi)(s), \quad (5.5)$$

$$(P_{\sigma,\varepsilon}^-\varphi)(\xi, s) = \sum_m (-1)^\varepsilon j(\sigma, \varepsilon) V(\sigma^*, m; t) (E_m\varphi)(s). \quad (5.6)$$

Для произвольной функции φ мы можем только утверждать, что ряды (5.1) асимптотические. А именно имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.2. *Пусть σ находится в общем положении: $\sigma \notin \frac{n}{2} + \mathbb{Z}$, $\sigma \notin -1 - \mathbb{N}$. Для произвольной функции $\varphi \in \mathcal{D}(S)$ ее преобразование Пуассона $(P_{\sigma,\varepsilon}\varphi)(t, s)$ допускает следующее асимптотическое разложение при $t \rightarrow +\infty$:*

$$\begin{aligned} (P_{\sigma,\varepsilon}\varphi)(t, s) &\sim (\text{ch } t)^\sigma \sum_{r=0}^{\infty} x_r(\sigma, \varepsilon) (A_{\sigma^*+r}\varphi)(s) (1 - \text{th } t)^r \\ &\quad + (\text{ch } t)^{\sigma^*} \sum_{r=0}^{\infty} y_r(\sigma, \varepsilon) (L_{\sigma,r}\varphi)(s) (1 - \text{th } t)^r. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Асимптотическое равенство (5.7) понимается как асимптотическое разложение функций $(P_{\sigma,\varepsilon}^\pm\varphi)(\xi, s)$:

$$(P_{\sigma,\varepsilon}^+\varphi)(\xi, s) \sim \sum_{r=0}^{\infty} x_r(\sigma, \varepsilon) (A_{\sigma^*+r}\varphi)(s) (1 - \xi)^r, \quad (5.8)$$

$$(P_{\sigma,\varepsilon}^-\varphi)(\xi, s) \sim \sum_{r=0}^{\infty} y_r(\sigma, \varepsilon) (L_{\sigma,r}\varphi)(s) (1 - \xi)^r. \quad (5.9)$$

В свою очередь, разложения (5.8), (5.9) понимаются в следующем смысле. Например, для (5.8): для всякого $N \in \mathbb{N}$ существует постоянная C такая, что

$$\left| (P_{\sigma,\varepsilon}^+\varphi)(\xi, s) - \sum_{r=0}^N x_r(\sigma, \varepsilon) (A_{\sigma^*+r}\varphi)(s) (1 - \xi)^r \right| \leq C (1 - \xi)^{N+1} \quad (5.10)$$

для всех $\xi \in [0, 1]$, $s \in S$.

Доказательство теоремы 5.2 включает в себя ряд лемм.

Определим функцию $\Phi(\sigma, \varepsilon, m; \xi)$ от ξ с помощью равенства

$$\Psi(\sigma, \varepsilon, m; t) = (\operatorname{ch} t)^\sigma \Phi(\sigma, \varepsilon, m; \xi), \quad (5.11)$$

где $\xi = \operatorname{th} t$, а функция Ψ дается формулой (4.10) (или (4.9)). Возьмем в равенстве (4.11) $\varphi = \psi_m$ и $s = s^0$, тогда по определению (4.1) преобразования Пуассона получим для функции Φ следующее интегральное представление:

$$\Phi(\sigma, \varepsilon, m; \xi) = \int_S (-\xi + s_n)^{\sigma, \varepsilon} \psi_m(s) ds \quad (5.12)$$

$$= \Omega_{n-2} \int_{-1}^1 (-\xi + u)^{\sigma, \varepsilon} \psi_m^{(n-1)}(u) (1 - u^2)^{\frac{n-4}{2}} du, \quad (5.13)$$

см. (1.8) и (1.4). Интеграл (5.13) при всяком $\xi \in [-1, 1]$ абсолютно сходится при $\operatorname{Re} \sigma > -1$ (напомним, что $n \geq 4$) и распространяется на всю плоскость σ до мероморфной функции. Функция Φ имеет четность $\varepsilon + m$ по ξ .

Обозначим

$$X(\sigma, m; \xi) = a(\sigma^*, m) V(\sigma, m; t), \quad (5.14)$$

где $\xi = \operatorname{th} t$, a и V даются формулами (1.21) и (2.17), т.е.

$$\begin{aligned} X(\sigma, m; \xi) &= (-1)^m 2^{\sigma+n-2} \pi^{\frac{n-2}{2}} \frac{\Gamma(\sigma+1) \Gamma(\sigma + \frac{n-2}{2})}{\Gamma(\sigma+1-m) \Gamma(\sigma+n-2+m)} \\ &\times F\left(-\sigma+m, 3-n-\sigma-m; \frac{4-n}{2}-\sigma; \frac{1-\xi}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.15)$$

ЛЕММА 5.3. *Функция X (см. (5.14), (5.15)) выражается через функцию Φ (см. (5.11)–(5.13)) следующим образом:*

$$X(\sigma, m; \xi) = \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon=0,1} \left[(-1)^\varepsilon + \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\sin(\sigma + \frac{n}{2})\pi} \right] \Phi(\sigma, \varepsilon, m; \xi). \quad (5.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим равенство (4.10) на $(-1)^\varepsilon \sin(\sigma + \frac{n}{2})\pi + \sin \frac{n\pi}{2}$ и просуммируем по $\varepsilon = 0, 1$. Тогда (см. (3.2)) слагаемые с $V(\sigma^*, m; \xi)$ исчезнут. Переходя теперь от Ψ к Φ по (5.11) и используя (5.14), получаем (5.16).

ЛЕММА 5.4. *Для функции X (см. (5.14), (5.15)) справедливо следующее рекуррентное соотношение:*

$$X(\sigma, m; \xi) = X(\sigma, m-2; \xi) + \frac{2m+n-5}{\sigma+1} X(\sigma+1, m-1; \xi). \quad (5.17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $X_r(\sigma, m)$ коэффициенты при $((1 - \xi)/2)^r$ в разложении функции $X(\sigma, m; \xi)$, см. (5.15). Тогда имеем

$$X_r(\sigma, m) = 2^{\sigma+n-2} \pi^{\frac{n-2}{2}} \frac{\Gamma(-\sigma + m + r) \Gamma(\sigma - r + \frac{n-2}{2})}{\Gamma(-\sigma) \Gamma(\sigma + n - 2 + m - r)}.$$

Теперь непосредственной проверкой убеждаемся в том, что для X_r справедливо соотношение, отвечающее соотношению (5.17) для функций X .

ЛЕММА 5.5. *При $\operatorname{Re} \sigma > -1$ справедлива оценка:*

$$|\Phi(\sigma, \varepsilon, m; \xi)| \leq C$$

для всех $m \in \mathbb{N}$ и всех $\xi \in [-1, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $\rho = \operatorname{Re} \sigma$. Поскольку $n \geq 4$ и $|\psi_m(s)| \leq 1$ (см. (1.12)), из (5.13) для $\rho > -1$ получаем:

$$\begin{aligned} |\Phi(\sigma, \varepsilon, m; \xi)| &\leq \Omega_{n-2} \int_{-1}^1 |-\xi + u|^\rho du \\ &= \Omega_{n-2} \frac{1}{\rho+1} \{(1-\xi)^{\rho+1} + (1+\xi)^{\rho+1}\} \leq \Omega_{n-2} \frac{1}{\rho+1} \max\{2, 2^{\rho+1}\}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 5.6. *Для всякого $\sigma \notin \frac{n}{2} + \mathbb{Z}$, $\sigma \notin -1 - \mathbb{N}$, существуют постоянные C и R (зависящие только от σ) такие, что*

$$|X(\sigma, m; \xi)| \leq C(m+1)^R \quad (5.18)$$

для всех $m \in \mathbb{N}$ и всех $\xi \in [0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $\operatorname{Re} \sigma > -1$ оценка (5.18) с $R = 0$:

$$|X(\sigma, m; \xi)| \leq C, \quad \operatorname{Re} \sigma > -1, \quad (5.19)$$

сразу следует из лемм 5.3 и 5.5.

Пусть $-2 < \operatorname{Re} \sigma \leq -1$. Применим к $X(\sigma, m; \xi)$ последовательно несколько раз формулу (5.17), пока не дойдем до $X(\sigma, 0; \xi)$ или $X(\sigma, 1; \xi)$ — в зависимости от того, четно или нечетно m :

$$X(\sigma, m; \xi) = X(\sigma, d; \xi) + \frac{1}{\sigma+1} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor} (2m-4k+n-5) X(\sigma+1, m-2k-1; \xi), \quad (5.20)$$

где $d = 0$ или 1 соответственно для четного или нечетного m . К функциям X в (5.20) с параметром $\sigma+1$ мы имеем право применить уже доказанную оценку (5.19). Тогда (предполагая $\sigma \neq -1$) из (5.20) получаем

$$|X(\sigma, m; \xi)| \leq |X(\sigma, d; \xi)| + Cm^2. \quad (5.21)$$

Каждая из двух ($d = 0, 1$) функций $X(\sigma, d; \xi)$ ограничена для $\xi \in [0, 1]$, поскольку для $\xi \in [0, 1]$ аргумент $(1 - \xi)/2$ гипергеометрической функции из (5.15) пробегает отрезок $[0, 1/2]$. Поэтому из (5.21) получаем оценку

$$|X(\sigma, m; \xi)| \leq C_1 + Cm^2$$

и затем оценку (5.18) с $R = 2$:

$$|X(\sigma, m; \xi)| \leq C(m+1)^2, \quad -2 < \operatorname{Re} \sigma \leq -1, \quad \sigma \neq -1. \quad (5.22)$$

Аналогично поступаем с полосой $-3 < \operatorname{Re} \sigma \leq -2$ с исключенной точкой $\sigma = -2$: пишем опять (5.20) и используем для X с параметром $\sigma + 1$ уже доказанную оценку (5.22). Получаем неравенство

$$|X(\sigma, m; \xi)| \leq |X(\sigma, d; \xi)| + Cm^4$$

и затем оценку (5.18) с $R = 4$ и т. д.

ЛЕММА 5.7. Пусть $\sigma \notin \frac{n}{2} + \mathbb{N}$, $\sigma \notin -1 - \mathbb{N}$. Тогда для всякого $k \in \mathbb{N}$ существуют постоянные C и R (зависящие только от σ) такие, что

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^k X(\sigma, m; \xi) \right| \leq C(m+1)^R \quad (5.23)$$

для всех $m \in \mathbb{N}$ и $\xi \in [0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу [21; 2.1(7)] из (5.15) получаем:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^k X(\sigma, m; \xi) = \sigma^{(k)} X(\sigma - k, m; \xi).$$

Теперь (5.23) следует из леммы 5.6.

ЛЕММА 5.8. Перейдем в рядах (5.5) и (5.6) от переменной t к переменной $\xi = \operatorname{th} t$. Оба эти ряда и все их производные по ξ равномерно сходятся при $\xi \in [0, 1]$. Следовательно, их можно дифференцировать почленно по ξ и переходить в них почленно к пределу при $\xi \rightarrow 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала формулу (5.5). Ее можно переписать так:

$$(P_{\sigma, \varepsilon}^+ \varphi)(\xi, s) = (-1)^\varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} X(\sigma, m; \xi) (E_m \varphi)(s). \quad (5.24)$$

Из леммы 5.7 и оценки (1.14) для $\varphi_m = E_m \varphi$ следует, что ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} C(m+1)^{R-h} \quad (5.25)$$

с некоторыми C , R и произвольным $h \in \mathbb{N}$ является мажорантой для k раз продифференцированного по ξ ряда (5.24). Возьмем $h > R + 1$, тогда эта мажоранта сходится.

Теперь рассмотрим формулу (5.6). Ее можно переписать так:

$$(P_{\sigma, \varepsilon}^- \varphi)(\xi, s) = (-1)^\varepsilon j(\sigma, \varepsilon) \sum_{m=0}^{\infty} a(\sigma, m)^{-1} X(\sigma^*, m; t)(E_m \varphi)(s). \quad (5.26)$$

Коэффициент $a(\sigma, m)^{-1}$ ведет себя при $m \rightarrow \infty$ как $Cm^{2-n-2\sigma}$, поэтому мажорантой для k раз продифференцированного по ξ ряда (5.26) будет ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} C(m+1)^{R-h+2-n-2\rho},$$

где $\rho = \operatorname{Re} \sigma$, с некоторыми C , R и произвольным $h \in \mathbb{N}$. Возьмем $h > R + 3 - n - 2\rho$, тогда эта мажоранта сходится.

Эта лемма позволяет распространить функции $(P_{\sigma, \varepsilon}^\pm \varphi)(\xi, s)$ по ξ с интервала $(-1, 1)$, на котором они были первоначально определены формулами (5.9), (5.10), на отрезок $(-1, 1]$, в частности на интересующий нас отрезок $[0, 1]$. Эти функции и все их производные по ξ непрерывны на $[0, 1]$, в частности в точке $\xi = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.2. Докажем (5.8). Из леммы 5.8 и последующего текста следует, что многочлен Тейлора

$$\sum_{r=0}^N \frac{1}{r!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^r (P_{\sigma, \varepsilon}^+ \varphi)(\xi, s) \Big|_{\xi=1} (\xi - 1)^r \quad (5.27)$$

функции $(P_{\sigma, \varepsilon}^+ \varphi)(\xi, s)$ по степеням $\xi - 1$ получается суммированием по m многочленов Тейлора функций $(P_{\sigma, \varepsilon}^+ E_m \varphi)(\xi, s)$. Но последние многочлены — это частичные суммы первого из рядов (5.1) (без $(\operatorname{ch} t)^\sigma$) для $E_m \varphi$ вместо φ (напомним, $\xi = \operatorname{th} t$). Таким образом, многочлен (5.27) равен

$$\sum_m \sum_{r=0}^N x_r(\sigma, \varepsilon) (A_{\sigma^*+r} E_m \varphi)(s) (1 - \xi)^r.$$

Здесь суммирование по m можно переставить с суммированием по r (конечным) и внести под знак оператора A_{σ^*+r} — в силу непрерывности последнего. Получим, что многочлен Тейлора (5.27) равен частичной сумме ряда (5.8). По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа разность между функцией $(P_{\sigma, \varepsilon}^+ \varphi)(\xi, s)$ и ее многочленом Тейлора (5.27) есть

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(N+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^{N+1} (P_{\sigma, \varepsilon}^+ \varphi)(\xi, s) \Big|_{\xi=\eta} (\xi - 1)^{N+1} \\ &= \frac{1}{(N+1)!} \left\{ (-1)^\varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^{N+1} X(\sigma, m; \xi) \Big|_{\xi=\eta} (E_m \varphi)(s) \right\} (\xi - 1)^{N+1}, \end{aligned}$$

где $\eta \in (\xi, 1)$ (мы использовали (5.24)). Члены ряда, стоящего в фигурных скобках, уже были оценены в лемме 5.7. Мажорантой для него при $\xi \in [0, 1]$, $s \in S$ служит ряд (5.25) с $k = N + 1$, сходящийся при $h > R + 1$. Следовательно, упомянутая разность по абсолютной величине не превосходит $C(1 - \xi)^{N+1}$ для всех $\xi \in [0, 1]$, $s \in S$, что и доказывает (5.10) и, стало быть, (5.8).

Формула (5.9) доказывается аналогично.

Заметим, что для четного n вторая серия исключенных значений σ в теореме 5.2 (т.е. $\sigma \in -1 - \mathbb{N}$) входит в первую серию ($\sigma \in n/2 + \mathbb{Z}$). Оказывается, что и для нечетного n появление этой серии является несущественным, а именно мы можем убрать ограничение $\sigma \notin -1 - \mathbb{N}$, если перейдем от $P_{\sigma, \varepsilon}$ к $\tilde{P}_{\sigma, \varepsilon}$, см. (4.6). А именно для $\tilde{P}_{\sigma, \varepsilon}$ имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 5.9. *Пусть $\sigma \notin \frac{n}{2} + \mathbb{Z}$. Тогда для произвольной функции $\varphi \in \mathcal{D}(S)$ ее преобразование Пуассона $(\tilde{P}_{\sigma, \varepsilon} \varphi)(t, s)$ допускает при $t \rightarrow +\infty$ асимптотическое разложение, которое получается из (5.7), если мы над P , x , y поставим тильды (см. (5.4)). Асимптотическое равенство понимается точно в таком же смысле, как это указано в формулировке теоремы 5.2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО почти полностью повторяет доказательство теоремы 5.2. Единственное, о чем нам надо позаботиться, — это точка $\sigma = -1$ из полосы $-2 < \operatorname{Re} \sigma \leq -1$ для случая нечетного n в доказательстве леммы 5.6.

Сначала отметим, что при $\varepsilon = 0$ и $m \neq 0$ функция Φ имеет нуль по σ в точке $\sigma = 0$:

$$\Phi(0, 0, m; \xi) = 0, \quad m \neq 0. \quad (5.28)$$

В самом деле, из (5.12) имеем

$$\Phi(0, 0, m; \xi) = \int_S \psi_m(s) ds = (\psi_0, \psi_m) = 0, \quad m \neq 0.$$

Отсюда следует, что для нечетного n и для $m \neq 0$ функция $X(\sigma, m, \xi)$ имеет по σ нуль в точке $\sigma = 0$:

$$X(0, m, \xi) = 0, \quad n \text{ нечетно}, \quad m \neq 0. \quad (5.29)$$

В самом деле, из (5.16) для нечетного n и из (5.28) имеем

$$X(0, m, \xi) = \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon} ((-1)^{\varepsilon} + 1) \Phi(0, \varepsilon, m; \xi) = \Phi(0, 0, m; \xi) = 0, \quad m \neq 0.$$

Дифференцируя (5.16) по σ в точке $\sigma = 0$ при нечетном n , получаем, что

$$\left. \frac{\partial}{\partial \sigma} X(\sigma, m; \xi) \right|_{\sigma=0} = \left. \frac{\partial}{\partial \sigma} \Phi(\sigma, 0, m; \xi) \right|_{\sigma=0}. \quad (5.30)$$

Теперь обратимся к формуле (5.20). Из (5.29) и (5.30) получаем, что функции $\frac{1}{\sigma+1} X(\sigma+1, m'; \xi)$ с $m' \neq 0$, которые входят в сумму в (5.20), регулярны при $\sigma = -1$ и равны производным функций Φ по σ в нуле:

$$\left. \frac{1}{\sigma+1} X(\sigma+1, m'; \xi) \right|_{\sigma=-1} = \left. \frac{\partial}{\partial z} \Phi(z, 0, m'; \xi) \right|_{z=0}, \quad m' \neq 0. \quad (5.31)$$

Теперь оценим эти производные. Утверждаем, что

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{z=0} \Phi(z, 0, m; \xi) \right| \leq C \quad (5.32)$$

для всех $m \in \mathbb{N}$ и всех $\xi \in [-1, 1]$. В самом деле, из (5.13) в силу $|\psi_m^{(n-1)}(u)| \leq 1$, $n \geq 4$, имеем

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{z=0} \Phi(z, 0, m; \xi) \right| \leq \Omega_{n-2} \int_{-1}^1 |\ln |u - \xi|| \, du,$$

но последний интеграл — это непрерывная от ξ функция на $[-1, 1]$.

Таким образом, согласно (5.31) и (5.32) функции из левой части (5.31) ограничены постоянной, не зависящей от $m' \neq 0$ и $\xi \in [-1, 1]$. Тогда для нечетного n оценка (5.21) и, следовательно, (5.22) справедливы и при $\sigma = -1$.

Поэтому мы не должны исключать точки $\sigma = -2, \sigma = -3, \dots$ в дальнейшем доказательстве леммы 5.6 для нечетного n .

Список литературы

1. *Kashiwara M., Kowata A., Minemura K., Okamoto K., Oshima T., Tanaka M.* Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space // *Ann. of Math.* 1978. V. 107. №1. P. 1–39.
2. *Молчанов В. Ф.* Сферические функции на гиперboloидах // *Матем. сб.* 1976. Т. 99. №2. С. 139–161.
3. *Молчанов В. Ф.* Гармонический анализ на однородных пространствах // *Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. Фундамент. направления.* Т. 59. М.: ВИНТИ, 1990. С. 5–144.
4. *Oshima T.* Poisson transformations on affine symmetric spaces // *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* 1979. V. A55. №9. P. 323–327.
5. *Sekiguchi J.* Eigenspaces of the Laplace–Beltrami operator on a hyperboloid // *Nagoya Math. J.* 1980. V. 79. P. 151–185.
6. *Harish-Chandra.* Differential equations and semisimple Lie groups // *Collected papers.* V. III. Springer-Verlag, 1983. P. 57–120.
7. *Harish-Chandra.* Spherical functions on a semisimple Lie group // *Amer. J. Math.* 1958. V. 80. P. 241–310; 553–613.
8. *Casselman W., Milicic D.* Asymptotic behaviour of matrix coefficients of admissible representations // *Duke Math. J.* 1982. V. 49. P. 869–930.
9. *van den Ban E. P., Schlichtkrull H.* Asymptotic expansions and boundary values of eigenfunctions on Riemannian symmetric spaces // *J. Reine Angew. Math.* 1987. V. 380. P. 108–165.
10. *van den Ban E. P., Schlichtkrull H.* Local boundary data of eigenfunctions on a Riemannian symmetric space // *Invent. Math.* 1989. V. 98. P. 639–657.
11. *van den Ban E. P.* Asymptotic behaviour of matrix coefficients related to reductive symmetric spaces // *Indag. Math.* 1987. V. 49. P. 225–249.
12. *van den Ban E. P., Schlichtkrull H.* Asymptotic expansions on symmetric spaces // *Harmonic analysis on reductive groups.* Boston: Birkhäuser, 1991. P. 79–87. (Progr. Math. V. 101.)
13. *Molchanov V. F., van Dijk G.* Canonical representations and overgroups // *Preprint.* Math. Inst. Univ. Leiden, MI 2002–05.
14. *Artemov A. A.* Asymptotic behaviour of the Poisson transform on a hyperboloid of one sheet // *Lie groups and Lie algebras. Their representations, generalizations, and applications* / ed. Komrakov B. P. et al. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1998. P. 261–284. (Math. Appl. V. 433.)

15. *Artemov A. A.* Poisson transform for hyperboloids // Вестн. Тамб. ун-та. Сер. естеств. техн. науки. 1998. Т. 3. № 1. С. 21–34.
16. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. М.: Физматгиз, 1958.
17. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.
18. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. М.: Наука, 1965.
19. *Молчанов В. Ф.* Представления псевдоортогональной группы, связанные с конусом // Матем. сб. 1970. Т. 81. № 3. С. 358–375.
20. *Желобенко Д. П.* О бесконечно дифференцируемых векторах в теории представлений // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1965. № 1. С. 3–10.
21. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. I, II. М.: Наука, 1973, 1974.

Тамбовский государственный университет
им. Г. Р. Державина
E-mail: artemov@tsu.tmb.ru

Поступила в редакцию
02.06.2003