Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Авксентьев, Универсальная мера пучка коник и большая теорема Понселе, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 5, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8203>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 10:31:31

УДК 514.144.2

Е. А. Авксентьев

Универсальная мера пучка коник и большая теорема Понселе

В работе исследуются инвариантные относительно отображения Понселе борелевские меры на кониках. Доказывается, что для пучка коник существует универсальная мера, которая инвариантна относительно каждой коники этого пучка. С использованием этой меры получено новое доказательство большой теоремы Понселе. Также приведено полное описание инвариантных борелевских мер.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: большая теорема Понселе, инвариантная мера, пучок коник.

DOI: 10.4213/sm8203

Введение

С тех пор как Ж.-В. Понселе открыл (см. [1]) одну из самых красивых теорем геометрии о замыкании вписанно-описанных ломаных для двух коник, появилось множество ее обобщений, следствий и приложений в различных областях математики (см., например, [2]–[4] и библиографию в этих работах). Большой теоремой Понселе называют (см. [5]) обобщение теоремы Понселе на пучки коник.

Идея использовать некоторый инвариант для доказательства теоремы Понселе восходит еще к Ж. Якоби и К. Бертрану (подробнее см. [6]). В работе [7] Дж. Кинг с использованием инвариантной относительно отображения Понселе¹ меры получил короткое и очень красивое доказательство теоремы Понселе, однако только для одного случая двух непересекающихся эллипсов, один из которых лежит внутри другого. В других случаях взаимного расположения коник нарушается последовательность обхода вершин ломаных Понселе, отчего конструкцию Кинга не получается применить. В статье [8] с помощью другой конструкции, использующей гомеοидную плотность, эти трудности удалось устранить.

В настоящей работе мы распространим конструкцию Кинга инвариантной меры на пучок коник. Оказывается, что для пучка коник существует универсальная мера, которая инвариантна относительно отображения Понселе на каждой конике этого пучка. Мы получим явный вид этой меры и с ее использованием дадим новое доказательство большой теоремы Понселе, а также приведем полное описание всех борелевских мер на кониках, инвариантных относительно отображения Понселе.

¹Это отображение, которое каждой точке на одной конике ставит в соответствие вторую точку ее пересечения с касательной из этой точки к другой конике.

Напомним сначала некоторые определения. Мы будем рассматривать проективную плоскость, получающуюся из евклидовой плоскости добавлением бесконечно удаленной прямой, на которой пересекаются параллельные в евклидовой плоскости прямые. Точки евклидовой плоскости называются *собственными* точками проективной плоскости, а точки бесконечно удаленной прямой – *несобственными*. Под *коникой* мы будем понимать коническое сечение, т.е. пересечение плоскости и кругового конуса. Коника может быть эллипсом, параболой или гиперболой (невыврожденные коники) в зависимости от своего расположения относительно бесконечно удаленной прямой: эллипс с ней не пересекается, парабола касается ее, а гипербола пересекается с ней в двух точках. Все невырожденные коники проективно эквивалентны. Кроме них есть еще вырожденные коники: пара пересекающихся прямых (возможно, на бесконечности), пара совпадающих прямых и точка.

Как известно, в декартовых прямоугольных координатах собственные точки коники удовлетворяют уравнению вида

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

в котором по крайней мере один из коэффициентов a, b, c отличен от нуля. Мы рассматриваем пары $(\alpha, \mathcal{P}_\alpha)$, где α – коника, $\mathcal{P}_\alpha = \mathcal{P}_\alpha(x, y)$ – многочлен второго порядка, задающий конику α , т.е.

$$\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \mathcal{P}_\alpha(x, y) = 0\}.$$

Для каждой коники α существует бесконечно много таких многочленов $\mathcal{P}_\alpha$, но для невырожденных коник или вырожденных в пару прямых все такие многочлены пропорциональны.

Пучком коник $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$, порожденным двумя невырожденными кониками α и β , называется однопараметрическое множество коник, заданных уравнениями

$$\lambda \mathcal{P}_\alpha(x) + \mathcal{P}_\beta(x) = 0, \quad \text{где } \lambda \in \mathbb{R} \cup \infty.$$

Сами коники α и β соответствуют значениям параметра $\lambda = \infty$ и $\lambda = 0$ и поэтому тоже принадлежат $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$.

Траекториями Понселе коник α и β мы будем называть последовательности вершин их вписанно-описанных ломаных. Теорема Понселе утверждает, что либо все траектории Понселе замыкаются, причем через одно и то же число вершин, либо ни одна траектория Понселе не замыкается.

В большой теореме Понселе вместо двух коник α и β рассматриваются несколько коник $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n$, принадлежащих одному пучку (коника α может быть вырожденной в пару прямых). Строится ломаная, вписанная в конику α так, что ее стороны последовательно касаются коник $\beta_1, \dots, \beta_n$. Может случиться, что получится n -звенная замкнутая ломаная. Еще при некоторых условиях на касания с кониками $\beta_1, \dots, \beta_n$ таких вписанно-описанных замкнутых ломаных существует бесконечно много, а в качестве первой вершины ломаной можно брать любую точку коники α , из которой можно провести касательную к β_1 .

Под многоугольником, описанным около коник $\beta_1, \dots, \beta_n$, нужно понимать нечто большее, чем просто многоугольник, стороны которого последовательно

касаются коник $\beta_1, \dots, \beta_n$, потому что этого условия недостаточно для истинности теоремы. Определим описанный многоугольник следующим образом. Если коника α невырожденная, то ее *внешней областью* назовем множество точек, через которые проходит хотя бы одна касательная к конике. Если коника α вырождена в пару прямых, то ее внешней областью будем считать внутренность любого из вертикальных углов, образованных этими прямыми. Касание коники β_i со стороной многоугольника назовем *внешним*, если оно происходит в точке, лежащей во внешней области коники α . Тогда вписанный в конику α n -угольник, i -я сторона которого касается коники β_i , будем называть *описанным* около коник $\beta_1, \dots, \beta_n$, если число внешних касаний четно.

А. Лебег в своем труде “Les coniques” (см. [9]) в формулировке большой теоремы Понселе дает другое определение описанного многоугольника, но для действительной плоскости эти определения равносильны, и нам будет удобнее определение, данное выше.

ТЕОРЕМА (формулировка А. Лебега большой теоремы Понселе). *Пусть коники $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n$ принадлежат одному пучку. Тогда если существует многоугольник, вписанный в конику α и описанный около коник $\beta_1, \dots, \beta_n$, таких многоугольников существует бесконечно много.*

Для определения такого многоугольника можно произвольным образом задать:

- (i) *порядок касания его сторон с кониками $\beta_1, \dots, \beta_n$ (например, такой: $\beta_{\sigma(1)}, \dots, \beta_{\sigma(n)}$, где σ – подстановка множества $\{1, \dots, n\}$);*
- (ii) *касательную к конике $\beta_{\sigma(1)}$, содержащую одну из сторон этого многоугольника;*
- (iii) *точку пересечения этой касательной с коникой α , которая будет принадлежать стороне, касающейся коники $\beta_{\sigma(2)}$.*

Мы приведем доказательство этой теоремы в § 3. Сначала определим отображение Понселе на конике и построим инвариантную относительно этого отображения меру. Затем докажем универсальность этой меры, т.е. ее инвариантность относительно отображения Понселе на каждой конике пучка. Далее мы построим так называемое выравнивающее отображение, которое сводит отображение Понселе к повороту на окружности, а из результатов § 2 будет следовать геометрическое описание величины угла поворота для каждой коники пучка. В § 4 отдельно рассмотрим вырожденный случай, когда коника α – это пара прямых, а коники пучка не пересекаются. И наконец, в § 5 будет приведена классификация всех инвариантных мер для коник и всех универсальных мер для пучков коник. Так, будет показано, что универсальная мера всегда единственна, а вопрос единственности инвариантной меры зависит от того, замыкаются траектории Понселе или нет.

§ 1. Инвариантная мера

В этом параграфе мы определим отображение Понселе на конике, построим инвариантную относительно этого отображения меру и введем понятие универсальной меры пучка.

Две различные коники α и β могут иметь от нуля до четырех общих точек, которые являются общими для всех коник пучка $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$. Общая точка может

быть точкой пересечения или касания коник. Будем считать, что точка касания – это две или три (в зависимости от кратности касания) совпадающие точки пересечения. При такой оговорке общих точек может быть нуль, две или четыре, некоторые из которых могут “уйти на бесконечность” при наличии общих асимптотических направлений.

Рассмотрим множество α_β точек коники α , из каждой точки которой можно провести касательную к конике β . Для любой невырожденной коники γ пучка $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$ множество α_γ совпадает либо с множеством α_β , либо с его дополнением $\alpha \setminus \alpha_\beta$. Если для коник $\beta_1, \dots, \beta_n$ из пучка $\mathcal{F}$ существует многоугольник, вписанный в конику α и описанный около коник $\beta_1, \dots, \beta_n$, то множество α_{β_i} одно и то же для всех $i = 1, \dots, n$. Поэтому, когда речь идет о системе $\alpha, \beta_1, \dots, \beta_n$ коник из большой теоремы Понселе, будем это множество обозначать через $\alpha_{\mathcal{F}}$.

Когда точка x обходит α_β , каждая из двух касательных к конике β из точки x , изменяясь непрерывно, определяет некоторое семейство прямых. Таким образом, через любую точку $x \in \alpha_\beta$ проходят единственная касательная $l_1(x)$ из одного семейства и единственная касательная $l_2(x)$ из другого семейства. Для $k = 1, 2$ определим отображение $j_\beta^k: \alpha_\beta \rightarrow \alpha_\beta$, которое каждой точке $x \in \alpha_\beta$ ставит в соответствие вторую точку пересечения коники α с прямой $l_k(x)$.

Рис. 1

Сразу заметим, что отображения j_β^1 и j_β^2 непрерывны, а если коники α и β не пересекаются, то j_β^1 и j_β^2 еще и биективны. Чтобы сделать их биективными и в случае пересекающихся коник, поступим следующим образом. Возьмем две копии α_β^1 и α_β^2 множества α_β , обозначив их объединение через $\tilde{\alpha}_\beta$. Отображения j_β^1 и j_β^2 продолжим на $\tilde{\alpha}_\beta$ следующим образом. Если касание прямой $l_k(x)$ с коникой β внутреннее для коники α , то пусть точка $j_\beta^k(x)$ принадлежит той же копии α_β , что и точка x , а если внешнее, то другой. Например, при одном из отображений j_β^1, j_β^2 образ дуги UV на рис. 1 – это дуга WBW (т.е. дуга WB , взятая дважды).

Таким образом, переход с одной копии α_β на другую будет осуществляться только для внешнего касания.

Теперь отображения j_β^1 и j_β^2 биективны и, более того, взаимно обратны.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Отображения j_β^1 и j_β^2 назовем *отображениями Понселе коники* β .

Дуги на α_β^1 и дуги на α_β^2 порождают борелевскую σ -алгебру $\mathcal{B}(\tilde{\alpha}_\beta)$ на $\tilde{\alpha}_\beta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Мету μ на $\mathcal{B}(\tilde{\alpha}_\beta)$ назовем j_β -инвариантной, если

$$\mu(j_\beta^1(X)) = \mu(X) = \mu(j_\beta^2(X)) \quad \text{для всех } X \in \mathcal{B}(\tilde{\alpha}_\beta).$$

Итак, мера называется инвариантной, если она инвариантна относительно отображения Понселе. Для построения инвариантной меры нам понадобится следующая несложная

ЛЕММА 1.3. Пусть касательные к конике α в ее точках A и B пересекаются в точке P . Тогда выполняется соотношение

$$\frac{PA}{|\nabla \mathcal{P}_\alpha(A)|} = \frac{PB}{|\nabla \mathcal{P}_\alpha(B)|}, \quad (1.1)$$

где

$$|\nabla \mathcal{P}_\alpha(x, y)| = \left| \left\{ \frac{\partial \mathcal{P}_\alpha}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{P}_\alpha}{\partial y} \right\} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathcal{P}_\alpha}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{P}_\alpha}{\partial y} \right)^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку длина вектора градиента не меняется при ортогональной замене координат, утверждение леммы достаточно проверить в любой декартовой системе координат.

1) Пусть α – это парабола. Выберем систему координат так, чтобы уравнение коники α имело вид

$$y = ax^2, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$|\nabla \mathcal{P}_\alpha(x, y)| = \sqrt{1 + 4a^2x^2}.$$

Касательные в точках $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ параболы α задаются уравнениями

$$y = ax_1(2x - x_1), \quad y = ax_2(2x - x_2).$$

Точка P пересечения этих касательных имеет координаты

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, ax_1x_2 \right).$$

Тогда

$$|PA| = \frac{1}{2}|x_2 - x_1|\sqrt{1 + 4a^2x_1^2}, \quad |PB| = \frac{1}{2}|x_2 - x_1|\sqrt{1 + 4a^2x_2^2}.$$

2) Пусть α – это эллипс или гипербола. Выберем систему координат так, чтобы уравнение коники α имело вид

$$ax^2 + by^2 = 1, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Тогда

$$|\nabla \mathcal{P}_\alpha(x, y)| = 2\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}.$$

Касательные в точках $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ коники α задаются уравнениями

$$ax_1x + by_1y = 1, \quad ax_2x + by_2y = 1$$

соответственно. Точка P пересечения этих касательных имеет координаты

$$\left(\frac{y_2 - y_1}{ax_1y_2 - ax_2y_1}, \frac{x_1 - x_2}{bx_1y_2 - bx_2y_1} \right).$$

Тогда

$$|PA| = \frac{1 - ax_1x_2 - by_1y_2}{ab|x_1y_2 - x_2y_1|} \sqrt{a^2x_1^2 + b^2y_1^2},$$

$$|PB| = \frac{1 - ax_1x_2 - by_1y_2}{ab|x_1y_2 - x_2y_1|} \sqrt{a^2x_2^2 + b^2y_2^2}.$$

Легко видеть, что в обоих случаях равенство (1.1) выполняется.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Утверждение леммы справедливо и для случая коники, вырожденной в пару прямых (точка P в этом случае всегда совпадает с вершиной коники).

Это следует из соображений непрерывности и того, что вырожденная коника – это предел невырожденных коник.

ТЕОРЕМА 1.5. Пусть α и β – две различные коники, возможно вырожденные. Тогда функция

$$\mu_\beta(\mathcal{A}) = \int_{\mathcal{A}} \frac{dl}{|\nabla \mathcal{P}_\alpha(x, y)| \sqrt{\mathcal{P}_\beta(x, y)}}, \quad \mathcal{A} \in \mathcal{B}(\tilde{\alpha}_\beta), \quad (1.2)$$

где dl – это дифференциал дуги коники α , задает j_β -инвариантную меру на α .

Заметим сначала, что функция

$$f(X) = \frac{1}{|\nabla \mathcal{P}_\alpha(X)| \sqrt{\mathcal{P}_\beta(X)}}$$

стремится к бесконечности, если точка X стремится к некоторой точке коники β . Но для невырожденной коники α функция $f(X)$ ограничена вне любой окрестности коники β и поэтому интегрируема вдоль любой гладкой кривой (даже не ограниченной, поскольку функция $f(X)$ на бесконечности имеет интегрируемую особенность). Если же некоторая гладкая кривая L имеет с коникой β общие точки, то интеграл от функции $f(X)$ по кривой L можно рассматривать как несобственный интеграл. Сходиться он будет в том и только том случае, когда кривая L не имеет точек касания с коникой β . Действительно, функция $f(X)$ на кривой L в окрестности ее общей с коникой β точки X_0 имеет особенность. Если коника и кривая в точке X_0 пересекаются, то это интегрируемая особенность вида $O(1/\sqrt{t})$, $t \rightarrow 0$, а если касаются – неинтегрируемая особенность вида $O(1/t)$, $t \rightarrow 0$.

Поэтому мера μ_β определена корректно и в случае пересекающихся коник, а в случае касания коник α и β можно считать ее определенной вне сколь угодно малой окрестности точки касания.

Если коника α вырождена в пару прямых, то функция $f(X)$ имеет неинтегрируемую особенность в вершине P коники α . В этом случае мера μ бесконечна, но она конечна на всех множествах, замыкания которых не содержат точку P .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.5. Пусть $B = j_\beta(A)$, $B' = j_\beta(A')$, C – точка касания прямой AB с коникой β , $D = AB \cap A'B'$ (рис. 2).

Рис. 2

По теореме синусов для треугольников $AA'D$ и $B'B'D$ имеем

$$\frac{AA'}{\sin(\angle A'DA)} = \frac{AD}{\sin(\angle AA'D)}, \quad \frac{BB'}{\sin(\angle B'DB')} = \frac{BD}{\sin(\angle BB'D)}.$$

Поделив первое равенство на второе, находим

$$\frac{AA'}{BB'} = \frac{AD}{BD} \frac{\sin(\angle BB'D)}{\sin(\angle AA'D)}. \quad (1.3)$$

Обозначим точку пересечения касательных к конике α в точках A и B через P . В пределе $A' \rightarrow A$ равенство (1.3) даст следующее:

$$\frac{dA}{dB} = \frac{AC}{BC} \frac{\sin(\angle PBA)}{\sin(\angle PAB)},$$

где dX – дифференциал длины дуги коники α в точке X . Отсюда по теореме синусов для треугольника PAB следует

$$\frac{dA}{dB} = \frac{AC}{BC} \frac{PA}{PB}. \quad (1.4)$$

Функция $\mathcal{P}_\beta$ на прямой AB является квадратичной функцией. Поскольку вне коники β квадратичная форма $\mathcal{P}_\beta$ знакопостоянна, а в точке C равна нулю, то для точек X прямой AB выполняется равенство

$$\mathcal{P}_\beta(X) = k|CX|^2$$

для некоторой константы k . Но тогда

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{\mathcal{P}_\beta(A)}}{\sqrt{\mathcal{P}_\beta(B)}},$$

а равенство (1.4) в силу леммы 1.3 даст следующее:

$$\frac{dA}{dB} = \frac{\sqrt{\mathcal{P}_\beta(A)} |\nabla \mathcal{P}_\alpha(A)|}{\sqrt{\mathcal{P}_\beta(B)} |\nabla \mathcal{P}_\alpha(B)|},$$

или

$$\frac{dA}{|\nabla \mathcal{P}_\alpha(A)| \sqrt{\mathcal{P}_\beta(A)}} = \frac{dB}{|\nabla \mathcal{P}_\alpha(B)| \sqrt{\mathcal{P}_\beta(B)}}. \quad (1.5)$$

Из (1.5) и следует, что $\mu_\beta(j_\beta(\mathcal{A})) = \mu_\beta(\mathcal{A})$.

Итак, инвариантные относительно отображений Понселе меры существуют. Для каждой коники γ пучка $\mathcal{F}$ рассмотрим меру μ_γ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6. Борелевскую меру на α назовем $\mathcal{F}$ -универсальной, если она инвариантна относительно отображений Понселе всех коник пучка $\mathcal{F}$.

Оказывается, что для всех $\gamma \in \mathcal{F}$ мера μ_γ – это одна и та же мера, т.е. справедлива

ТЕОРЕМА 1.7. Мера, определенная в теореме 1.5, является $\mathcal{F}$ -универсальной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим произвольную конику γ пучка $\mathcal{F}$. Для нее найдется такое число λ , что $\mathcal{P}_\gamma = \lambda \mathcal{P}_\alpha + \mathcal{P}_\beta$. А так как $\mathcal{P}_\alpha(X) = 0$ для любой точки X коники α , то $\mathcal{P}_\gamma(X) = \mathcal{P}_\beta(X)$. Отсюда следует, что $\mu_\gamma(\mathcal{A}) = \mu_\beta(\mathcal{A})$ для любого множества $\mathcal{A} \in \mathcal{B}(\tilde{\alpha}_\mathcal{F})$, т.е. для любых коник β и γ из пучка $\mathcal{F}$ соответствующие им меры μ_β и μ_γ равны.

Таким образом, индекс в обозначении меры μ_β можно не указывать, обозначая эту меру через μ .

§ 2. Некоторые геометрические свойства пучков коник и $\mathcal{F}$ -универсальной меры

Результаты этого параграфа позволят нам в дальнейшем дать геометрическое описание модулей векторов сдвигов, в которые перейдут отображения Понселе после применения выравнивающего отображения. Напомним некоторые определения проективной геометрии.

Пусть α – невырожденная коника. Через произвольную точку P проводятся прямые. В точках пересечения каждой такой прямой с коникой α строятся касательные к конике α . Геометрическое место точек пересечения таких касательных – это прямая p , которую называют *полярной* точки P относительно коники α . Точку P называют *поллюсом* прямой p . Поллюс прямой – это точка пересечения поляр всех точек этой прямой.

Если каждая сторона некоторого треугольника является полярной противоположной вершины, то такой треугольник называется *автополярным* относительно коники α .

Отображение i на конике является проективной инволюцией тогда и только тогда, когда для всех точек X коники прямые $Xi(X)$ пересекаются в одной точке. Эта точка называется *точкой Фрежье* инволюции i .

Подробное изложение геометрических свойств этих объектов можно найти в [5] и [10].

Существует не более трех критических значений параметра λ , при которых коника $\gamma_\lambda = \lambda\alpha + \beta$ становится вырожденной. Это действительные корни кубического уравнения $\det(A_\lambda) = 0$, где A_λ – матрица коники γ_λ . Коника γ_λ вырождается либо в точку, либо в пару прямых.

Назовем *вершиной* вырожденной коники точку, в которую вырождается коника, либо точку пересечения пары прямых, в которую вырождается коника, либо произвольную точку коники, если коника вырождается в пару совпадающих прямых. Касательная к вырожденной конике – это прямая, проходящая через ее вершину, т.е. отображения Понселе j_δ^1 и j_δ^2 относительно вырожденной коники δ совпадают с инволюцией на конике α , точка Фрежье которой – это вершина коники δ . Мера μ является также j_δ -инвариантной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Пусть коники α и β пересекаются в точках A, B, C, D , касательные в которых к конике β вторично пересекают α в точках a, b, c, d соответственно (рис. 3). Тогда $\mu(Ab) = \mu(Ba) = \mu(Cd) = \mu(Dc)$.

Рис. 3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что прямые AC, BD, ac, bd пересекаются в одной точке. Для этого рассмотрим проективное преобразование, переводящее четырехугольник $ABCD$ в параллелограмм. Точка $P = AC \cap BD$ при этом преобразовании перейдет в центр образов коник α и β , и утверждение становится очевидным в силу центральной симметрии относительно образа точки P .

Равенства

$$\mu(Ab) = \mu(Ba), \quad \mu(Cd) = \mu(Dc)$$

следуют из j_β -инвариантности меры μ , а равенство $\mu(Ab) = \mu(Cd)$ – из j_δ -инвариантности, где δ – это вырожденная коника $AC \cup BD$ пучка $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Пусть непересекающиеся коники α и β имеют четыре общие касательные Aa, Bb, Cc, Dd , где точки A, B, C, D лежат на конике α , а точки a, b, c, d – на конике β (рис. 4). Тогда:

а) $P := AB \cap CD = ab \cap cd$, $Q := AC \cap BD = ac \cap bd$, $R := AD \cap BC = ad \cap bc$, т.е. четырехвершинники $ABCD$ и $abcd$ имеют общий диагональный треугольник PQR ;

б) треугольник PQR автополярен относительно любой коники пучка $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$;

в) точки P, Q, R являются вершинами трех вырожденных коник пучка;

г) $\mu(BC) = \mu(AD)$, $\mu(AB) = \mu(CD)$, $\mu(CE) = \mu(DE)$, где E – одна из точек пересечения прямой QR с коникой α .

Рис. 4

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку прямая PQ – это поляра точки R относительно коники α , она проходит через точки пересечения касательных Bb и Cc , Aa и Dd . Тогда из принципа двойственности следует, что полюс прямой PQ относительно коники β – это точка пересечения прямых bc и ad . Аналогичное рассуждение для прямых PR и QR показывает, что треугольник PQR является диагональным и для четырехвершинника $abcd$. Следовательно, треугольник PQR автополярен и относительно α , и относительно β , а значит, и относительно любой коники пучка $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$.

Поскольку коники пучка не пересекаются, через любую точку плоскости проходит единственная коника пучка. Рассмотрим конику δ_P , проходящую через точку P . Если бы она была невырожденной, то поляра точки P относительно δ_P была бы, с одной стороны, прямой QR , а с другой стороны – касательной к конике δ_P в точке P . Тогда точки P, Q, R должны были бы лежать на одной прямой, чего быть не может в силу того, что треугольник PQR автополярен. Значит, коника δ_P вырожденная. Аналогично, коники δ_Q и δ_R , проходящие через точки Q и R , тоже являются вырожденными.

Если треугольник автополярен относительно некоторой коники, то всегда одна из его вершин лежит внутри коники², а две другие вершины – вне. Будем для определенности считать, что точка Q лежит внутри коники α , а точка R – внутри коники β .

Если бы коника δ_Q содержала прямую, то эта прямая пересекала бы конику α , поскольку точка Q лежит внутри коники α . Тогда все коники пучка $\mathcal{F}(\alpha, \beta)$ проходили бы через эту точку пересечения, но коники α и β не пересекаются. Значит, коника δ_Q – это точка Q . Аналогично, коника δ_R – это вырожденная в точку R коника. Теперь из j_{δ_Q} -инвариантности меры μ следует, что $\mu(BC) = \mu(AD)$, $\mu(AB) = \mu(CD)$. Так как мера μ еще и j_{δ_R} -инвариантна, а при композиции $j_{\delta_Q} \circ j_{\delta_R}$ дуга CE переходит в дугу DE , то $\mu(CE) = \mu(DE)$.

ЛЕММА 2.3. Пусть коники пучка $\mathcal{F}$ не пересекаются, точки P, Q, R – вершины его вырожденных коник, α и β – две невырожденные коники пучка $\mathcal{F}$ (рис. 5). Через точку P проведены две прямые, одна из которых пересекает конику α в точках M и N , а другая – конику β в точках K и L . Тогда прямые MK, NL и QR пересекаются в одной точке.

Рис. 5

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим точку пересечения прямых MN и QR через S , а точку пересечения прямых KL и QR – через T . Поскольку прямая QR – это полярная точка P и относительно коники α , и относительно коники β , точка S гармонически сопряжена точке P относительно точек M и N , а точка T гармонически сопряжена точке P относительно точек K и L . Поэтому прямая QR – это полярная точка P относительно коники, вырожденной в пару прямых MK и NL , и, следовательно, она проходит через их точку пересечения.

До сих пор под мерой μ мы подразумевали меру на конике α , определенную в теореме 1.5. Заметим, что на каждой конике γ пучка $\mathcal{F}$ можно аналогичным

²Для невырожденной коники под ее внутренней областью понимаем множество точек плоскости, каждая из которых обладает тем свойством, что любая прямая, через нее проходящая, имеет общую точку с коникой.

образом определить меру. Чтобы в дальнейшем избежать путаницы, обозначим эту меру через μ^γ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть коники пучка $\mathcal{F}$ не пересекаются, точка P – вершина вырожденной в пару прямых коники δ_P пучка $\mathcal{F}$, точки Q и R – вершины двух других вырожденных коник пучка $\mathcal{F}$, α и β – две невырожденные коники пучка $\mathcal{F}$ (рис. 6). Из произвольной точки X прямой QR , лежащей внутри коники β , проведены касательные лучи XY и XZ к конике α , пересекающие конику β в точках S и U соответственно, а одну из прямых, составляющих вырожденную конику δ_P , – в точках G и K , причем отрезок GK не содержит точку P . Точки T и L – точки пересечения луча XQ с коникой β и с прямой GK соответственно. Тогда:

- а) $\mu^\beta(ST) = \mu^\beta(TU)$;
- б) $\mu^{\delta_P}(GL) = \mu^{\delta_P}(LK)$.

Рис. 6

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Поскольку точка X лежит на поляре QR точки P относительно коники α , точка P лежит на поляре YZ точки X . Тогда по лемме 2.3 прямая SU тоже проходит через точку P . Но и касательная к конике β в точке T проходит через точку P . Поэтому при отображении Понселе j_{δ_P} на конике β дуга ST переходит в дугу TU и равенство $\mu^\beta(ST) = \mu^\beta(TU)$ следует из j_{δ_P} -инвариантности меры μ^β .

б) Будем теперь считать конику β переменной, т.е. $\beta = \beta_\lambda = \lambda\alpha + \delta_P$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$. Обозначим плотность меры μ^{β_λ}

$$f_\lambda := \frac{1}{|\nabla \mathcal{P}_{\beta_\lambda}| \sqrt{\mathcal{P}_\alpha}}.$$

В силу уже доказанного п. а)

$$\int_{ST} f_\lambda dl = \int_{TU} f_\lambda dl. \quad (2.1)$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Когда $\lambda \rightarrow 0$, коника β_λ приближается к конике δ_P . Поскольку для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ функция f_λ непрерывна в достаточно малой окрестности V отрезка GK , существует $\lambda_0 > 0$ такое, что для любого $\lambda < \lambda_0$

$$\left| \int_{GL} f_\lambda dl - \int_{ST} f_\lambda dl \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \left| \int_{LK} f_\lambda dl - \int_{TU} f_\lambda dl \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (2.2)$$

В каждой точке окрестности V для достаточно малых λ выполняется

$$|f_\lambda - f_0| < \frac{\varepsilon}{4|GK|},$$

откуда

$$\left| \int_{GL} f_\lambda dl - \int_{GL} f_0 dl \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \left| \int_{TU} f_\lambda dl - \int_{TU} f_0 dl \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (2.3)$$

Рис. 7

Тогда

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{GL} f_0 dl - \int_{LK} f_0 dl \right| < \left| \int_{GL} f_0 dl - \int_{GL} f_\lambda dl \right| + \left| \int_{GL} f_\lambda dl - \int_{ST} f_\lambda dl \right| \\
 & + \left| \int_{ST} f_\lambda dl - \int_{TU} f_\lambda dl \right| + \left| \int_{TU} f_\lambda dl - \int_{TU} f_0 dl \right| + \left| \int_{TU} f_0 dl - \int_{LK} f_0 dl \right| \\
 & \stackrel{(2.1)-(2.3)}{<} \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + 0 + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Поскольку это верно для любого $\varepsilon > 0$,

$$\int_{GL} f_0 dl = \int_{LK} f_0 dl,$$

т.е. $\mu^{\delta_P}(GL) = \mu^{\delta_P}(LK)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть α – коника, вырожденная в пару прямых, β – произвольная невырожденная коника. Тогда в зависимости от взаимного расположения коник α и β выполняются следующие соотношения для меры $\mu = \mu^\alpha$:

- а) $\mu(LK) = \mu(LG) = \mu(EF) = \mu(EH)$ (рис. 7, а);
- б) $\mu(AK) = \mu(BG) = \mu(EF) = \mu(EH)$ (рис. 7, б);
- в) $\mu(AK) = \mu(BG) = \mu(CF) = \mu(DH)$ (рис. 7, в).

Соотношение а) следует из предложения 2.4 и j_{δ_Q} -, j_{δ_R} -инвариантности меры μ ; соотношения б), в) доказываются аналогично.

§ 3. Выравнивающее отображение. Доказательство большой теоремы Понселе

Ключевой идеей доказательства большой теоремы Понселе будет применение выравнивающего отображения, которое переведет отображения Понселе всех коник пучка в сдвиги на окружности. Ниже мы определим это отображение, установим его свойство выравнивания, после чего докажем большую теорему Понселе. Рассуждения, приведенные ниже, подходят и для случая коники α , вырожденной в пару прямых, вершина которой лежит внутри коник пучка $\mathcal{F}$. Случай, когда коника α вырождена в пару прямых, а ее вершина лежит вне коник пучка $\mathcal{F}$, разберем отдельно в § 4 (в этом случае мера бесконечна и ее нельзя нормировать).

Далее в этом параграфе будем считать, что:

- 1) мера μ нормирована следующим образом:

$$\mu(\alpha_\beta) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } \{\alpha \cap \beta\} \text{ состоит из двух точек нечетной кратности,} \\ 1 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

- 2) $\mu(\alpha \setminus \alpha_\beta) = 0$;

3) для любых точек $X, Y \in \widetilde{\alpha}_{\mathcal{F}}$ через (X, Y) обозначим дугу XY коники α , обход которой от X до Y совершается против часовой стрелки; тогда для любых трех точек $X, Y, Z \in \widetilde{\alpha}_{\mathcal{F}}$ выполняется равенство

$$\mu(X, Y) + \mu(Y, Z) \equiv \mu(X, Z) \pmod{1}.$$

Рассмотрим окружность $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ с операцией сложения $\oplus$ по модулю 1. Определим теперь *выравнивающее отображение* $\vartheta: \tilde{\alpha}_{\mathcal{F}} \rightarrow \mathbb{T}$. Пусть X – произвольная точка множества $\tilde{\alpha}_{\mathcal{F}}$, причем X принадлежит копии $\alpha_{\mathcal{F}}^i$ множества $\alpha_{\mathcal{F}}$. Тогда положим

$$\vartheta: X \mapsto (-1)^i \mu(E, X), \quad (3.1)$$

где E – точка на конике α , которая в случае, когда коники пучка $\mathcal{F}$ не пересекаются, определена в предложении 2.1, а в случае, когда коники пучка $\mathcal{F}$ пересекаются, совпадает с какой-нибудь точкой пересечения.

Таким образом, точка X как точка множества $\alpha_{\mathcal{F}}^1$ и точка X как точка множества $\alpha_{\mathcal{F}}^2$ перейдут в симметричные относительно нуля точки на $\mathbb{T}$. При этом в тех случаях взаимного расположения коник, когда $\mu(\alpha_{\beta}) = 1/2$, отображение ϑ инъективно на всем множестве $\tilde{\alpha}_{\mathcal{F}}$. А в тех случаях, когда мера μ нормирована единицей, отображение ϑ инъективно на каждом из множеств $\alpha_{\mathcal{F}}^1$ и $\alpha_{\mathcal{F}}^2$.

Обозначим через $\rho_c: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ сдвиг на вектор c , т.е. $\rho_c: x \mapsto x \oplus c$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. *Каждой конике β пучка $\mathcal{F}$ соответствует некоторое число c_{β} такое, что отображения Понселе j_{β}^1 и j_{β}^2 после применения выравнивающего отображения перейдут в сдвиги на векторы $\pm c_{\beta}$. Точнее, для любого $k \in \{1, 2\}$ диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\alpha}_{\mathcal{F}} & \xrightarrow{j_{\beta}^k} & \tilde{\alpha}_{\mathcal{F}} \\ \downarrow \vartheta & & \downarrow \vartheta \\ \mathbb{T} & \xrightarrow{\rho_{(-1)^k c_{\beta}}} & \mathbb{T} \end{array}$$

коммутативна, т.е.

$$\vartheta \circ j_{\beta}^k = \rho_{(-1)^k c_{\beta}} \circ \vartheta. \quad (3.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если касание прямой $Zj_{\beta}^k(Z)$ с коникой β внутреннее для α , то точки Z и $j_{\beta}^k(Z)$ двигаются в одном направлении по конике α и принадлежат одной копии $\alpha_{\mathcal{F}}^i$ множества $\alpha_{\mathcal{F}}$. Если касание прямой $Zj_{\beta}^k(Z)$ с коникой β внешнее для α , то точки Z и $j_{\beta}^k(Z)$ двигаются в разных направлениях по конике α и принадлежат разным копиям множества $\alpha_{\mathcal{F}}$.

Из этого наблюдения и определения (3.1) выравнивающего отображения следует, что при движении точки Z по α точки $\vartheta(Z)$ и $\vartheta(j_{\beta}^k(Z))$ двигаются в одном направлении по $\mathbb{T}$. Тогда утверждение леммы следует из j_{β} -инвариантности меры μ и условия нормировки.

Из предложений 2.1 и 2.2 следует, что в случае пересекающихся коник $c_{\beta} = \pm \mu(Aa)$ (точки A и a из предложения 2.1), а в случае коник, лежащих одна вне другой, $c_{\beta} = \pm \mu(AB)$ (точки A и B из предложения 2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО БОЛЬШОЙ ТЕОРЕМЫ ПОНСЕЛЕ. Так как по определению вписанно-описанного многоугольника число внешних относительно коники α касаний его сторон с кониками $\beta_1, \dots, \beta_n$ четно, то, применяя к вершине X многоугольника отображения Понселе $j_{\beta_i}^{\varepsilon_i}$, переводящие каждый раз в следующую вершину, на n -м шаге придем в точку множества $\tilde{\alpha}_{\mathcal{F}}$, совпадающую с первой вершиной на одной копии множества α_{β} (ведь переход с одной копии на другую

осуществляется только для внешнего касания). Подействуем отображением ϑ на обе части равенства

$$j_{\beta_n}^{\varepsilon_n} \circ \cdots \circ j_{\beta_1}^{\varepsilon_1}(X) = X,$$

пользуясь при этом свойством (3.2). Получим

$$\rho_{d_n} \circ \cdots \circ \rho_{d_1}(x) = x, \quad \text{где } x = \mu(E, X), \quad d_i = (-1)^{\varepsilon_i} c_{\beta_i},$$

откуда

$$d_n \oplus \cdots \oplus d_1 = 0, \tag{3.3}$$

$$\rho_{d_n} \circ \cdots \circ \rho_{d_1} \equiv id_{\mathbb{T}}. \tag{3.4}$$

Большая теорема Понселе равносильна тому, что

$$\xi := j_{\beta_n}^{\varepsilon_n} \circ \cdots \circ j_{\beta_1}^{\varepsilon_1} \equiv id_{\tilde{\alpha}_{\mathcal{F}}}.$$

В случае, когда коники пучка $\mathcal{F}$ пересекаются в двух точках нечетного порядка, отображение ϑ биективно и тождество $\xi \equiv id_{\tilde{\alpha}_{\mathcal{F}}}$ сразу следует из (3.4). В общем случае из (3.4) следует, что для любой точки $Y \in \alpha_{\mathcal{F}}$ верно одно из двух утверждений:

- 1) $\xi(Y) = Y$ и точки Y и $\xi(Y)$ принадлежат одной копии множества $\alpha_{\mathcal{F}}$;
- 2) $\mu(Y, E) = \mu(E, \xi(Y))$ и точки Y и $\xi(Y)$ принадлежат разным копиям множества $\alpha_{\mathcal{F}}$.

Покажем, что в обоих оставшихся случаях взаимного расположения коник возможно только утверждение 1).

Если коники пучка $\mathcal{F}$ пересекаются в четырех точках, то $\alpha_{\mathcal{F}}$ состоит из двух дуг, а переход с одной на другую при отображении Понселе j_{β_i} возможен только в случае, когда β_i – гипербола (возможно, вырожденная в пару пересекающихся прямых). Так как есть один вписанно-описанный многоугольник, то число гипербол среди коник $\beta_1, \dots, \beta_n$ четно, точки Y и $\xi(Y)$ лежат на одной дуге множества $\alpha_{\mathcal{F}}$ и равенство $\mu(Y, E) = \mu(E, \xi(Y))$ невозможно.

Если коники пучка $\mathcal{F}$ не пересекаются, то каждая коника β_i лежит либо внутри α , либо вне. Тогда соответствующее касание либо всегда внутреннее, либо всегда внешнее. Так как есть один вписанно-описанный многоугольник, то число внешних касаний всегда четно, а точки Y и $\xi(Y)$ принадлежат одной из двух копий $\alpha_{\mathcal{F}}^1, \alpha_{\mathcal{F}}^2$ множества $\alpha_{\mathcal{F}}$, что возможно только при утверждении 1).

Итак, из существования одного вписанно-описанного многоугольника следует существование вписанно-описанного многоугольника с вершиной в любой точке коники α , из которой можно провести касательную к β_1 . Более того, поскольку в равенстве (3.3) можно сделать перестановку слагаемых или умножить его на -1 , то и стороны многоугольника могут касаться коник $\beta_1, \dots, \beta_n$ в произвольном порядке, соответствующем любой подстановке σ множества $\{1, \dots, n\}$, а первой вершиной многоугольника может быть любая из двух точек пересечения с коникой α произвольной касательной к конике β_{σ_1} .

§ 4. Случай вырожденной коники

В этом параграфе мы рассмотрим случай, когда коника α вырождена в пару прямых, а ее вершина лежит вне коник пучка $\mathcal{F}$. Тогда функция

$$f(X) = \frac{1}{|\nabla \mathcal{P}_\alpha(X)| \sqrt{\mathcal{P}_\beta(X)}}$$

в вершине P коники α имеет неинтегрируемую особенность и $\mu(\alpha) = \infty$, из-за чего мы не можем нормировать меру и построить выравнивающее отображение так, как это было сделано в § 3.

Пусть l_1 и l_2 – прямые, из которых состоит коника α . Как и раньше, рассматриваем две копии $\alpha_{\mathcal{F}}^1$ и $\alpha_{\mathcal{F}}^2$ множества $\alpha_{\mathcal{F}}$, объединение которых обозначаем через $\tilde{\alpha}_{\mathcal{F}}$. Рассмотрим точки

$$E_1 \in l_1 \cap \alpha_{\mathcal{F}}, \quad E_2 \in l_2 \cap \alpha_{\mathcal{F}},$$

ни одна из которых не совпадала с точкой P . Каждая точка Z коники α , не совпадающая с точкой P , лежит на одной из прямых l_1 или l_2 , для определенности на l_1 . Точки Z и E_1 делят прямую l_1 на два “проективных отрезка”, один из которых – это обычный отрезок, а второй – его дополнение. Тот, который не содержит точку P , обладает тем свойством, что мера μ на нем конечна. Обозначим его через $[E_1, Z]$. Ориентируем прямые l_1 и l_2 . Тогда отрезок $[E_1, Z]$ ориентирован положительно, если его обход от точки E_1 до точки Z совершается в направлении, ориентирующем прямую l_1 , и ориентирован отрицательно, если в другом. Положим $\tau(Z) = \pm 1$ в зависимости от ориентации отрезка $[E_1, Z]$ (+1 для положительной и -1 для отрицательной).

Рассмотрим пару параллельных прямых o_1 и o_2 и зададим на них ориентацию, причем одинаковую, т.е. так, чтобы у них был общий направляющий вектор $\vec{e}$. Точки E_1 и E_2 переведем в произвольные точки $X_1 \in o_1$ и $X_2 \in o_2$, для которых $X_1 X_2 \perp \vec{e}$. Построим теперь отображение ϑ , переводящее множество $\tilde{\alpha}_{\mathcal{F}}$ в пару параллельных прямых o_1 и o_2 .

Пусть точка Z прямой l_k принадлежит копии $\alpha_{\mathcal{F}}^i$, где $i, k = 1, 2$. Тогда определим $\vartheta(Z)$ как точку прямой o_k , для которой

$$\overrightarrow{X_k \vartheta(Z)} = (-1)^i \tau(Z) \mu[E_k, Z] \vec{e}, \quad (4.1)$$

считая что $\mu(\alpha \setminus \alpha_\beta) = 0$.

Таким образом, точка Z как точка множества $\alpha_{\mathcal{F}}^1$ и точка Z как точка множества $\alpha_{\mathcal{F}}^2$ перейдут в симметричные относительно X_1 (или X_2) точки на o_1 (или o_2).

Ориентация прямой задает направление ее нормали. Точкам той из двух полуплоскостей (на которые плоскость делится прямой), в которой лежит вектор нормали, если его отложить от прямой, сопоставим знак плюс, а точкам другой полуплоскости – знак минус. Две ориентированные прямые образуют два вертикальных угла. Тот вертикальный угол, в котором знаки разные, назовем *отрицательным*.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Ранее (см. введение) мы определили внешность коники, вырожденной в пару прямых, как внутренность любого из ее вертикальных

углов. Будем считать, что ориентация прямых l_1 и l_2 такова, что внешность коники α совпадает с ее отрицательным углом.

Возьмем теперь в качестве точек E_1 и E_2 следующие точки. Если коники пучка не пересекают прямую l_i , то $E_i := l_i \cap p$, где p – поляра точки P относительно любой коники пучка $\mathcal{F}$ (а поляры точки P относительно всех коник пучка совпадают). Если коники пучка пересекают прямую l_i , то в качестве E_i возьмем любую из точек пересечения. Тогда справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. *Любой конике β пучка $\mathcal{F}$ соответствует число $c_\beta := \frac{1}{2}\mu[G, K]$ такое, что каждое из отображений Понселе j_β^1 и j_β^2 после применения выравнивающего отображения перейдет в композицию сдвига на вектор $\pm c_\beta$ и симметрии S , переводящей прямые o_1 и o_2 друг в друга. Точнее, для любого $k \in \{1, 2\}$ коммутативны следующие диаграммы:*

$$\begin{array}{ccc} l_1 & \xrightarrow{j_\beta^k} & l_2 \\ \downarrow \vartheta & & \downarrow \vartheta \\ o_1 & \xrightarrow{S \circ \rho_{(-1)^k c_\beta}} & o_2, \end{array} \quad \begin{array}{ccc} l_2 & \xrightarrow{j_\beta^k} & l_1 \\ \downarrow \vartheta & & \downarrow \vartheta \\ o_2 & \xrightarrow{S \circ \rho_{(-1)^{k+1} c_\beta}} & o_1 \end{array}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку мера μ инвариантна относительно отображений Понселе, из определения (4.1) выравнивающего отображения следует, что для того, чтобы понять, что отображения Понселе при выравнивании перейдут в сдвиги, достаточно проверить, что при движении точки Z по α точки $\vartheta(Z)$ и $\vartheta(j_\beta^k(Z))$ двигаются в одном направлении по прямым o_1 и o_2 . А то, что это сдвиги на векторы $\pm c_\beta$, следует из предложения 2.5.

Из замечания 4.1 следует, что если касание прямой $Zj_\beta^k(Z)$ с коникой β внутреннее, то при движении точки Z по конике α в направлении ее ориентации точка $j_\beta^k(Z)$ движется по α тоже в направлении ее ориентации. А так как точки Z и $j_\beta^k(Z)$ принадлежат одной копии коники α , то точки $\vartheta(Z)$ и $\vartheta(j_\beta^k(Z))$ двигаются в одном направлении по прямым o_1 и o_2 . Если же касание прямой $Zj_\beta^k(Z)$ с коникой β внешнее, то при движении точки Z по конике α в направлении ее ориентации точка $j_\beta^k(Z)$ движется по α против ее ориентации. Но так как точки Z и $j_\beta^k(Z)$ принадлежат разным копиям коники α , то точки $\vartheta(Z)$ и $\vartheta(j_\beta^k(Z))$ двигаются в одном направлении по прямым o_1 и o_2 .

Теперь большая теорема Понселе для случая вырожденной коники α следует из предложения 4.2.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Если траектории Понселе коник α и β , где α вырождена в пару прямых, замыкаются, то вершина коники α лежит внутри коники β . Иначе (например, если α и β не пересекаются) траектории Понселе сходятся к вершине коники α .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Z_1 Z_2 \dots Z_n \dots$ – некоторая траектория Понселе коник α и β . Пусть для определенности точка Z_2 получается из точки Z_1 применением отображения j_β^1 ; тогда $Z_3 = j_\beta^2(Z_2)$, $Z_4 = j_\beta^1(Z_3)$, $\dots$, т.е. отображения Понселе j_β^1 и j_β^2 в этой последовательности чередуются.

Рассмотрим образ $Z'_1 Z'_2 \dots Z'_n \dots$ траектории Понселе $Z_1 Z_2 \dots Z_n \dots$ после выравнивания отображением ϑ . Точки Z'_i с четными номерами лежат на одной

из прямых o_1 и o_2 , а с нечетными – на другой. По предложению 4.2 точка Z'_{i+1} получается из точки Z'_i сдвигом на один и тот же для всех i вектор и симметрией S , т.е. последовательность Z'_i сходится к бесконечно удаленной точке прямых l_1 и l_2 . Это равносильно тому, что последовательность Z_i сходится к точке P .

§ 5. Описание всех j -инвариантных мер

Для доказательства большой теоремы Понселе нами была рассмотрена конкретная мера (определенная в теореме 1.5), инвариантная относительно отображения Понселе, которая оказалась также $\mathcal{F}$ -универсальной мерой. Возникает естественный вопрос: существуют ли другие инвариантные и другие универсальные меры?

Следующая теорема дает полную классификацию инвариантных относительно отображений Понселе и универсальных борелевских мер на кониках.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть α и β – произвольные невырожденные коники.

1. Если траектории Понселе коник α и β не замыкаются, то существует единственная j_β -инвариантная борелевская мера. При этом она абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и $\mathcal{F}$ -универсальна.

2. Если траектории Понселе коник α и β замыкаются, то существует бесконечно много инвариантных борелевских мер. Каждая такая мера μ однозначно определяется своим заданием на произвольной дуге (a, b) , где b – такая точка орбиты a под действием j_β , что на дуге (a, b) нет других точек этой орбиты.

3. $\mathcal{F}$ -универсальная мера на α существует, единственна и совпадает с мерой, определенной в теореме 1.5.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, всякая j_β -инвариантная борелевская мера ν порождает борелевскую меру $\lambda = \nu \circ \vartheta^{-1}$ на $\mathbb{T}$, инвариантную относительно сдвига ρ_{c_β} .

Если траектории Понселе не замыкаются, то $j_\beta^n \neq id_\alpha$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Действуя на это неравенство отображением ϑ по правилу (3.2), получаем $\rho_{c_\beta}^n \neq id_{\mathbb{T}}$, что эквивалентно тому, что $nc_\beta \neq 0_{\mathbb{T}}$ или $nc_\beta \notin \mathbb{Z}$, т.е. число c_β иррационально.

Любая борелевская мера λ на $\mathbb{T}$ является обобщенной функцией

$$(\lambda, \varphi) = \int \varphi d\lambda, \quad \varphi \in D,$$

где D – пространство основных функций. Всякая обобщенная функция $\lambda \in D'$ единственным образом представляется рядом Фурье:

$$\lambda(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k x},$$

сходящимся в D' . Если мера λ инвариантна относительно сдвига на вектор c , то

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k x} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{2\pi i k (x+c)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (a_k e^{2\pi i k c}) e^{2\pi i k x}.$$

Из единственности представления функции рядом Фурье следует, что для любого k либо $a_k = 0$, либо $e^{2\pi i k c} = 1$. Последнее в случае иррационального c

выполняется только при $k = 0$. Таким образом, $\lambda(x) = a_0$, т.е. с учетом нормировки мера единственна.

В случае замыкания траекторий число c_β рационально и равно некоторой несократимой дроби m/n , где n равно числу звеньев траектории, т.е. числу точек орбиты $a \in \tilde{\alpha}_{\mathcal{F}}$ под действием j_β . Тогда имеет место разбиение

$$\tilde{\alpha}_{\mathcal{F}} = \bigsqcup_{k=0}^{n-1} j_\beta^k([a, b)),$$

где j_β^k — k -я степень j_β относительно композиции. И произвольная мера μ на $[a, b)$ однозначно продолжается на всю α по инвариантности.

Существование $\mathcal{F}$ -универсальной меры уже установлено, а ее единственность следует из п. 1 этой теоремы. В самом деле, пусть точки X, Y коники α таковы, что $\mu(X, Y)$ иррационально. В пучке $\mathcal{F}$ есть коника γ , касающаяся прямой XY . Тогда траектории Понселе коники γ не замыкаются. Каждая $\mathcal{F}$ -универсальная мера является j_γ -инвариантной. А из п. 1 следует, что j_γ -инвариантная мера единственна.

Автор благодарен В. Ю. Протасову за постановку задач, постоянное внимание к работе и помощь в подготовке текста, А. Г. Хованскому и В. А. Кириченко за полезные обсуждения и рецензенту за ценные замечания.

Список литературы

- [1] J.-V. Poncelet, *Traité des propriétés projectives des figures*, Bachelier, Paris, 1822, xlvii+427 pp.
- [2] Ph. Griffiths, J. Harris, “On Cayley’s explicit solution to Poncelet’s porism”, *Enseign. Math.* (2), **24**:1-2 (1978), 31–40.
- [3] В. Ю. Протасов, “Об одном обобщении теоремы Понселе”, *УМН*, **61**:6(372) (2006), 187–188; англ. пер.: V. Yu. Protasov, “A generalization of Poncelet’s theorem”, *Russian Math. Surveys*, **61**:6 (2006), 1180–1182.
- [4] V. Yu. Protasov, “Generalized closing theorems”, *Elem. Math.*, **66**:3 (2011), 98–117.
- [5] М. Берже, *Геометрия*, т. 1, 2, Части 1–5, Мир, М., 1984, 560 с., 368 с.; пер. с фр.: M. Berger, *Géométrie*, v. I–V, CEDIC, Paris; Nathan, Paris, 1977, 192 pp., 214 pp., 184 pp., 218 pp., 189 pp.
- [6] I. J. Schoenberg, “On Jacobi–Bertrand’s proof of a Theorem of Poncelet”, *Studies in pure mathematics*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1983, 623–627.
- [7] J. L. King, “Three problems in search of a measure”, *Amer. Math. Monthly*, **101**:7 (1994), 609–628.
- [8] А. А. Панов, Д. А. Панов, “Гомеодная плотность и теорема Понселе”, Матем. просв., сер. 3, МЦНМО, М., 2001, 145–157.
- [9] H. Lebesgue, *Les coniques*, Gauthier-Villars, Paris, 1942, viii+190 pp.
- [10] В. В. Прасолов, В. М. Тихомиров, *Геометрия*, 2-е изд., перераб. и доп., МЦНМО, М., 2007, 328 с.; англ. пер. 1-го изд.: V. V. Prasolov, V. M. Tikhomirov, *Geometry*, Transl. Math. Monogr., **200**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001, xii+257 pp.

Евгений Александрович Авксентьев
(Evgeniy A. Avksentyev)
 Механико-математический факультет
 Московского государственного университета
 им. М. В. Ломоносова
 E-mail: avksentyev@mail.ru

Поступила в редакцию
 22.12.2012 и 09.11.2013