Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Востоков, К работе И. Р. Шафаревича “Общий закон взаимности”, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 6, 3–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8205>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 10:07:27

УДК 517.538

С. В. Востоков

К работе И. Р. Шафаревича “Общий закон взаимности”

В работе предлагается новый метод вычисления явной формы спаривания Гильберта. С его помощью вычисляется спаривание Гильберта в классическом локальном поле и в полном многомерном поле.

Библиография: 24 названия.

Ключевые слова: явные законы взаимности, полные многомерные поля, топологические K -группы.

DOI: 10.4213/sm8205

§ 1. Введение

Проблема вычисления символа Гильберта является заключительным этапом в девятой проблеме Гильберта, так как после создания теории полей классов такими математиками как Фуртвенглер, Такачи, Артин, Хассе, классический закон взаимности для произведения степенных вычетов в поле алгебраических чисел свелся к вычислению символов норменного вычета Гильберта в локальных полях:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)_n \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)_n^{-1} = \prod_{\mathfrak{p}|n, \infty} \left(\frac{\alpha, \beta}{\mathfrak{p}}\right)_n$$

(подробнее см. [1]).

Первой работой, в которой решалась эта задача, была работа Артина и Хассе [2]. В ней вычислялся символ Гильберта в круговом поле $\mathbb{Q}_p(\zeta)$ (здесь ζ – первообразный корень степени p^n из 1) на парах (ζ, ε) и $(\zeta - 1, \varepsilon)$, где $\varepsilon \equiv 1 \pmod{\zeta - 1}$. Кроме того, в этой работе была определена функция $\mathcal{E}(X) = \exp(X + X^p/p + X^{p^2}/p^2 + \dots)$ (функция Артина–Хассе), играющая важную роль в арифметике локальных полей.

Существенную роль в получении явных формул для символа Гильберта сыграла работа И. Р. Шафаревича 1950 г., в которой был определен базис мультипликативной группы полного дискретно нормированного поля с совершенным полем вычетов (базис Шафаревича) и был дан метод вычисления на нем символа Гильберта p -й степени (см. [3]). Идея работы состоит, кроме прочего, в том, чтобы построить конструктивно теорию полей классов для куммеровых расширений. В полном объеме эта теория как аналог пространств со скалярным произведением, роль которого играет символ Гильберта, была получена в работах [4; § 7, п. 2] и [5; теорема 5]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-33057).

Полные явные формулы для символа Гильберта были получены в 1978 г. С. В. Востоковым в работе [4] (см. также [6]). В этой работе были использованы два метода. Первый был основан на идее работы Шафаревича – построении в явном виде некоего спаривания на мультипликативной группе поля, доказательстве его свойств и проверке совпадения спаривания с символом Гильберта на базисе Шафаревича. Вторым методом – комбинация первого с вычислением символа непосредственно из определения (см. [4; § 5]).

В настоящей работе предлагается новый подход к получению явных формул закона взаимности, основанный на идее Витта отождествления группы Брауэра поля с группой примарных элементов. Как показал Витт, любую циклическую пару в группе Брауэра $\text{Br}(K)$ можно однозначно представить в виде $(\alpha, \beta) = (\pi, \omega)$, где ω – N -примарный элемент поля K , содержащего все корни N -й степени из 1, при этом представление не зависит от выбора простого элемента π . Отождествляя (π, ω) с примарным элементом ω , мы получим отождествление $\text{Br}(K)$ с группой примарных элементов поля K .

Именно на этой идее основан предлагаемый в работе план нахождения явной формулы для символа Гильберта. Он изложен в п. 2.2. По этому плану в первой части работы (см. § 2) мы получаем формулы в классическом случае локального поля (конечного расширения $\mathbb{Q}_p$). Во второй части работы мы получаем этим же путем формулы в случае полного многомерного поля с совершенным полем вычетов.

Статья посвящается выдающемуся математику И. Р. Шафаревичу.

§ 2. Символ Гильберта в классическом локальном поле

2.1. Обозначения. K – локальное поле (конечное расширение $\mathbb{Q}_p$),

T – подполе инерции поля K ,

$\mathcal{O} := \mathcal{O}_T$ – кольцо целых поля T ,

e – индекс ветвления поля K , $e_1 = e/(p-1)$,

π – простой элемент поля K ,

$\mathfrak{R}$ – система представителей Тейхмюллера поля вычетов поля K в $\mathcal{O}$,

$\mathcal{O}_{\mathfrak{R}}((X)) = \langle X \rangle \times \mathfrak{R} \times (1 + X\mathcal{O}[[X]])$,

tr – оператор следа в $T/\mathbb{Q}_p$,

Δ – автоморфизм Фробениуса в $\mathcal{O}$ над $\mathbb{Z}_p$, и той же буквой обозначаем оператор Фробениуса на кольце рядов Лорана $\mathcal{O}((X))$

$$\Delta f(X) = \sum_{i \geq m} a_i^{\Delta} X^{pi}.$$

Для элемента $\alpha \in K$ будем обозначать ряд $\alpha(X) \in \mathcal{O}((X))$ такой, что $\alpha(\pi) = \alpha$, через $\underline{\alpha}$. Таким образом, $\underline{\alpha}(X)|_{X=\pi} = \alpha$.

$\zeta := \zeta_{p^n}$ – первообразный корень степени p^n из 1, содержащийся в K , $s(X) = \zeta^{p^n} - 1$, $s_{n-1}(X) = \zeta^{p^{n-1}} - 1$, $u(x) = s(X)/s_{n-1}(X)$.

Для ряда $s(X)$ и ряда $1/s(X)$ из двумерного кольца рядов $\mathcal{O}\{\{X\}\}$ выполнены сравнения $s(X) \equiv s_{n-1}^{\Delta}(X) \pmod{p^n}$, $1/s(X) \equiv 1/s_{n-1}^{\Delta}(X) \pmod{p^n}$, и,

значит,

$$\frac{1}{s(X)} \equiv g(X^p) \pmod{p^n} \quad (2.1)$$

при некотором ряде $g(X)$ из $O\{\{X\}\}$ (см. [4; § 3]).

Функция Артина–Хассе $\mathcal{E}(X) = \exp(X + X^p/p + X^{p^2}/p^2 + \dots)$ определена в работе [2]. Она имеет следующие свойства:

$$\mathcal{E}(x) = \prod (1 - X^m)^{-\mu(m)/m}, \quad (2.2)$$

где $\mu(m)$ – функция Мёбиуса и m пробегает все натуральные взаимно простые с p числа (см. [7]). Из (2.2) следует, очевидно, сравнение

$$\mathcal{E}(X) \equiv 1 - X \pmod{X^2}. \quad (2.3)$$

Кроме этой функции нам потребуется обобщенная функция Артина–Хассе и обратная к ней, которые были определены в работе [4; § 1]:

$$E(\varphi(X)) = \exp\left(1 - \frac{\Delta}{p}\right)^{-1} (\varphi(X)), \quad \ell(1 + \varphi(X)) = \left(1 - \frac{\Delta}{p}\right) \log(1 + \varphi(X)),$$

где $\varphi(X) \in X\mathcal{O}[[X]]$.

Ясно, что для любого элемента $\theta \in \mathfrak{K}$ имеет место равенство

$$\mathcal{E}(\theta X^m) = E(\theta X^m). \quad (2.4)$$

Функции E и ℓ имеют следующие свойства.

ЛЕММА 1. *Функции E и ℓ задают взаимно обратные изоморфизмы между аддитивным $\mathbb{Z}_p$ -модулем $X\mathcal{O}[[X]]$ и мультипликативным $\mathbb{Z}_p$ -модулем $1 + X\mathcal{O}[[X]]$ (см. [4; предложение 1]).*

2.2. Формулировка основного результата. В этом пункте мы формулируем основную теорему и шаги ее доказательства. Итак, пусть K – локальное поле, содержащее все корни степени p^n из 1, тогда в нем можно определить символ Гильберта

$$(\cdot, \cdot): K^* \times K^* \rightarrow \langle \zeta \rangle,$$

где $\zeta := \zeta_{p^n}$ – первообразный корень p^n -степени из 1:

$$(\alpha, \beta) = {}_{p^n}\sqrt{\beta}^{\psi_K(\alpha)^{-1}},$$

где $\psi_K: K^* \rightarrow \text{Gal}(K^{ab}/K)$ – отображение взаимности (относительно основных свойств символа Гильберта см. например [8; гл. IV, § 5]).

ТЕОРЕМА 1. *Для символа Гильберта при $p \neq 2$ имеет место явная формула*

$$(\alpha, \beta) = \zeta^{\text{tr res}_X \Phi(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) / (\underline{\zeta}^{p^n} - 1)}, \quad (2.5)$$

где tr – оператор следа из T в $\mathbb{Q}_p$, $\underline{\alpha}, \underline{\beta}, \underline{\zeta} \in \mathcal{O}_{\mathfrak{K}}((X))$ – такие ряды, что $\underline{\alpha}(\pi) = \alpha$, $\underline{\beta}(\pi) = \beta$, $\underline{\zeta}(\pi) = \zeta$ и

$$\Phi(\underline{\alpha}, \underline{\beta}) = \ell(\underline{\alpha}) \frac{d}{dX} \ell(\underline{\beta}) - \ell(\underline{\alpha}) \underline{\beta}^{-1} \frac{d}{dX} \underline{\beta} + \ell(\underline{\beta}) \underline{\alpha}^{-1} \frac{d}{dX} \underline{\alpha}. \quad (2.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\underline{\alpha}$, $\underline{\beta}$, $\underline{\zeta}$ брать из обратимых рядов Лорана $\mathcal{O}((X))^*$, то к ряду $1/(\underline{\zeta}^{p^n} - 1)$ в (2.1) надо добавить $1/2$ (см. [9]).

План доказательства.

1. Сведение символа Гильберта на паре (α, β) , $\alpha, \beta \in K^*$ к символу (π, ε) , где ε – главная единица поля K .
 2. Вычисление в явном виде примарных элементов и задание образующих элементов группы главных единиц.
 3. Вычисление символа Гильберта на паре (π, ε) .
- Результат теоремы будет следовать из пп. 1 и 2.

2.3. Доказательство теоремы. Шаг 1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Для $\alpha, \beta \in K^*$ имеет место равенство

$$(\alpha, \beta) = (\pi, E(X\Phi(\underline{\alpha}, \underline{\beta})))|_{X=\pi},$$

где ряд $\Phi(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ определен в (2.6).

Предложение 1 было доказано в теореме 2 работы [10]. Оно основано на соотношении Стейнберга $(1 - x, x) = 1$, $x \neq 0$, $x \neq 1$, для символа Гильберта.

Шаг 2. Напомним, что элемент $\omega \in K^*$ называется p^n -примарным, если расширение $K(\sqrt[p^n]{\omega})/K$ неразветвлено.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $p \neq 2$. Элемент

$$\omega(a) = E(a(\underline{\zeta}^{p^n} - 1))|_{X=\pi}$$

является p^n -примарным. Он не зависит (с точностью до p^n -ых степеней) от выбора простого элемента π и способа разложения корня ζ в степенной ряд по π . При этом

$$(\pi, \omega(a)) = \zeta^{\text{tr } a}, \quad (2.7)$$

$\omega(a) \in K^{*p^n} \iff \text{tr } a \equiv 0 \pmod{p^n}$. Группа Ω всех p^n -примарных элементов поля K является циклической, порожденной элементом $\omega(a)$, $\text{tr } a \equiv 1 \pmod{p^n}$.

Этот результат был доказан в [4; § 4, предложение 6], а также в [11; предложение 1], см. также [8; гл. VI, § 4].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Любая главная единица ε поля K представима в виде

$$\varepsilon = E(a \cdot s(X) + f(X))|_{X=\pi}, \quad (2.8)$$

где $a \in \mathcal{O}$, $s(X) = \underline{\zeta}^{p^n}(X) - 1$ и

$$f(X) = \sum_{\substack{m \geq 1 \\ p \nmid m}} a_m X^m, \quad a_m \in \mathcal{O}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Представление (2.8) неоднозначно.

Сформулируем теперь теорему Гензеля (см. [12], а также [3; § 1]).

ТЕОРЕМА ГЕНЗЕЛЯ. Пусть для каждого i , $i \not\equiv 0 \pmod{p}$, а также для $i = pe_1$ и для каждого $\theta \in \mathfrak{R}$ выбрана главная единица $\varepsilon_i(\theta)$, удовлетворяющая условию $\varepsilon_i(\theta) \equiv 1 + \theta\pi^i(\pi^{i+1})$. Тогда всякая главная единица ε может быть представлена в виде $\varepsilon = \prod_{i,r} \varepsilon_i(\theta_{ir})^{p^r}$, где произведение распространяется на указанные выше значения i и на все целые $r \geq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Доказательство теоремы Гензеля основано на формуле возведения в p -ую степень единицы $1 + \theta\pi^i + \dots$ (подробное доказательство см. например в [13; § 15]).

Для доказательства предложения 3 возьмем следующие единицы в качестве образующих Гензеля:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i(\theta) &= E(\theta\pi^i), & p \nmid i, & \theta \in \mathfrak{R}, \\ \varepsilon_{p\ell_1}(\theta) &= E(\theta s(X))|_{X=\pi}, & \theta \in \mathfrak{R}. \end{aligned}$$

Тогда единица ε будет представляться в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \prod_{r \geq 0} E(p^r \theta_r s(X))|_{X=\pi} \cdot \prod_{p \nmid i} E(p^r \theta_{i,r} X^i)|_{X=\pi} \\ &= E\left(\left(\sum_{r \geq 0} p^r \theta_r\right)s(X)\right)|_{X=\pi} \cdot E\left(\sum_{p \nmid i} \left(\sum_{r \geq 0} p^r \theta_{i,r}\right)X^i\right)|_{X=\pi}. \end{aligned}$$

Пусть $a = \sum_{r \geq 0} p^r \theta_r$, $a_i = \sum_{r \geq 0} p^r \theta_{i,r}$. Откуда следует $\varepsilon = E(as(X) + f(X))|_{X=\pi}$, где $f(X) = \sum_{p \nmid i} a_i X^i$, $a, a_i \in \mathcal{O}$ и предложение 3 доказано.

Шаг 3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $\varphi(X) \in \mathcal{O}[[X]]$. Тогда при $p \neq 2$ имеем

$$(\pi, E(X\varphi(X))|_{X=\pi}) = \zeta^{\text{tr res}_X \varphi(X)/(\zeta^{p^n} - 1)}.$$

Равенство (2.5) теоремы 1 следует из предложений 1 и 4.

Для доказательства предложения 4 нам потребуется несколько лемм.

ЛЕММА 2. Пусть $\varphi(X) \in \mathcal{O}[[X]]$ и $\psi(\pi) = 0$. Тогда найдется ряд $\psi(X) \in \mathcal{O}[[X]]$ такой, что

$$\varphi(X) = u(X) \cdot \psi(X)$$

(см. [4; § 3, лемма 6]).

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $\varepsilon(X) \equiv 1 \pmod{X}$ и $\varepsilon(\pi) = 1$, то $\varepsilon(X) = 1 + u(X)\psi(X)$ для некоторого ряда $\psi(X) \in X\mathcal{O}[[X]]$.

ЛЕММА 3. Пусть $\underline{\varepsilon}(X) = 1 + u(X)\psi(X)$, где $\psi(X) \in X\mathcal{O}[[X]]$. Тогда при $p \geq 3$ имеет место сравнение

$$\frac{l(\underline{\varepsilon})}{s(X)} \equiv (1 - \Delta) \frac{\log \underline{\varepsilon}}{s} \pmod{p^n, \deg 1},$$

при этом ряд $(\log \underline{\varepsilon})/s$, рассматриваемый по mod deg 1, имеет целые коэффициенты при нулевой и отрицательных степенях (см. [11; § 1, леммы 3 и 4]).

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях леммы 3 имеем

$$\operatorname{res}_X \frac{X^{-1}l(\underline{\varepsilon})}{s(X)} \equiv -\wp(c) \pmod{p^n},$$

где $\wp(c) = c^\Delta - c$ и c — свободный член ряда $(\log \underline{\varepsilon})/s$.

Пусть

$$\varepsilon = E(X\varphi(X))|_{X=\pi}, \quad \varphi(X) \in \mathcal{O}[[X]]. \quad (2.9)$$

Рассмотрим разложение (2.8) из предложения 3 этой единицы:

$$\varepsilon = E(as(X) + f(X))|_{X=\pi}, \quad (2.10)$$

где

$$f(X) = \sum_{\substack{i \geq 1 \\ p \nmid i}} a_i X^i.$$

ЛЕММА 4. Справедливо равенство

$$(\pi, \varepsilon) = \zeta^{\operatorname{tr} a}. \quad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.10) следует

$$(\pi, \varepsilon) = (\pi, \omega(a))(\pi, E(f(X))|_{X=\pi}),$$

где $\omega(a) = E(as(X))|_{X=\pi}$. Согласно (2.7) $(\pi, \omega(a)) = \zeta^{\operatorname{tr} a}$. С другой стороны, единица $E(f(X))|_{X=\pi}$ распадается в произведение единиц вида $E(\theta\pi^i)$, где $\theta \in \mathfrak{R}$ и $p \nmid i$, так как все одночлены ряда $f(X)$ имеют степени, взаимно простые с p . Далее,

$$E(\theta\pi^i) = \varepsilon(\theta\pi^i) = \prod_{\substack{m \geq 1 \\ p \nmid m}} (1 - (\theta\pi^i)^m)^{-\mu(m)/m}$$

(см. (2.2) и (2.4)). Учитывая, что

$$(\pi, 1 - (\theta\pi^i)^m) = (\theta\pi^i, 1 - (\theta\pi^i)^m)^{1/i} = ((\theta\pi^i)^m, 1 - (\theta\pi^i)^m)^{1/(im)} = 1,$$

получаем $(\pi, E(\theta\pi^i)) = 1$, откуда и $(\pi, E(f(X))|_{X=\pi}) = 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Имеет место сравнение

$$\operatorname{res}_X \frac{\varphi(X)}{s(X)} \equiv a + \wp(c) \pmod{p^n}$$

при некотором $c \in \mathcal{O}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.9) и (2.10) следует, что ряд

$$E(X\varphi(X)) \cdot (E(as(X) + f(X)))^{-1} = E(X\varphi(X) - (as(X) + f(X)))$$

равен единице в точке $X = \pi$, а, значит, согласно следствию 1 имеем

$$E(X\varphi(X) - (as(X) + f(X))) = 1 + u(X)\psi(X)$$

для некоторого ряда $\psi(X) \in X\mathcal{O}[[X]]$, откуда следует равенство

$$X\varphi(X) = as(X) + f(X) + l(1 + u\psi)$$

и, значит,

$$\operatorname{res}_X \frac{\varphi(X)}{s(X)} = \operatorname{res}_X aX^{-1} + \operatorname{res}_X \frac{X^{-1}f(X)}{s(X)} + \operatorname{res}_X \frac{X^{-1}l(1 + u\psi)}{s(X)}. \quad (2.12)$$

Ясно, что $\operatorname{res}_X aX^{-1} = a$. Далее, для ряда $1/s(X)$ выполнено сравнение

$$\frac{1}{s(X)} \equiv g(X^p) \pmod{p^n}$$

при некотором $g(X) \in \mathcal{O}[[X]]$ (см. (2.1)). С другой стороны, все одночлены ряда $f(X)$ имеют вид a_iX^i , где $p \nmid i$ и, значит,

$$\operatorname{res}_X \frac{X^{-1}a_iX^i}{s(X)} \equiv \operatorname{res}_X X^{-1}a_iX^i g(X^p) = 0 \pmod{p^n},$$

откуда

$$\operatorname{res}_X \frac{X^{-1}f(X)}{s(X)} \equiv 0 \pmod{p^n}. \quad (2.13)$$

Наконец, согласно следствию 2

$$\operatorname{res}_X \frac{X^{-1}l(1 + u\psi)}{s(X)} \equiv \wp(c) = c^\Delta - c \pmod{p^n}, \quad c \in \mathcal{O}.$$

Отсюда, а также из (2.12) и (2.13) следует сравнение леммы 5.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Имеет место сравнение*

$$\operatorname{tr} \operatorname{res}_X \frac{\varphi(X)}{s(X)} \equiv \operatorname{tr} a \pmod{p^n}.$$

Из этого следствия и леммы 4 вытекает предложение 4.

§ 3. Основные определения и вспомогательные результаты

3.1. Определение полного многомерного поля. Пусть K – полное дискретно нормированное поле с совершенным полем вычетов k характеристики $p > 0$. Такое поле K будем называть *одномерным полным полем*, а его поле вычетов k – *нульмерным полным полем*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Поле K называется n -мерным полным полем, если оно является полным относительно дискретного нормирования и его поле вычетов $\overline{K}$ является $(n - 1)$ -мерным полным полем.

Полагая $K = K_n$ и $\overline{K} = K_{n-1}$, получим последовательность полей

$$K = K_n, K_{n-1}, \dots, K_1, K_0 = k,$$

в которой K_{i-1} – поле вычетов полного дискретно нормированного поля K_i , $i \geq 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Полное дискретно нормированное поле K называется равнохарактеристическим, если $\text{cha } K = \text{cha } k$, разнохарактеристическим, если $\text{cha } K = 0$, $\text{cha } K_{n-1} = p > 0$ и смешаннохарактеристическим, если

$$\text{cha } K = \dots = \text{cha } K_s = 0, \quad \text{cha } K_{s-1} = p > 0, \quad s \geq 1.$$

Поле рядов Лорана $\mathbb{F}_p((u))((t))$ дает пример двумерного равнохарактеристического локального поля. Поле рядов Лорана $\mathbb{Q}_p((t))$ дает пример двумерного смешаннохарактеристического поля.

Для числового локального поля k поле бесконечных в обе стороны рядов Лорана

$$K = k\{\{t\}\} = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i t^i, a_i \in k \right\},$$

где $a_i \rightarrow 0$ при $i \rightarrow -\infty$ и множество коэффициентов ограничено снизу по норме поля k . Это пример двумерного разнохарактеристического локального поля, так как $\text{cha } K = 0$ и $\text{cha } \bar{K} = p$.

В общем случае полные n -мерные разнохарактеристические локальные поля, согласно А. Н. Паршину, классифицируются следующим образом.

Поле $K = k\{\{t_1\}\} \dots \{\{t_{n-1}\}\}$, где k – числовое локальное поле, называется *стандартным*. Произвольное разнохарактеристическое поле содержит в качестве подрасширения конечной степени стандартное подполе и содержится в конечном расширении стандартного поля, т.е. существуют стандартные поля E и K' такие, что

$$E = \{\{t_1\}\} \dots \{\{t_{n-1}\}\} \subset K \subset K' = k'\{\{t'_1\}\} \dots \{\{t'_{n-1}\}\},$$

где K/E и K'/K – конечные расширения (см. [14], [15]).

3.2. Обозначения. $t_1, \dots, t_{n-1}, t_n$ – система локальных параметров поля K (подъемы простых элементов полей вычетов K_i в K , $i \geq 1$),

$\bar{v} = (v_1, \dots, v_n): K^* \rightarrow \mathbb{Z}^{(n)}$ – нормирование ранга n в поле K ; при этом, $\mathbb{Z}^{(n)}$ имеет следующее упорядочение: $(m_1, \dots, m_n) < (m'_1, \dots, m'_n)$, если найдется $i \geq 1$ такое, что $m_n = m'_n, \dots, m_{i+1} = m'_{i+1}$ и $m_i < m'_i$,

$v = v_n$ – одномерное нормирование на K ,

$k = K_0$ – последнее поле вычетов поля K ,

$W = W(k)$ – кольцо векторов Витта поля k ,

T – поле частных кольца W ,

$\mathfrak{K}$ – мультипликативная система представителей Тейхмюллера поля k в W ,

Δ – автоморфизм Фробениуса в поле T ,

$\wp = \Delta - 1$ – оператор Картье на W , т.е. $\wp(a) = a^\Delta - a$ для $a \in W$,

ζ – фиксированный первообразный корень степени p^m из 1, содержащийся в K ,

$\mu = \langle \zeta \rangle$ – циклическая группа, порожденная ζ ,

$\mathcal{O} = W\{\{t_1\}\} \dots \{\{t_{n-1}\}\}$ для разнохарактеристического локального поля и

$\mathcal{O}_s = W\{\{t_1\}\} \dots \{\{t_{s-1}\}\}$ для смешаннохарактеристического локального поля.

Определим оператор Фробениуса в кольце $\mathcal{O}((X))$ (соответственно $\mathcal{O}_s((X))$), который обозначается также через Δ :

$$\left(\sum a_{\bar{r}} t_1^{r_1} \cdots t_{n-1}^{r_{n-1}} X^{r_n} \right)^\Delta = \sum a_{\bar{r}}^\Delta t_1^{pr_1} \cdots t_{n-1}^{pr_{n-1}} X^{r_n}$$

(оператор Δ зависит от выбора локальных параметров).

Для рядов $f = \sum_{\bar{r}} a_{\bar{r}} t_1^{i_1} \cdots t_{n-1}^{i_{n-1}} X^{i_n}$ и $g = \sum_{\bar{j}} b_{\bar{j}} t_1^{j_1} \cdots t_{n-1}^{j_{n-1}} X^{j_n}$, где $a_{\bar{i}}, b_{\bar{j}} \in W$ сравнение $f \equiv g \pmod{\deg \bar{r}}$ означает равенство коэффициентов $a_{\bar{i}}$ и $b_{\bar{i}}$ при степенях $\bar{i} < \bar{r}$, а сравнение $f \equiv g \pmod{p^m, \deg \bar{r}}$ означает, что аналогичные коэффициенты сравнимы между собой по модулю p^m .

Для элементов $\alpha \in K$ через $\underline{\alpha}(X)$ обозначим ряд из кольца $\mathcal{O}((X))$ такой, что $\underline{\alpha} := \underline{\alpha}(X)|_{X=t_n} = \alpha$,

$$\begin{aligned} s(X) &:= s_m(X) := \zeta^{p^m} - 1, & s_k(X) &= \zeta^{p^k} - 1, \\ u_k(X) &= \frac{s_k(X)}{s_{k-1}(X)}, & u(X) &= \frac{s(X)}{s_{m-1}(X)}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для рядов $s_k(X)$ имеют место сравнения

$$s(X_n) \equiv s_{m-1}^\Delta(X) \pmod{p^m}, \quad \frac{1}{s(X)} \equiv \frac{1}{s_{m-1}^\Delta(X)} \pmod{p^m} \quad (3.2)$$

(см. [4; § 3] в одномерном случае и [5] в общем случае).

Пусть $f(X) = a_{\bar{r}} t_1^{r_1} \cdots t_{n-1}^{r_{n-1}} X^{r_n} + \cdots$, $g(X) = b_{\bar{u}} t_1^{u_1} \cdots t_{n-1}^{u_{n-1}} X^{u_n} + \cdots$, где все коэффициенты принадлежат кольцу W , и при этом $\bar{r} = (r_1, \dots, r_n) > \bar{0} = (0, \dots, 0)$, $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n) \geq 0$.

Рассмотрим обобщенную функцию Артина–Хассе и обратную к ней

$$E(f(X)) = \exp\left(1 - \frac{\Delta}{p}\right)^{-1} (f(X)), \quad l(g(X)) = \frac{1}{p} \log\left(\frac{g^p}{g^\Delta}\right),$$

которые были определены в [4] в одномерном случае и в [5] в случае многомерного локального поля.

3.3. Арифметика топологической K -группы Милнора. Пусть K – полное n -мерное смешаннохарактеристическое поле, $\text{cha } K = \cdots = \text{cha } K_s = 0$, $\text{cha } K_{s-1} = p > 0$, $1 \leq s \leq n$, и $K_u^M(K)$ – u -я K -группа Милнора, $u \geq 0$. Рассматриваем на $K_u^M(K)$ сильнейшую топологию, в которой отображение $(K^*)^{(u)} \rightarrow K_u^M(K)$ секвенциально непрерывно по каждому аргументу, и если $x_n \rightarrow x$, $y_n \rightarrow y$, то $x_n + y_n \rightarrow x + y$ и $-x_n \rightarrow -x$ в $K_u^M(K)$. Пусть $\Lambda_u(K)$ – подгруппа в $K_u^M(K)$, которая является пересечением всех окрестностей нуля в $K_u^M(K)$. Топологическая группа Паршина определяется как следующая факторгруппа: $K_u^{\text{top}}(K) = K_u^M(K)/\Lambda_u(K)$ (см. [15], [16]). Несложно проверить следующее утверждение (см. [17; лемма 5.1])

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Топологическая K -группа $K_u^{\text{top}}(K)$ порождена элементами*

$$\{t_{i_1}, \dots, t_{i_u}\}, \quad 1 \leq i_1 < \cdots < i_u \leq n, \quad \{t_{j_1}, \dots, t_{j_{u-1}}, \varepsilon\},$$

где ε – единица разнотипного поля K_s , $\{i_1, \dots, i_u\} \cup \{j_1, \dots, j_{u-1}\} = \{1, 2, \dots\}$.

3.4. Определение спаривания Гильберта в полном многомерном поле. Топологические K -группы Паршина (см. [15], [16], [18]) являются хорошим инструментом для построения теории полей классов полных многомерных полей. В случае конечного последнего поля вычетов такая теория была построена в работах А. Паршина и К. Като (см. [15], [19]); для полей положительной характеристики с квазиконечным полем вычетов аналогичная теория была построена Б. Беккером (см. [20]), и, наконец, для полных многомерных полей с совершенным полем вычетов теорию полей классов построил И. Фесенко (см. [21]). Приведем результат И. Фесенко для полного n -мерного поля в случае максимального абелева p -расширения. Мы предполагаем, что последнее поле вычетов $k = K_0$ является совершенным и не алгебраически замкнутым. Пусть

$$\kappa = \dim_{\mathbb{F}_p} k/\wp(k),$$

где $\wp(x) = x^\Delta - x$. Считаем, что $\kappa > 0$. Через $VK_n^{\text{top}}(K)$ обозначим подгруппу в $K_n^{\text{top}}(K)$, порожденную подгруппой главных единиц поля K , т.е.

$$VK_n^{\text{top}}(K) = \{U_K\}K_{n-1}^{\text{top}}(K).$$

Пусть $K^{nr,p}$ – максимальное абелево неразветвленное p -расширение поля K , т.е.

$$K^{nr,p} = K \bigotimes_{W(k)} W(k^{ab,p}),$$

где $W(k)$ – кольцо векторов Витта. Тогда для вполне разветвленного p -расширения L/K имеет место изоморфизм

$$\Psi_{L/K}: VK_n^{\text{top}}(K)/\text{Nm}_{L/K}(VK_n^{\text{top}}(L)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(G(L/K)^{ab}, \mu). \quad (3.3)$$

Этот изоморфизм при переходе к проективному пределу задает отображение взаимности

$$\Psi_K: VK_n^{\text{top}}(K) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(G(K^{ab,p}/K^{nr,p}), \mu). \quad (3.4)$$

Пусть $\mu \subset K$. Тогда определено спаривание Гильберта

$$\begin{aligned} (\cdot, \cdot)_m: VK_n^{\text{top}}(K) \times K^*/K^{*p^m} &\rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}_p}(G(K^{nr,p}/K), \mu), \\ \text{для } \alpha \in VK_n^{\text{top}}(K), \quad \beta \in K^* & \\ (\alpha, \beta)_m(\varphi) = {}^{p^m}\sqrt{\beta}^{\psi_K(\alpha)(\varphi)} / {}^{p^m}\sqrt{\beta}, & \quad \varphi \in G(K^{nr,p}/K). \end{aligned} \quad (3.5)$$

При этом, $\Psi_K(\alpha)(\varphi)$ – продолжение автоморфизма $(\alpha, M/K)(\varphi)$ на группу Галуа $G(K^{nr,p}({}^{p^m}\sqrt{\beta})/K^{nr,p})$ и M/K – вполне разветвленное расширение такое, что $M^{nr,p} = K^{nr,p}({}^{p^m}\sqrt{\beta})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если β – p^m -примарный элемент поля K , т.е. расширение $K({}^{p^m}\sqrt{\beta})/K$ неразветвлено, то

$$\Psi_K(\{t_1, \dots, t_n\})(\varphi) = \varphi. \quad (3.6)$$

§ 4. Символ Гильберта в полном разнохарактеристическом поле

В этом параграфе мы определим явную формулу для спаривания Гильберта в том случае, когда построена локальная теория полей классов, т.е. в полных многомерных полях с совершенным полем вычетов.

4.1. Сперва рассмотрим случай n -мерного полного разнохарактеристического поля K , т.е. $\text{cha } K = 0$, $\text{cha } \bar{K} = p > 0$, где $\bar{K}$ – поле вычетов поля K . Вычисление символа Гильберта

$$(\cdot, \cdot): K_n^{\text{top}}(K) \times K^* \rightarrow \mu = \langle \zeta \rangle$$

будем производить по тому же плану, который был дан в случае классического локального поля (см. п. 2.2).

1. Сведение символа $\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\}$ к символу $\{t_1, \dots, t_n, \varepsilon\}$, где $t_1, \dots, t_n$ – фиксированная система локальных параметров поля K и ε – единица.
2. Вычисление в явном виде p^m -примарных элементов поля K и задание образующих Гензеля–Шафаревича в $K_n^{\text{top}}(K)$.
3. Вычисление символа Гильберта на наборе $\{t_1, \dots, t_n, \varepsilon\}$, где ε – главная единица поля K .

4.2. Шаг 1. Пусть K – полное разнохарактеристическое многомерное поле.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in K^*$, $p \neq 2$. Тогда

$$\begin{aligned} \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}\} &= \{t_1, \dots, t_n, E(t_1 \cdots t_{n-1} X \Phi(\underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_{n+1})|_{X=(t_n)})\}, \\ \text{где } \Phi(\underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} \left(-\frac{1}{p}\right)^{n-i+1} l(\alpha_i) \\ &\cdot \underline{\alpha}_1^{-1} d\underline{\alpha}_1 \wedge \cdots \wedge \underline{\alpha}_{i-1}^{-1} d\underline{\alpha}_{i-1} \wedge \underline{\alpha}_{i+1}^{-\Delta} d\underline{\alpha}_{i+1}^{\Delta} \wedge \cdots \wedge \underline{\alpha}_{n+1}^{-\Delta} d\underline{\alpha}_{n+1}^{\Delta}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Доказательство происходит на основе обобщенного соотношения Кнезера

$$\begin{aligned} &\{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, \mathcal{E}(x), \mathcal{E}(y)\} \\ &= \prod_{s \geq 0} \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, y^{-1}, \mathcal{E}(xy^{p^s})\} \cdot \prod_{r \geq 0} \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}, x, \mathcal{E}(x^{p^r} y)\}, \end{aligned}$$

где $x \equiv y \equiv 0 \pmod{t_n}$. Подробнее см. [22; п. 2.3, (14), (15)].

4.3. Шаг 2. А) Напомним, что элемент $\omega \in K$ называется p^m -примарным, если расширение $K(\sqrt[p^m]{\omega})/K$ – единственное неразветвленное расширение, т.е. получается расширением последнего поля вычетов K_0 . Пусть $K^{nr,p}$ – максимальное абелево неразветвленное p -расширение. Если для совершенного подполя K_0 в поле вычетов $\bar{K}$ поля K мы имеем

$$K_0/\wp(K_0) \cong \bigoplus_{\kappa} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z},$$

то группа Галуа максимального абелева p -расширения поля K_0 изоморфна $\prod_{\kappa} \mathbb{Z}_p$, и, значит,

$$\text{Gal}(K^{nr,p}/K) \cong \text{Gal}(K_0^{nr,p}/K_0) \cong \prod_{\kappa} \mathbb{Z}_p.$$

Пусть $\mathcal{O}_0 = W(K_0)$ – кольцо векторов Витта поля K_0 и $\mathcal{O}_0^{nr}$ – кольцо целых пополнения максимального абелева неразветвленного p -расширения поля K_0 .

ЛЕММА 6. Для любого $a \in \mathcal{O}_0$ существует элемент $A \in \mathcal{O}_0^{nr}$ такой, что

$$\wp(A) = A^\Delta - A = a. \quad (4.2)$$

При этом для любого автоморфизма $\varphi \in \text{Gal}(K^{nr,p}/K)$ элемент $a_\varphi = A^\varphi - A$ принадлежит $\mathbb{Z}_p$ и не зависит от выбора корня A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение $\wp(x) = \bar{a}$, где $\bar{a}$ – вычет a в поле K_0 , разрешимо в расширении $K_0^{p,ab}$. Используя метод аппроксимации, получаем решение уравнения (4.2). Если $\varphi \in \text{Gal}(K^{nr,p}/K)$, то $a_\varphi^\Delta - a_\varphi = a^\varphi - a$. Элемент a принадлежит $\mathcal{O}_0$, значит, $a^\varphi = a$. Поэтому $a_\varphi^\Delta = a_\varphi$, и, значит, $a_\varphi \in \mathbb{Z}_p$. Очевидно, что a_φ не зависит от выбора A . Лемма доказана.

Б) Группа p^m -примарных элементов Ω согласно теории Куммера соответствует неразветвленным расширениям Куммера поля K степеней, делящих p^m , поэтому группе Ω соответствуют абелевы расширения поля вычетов $k = K_0$ степеней, делящих p^m , которые по теории Витта описываются факторгруппой $W/(p^m W + \wp(W))$, где $W = W(k)$ – кольцо векторов Витта, а $\wp(x) = x^\Delta - x$ для оператора Фробениуса Δ (см. [23]) Тем самым, получаем изоморфизм

$$f: \Omega/\Omega^{p^m} \xrightarrow{\sim} W/(p^m W + \wp(W)). \quad (4.3)$$

В явном виде этот изоморфизм описывается с помощью p^m -примарных элементов.

В) Вычисление p^m -примарных элементов в разнохарактеристическом поле. Пусть K – полное разнохарактеристическое локальное поле. Пусть, как и прежде, $s(X) = \zeta(X)^{p^m} - 1$ – ряд из кольца $W[[X]]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Любой p^m -примарный элемент поля K можно представить в виде

$$\omega(a) = E(as(X))|_{X=t_n} \quad (4.4)$$

для некоторого $a \in W$; обратно, для любого $a \in W$ элемент $w(a)$ вида (4.4) является p^m -примарным. Кроме того, элемент $\omega(a)$ не зависит от разложения единицы ζ в ряд по локальным параметрам $t_1, \dots, t_n$. При этом,

$${}_p\sqrt{\omega(a)}^{\varphi-1} = \zeta^{A^\varphi - A} = \zeta^{a_\varphi}, \quad a_\varphi \in \mathbb{Z}_p,$$

для любого автоморфизма φ из группы Галуа $\text{Gal}(K^{nr,p}/K)$. Наконец,

$$\omega(a) \in K^{*p^m} \iff a \equiv \wp(a_0) \pmod{p^m}, \quad a_0 \in W.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть последнее поле вычетов K_0 поля K является конечным и φ – автоморфизм Фробениуса в $K^{nr,p}/K$. Тогда ${}_p\sqrt{\omega(a)}^{\varphi-1} = \zeta^{\text{tr } a}$ и существует изоморфизм χ такой, что

$$\chi: \Omega/\Omega \cap K^{*p^m} \xrightarrow{\sim} \mu_{p^m},$$

где Ω – группа p^m -примарных элементов поля K , а tr – оператор следа в $W(K_0)/\mathbb{Z}_p$ ($W(K_0)$ – кольцо векторов Витта).

СЛЕДСТВИЕ 5. *Изоморфизм (4.3) имеет следующий явный вид:*

$$f: \Omega/\Omega^{p^m} \rightarrow W/(p^m W + \wp(W)), \quad w(a) \mapsto \bar{a}.$$

Доказательства см. [9; предложение 1.1, следствие 1].

Г) Образующие мультипликативной группы полного многомерного поля. Рассмотрим случай разнохарактеристического поля K . Пусть $\bar{v}_K(p) = \bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$ – индекс ветвления поля K и $\bar{e}' = \bar{e}/(p-1) = (e'_1, \dots, e'_n)$. Пусть I – мультииндексы, удовлетворяющие условию

$$\bar{i} = \{(i_1, \dots, i_n) \mid \bar{i} > \bar{0}, p \nmid \bar{i}\}, \quad (4.5)$$

т.е. не все индексы $i_1, \dots, i_n$ делятся на p . Пусть $t_1, \dots, t_n$ – система локальных параметров поля K и пусть K содержит все корни p^m из 1. Пусть

$$\varepsilon_{\bar{r}}(\theta) = 1 + \theta t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n} + \dots, \quad \theta \in \mathfrak{A}, \quad (4.6)$$

где точки в сумме обозначают члены более высоких порядков.

ЛЕММА 7. *Группа U_K главных единиц поля K имеет следующий набор образующих над $\mathbb{Z}_p$:*

$$\{\varepsilon_{\bar{r}}(\theta), \bar{r} \in I\}, \quad \{\varepsilon_*(\theta) = 1 + \theta t_1^{pe'_1} \dots t_n^{pe'_n} + \dots\},$$

где θ пробегает систему представителей Тейхмюллера $\mathfrak{A}$.

Утверждение леммы следует из соотношений

$$\varepsilon_{\bar{r}}^p(\theta) = \begin{cases} 1 + \theta^p t_1^{pr_1} \dots t_n^{pr_n} + \dots, & \text{если } \bar{r} < \bar{e}', \\ 1 + \theta_p t_1^{r_1+e_1} \dots t_n^{r_n+e_n} + \dots, & \text{если } \bar{r} > \bar{e}', \\ 1 + (\theta_p \theta + \theta^p) t_1^{pe'_1} \dots t_n^{pe'_n} + \dots, & \text{если } \bar{r} = \bar{e}', \end{cases}$$

где $p = \theta_p t_1^{e_1} \dots t_n^{e_n} + \dots$. В одномерном случае это теорема Гензеля (см. п. 2.3). Возьмем в лемме 6 в качестве образующих $\varepsilon_{\bar{r}}(\theta)$ единицы $E(\theta t_1^{r_1} \dots t_n^{r_n})$ и $\varepsilon_*(\theta) = \omega(\theta) - p$ -примарную единицу. Тогда получим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. *Любую главную единицу ε из U_K можно представить в виде*

$$\varepsilon = E(a_\varepsilon s(X) + w_\varepsilon(X))|_{X=t_n}, \quad (4.7)$$

где $w_\varepsilon(X) = \sum_{\bar{i}} c_{\bar{i}} X_1^{i_1} \dots X_{n-1}^{i_{n-1}} X_n^{i_n}$, $c_{\bar{i}} \in \mathcal{O}_0$, $p \nmid \bar{i}$.

4.4. Шаг 3. А) Пусть K – полное дискретно нормированное поле нулевой характеристики с произвольным полем вычетов характеристики $p > 0$. Пусть $\mathcal{O}_K$ – кольцо целых элементов поля K и π – простой элемент в K . Фиксируем формальный степенной ряд $e(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$, который будем называть рядом Эйзенштейна, удовлетворяющий условию

$$e(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_r X^r + \dots,$$

где $a_0, \dots, a_{r-1} \equiv 0 \pmod{\pi}$, $a_0 \not\equiv 0 \pmod{\pi^2}$ и коэффициент a_r является единицей в $\mathcal{O}_K$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть $f(X) \in \mathcal{O}_K[[X]]$. Тогда $f(X)$ делится на $e(X)$ в кольце $\mathcal{O}_K[[X]]$ в том и только в том случае, если оба ряда имеют общий корень в алгебраическом замыкании поля K .

Доказательство см. в [17; предложение 2.1].

Пусть K – полное разнохарактеристическое n -мерное поле и $u(X) \in \mathcal{O}[[X]]$ – ряд, построенный в (3.1). Тогда $u(X)$ является рядом Эйзенштейна для $r = e_n$, где $\bar{e} = (e_1, \dots, e_n)$ – индекс ветвления поля K относительно нормирования ранга n . Нетрудно проверить, что если ряд $\mathcal{E}(X)$ из кольца $\mathcal{O}[[X]]$ удовлетворяет условию $\mathcal{E}(t_n) = 1$, то $\mathcal{E}(X) \equiv 1 \pmod{p, X}$. Из предложения 9 следует

ЛЕММА 8. Пусть $\mathcal{E}(X)$ из кольца $\mathcal{O}[[X]]$ удовлетворяет условию $\mathcal{E}(t_n) = 1$. Тогда найдется ряд $\psi(X) \in \mathcal{O}[[X]]$ такой, что

$$\mathcal{E}(X) = 1 + u(X)\psi(X). \quad (4.8)$$

Применяя эту лемму, получаем основную лемму, используемую в шаге 3.

ЛЕММА 9 (основная). Пусть $\psi(X) \in [[X]]$. Тогда при $p \geq 3$ выполняется сравнение

$$\frac{l(1 + u\psi)}{s} \equiv (1 - \Delta) \frac{\log(1 + u\psi)}{s} \pmod{p^m, \deg(1, 0, \dots, 0)}.$$

При этом, ряд $(\log(1 + u\psi))/s$ имеет целые коэффициенты из W при степенях, меньших $(1, 0, \dots, 0)$.

Доказательство см. в [17; лемма 2.4].

СЛЕДСТВИЕ 6. Имеет место сравнение

$$\text{res}_{t_1, \dots, t_{n-1}, X} \frac{(t_1^{-1} \dots t_{n-1}^{-1} X^{-1})l(1 + u\psi)}{s} \equiv (1 - \Delta)c \pmod{p^m}, \quad (4.9)$$

где $c \in \mathcal{O}_0$ – свободный член ряда $(1 - \Delta)(\log(1 + u\psi))/s$.

Б) Вычислим символ Гильберта на образующих предложения 9 шага 2. Пусть сперва $\varepsilon = E(\theta t_1^{i_1} \dots t_{n-1}^{i_{n-1}} t_n^{i_n})$, $\theta \in \mathfrak{A}$. По определению функции Артина–Хассе, обозначив $\theta t_1^{i_1} \dots t_{n-1}^{i_{n-1}} t_n^{i_n}$ через x , получим

$$E(x) = \exp\left(x + \frac{x^\Delta}{p} + \dots\right) = \exp\left(x + \frac{x^p}{p} + \dots\right).$$

Для ряда $E(x)$ имеем разложение

$$E(x) = \exp\left(x + \frac{x^p}{p} + \dots\right) = \prod_{\substack{(r,p)=1 \\ r \geq 1}} (1 - x^r)^{-\mu(r)/r},$$

где μ – функция Мёбиуса (см. [7]). Поэтому, учитывая мультипликативность спаривания Гильберта по последнему аргументу, можно $\varepsilon = E(x)$ заменить на $1 - x^r$. Если при этом индекс i_α , $1 \leq \alpha \leq n$, не делится на p , то элемент t_α является нормой в расширении $K(\sqrt[p^m]{1 - x^r})/K$, так как ri_α тоже не делится на p , а

тогда символ $\{t_1 \dots, t_\alpha, \dots, t_n\}$ будет нормой из K -группы $K_n^{\text{top}}(K(\sqrt[p^m]{1-x^r}))$, и, значит, по определению спаривания Гильберта (см. пп. 3.3, 3.4), имеем

$$(\{t_1 \dots, t_\alpha, \dots, t_n\}, 1 - (\theta t_1^{i_1} \dots t_{n-1}^{i_{n-1}} t^{i_n})^r) = 1.$$

Из этих разложений следует

ЛЕММА 10. Пусть $\varepsilon = E(w_\varepsilon(X))|_{X=t_n}$. Тогда

$$(\{t_1, \dots, t_n\}, \varepsilon) = 1. \quad (4.10)$$

Осталось рассмотреть случай примарного элемента $\varepsilon = \omega(a) = E(as(X))|_{X=t_n}$. В этом случае по определению символа Гильберта (см. (3.5)) получим

$$(\{t_1, \dots, t_n\}, E(as(X))|_{X=t_n})(\varphi) = \sqrt[p^m]{E(as(X))|_{X=t_n}}^{\Psi_K(\{t_1, \dots, t_n\})(\varphi)},$$

где $\varphi \in \text{Gal}(K^{nr,p}/K)$. В нашем случае расширение $K(\sqrt[p^m]{E(as(X))|_{X=\pi}})/K$ чисто неразветвленное, и поэтому $\Psi_K(\{t_1, \dots, t_n\})(\varphi) = \varphi$ (см. (3.5)). Далее,

$$\sqrt[p^m]{E(as(X))|_{X=t_n}}^{\varphi-1} = \zeta^{A^\varphi - A} = \zeta^{a_\varphi}$$

(см. предложение 7), где $A^\Delta - A = a$. Поэтому получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 11.

$$(\{t_1, \dots, t_n\}, E(as(X))|_{X=t_n})(\varphi) = \zeta^{a_\varphi}, \quad a_\varphi \in \mathbb{Z}_p. \quad (4.11)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Элемент a_φ задан по $(\text{mod } p^m, \wp)$ (см. лемму 6).

Итак, получили следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Для главной единицы ε из U_K , представленной в виде

$$\varepsilon = E(a_\varepsilon s(X) + w_\varepsilon(X))|_{X=t_n},$$

имеем

$$(\{t_1, \dots, t_n\}, \varepsilon)(\varphi) = \zeta^{a_\varphi},$$

где $\varphi \in \text{Gal}(K^{nr,p}/K)$, $a_\varphi = A^\varphi - A$, элемент A получен из уравнения $A^\Delta - A = a_\varepsilon$, при этом a_ε задан по $(\text{mod } p^m, \wp)$.

Доказательство следует из лемм 10 и 11.

4.5. Вычисление спаривания Гильберта для единицы $\varepsilon \in U_K$ вида

$$\varepsilon = E(t_1 \dots t_{n-1} X \varphi(X))|_{X=t_n}, \quad (4.12)$$

где $\varphi(X) \in \mathcal{O}[[X]]$. Проверим следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. Для единицы вида (4.12) имеем

$$(\{t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}, \varepsilon)(\varphi) = \zeta^{a_\varphi}$$

для $\varphi \in \text{Gal}(K^{nr,p}/K)$, $a_\varphi = A^\varphi - A$, где элемент A получен из уравнения

$$A^\Delta - A = \text{res}_{t_1, \dots, t_{n-1}, X} \frac{\varphi(X)}{s(X)}. \quad (4.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим единицу ε в виде

$$\varepsilon = E(a_\varepsilon s(X) + w_\varepsilon(X))|_{X=t_n}$$

(см. предложение 8). Тогда согласно предложению 10

$$(\{t_1, \dots, t_{n-1}, t_n\}, \varepsilon)(\varphi) = \zeta^{a_\varphi},$$

где $a_\varphi = A^\varphi - A$ для $\varphi \in \text{Gal}(K^{nr,p}/K)$ и элемент A получен из уравнения $A^\Delta - A = a_\varepsilon$. Несложно проверить, что при этом

$$\text{res}_{t_1, \dots, t_{n-1}, X} \frac{(t_1^{-1} \cdots t_{n-1}^{-1} X^{-1})(a_\varepsilon s(X) + w_\varepsilon(X))}{s(X)} \equiv a_\varepsilon \pmod{p^m}. \quad (4.14)$$

Действительно, очевидно, что

$$\text{res}_{t_1, \dots, t_{n-1}, X} \frac{(t_1^{-1} \cdots t_{n-1}^{-1} X^{-1})(a_\varepsilon s(X))}{s(X)} = a_\varepsilon.$$

Далее, все мультииндексы мономов ряда $w_\varepsilon(X)$ по построению ряда $w_\varepsilon(X)$ не делятся на p . С другой стороны, из сравнения

$$\frac{1}{s(X)} \equiv \frac{1}{s_{m-1}^\Delta(X)} \pmod{p^m}$$

следует, что у тех мономов, у которых мультииндекс не делится на p , коэффициенты делятся на p^m , откуда

$$\text{res}_{t_1, \dots, t_{n-1}, X} \frac{(t_1^{-1} \cdots t_{n-1}^{-1} X^{-1})w_\varepsilon(X)}{s(X)} \equiv 0 \pmod{p^m},$$

и мы проверили (4.14). Так как ε по условию имеет вид

$$\varepsilon = E(t_1 \cdots t_{n-1} X \varphi(X))|_{X=t_n} = E(a_\varepsilon s(X) + w_\varepsilon(X))|_{X=t_n},$$

то

$$E(t_1 \cdots t_n X \varphi(X) - (a_\varepsilon s(X) + w_\varepsilon(X)))|_{X=t_n} = 1,$$

и, значит, по лемме 8,

$$t_1 \cdots t_n X \varphi(X) = a_\varepsilon s(X) + w_\varepsilon(X) + l(1 + u(X)\psi(X)).$$

Отсюда, из основной леммы 9 и (4.14) получаем

$$\text{res}_{t_1, \dots, t_{n-1}, X} \varphi(X) \equiv a_\varepsilon \pmod{p^m, \wp},$$

что доказывает нашу теорему.

Из последней теоремы и предложения 6 следует основная теорема в разнохарактеристическом случае. А именно пусть K – n -мерное полное разнохарактеристическое поле, содержащее группу корней степени p^m из 1, $\mu \subset K$. Пусть $(\cdot, \cdot): K_n^{\text{top}}(K) \times K^* \rightarrow \mu$ – символ Гильберта, определенный в (3.3) и (3.4).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in K^*$, $p \neq 2$. Для символа Гильберта $(\cdot, \cdot)$ поля K имеет место следующая явная формула:

$$(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \alpha_n)(\varphi) = \zeta^{a_\varphi},$$

где $\varphi \in \text{Gal}(K^{n,p}/K)$, $a_\varphi = A^\varphi - A$ и элемент a получен из уравнения $A^\Delta - A = a$. При этом

$$a = \text{res}_{t_1, \dots, t_{n-1}, X} \frac{\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})}{\zeta^{p^m} - 1},$$

где ряд Φ определен в предложении 6 а ζ – фиксированный первообразный корень степени p^m из 1.

§ 5. Символ Гильберта в полном смешаннохарактеристическом поле

5.1. Рассмотрим теперь случай смешаннохарактеристического n -мерного полного поля K , т.е. $\text{cha } K = 0$ и существует $s \geq 1$ такое, что $\text{cha } K_{s-1} = p > 0$ и $\text{cha } K_s = \dots = \text{cha } K = 0$. Тем самым поле K_s является разнохарактеристическим s -мерным полным полем. Вычисление символа Гильберта $(\cdot, \cdot): K_n^{\text{top}}(K) \times K^* \rightarrow \mu$ производим аналогично случаю разнохарактеристического полного поля с той лишь разницей, что в шаге 1 и 3 единица ε принадлежит разнохарактеристическому полю K_s (см. п. 4.1).

5.2. Арифметика смешаннохарактеристического полного поля: $\text{cha } K = \dots = \text{cha } K_s = 0$, $\text{cha } K_{s-1} = p > 0$, $s \geq 1$. При этом ясно, что K_s – разнохарактеристическое поле. Кроме того, группа главных единиц U_K является p -делимой. Поэтому получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 12. Пусть K – полное n -мерное поле и K_s – разнохарактеристическое подполе вычетов. Тогда

$$K^*/K^{*p^m} \cong (\mathbb{Z}/p^m)^{n-s} \times (K_s^*/K_s^{*p^m})$$

и образующими элементами в K^*/K^{*p^m} будут локальные параметры $t_{s+1}, t_{s+2}, \dots, t_n$ вместе с элементами поля K_s . Любой элемент поля K можно представить в виде

$$\alpha = \tilde{\alpha} t_{s+1}^{i_{s+1}} \dots t_n^{i_n}, \quad \tilde{\alpha} \in K_s^* \quad (5.1)$$

(см. [24; п. 2.3]).

5.3. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ – элементы из K^* и $I = (i_1, \dots, i_{n-s})$, $1 \leq i_1 < \dots < i_{n-s} \leq n+1$, – некоторый набор индексов и

$$\Delta_I = \begin{vmatrix} v_{s+1}(\alpha_{i_1}) & \dots & v_n(\alpha_{i_1}) \\ \dots & \dots & \dots \\ v_{s+1}(\alpha_{i_{n-s}}) & \dots & v_n(\alpha_{i_{n-s}}) \end{vmatrix}.$$

Пусть набор $J = (j_1, \dots, j_{s+1})$ – дополнение набора I до множества $(1, 2, \dots, n+1)$, т.е. $I \cup J = (1, 2, \dots, n+1)$. Пусть

$$\Phi(\underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_{n+1}) = (-1)^{(n-s)(n+s+1)/2} \cdot \sum_I (-1)^{i_1 + \dots + i_{n-s}} \Delta_I \cdot \Phi_{K_s}(\tilde{\alpha}_{j_1}, \dots, \tilde{\alpha}_{j_{s+1}}), \quad (5.2)$$

где для элемента $\alpha \in K$ элемент $\tilde{\alpha}$ определен в (5.1) и Φ_{K_s} – ряд, вычисляемый в разнохарактеристическом поле в (4.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in K^*, p \neq 2$. Тогда

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}) = (\{t_1, \dots, t_n\}, E(t_1 \cdots t_s \Phi(\underline{\alpha}_1, \dots, \underline{\alpha}_{n+1}))).$$

5.4. Основная теорема в смешаннохарактеристическом случае. Рассмотрим n -мерное полное смешаннохарактеристическое поле K , содержащее группу корней степени p^m из 1: $\mu \subset K$. Пусть

$$(\cdot, \cdot): K_n^{\text{top}}(K) \times K^* \rightarrow \mu$$

– символ Гильберта (см. (3.4)) и K_s – разнохарактеристическое поле для K .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in K^*, p \neq 2$. Для символа Гильберта $(\cdot, \cdot)$ поля K имеет место следующая явная формула:

$$(\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \alpha_n)(\varphi) = \zeta^{a_\varphi},$$

где $\varphi \in \text{Gal}(K^{nr,p}/K)$, $a_\varphi = A^\varphi - A$ и элемент A получен из уравнения $A^\Delta - A = a$, при этом

$$a = \text{res}_{t_1, \dots, t_{s-1}, X} \frac{\Phi(\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1})}{\zeta^{p^m} - 1},$$

где ряд Φ определен в (5.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Поскольку ряд Φ задается рядами Φ_{K_s} разнохарактеристического поля K_s с локальными параметрами $t_1, \dots, t_s$, то вычит нужно брать по этим параметрам.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно предложению 6 все вычисления в нашем случае производятся в разнохарактеристическом поле K_s . Поэтому мы применяем теорему 2 и только что доказанное предложение 11.

Другой подход к получению явных формул можно найти в статье [25].

Список литературы

- [1] Н. Hasse, *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. Teil II: Reziprozitätsgesetz*, Ergänzungsband, **6**, Leipzig, Teubner, 1930.
- [2] E. Artin, Н. Hasse, “Die beiden Ergänzungssätze zum reziprozitätsgesetz der l^n -ten potenzreste im körper der l^n -ten Einheitswurzeln Einheitswurzeln”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **6:1** (1928), 146–162.

- [3] И. Р. Шафаревич, “Общий закон взаимности”, *Матем. сб.*, **26(68)**:1 (1950), 113–146.
- [4] С. В. Востоков, “Явная форма закона взаимности”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **42**:6 (1978), 1288–1321; англ. пер.: S. V. Vostokov, “Explicit form of the law of reciprocity”, *Math. USSR-Izv.*, **13**:3 (1979), 557–588.
- [5] С. В. Востоков, “Явная конструкция теории полей классов многомерного локального поля”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49**:2 (1985), 283–308; англ. пер.: S. V. Vostokov, “Explicit construction of class field theory for a multidimensional local field”, *Math. USSR-Izv.*, **26**:2 (1986), 263–287.
- [6] H. Brückner, *Hilbertsymbole zum Exponenten p^n und Pfaffische Formen*, preprint, Hamburg, 1979.
- [7] H. Hasse, “Die Gruppe der p^n -primären Zahlen für einen Primteiler p von p ”, *J. Reine Angew. Math.*, **176** (1936), 174–183.
- [8] I. B. Fesenko, S. V. Vostokov, *Local fields and their extensions: a constructive approach*, Transl. Math. Monogr., **121**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [9] Т. Б. Беляева, С. В. Востоков, “Символ Гильберта в полном поле. I”, *Вопросы теории представлений алгебр и групп.* 8, Зап. научн. сем. ПОМИ, **281**, ПОМИ, СПб., 2001, 5–34; англ. пер.: T. B. Belyaeva, S. V. Vostokov, “The Hilbert symbol in a complete multidimensional field. I”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **120**:4 (2004), 1483–1500.
- [10] С. В. Востоков, “К закону взаимности поля алгебраических чисел”, *Алгебра, теория чисел и их приложения*, Тр. МИАН СССР, **148**, 1978, 77–81; англ. пер.: S. V. Vostokov, “On the law of reciprocity in an algebraic number field”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **148** (1980), 75–79.
- [11] С. В. Востоков, “Символ Гильберта в дискретно нормированном поле”, *Кольца и модули.* 2, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **94**, Изд-во “Наука”, Ленинград. отд., Л., 1979, 50–69; англ. пер.: S. V. Vostokov, “Hilbert symbol in a discrete valued field”, *J. Soviet Math.*, **19**:1 (1982), 1006–1019.
- [12] K. Hensel, “Die multiplikative Darstellung der algebraischen Zahlen für den Bereicheines beliebigen Primteilers”, *J. Reine Angew. Math.*, **136** (1916), 174–183.
- [13] H. Hasse, *Zahlentheorie*, Akademie-Verlag, Berlin, 1963.
- [14] С. В. Востоков, И. Б. Жуков, И. Б. Фесенко, “К теории многомерных локальных полей. Методы и конструкции”, *Алгебра и анализ*, **2**:4 (1990), 91–118; англ. пер.: S. V. Vostokov, I. B. Zhukov, I. B. Fesenko, “On the theory of higher-dimensional local fields. Methods and constructions”, *Leningrad Math. J.*, **2**:4 (1991), 775–800.
- [15] А. Н. Паршин, “Локальная теория полей классов”, *Алгебраическая геометрия и ее приложения*, Сборник статей, Тр. МИАН СССР, **165**, 1984, 143–170; англ. пер.: A. N. Parshin, “Local class field theory”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **165** (1985), 157–185.
- [16] А. Н. Паршин, “К арифметике двумерных схем. I. Распределения и вычеты”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40**:4 (1976), 736–773; англ. пер.: A. N. Parshin, “On the arithmetic of two-dimensional schemes. I. Distributions and residues”, *Math. USSR-Izv.*, **10**:4 (1976), 695–729.
- [17] С. В. Востоков, “Спаривание на K -группах многомерных полных полей”, *Тр. СПбМО*, **3** (1994), 140–184; англ. пер.: S. V. Vostokov, “The pairing on K -groups in fields of valuation of rank n ”, *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society*, v. 3, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 111–148.
- [18] А. Н. Паршин, “Поля классов и алгебраическая K -теория”, *УМН*, **30**:1 (1975), 253–254.
- [19] K. Kato, “A generalization of local class field theory by using K -groups. I”, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **26**:2 (1979), 303–376; “II”, **27**:3, 603–683.
- [20] Б. М. Беккер, “Абелевы расширения полного дискретно нормированного поля конечной высоты”, *Алгебра и анализ*, **3**:6 (1991), 76–84; англ. пер.: B. M. Bekker,

- “Abelian extensions of a complete discrete valuation field of finite height”, *St. Petersburg Math. J.*, **3**:6 (1992), 1271–1279.
- [21] I. B. Fesenko, “Abelian local p -class field theory”, *Math. Ann.*, **301**:1 (1995), 561–586.
- [22] K. F. Lai, S. V. Vostokov, “The Kneser relation and the Hilbert pairing in multidimensional local field”, *Math. Nachr.*, **280**:16 (2007), 1780–1797.
- [23] E. Witt, “Schiefkörper über diskret bewerteten Körpern”, *J. Reine Angew. Math.*, **176** (1936), 153–156.
- [24] С. В. Востоков, “Спаривание Гильберта в полном многомерном поле”, *Теория чисел, алгебра и алгебраическая геометрия*, Тр. МИАН, **208**, Наука, Физматлит, М., 1995, 80–92; англ. пер.: S. V. Vostokov, “Hilbert pairing on a complete high-dimensional field”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **208** (1995), 72–83.
- [25] V. Abrashkin, R. Jenni, “The field-of-norms functor and the Hilbert symbol for higher local fields”, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **24**:1 (2012), 1–39.

С. В. Востоков (S. V. Vostokov)

Механико-математический факультет
Санкт-Петербургского государственного
университета
E-mail: sergei.vostokov@gmail.com

Поступила в редакцию

25.12.2012