Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Назаров, Упругие волны, захваченные однородным анизотропным полуцилиндром, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 11, 99–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8207>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 17:26:10

УДК 517.956.8+517.956.227+539.3(3)

С. А. Назаров

Упругие волны, захваченные однородным анизотропным полуцилиндром

Установлено, что задача об упругих колебаниях однородного анизотропного полуцилиндра (консоли) с боковой поверхностью, свободной от напряжений (краевое условие Неймана), не имеет собственных чисел при зажатом торце (краевое условие Дирихле). Для свободного торца при дополнительных требованиях упругой и геометрической симметрии найдены просто формулируемые достаточные условия существования собственного числа, вкрапленного в непрерывный спектр и порождающего захваченную упругую волну, т.е. затухающую на бесконечности с экспоненциальной скоростью. Результаты получены при помощи обобщения методов, разработанных для скалярных задач, но нуждающихся в существенной переработке для векторной задачи теории упругости. Рассмотрены примеры и сформулированы открытые вопросы.

Библиография: 53 названия.

Ключевые слова: однородный анизотропный полуцилиндр, захваченные волны, точечный спектр на непрерывном спектре, искусственные краевые условия.

DOI: 10.4213/sm8207

§ 1. Введение

1.1. Постановка задачи. Рассмотрим однородный анизотропный (в большей части статьи ортотропный) упругий полуцилиндр

$$\Omega = \omega \times \mathbb{R}_+ = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = (y_1, y_2) \in \omega, z > 0\}, \quad (1.1)$$

сечением которого служит область ω на плоскости $\mathbb{R}^2$ с гладкой (для простоты класса C^∞) границей $\partial\omega$ и компактным замыканием $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega$. Масштабированием характерный размер области ω сведем к единичному, т.е. сделаем декартовы координаты $x = (x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, z)$ и все геометрические параметры безразмерными.

Исследуя волновые процессы в полуцилиндре (1.1), интерпретируем вектор смещений u как столбец $(u_1, u_2, u_3)^\top$; здесь u_j – проекция на ось x_j , а $\top$ – знак транспонирования. Составим еще столбец деформаций

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{11}(u), \varepsilon_{22}(u), \varepsilon_{33}(u), \sqrt{2}\varepsilon_{23}(u), \sqrt{2}\varepsilon_{31}(u), \sqrt{2}\varepsilon_{12}(u))^\top \quad (1.2)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00348).

из декартовых компонент $\varepsilon_{jk}(u)$ тензора деформаций, вычисляемых по линейризованным формулам Коши

$$\varepsilon_{jk}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right), \quad j, k = 1, 2, 3. \quad (1.3)$$

Множители $\sqrt{2}$ введены в определение (1.2) для того, чтобы уравнивать естественные нормы тензора $(\varepsilon_{jk}(u))_{j,k=1}^3$ и изображающего его столбца (1.2). Справедливо равенство $\varepsilon(u) = D(\nabla)u$, где $\nabla = \text{grad}$, $D(\nabla)$ – (6×3) -матрица дифференциальных операторов первого порядка,

$$D(x)^\top = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & 2^{-1/2}x_3 & 2^{-1/2}x_2 \\ 0 & x_2 & 0 & 2^{-1/2}x_3 & 0 & 2^{-1/2}x_1 \\ 0 & 0 & x_3 & 2^{-1/2}x_2 & 2^{-1/2}x_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Столбец напряжений $\sigma(u)$, содержащий декартовы компоненты $\sigma_{jk}(u)$ тензора напряжений и обладающий аналогичной (1.2) структурой, находится согласно линейному закону Гука

$$\sigma(u) = A\varepsilon(u) = AD(\nabla)u, \quad (1.5)$$

в котором фигурирует постоянная матрица жесткости A , имеющая размеры 6×6 и составленная из упругих модулей материала, а потому симметричная и положительно определенная.

Форма записи определяющих соотношений линейной теории упругости, использующая формулы (1.2)–(1.5), в англоязычной литературе носит название обозначений Войта–Менделя (the Voigt–Mandel notation; см. [1], [2]), а в русскоязычной связывается с именем С. Г. Лехницкого (см. [3], [4]). При такой записи гармонические во времени колебания упругого тела Ω описываются следующей системой дифференциальных уравнений в дивергентной форме:

$$L(\nabla)u(x) := D(-\nabla)^\top AD(\nabla)u(x) = \lambda \rho u(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.6)$$

При этом λ – спектральный параметр (квадрат частоты колебаний), а $\rho > 0$ – постоянная плотность материала. Далее считаем, что боковая поверхность $\Gamma = \partial\omega \times \mathbb{R}_+$ свободна от напряжений, т.е.

$$D(\nu(y), 0)^\top AD(\nabla)u(x) = 0, \quad x \in \Gamma. \quad (1.7)$$

На множестве $\Gamma^0 = \omega \times \{0\}$ поставим либо условие Дирихле

$$u(y, 0) = 0, \quad y \in \omega, \quad (1.8)$$

означающие жесткую заделку торца стержня (1.1), либо аналогичные (1.7) условие Неймана

$$D(-e_{(3)})^\top AD(\nabla)u(y, 0) = 0, \quad y \in \omega. \quad (1.9)$$

Здесь $\nu = (\nu_1, \nu_2)^\top$ – единичный вектор внешней нормали к контуру $\partial\omega$, а $e_{(3)} = (0, 0, 1)^\top$ – орт оси $x_3 = z$, причем $-e_{(3)}$ – нормаль на Γ^0 .

Каждая из краевых задач (1.6)–(1.8) или (1.6), (1.7), (1.9) допускает вариационную постановку как интегральное тождество

$$(AD(\nabla)u, D(\nabla)v)_\Omega = \lambda \rho(u, v)_\Omega, \quad v \in \mathcal{H}(\Omega), \quad (1.10)$$

где $(\cdot, \cdot)_\Omega$ – скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Omega)$, а $\mathcal{H}(\Omega)$ – пространство Соболева $H^1(\Omega)$ в случае задачи Неймана, но при защемленном торце – подпространство $H_0^1(\Omega; \Gamma^0)$, которое состоит из вектор-функций, удовлетворяющих устойчивому краевому условию (1.8). Как обычно, при вариационной формулировке условия Неймана (1.9) и (1.7) выступают в качестве естественных по терминологии работы [5].

Поскольку полуторалинейная форма из левой части (1.10) эрмитова, положительна и замкнута, задаче (1.10) ставится в соответствие (см. [6; гл. 10]) положительный самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ в гильбертовом пространстве $L^2(\Omega)$. Как известно и нетрудно проверить, спектр Σ оператора $\mathcal{A}$ заполняет замкнутую вещественную положительную полуось $\overline{\mathbb{R}_+}$. Он является непрерывным, так как в каждой точке $\lambda \in \overline{\mathbb{R}_+}$ существует сингулярная последовательность Вейля (ср. далее замечание 3) и согласно классическим результатам работы [7] (см. также [8; замечание 3.1.5]) любое собственное число имеет конечную кратность.

В спектре Σ могут содержаться собственные числа, образующие точечный спектр Σ_p . Именно поиск этих собственных чисел или доказательство их отсутствия и является основной целью настоящей работы.

1.2. Содержание работы и сравнение с известными результатами.

Кратко основные результаты формулируются так: задача (1.6)–(1.8) для ортотропного волновода (ср. § 2, п. 1) никогда не имеет собственных чисел (теорема 1), а у задачи (1.6), (1.7), (1.9) при дополнительных требованиях симметрии собственные числа существуют “почти всегда” (теоремы 2–4). Собственным числам отвечают так называемые *захваченные упругие волны* – решения, принадлежащие пространству Соболева $H^1(\Omega)$ и потому экспоненциально затухающие на бесконечности. Простые обобщения асимптотического анализа (см. [9]) показывают, что упомянутые захваченные волны порождают собственные колебания тонкого ($h \ll 1$) стержня

$$G_h = \{(y, z) : h^{-1}y \in \omega, z \in (0, 1)\}, \quad (1.11)$$

сконцентрированные в Ch -окрестности его торцов. В частности, консоль (1.11), изображенная на рис. 1, а, не подвержена колебаниям, локализованным около ее закрепленного конца $\{(y, z) : h^{-1}y \in \omega, z = 0\}$, но на высоких частотах такие колебания могут возникать около другого – свободного – конца $\{(y, z) : h^{-1}y \in \omega, z = 1\}$.

Все результаты в статье получены переделыванием, иногда весьма существенным, методов изучения скалярных задач о волноводах. При этом в первую очередь следует выделить работу [10], в которой найдены достаточные условия отсутствия точечного спектра у задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в полуполосе Π с искривленным торцом ϖ . Далее применяется тот же технический прием подстановки полей u и $\partial_z u$ в формулу Грина на Ω и обработки интеграла по Γ_0 при учете краевого условия $u = 0$ на торце. Вместе с тем, если для скалярной задачи включение $\partial_z u \in H^1(\Pi)$, обеспечивающее сходимость

Рис. 1. Консоль с концом, приклеенным к стенке (а) или заделанным в нее (b)

всех возникающих интегралов, проверяется просто, так как доступны явные формулы для особенностей решений около угловых точек (см. [7] и, например, [8; гл. 2]), то аналогичные особенности упругих полей по существу известны только для изотропных материалов (ср. [11] и, например, [12; § 3.8]). Поэтому включение $\partial_z u \in H^1(\Omega)$ для захваченной волны в полуцилиндре (1.1) приходится доказывать отдельно (лемма 1), причем для этого применяется метод, разработанный в статье [13]. Для вывода общих результатов используется так называемая теорема о единственности продолжения решений системы уравнений теории упругости, которая обсуждается в § 2, п. 1.

Построение экспоненциально затухающих решений задачи Неймана (1.6), (1.7), (1.9) использует предложенную в статье [14] идею постановки искусственных краевых условий на плоскости симметрии волновода и создания, тем самым, положительной точки отсечки непрерывного спектра. Этот прием нашел многочисленные применения в разнообразных скалярных задачах математической физики (см. обзоры [15], [16]), однако не годится непосредственно для уравнений теории упругости из-за невозможности гладкого продолжения векторного решения u системы (1.6) через плоскость, на которой, как в работе [14], назначается условие Дирихле $u = 0$. Поэтому в § 3 при дополнительном предположении о наличии $N \geq 3$ плоскостей упругой и геометрической симметрии осуществляется чередующаяся постановка двух типов (3.4) и (3.5) искусственных краевых условий; они были предложены в статье [17] (см. также [18], [19]) и способствуют гладкому продолжению упругих полей. В результате непрерывный спектр задачи (1.6), (1.7), (1.9), суженной на секторальную часть $\Omega_\triangleleft$ волновода Ω (рис. 2), приобретает положительную (лемма 2) точку отсечки $\lambda^\dagger$, а по захваченной волне в $\Omega_\triangleleft$ восстанавливаются гладкие упругие поля во всем волноводе Ω . Поиск собственных чисел задачи в $\Omega_\triangleleft$, попадающих на интервал $(0, \lambda^\dagger)$ и потому принадлежащих ее дискретному спектру, производится при помощи вариационного метода (см. [14], [20], [21] и др., а также обзоры [16], [22]), который, впрочем, опять нуждается в модификации из-за векторной природы уравнений теории упругости. Соответствующий материал дан в § 3, пп. 5 и 6.

Подчеркнем особо, что развиваемый в статье подход неприменим в плоских задачах теории упругости (исключение составляет случай защемленных боковых сторон полуполосы; см. § 4, п. 4). В полосе с полностью свободной

Рис. 2. Полуцилиндр (а), а также его вырезанный сектор или оставшаяся часть (б)

границей (задача Неймана) эффект захвата упругих волн известен; упомянем новаторскую работу [23], где строго доказано существование захваченной волны при нулевом коэффициенте Пуассона ν в изотропной полуполосе с боковыми сторонами и торцом, свободными от напряжений, а также результаты экспериментов и вычислений в указанной двумерной задаче [24]–[29]. В круговом изотропном однородном полуцилиндре $\{(y, z) : |y| < R, z > 0\}$ со свободными боковой поверхностью и торцом захваченные волны также обнаружены. В [30] строго исследована захваченная волна опять-таки в случае $\nu = 0$, а в статьях [31]–[34] на разных уровнях строгости рассмотрены иные ситуации. Во всех указанных работах исследуются осесимметричные волны, для которых задача теории упругости допускает двумерную постановку. Подход, примененный в § 3, наоборот, не позволяет обнаруживать осесимметричные захваченные волны ввиду сужения задачи на сектор цилиндра, а обнаруживает только волны, колеблющиеся в окружном направлении. Вместе с тем, найденные собственные числа попадают на дискретный спектр вспомогательной задачи и потому оказываются устойчивыми по отношению к симметричным возмущениям, в частности, обнаружение захваченной волны при некотором ν_* означает, что такая волна существует и при значениях коэффициента Пуассона, близких к ν_* .

1.3. Структура статьи. В § 2 изучается смешанная краевая задача (1.6)–(1.8) в случае прямого полуцилиндра $\Omega = \omega \times \mathbb{R}_+$. Полуцилиндры со скошенными и искривленными торцами обсуждаются в § 4, п. 1, а в § 4, п. 5 поясняются неурядицы, вызванные недостаточной гладкостью решений около ребер границы и линий смены типа краевых условий.

Задаче Неймана (1.6), (1.7), (1.9) посвящен § 3. Сначала описываются требования симметрии, способствующие постановке подходящих искусственных краевых условий, и доказывается возникновение положительной точки отсечки $\lambda^\dagger$ непрерывного спектра. Затем при помощи нескольких приемов исследуется модельная задача на секторе $\omega_\triangleleft$ сечения ω , получающаяся преобразованием Фурье $\mathcal{F}_{z \rightarrow \mu}$. Дело в том, что эта задача имеет двойственную сущность

и может интерпретироваться как спектральная относительно λ при зафиксированной переменной μ преобразования Фурье или как квадратичный пучок относительно μ (спектральное семейство) при фиксированном λ . В скалярном случае пересчет одного спектра в другой элементарен, но для векторной задачи приходится изучать пучок отдельно и, в частности, строить присоединенные векторы и жордановы цепочки. Подчеркнем, что теоремы 4 и 2, 3, установленные в § 3, пп. 5 и 6, обслуживают две принципиально различные ситуации: во-первых, при $\lambda = \lambda^\dagger$ существует стоячая (не зависящая от z) волна и, во-вторых, все волны на первом пороге $\lambda^\dagger$ спектра $\Sigma_\triangleleft$ оказываются осциллирующими, а именно приобретают вид $e^{\pm i\mu_0} U_\pm^0(y)$. Особая простота достаточных условий захвата упругих волн достигается в первой ситуации, а вторая невозможна в скалярных задачах.

В заключительном § 4 показано, как даже при нарушении предположений, сделанных в теоремах 2–4, можно обеспечить существование захваченной волны путем образования полостей и трещин в теле волновода. Также рассматривается упругий волновод с жестко заземленной боковой поверхностью, причем в плоском варианте задачи приводятся конкретные формулы. Кроме того, обсуждаются другие смежные задачи и формулируются открытые вопросы. В частности, отмечено, что методы настоящей работы не позволяют убедиться в отсутствии собственных чисел задачи (1.6)–(1.8) с краевыми условиями Неймана и Дирихле на поверхностях $\{x : y \in \partial\omega, z > H\}$ и $\{x \in \partial\Omega : z < H\}$ соответственно; здесь $H > 0$. Иными словами, остается открытым вопрос о возможности локализации упругих колебаний тонкой консоли около заглубленного ее торца (см. рис. 1, b).

§ 2. Смешанная краевая задача

2.1. О единственности продолжения решений системы уравнений теории упругости. При доказательстве отсутствия точечного спектра у задачи (1.6)–(1.8) применяется следующее утверждение: *решение и системы (1.6), подчиненное одновременно краевым условиям Дирихле (1.8) и Неймана (1.9) на торце Γ_0 , обращается в нуль всюду в Ω* . Этот факт часто называется *теоремой о единственности продолжения решений системы уравнений*, а его доказательство для скалярных уравнений дано в [35], [36] и [37; § 4.3] (в случае уравнения Лапласа на плоскости этот факт очевиден ввиду аналитичности решения). Вместе с тем известны контрпримеры для уравнений высших порядков и систем (см., например, [38], [39]). Нужный результат для системы (1.6) уравнений теории упругости получен в [37; § 11.4], но только для ортотропных материалов. В случае плоскостей ортотропии, совпадающих с плоскостями выбранной декартовой системы координат $x = (x_1, x_2, x_3)$, матрица A , фигурирующая в законе Гука (1.5), приобретает блочно-диагональное строение,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 & 0 & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{66} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

и содержит девять свободных упругих постоянных. Поскольку упомянутый результат не требует специального выбора системы координат, появляются $9 + 3 = 12$ свободных постоянных (постоянные из (2.1) плюс три угла поворотов). Понятие алгебраической эквивалентности задач теории упругости (см. [40]) позволяет довести количество свободных постоянных до $9 + 8 = 17$ (допускаются любые нормированные аффинные преобразования), однако описание соответствующих классов упругих материалов до сих пор неизвестно.

В любом случае распространить требуемую теорему на все 21 свободную постоянную в симметричной (6×6) -матрице A при помощи простых алгебраических соображений не удастся. Поэтому утверждения, полученные в последующих пунктах этого параграфа, устанавливаются в предположении справедливости теоремы о единственности продолжения, т.е. для ортотропного материала согласно [37; § 11.4], однако ввиду возможной неполной осведомленности автора, может быть, и при более существенной анизотропии упругих свойств волновода.

2.2. Отсутствие точечного спектра. Пусть при некотором λ у смешанной краевой задачи (1.6)–(1.8) (или (1.10) в вариационной постановке) имеется нетривиальное решение $u \in H_0^1(\Omega; \Gamma^0)$. Вектор-функция u бесконечно дифференцируема всюду в $\bar{\Omega}$, за исключением ребра $\gamma^0 = \partial\omega \times \{0\}$, на котором у нее могут появиться особенности. В следующем пункте будет показано, что такие особенности не препятствуют сходимости всех возникающих далее интегралов.

Производная $\partial_z u = \partial u / \partial z$ удовлетворяет системе (1.6) и краевым условиям (1.7), так как множества Ω и Γ обладают цилиндрическим строением, а коэффициенты дифференциальных операторов не зависят от переменной $z = x_3$. Поэтому

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (\overline{\partial_z u(x)})^\top L(\nabla)u(x) - \overline{L(\nabla) \partial_z u(x)}^\top u(x) dx \\ &= \int_{\omega} \overline{\partial_z u(x)}^\top D(-e_{(3)})^\top AD(\nabla)u(y, 0) dy. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Условия Дирихле (1.8) обеспечивают равенство

$$D(\nabla)u(y, 0) = D(e_{(3)}) \partial_z u(y, 0) + D(\nabla_y, 0)u(y, 0) = D(e_{(3)}) \partial_z u(y, 0) \quad (2.3)$$

с двумерным градиентом $\nabla_y = (\partial/\partial y_1, \partial/\partial y_2)$, а значит,

$$0 = - \int_{\omega} \overline{\partial_z u(y, 0)}^\top D(e_{(3)})^\top AD(e_{(3)}) \partial_z u(y, 0) dy. \quad (2.4)$$

Числовая (3×3) -матрица $D(e_{(3)})^\top AD(e_{(3)})$ оказывается симметричной и положительно определенной, поскольку такими же свойствами обладает (6×6) -матрица A , а ранг (6×3) -матрицы $D(e_{(3)})$ равен 3 (ср. формулу (1.4)). В итоге находим, что

$$\partial_z u(y, 0) = 0, \quad y \in \omega. \quad (2.5)$$

Осталось заметить, что при описанных в § 2, п. 1 ограничениях соотношения (1.8) и (2.5) гарантируют обращение вектор-функции u , удовлетворяющей системе (1.6), в нуль всюду в Ω . Полученное противоречие с предположением $u \not\equiv 0$ показывает, что $\Sigma_p = \emptyset$.

2.3. О сингулярностях поля смещений на ребре. Для непосредственной проверки сходимости всех интегралов, возникших в выкладках (2.2) и (2.4), достаточно убедиться в том, что в окрестности контура $\gamma^0 \subset \partial\Omega$ выполнены оценки

$$\varrho^p |\nabla^p u(x)| \leq c_p r^{\delta+1/2}, \quad p = 0, 1, 2, 3, \quad (2.6)$$

где $\varrho = \text{dist}(x, \gamma^0)$ – расстояние до ребра, а δ и c_p – некоторые положительные постоянные.

Для проверки оценки (2.6) согласно общей схеме исследования поведения решений эллиптических краевых задач в областях с гладкими ребрами на границе перепишем задачу (1.6)–(1.8) в криволинейных координатах $(-n, z, s)$, где (n, s) – естественная система координат в окрестности контура $\partial\omega$, т.е. n – ориентированное расстояние до $\partial\omega$, $n > 0$ вне области ω , а s – длина дуги, измеренная вдоль $\partial\omega$. После сделанного “спрямления” границы следующий шаг – “замораживание” коэффициентов дифференциальных операторов в произвольной точке x^0 ребра γ^0 и поворот системы координат. В результате оператор $L(\nabla)$ системы теории упругости (1.6) преобразуется в дифференциальный оператор-матрицу того же строения

$$D(\partial_n, -\partial_z, -\partial_s)^\top A(s^0) D(-\partial_n, \partial_z, \partial_s),$$

но с новой симметричной и положительно определенной числовой матрицей $A(s^0) = \theta(s^0)^\top A \theta(s^0)$, где $\theta(s^0)$ – ортогональная (6×6) -матрица, зависящая от координаты s^0 выбранной точки x^0 (см. [3] и [4; § 2.2]). Аналогичные изменения претерпевает и оператор краевых условий Неймана. Уберем из всех дифференциальных операторов производные по переменной s и придем к модельной краевой задаче

$$\begin{aligned} D(-\nabla_\xi, 0)^\top A(s^0) D(\nabla_\xi, 0) \Psi(\xi) &= 0, & \xi \in \mathbb{K}, \\ D(e_{(\eta)})^\top A(s^0) D(\nabla_\xi, 0) \Psi(\xi) &= 0, & \phi = \frac{\pi}{2}, \quad \Psi(\xi) = 0, \quad \phi = 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

в прямом угле

$$\mathbb{K} = \{\xi = (\eta, \zeta) : \eta > 0, \zeta > 0\} = \left\{ \xi : \varrho > 0, \phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right\}.$$

При этом (ϱ, ϕ) – система полярных координат на плоскости $\mathbb{R}^2 \ni \xi = (\eta, \zeta) = (-n, z)$. Наконец, по схеме из работ [7], [41] требуется найти все степенные решения

$$\Psi(\xi) = \varrho^\mu \psi(\phi), \quad \mu \in \mathbb{C}, \quad \psi \in C^\infty \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (2.8)$$

Если окажется, что любое затухающее при $\varrho \rightarrow +0$ (т.е. $\text{Re } \mu > 0$) степенное решение (2.8) удовлетворяет соотношению

$$\text{Re } \mu > \frac{1}{2}, \quad (2.9)$$

то оценки (2.6) верны в самом деле. Это утверждение вытекает из общих результатов статей [41]–[43] (см. также [8; гл. 10–12]).

Приступим к доказательству неравенства (2.9). Сначала убедимся в том, что у задачи (2.7) нет степенных решений (2.8) с показателями на прямой $\{\mu \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} \mu = 1/2\}$. Пусть такое решение Ψ нашлось. Подставим его и производную $\partial_\zeta \Psi$ в формулу Грина на секторе кольца

$$\Xi = \left\{ \xi : 1 < \varrho < R, \phi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right\}, \quad R > 1.$$

Принимая во внимание аналогичное (2.3) соотношение на стороне $\{\xi: \eta > 0, \zeta = 0\}$ угла $\mathbb{K}$, получаем равенство

$$\begin{aligned} & \int_1^R \overline{\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}(\eta, 0)}^\top D(e_{(\zeta)})^\top A(s^0) D(e_{(\zeta)}) \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}(\eta, 0) d\eta \\ &= \int_1^R \overline{\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}(\eta, 0)}^\top D(e_{(\zeta)})^\top A(s^0) D(\nabla_\xi, 0) \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}(\eta, 0) d\eta \\ &= \int_0^{\pi/2} F(\eta, \zeta)|_{\varrho=R} \varrho d\phi - \int_0^{\pi/2} F(\eta, \zeta)|_{\varrho=1} \varrho d\phi \end{aligned} \quad (2.10)$$

с подынтегральным выражением

$$\begin{aligned} F(\eta, \zeta) &= \overline{\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}(\eta, 0)}^\top D\left(\frac{\eta}{\varrho}, \frac{\zeta}{\varrho}\right)^\top A(s^0) D(\nabla_\xi, 0) \Psi(\eta, \zeta) \\ &\quad - \Psi(\eta, \zeta)^\top D\left(\frac{\eta}{\varrho}, \frac{\zeta}{\varrho}\right)^\top A(s^0) D(\nabla_\xi, 0) \overline{\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta}(\eta, 0)}. \end{aligned}$$

Отметим, что на дугах окружностей справедливо соотношение $\varrho d\phi = ds_\xi$, а $(\varrho^{-1}\eta, \varrho^{-1}\zeta)^\top$ – единичный вектор нормали. В силу условия $\operatorname{Re} \mu = 1/2$ имеем

$$F(\eta, \zeta) \varrho = F(\varrho^{-1}\eta, \varrho^{-1}\zeta) \varrho^{\bar{\mu}-1} \varrho^{\mu-1} \varrho = F(\varrho^{-1}\eta, \varrho^{-1}\zeta).$$

Следовательно, интегралы в правой части (2.10) взаимно уничтожаются, интеграл в левой части обращается в нуль и прежние аргументы приводят к соотношению $\partial_\zeta \Psi(\eta, 0) = 0$ при $\eta > 0$, а затем и к соотношению $\Psi(\eta, \zeta) = 0$ при $(\eta, \zeta) \in \mathbb{K}$, т.е. степенное решение Ψ тривиально в описанных в § 2, п. 1 условиях.

Благодаря краевому условию Дирихле на одной из сторон угла $\mathbb{K}$ мнимая ось $\{\mu \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} \mu = 0\}$ также не может содержать показателей нетривиальных степенных решений (2.9) задачи (2.8). Этот факт установлен, например, в предложении 6.1.2 из [8]. Наконец, в случае изотропного упругого материала (см. далее § 4, п. 4) возможные показатели степенных решений в клине $\mathbb{K}$ вычислены в работе [11] (результаты воспроизведены, например, в [12; § 3.8]), где, в частности, проверено, что в полосе $\Upsilon = \{\mu \in \mathbb{C}: 0 \leq \operatorname{Re} \mu \leq 1/2\}$ упомянутых показателей нет.

Согласно общей теории, развитой в работе [7], показатели μ суть собственные числа некоторого квадратичного пучка на дуге $(0, \pi/2) \ni \phi$. Гладкие вариации пучка порождают непрерывные изменения его спектра (см. [44; гл. 1]). Поскольку любые две симметричные и положительно определенные матрицы $A^{(0)}(s^0)$ и $A^{(1)}(s^0)$ можно соединить путем $[0, 1] \ni t \mapsto A^{(t)}(s^0)$ при сохранении упомянутых свойств у промежуточных матриц, то проверенное отсутствие

собственных чисел на прямых $\{\mu \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} \mu = 1/2\}$ и $\{\mu \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} \mu = 0\}$, а также информация об изотропном материале доказывают отсутствие собственных чисел и во всей полосе Υ . Таким образом, доказана

ЛЕММА 1. *При ограничениях из § 2, п. 1 решение $u \in H_0^1(\Omega; \Gamma^0)$ задачи (1.6)–(1.8) бесконечно дифференцируемо всюду в $\bar{\Omega}$, кроме ребра γ^0 , около которого выполнены оценки (2.6).*

Формальные вычисления из § 2, п. 2 подытоживаем в заключительном утверждении параграфа.

ТЕОРЕМА 1. *В описанных в § 2, п. 1 условиях точечный спектр Σ_p оператора $\mathcal{A}$ задачи (1.6)–(1.8) пуст, т.е. захваченных волн в полуцилиндре Ω с защемленным торцом $\Gamma^0 = \partial\omega \times \{0\}$ не существует.*

§ 3. Захваченные волны

3.1. Симметрия и искусственные краевые условия. Поиск собственных чисел задачи (1.6), (1.7), (1.9) осложнен тем обстоятельством, что все они располагаются на непрерывном спектре и потому оказываются неустойчивыми. В работе [14] для скалярных задач был предложен прием постановки искусственных краевых условий Дирихле на плоскости геометрической симметрии волновода для создания искусственной положительной точки отсечки $\lambda^\dagger$ непрерывного спектра и придания устойчивости собственным числам на интервале $(0, \lambda^\dagger)$. Он нашел применение в многочисленных исследованиях и привел к построению примеров захваченных волн в разнообразных задачах математической физики (см., в частности, обзоры [15], [16], [22] и другие публикации по теме). В теории упругости указанный метод не работает из-за векторной структуры задач, однако в статье [17] (см. также [18], [19]) был найден более сложный его заменитель, который и воспроизводится далее.

Рис. 3. Сечения, обладающие требуемой геометрической симметрией при $N = 3$ (a), $N = 4$ (b), $N = 6$ (c) и любом N (d)

Предположим, что сечение ω и упругий материал с матрицей жесткости A обладают плоскостями симметрии (соответственно геометрической и упругой) в количестве $N \geq 3$. Сказанное означает, что для систем координат $y^p = (y_1^p, y_2^p)$, полученных поворотом вокруг начала координат исходной системы $y = (y_1, y_2)$ на углы $N^{-1}p\pi$, $p = 0, \dots, N-1$, плоскость $\{x : y_2^p = 0\}$ является плоскостью геометрической симметрии для цилиндра (1.1) и плоскостью упругой симметрии для заполняющего его материала. Иными словами, замена $(y_1^p, y_2^p, z) \mapsto (y_1^p, -y_2^p, z)$ никоим образом не изменяет краевую задачу (1.6), (1.7), (1.9).

Несколько сечений, имеющих нужные свойства, изображены на рис. 3. Ортоотропные материалы с осями симметрии четвертого порядка (в частности, трансверсально-изотропные и, разумеется, изотропный материалы) удовлетворяют требуемому условию при $N \geq 4$ и $N \geq 3$ соответственно. При этом в матрице жесткости (2.1) для названного ортоотропного материала возникают дополнительные связи

$$A_{11} = A_{22}, \quad A_{13} = A_{23}, \quad A_{44} = A_{55}. \quad (3.1)$$

Если же материал трансверсально-изотропный, присоединяется еще одна связь $A_{66} = A_{12} - A_{12}$, а также три новых, $A_{11} = A_{33}$, $A_{12} = A_{13}$ и $A_{44} = A_{66}$, при полной изотропии.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При нарушении одного из равенств в списке (3.1) материал остается ортоотропным (для него верны результаты § 2), но теряет ось симметрии четвертого порядка и потому не годится для дальнейших построений. Двух ($N = 2$) плоскостей геометрической симметрии (например, ω – ромб) также недостаточно для реализации предлагаемой схемы.

Выделим сектор сечения

$$\omega_{\triangleleft} = \{y \in \omega : 0 < \varphi < N^{-1}\pi\} \quad (3.2)$$

и определим множества (см. рис. 2, b)

$$\Omega_{\triangleleft} = \{x \in \Omega : 0 < \varphi < N^{-1}\pi\}, \quad \Gamma_{\triangleleft} = \{x \in \Gamma : 0 < \varphi < N^{-1}\pi\};$$

здесь (r, φ) – система полярных координат на плоскости $\mathbb{R}^2 \ni y$. Сузим уравнения (1.6) и краевые условия (1.7), (1.9) на введенные подмножества:

$$\begin{aligned} L(\nabla)u(x) &= \lambda \rho u(x), & x \in \Omega_{\triangleleft}, \\ N(y, \nabla)u(y, 0) &:= D(\nu(y), 0)^\top AD(\nabla)u(y, 0) = 0, & x \in \Gamma_{\triangleleft}, \\ N^0(\nabla)u(x) &:= D(-e_{(3)})^\top AD(\nabla)u(y, 0) = 0, & y \in \omega_{\triangleleft}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

На вновь образованных поверхностях $T_p = \{x \in \Omega : 0 < \varphi < N^{-1}\pi\}$, $p = 0, 1$, попадающих на упомянутые плоскости симметрии, назовем следующие искусственные краевые условия:

$$u_1(x) = 0, \quad u_3(x) = 0, \quad D(e_{(2)})^\top AD(\nabla)u(x) = 0, \quad x \in T_0, \quad (3.4)$$

$$u_\varphi(x) = 0, \quad D(e_{(r)})^\top AD(\nabla)u(x) = 0, \quad D(e_{(z)})^\top AD(\nabla)u(x) = 0, \quad x \in T_1. \quad (3.5)$$

Здесь фигурирует проекция

$$u_\varphi = -u_1 \sin \varphi + u_2 \cos \varphi \quad (3.6)$$

вектора смещений на ось φ , а также орты осей

$$e_{(2)} = (0, 1, 0)^\top, \quad e_{(3)} = e_{(z)} = (0, 0, 1)^\top, \quad e_{(r)} = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)^\top.$$

Подчеркнем, что $u_1 = u_r$ на T_0 . Кроме того, $u_3 = u_z$, а в (3.4) и (3.5) фигурируют напряжения $\sigma_{\varphi\varphi}(u)$ и $\sigma_{r\varphi}(u)$, $\sigma_{z\varphi}(u)$ соответственно.

Соотношения (3.4) суть линеаризованные условия Синьорини идеального контакта с абсолютно жестким полупространством, а соотношения (3.5) – условия, моделирующие исчезающе тонкое покрытие, абсолютно жесткое на растяжение, но не реагирующее на изгиб. В обоих случаях физическая интерпретация назначенных условий весьма сомнительна, однако их введение обусловлено четырьмя замечательными свойствами.

Во-первых, симметричное относительно полуплоскости $\{x: \varphi = 0\}$ продолжение

$$\begin{aligned} u_q^+(y_1, y_2, z) &= \begin{cases} u_q(y_1, y_2, z), & y_2 > 0, \\ -u_q(y_1, -y_2, z), & y_2 < 0, \end{cases} \quad q = 1, 3, \\ u_2^+(y_1, y_2, z) &= \begin{cases} u_2(y_1, y_2, z), & y_2 > 0, \\ u_2(y_1, -y_2, z), & y_2 < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.7)$$

поля u , удовлетворяющего формулам (3.4), остается гладким, причем уравнения и краевые условия из списка (3.3) переносятся с $\Omega_{\triangleleft}^0 = \Omega_{\triangleleft}$ на соседний сектор $\Omega_{\triangleleft}^{2N-1} = \{x \in \Omega: \varphi \in (2\pi - N^{-1}\pi, 2\pi)\}$.

Во-вторых, антисимметричное продолжение удовлетворяющего формулам (3.5) поля u через полуплоскость $\{x: \varphi = N^{-1}\pi\}$ также сохраняет гладкость и равенства (3.3) на другом соседнем секторе $\Omega_{\triangleleft}^1 = \{x \in \Omega: \varphi \in (N^{-1}\pi, 2N^{-1}\pi)\}$.

Третье и четвертое свойства будут описаны в следующем пункте, а здесь укажем, как строится продолжение u^- , упомянутое в предыдущем абзаце. Поскольку расположение групп (3.4) и (3.5) на искусственных границах T_0 и T_1 не играет роли, для упрощения формул предположим на время, что соотношения (3.5) записаны для T_0 и опять продолжение осуществляется на сектор $\Omega_{\triangleleft}^{2N-1}$; тогда

$$\begin{aligned} u_q^-(y_1, y_2, z) &= \begin{cases} u_q(y_1, y_2, z), & y_2 > 0, \\ u_q(y_1, -y_2, z), & y_2 < 0, \end{cases} \quad q = 1, 3, \\ u_2^-(y_1, y_2, z) &= \begin{cases} u_2(y_1, y_2, z), & y_2 > 0, \\ -u_2(y_1, -y_2, z), & y_2 < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

В (3.7) нечетные продолжения реализуются для u_1 и u_3 , а четное – для u_2 . В (3.8), наоборот, компоненты u_1 и u_3 продолжены по четности, а u_2 – по нечетности.

3.2. Искусственная положительная точка отсечки. Жесткие смещения упругого тела как единого целого может быть представлено в виде $d(x)a$, где $a = (a_1, \dots, a_6)^\top$ – столбец в $\mathbb{R}^6$, а $d(x)$ – похожая на (1.4) (3×6) -матрица

$$d(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2^{-1/2}x_3 & -2^{-1/2}x_2 \\ 0 & 1 & 0 & -2^{-1/2}x_3 & 0 & 2^{-1/2}x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 2^{-1/2}x_2 & -2^{-1/2}x_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Третье, основное, свойство введенных искусственных краевых условий заключается в том, что всякое жесткое смещение $d(x)a$, удовлетворяющее равенствам (3.4) и (3.5) при ограничении $N^{-1}\pi < \pi/2$, оказывается тривиальным.

В самом деле, согласно формулам (3.9) равенства $u_1 = 0$ и $u_3 = 0$, предписанные условиями (3.4) при $x_2 = 0$, означают, что $a_1 = a_3 = a_5 = 0$. Учитывая еще формулу (3.6) с острым углом $\varphi = N^{-1}\pi$, видим, что первое условие (3.5) превращается в соотношение

$$a_2 \cos \varphi - 2^{-1/2} z a_4 \cos \varphi - 2^{-1/2} a_6 r = 0 \quad (3.10)$$

и сразу же влечет за собой равенства $a_2 = a_4 = a_6 = 0$. Итак, $a = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $N = 2$, $\varphi = \pi/2$ и угол сектора прямой, то выражение (3.10) обращается в нуль и при нетривиальных a_2 и a_4 . При постановке на обоих гранях однотипных условий (3.4) или (3.5) добиться нужного свойства также не удастся.

Проверенное свойство условий (3.4), (3.5) приводит к возникновению положительной точки отсечки $\lambda^\dagger$ непрерывного спектра в задаче (3.3)–(3.5). Этот факт вытекает из следующего утверждения.

ЛЕММА 2. Для вектор-функции $u \in H^1(\Omega_\triangleleft)$, удовлетворяющей (устойчивым) условиям Дирихле из списка (3.4), (3.5), справедливо неравенство Корна

$$\|u; H^1(\Omega_\triangleleft)\|^2 \leq c(\omega) \|D(\nabla)u; L^2(\Omega_\triangleleft)\|^2 \quad (3.11)$$

с некоторым множителем, зависящим только от сечения (3.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разобьем цилиндр $\Omega_\triangleleft$ на идентичные множества $\Omega_\triangleleft^{(j)} = \{x \in \Omega_\triangleleft : j-1 < z < j\}$, $j \in \mathbb{N}$. Для каждого из них запишем неравенство Корна

$$\|u; H^1(\Omega_\triangleleft^{(j)})\|^2 \leq c(\omega, F) (\|D(\nabla)u; L^2(\Omega_\triangleleft^{(j)})\|^2 + |F(u^j)|^2) \quad (3.12)$$

(см. [45; теорема 3.3.3], [4; теорема 2.3.3]), где $F = (F_1, \dots, F_6)^\top$ – линейный непрерывный в $H^1(\Omega_\triangleleft^{(1)})$ функционал со следующим свойством:

$$F(da) = 0 \in \mathbb{R}^6 \implies a = 0 \in \mathbb{R}^6. \quad (3.13)$$

Подчеркнем, что в правой части (3.12) стоит результат действия функционала F на вектор-функцию $\Omega_\triangleleft^{(1)} \ni x \mapsto u^j(y, z) = u(y, z - j + 1)$, и именно поэтому постоянную $c(\omega, F)$ можно взять общей для всех $j \in \mathbb{N}$. Рассуждения, предшествовавшие формулировке леммы, показывают, что свойство (3.13) присуще функционалу F с такими компонентами:

$$\begin{aligned} F_1(u) &= \int_{T_0^{(1)}} u_1(x) ds_x, & F_2(u) &= \int_{T_0^{(1)}} u_3(x) ds_x, \\ F_3(u) &= \int_{T_0^{(1)}} z u_1(x) ds_x, & F_4(u) &= \int_{T_1^{(1)}} u_\varphi(x) ds_x, \\ F_5(u) &= \int_{T_1^{(1)}} z u_\varphi(x) ds_x, & F_6(u) &= \int_{T_1^{(1)}} r u_\varphi(x) ds_x; \end{aligned} \quad (3.14)$$

здесь $T_p^{(1)} = \{x \in T_p : z \in (0, 1)\}$. Для вектор-функции, удовлетворяющей упомянутым выше условиям Дирихле, каждый из скалярных функционалов (3.14) обращается в нуль, а значит, последнее слагаемое исчезает из (3.12). Теперь суммирование оценок (3.12) по $j \in \mathbb{N}$ приводит к формуле (3.11).

Неравенство Корна (3.11) и теорема Рисса о представлении непрерывного функционала в гильбертовом пространстве показывают, что при

$$\lambda < \rho^{-1}c(\omega)^{-1}A_0, \quad (3.15)$$

где $A_0 > 0$ – наименьшее собственное число матрицы (2.1), неоднородная задача (3.3)–(3.5) в вариационной постановке

$$(AD(\nabla)u, D(\nabla)v)_{\Omega_{\triangleleft}} - \lambda\rho(u, v)_{\Omega_{\triangleleft}} = \mathcal{F}(v), \quad v \in \mathcal{H}(\Omega_{\triangleleft}), \quad (3.16)$$

с правой частью $\mathcal{F}(v) = (f, v)_{\Omega_{\triangleleft}}$, $f \in L^2(\Omega_{\triangleleft})$ имеет единственное решение $u \in \mathcal{H}(\Omega_{\triangleleft})$ и верна оценка

$$\|u; \mathcal{H}(\Omega_{\triangleleft})\| \leq c(A, \rho, \omega, \lambda)\|f; L^2(\Omega_{\triangleleft})\|.$$

Здесь $\mathcal{H}(\Omega_{\triangleleft})$ – подпространство вектор-функций $u \in H^1(\Omega_{\triangleleft})$, подчиненных трем условиям Дирихле из списка (3.4), (3.5) искусственных краевых условий. Таким образом, непрерывный спектр $\Sigma_{\triangleleft}^c$ заведомо расположен выше точки $\rho^{-1}c(\omega)^{-1}A_0$ (ср. правую часть (3.15)). В следующем пункте будет пояснено, почему $\Sigma_{\triangleleft}^c$ – луч $[\lambda^\dagger, +\infty)$.

Рис. 4. Схема продолжений в случае квадратного сечения

Пусть $\lambda \in (0, \lambda^\dagger)$ – собственное число задачи (3.3)–(3.5), т.е. точка ее дискретного спектра $\Sigma_{\triangleleft}^d$, а $u_{\triangleleft} \in \mathcal{H}(\Omega_{\triangleleft})$ – соответствующий собственный вектор. Продолжим его с секториального цилиндра $\Omega_{\triangleleft}$ на целый цилиндр Ω по следующему правилу. Снабдим искусственно образованные поверхности $T_p = \{x \in \Omega: \varphi = pN^{-1}\pi\}$, $p = 0, \dots, 2N-1$, с нечетными номерами p индексом плюс, а с четными – минус, и присвоим такие же индексы продолжениям (3.7) и (3.8) соответственно (в первом случае нечетными оказываются касательные смещения, а во втором – нормальное). Применим $(\pm)$ -продолжения через $(\pm)$ -поверхности и получим вектор-функцию u в Ω ; поскольку секторов четное число, а знаки чередуются (см. схему на рис. 4), формулируем последнее, четвертое, свойство введенных искусственных краевых условий: безразлично, в каком направлении (по или против часовой стрелки) выполняются продолжения. Как уже пояснялось, полученная вектор-функция является гладкой внутри Ω , но может иметь сингулярность на ребре $\gamma^0 = \partial\omega \times \{0\}$, которая, впрочем, не выводит ее из пространства $H^1(\Omega)$. Кроме того, она удовлетворяет уравнениям (1.6) и краевым условиям (1.7), (1.9). Итак, при указанном λ построено нетривиальное решение вариационной задачи (1.10). Следовательно, λ – собственное число задачи (1.6), (1.7), (1.9), попадающее на ее непрерывный спектр $\Sigma^c = [0, +\infty)$.

3.3. Модельная задача на сечении $\omega_{\triangleleft}$. Преобразование Фурье по переменной z ставит в соответствие задаче (3.3), (3.4), (3.5) следующую задачу на области (3.2):

$$L(\nabla_y, i\mu)U(y) = \Lambda\rho U(y), \quad y \in \omega_{\triangleleft}, \quad (3.17)$$

$$D(\nu(y), 0)^\top AD(\nabla_y, i\mu)U(y) = 0, \quad y \in \gamma_{\triangleleft}, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} U_1(y) = U_3(y) = 0, \quad D(e_{(2)})^\top AD(\nabla_y, i\mu)U(y) = 0, \quad y \in \tau_0, \\ U_\varphi(y) = 0, \quad D(e_{(r)})^\top AD(\nabla_y, i\mu)U(y) = 0, \quad (3.19) \\ D(e_{(z)})^\top AD(\nabla_y, i\mu)U(y) = 0, \quad y \in \tau_1. \end{aligned}$$

Здесь $i = \sqrt{-1}$, $\gamma_{\triangleleft}$ и τ_p – сечения поверхностей $\Gamma_{\triangleleft}$ и T_p соответственно, а μ – двойственная переменная преобразования Фурье.

При каждом вещественном μ полуторалинейная форма из левой части интегрального тождества

$$(AD(\nabla_y, i\mu)U, D(\nabla_y, i\mu)V)_{\omega_{\triangleleft}} = \Lambda\rho(U, V)_{\omega_{\triangleleft}}, \quad V \in \mathcal{H}(\omega_{\triangleleft}), \quad (3.20)$$

обслуживающего задачу (3.17)–(3.19), является эрмитовой и положительно определенной (см. ниже лемму 3) на пространстве $\mathcal{H}(\omega_{\triangleleft})$ вектор-функций U из класса Соболева $H^1(\Omega)$, удовлетворяющих условиям Дирихле из списка (3.19). Таким образом, вариационной задаче (3.20) ставится (см. [6; гл. 10]) в соответствие самосопряженный оператор $A_{\triangleleft}(\mu)$, причем согласно [6; теоремы 10.1.5, 10.2.2] и благодаря компактности вложения $H^1(\Omega_{\triangleleft}) \subset L^2(\Omega_{\triangleleft})$ его спектр оказывается полностью дискретным и образует монотонную неограниченную последовательность собственных чисел

$$0 < \Lambda_1(\mu) \leq \Lambda_2(\mu) \leq \dots \leq \Lambda_j(\mu) \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (3.21)$$

составленную при учете их кратностей. Функция

$$\mathbb{R} \ni \mu \mapsto \Lambda_1(\mu) \quad (3.22)$$

непрерывна (см., например, [46; гл. 7]) и подчинена оценке $\Lambda_1(\mu) \geq c(1 + \mu^2)$, вытекающей из тождества (3.20) и следующего утверждения.

ЛЕММА 3. *Справедливо неравенство*

$$\|\nabla_y U; L^2(\omega_{\triangleleft})\|^2 + (1 + \mu^2)\|U; L^2(\omega_{\triangleleft})\|^2 \leq C\|D(\nabla_y, i\mu)U; L^2(\omega_{\triangleleft})\|^2 \quad (3.23)$$

с множителем C , не зависящим от вектор-функции $U \in \mathcal{H}(\omega_{\triangleleft})$ и вещественного параметра μ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В неравенство Корна (3.12), записанное для ячейки $\Omega_{\triangleleft}^1$ и содержащее функционал F с компонентами (3.14), подставим вектор-функцию $e^{i\mu z}U(y)$ с сомножителем $U \in \mathcal{H}(\omega_{\triangleleft})$. Поскольку она удовлетворяет условиям Дирихле из списка (3.4), (3.5), унаследованным от аналогичных условий в (3.19), функционал F исчезает из правой части (3.12). Выполнив дифференцирование и интегрирование по переменной z , сразу же приходим к неравенству (3.23), причем появление параметра μ обусловлено экспоненциальным множителем $e^{i\mu z}$.

Из упомянутых свойств функции (3.22) вытекают два факта. Во-первых, она имеет минимум, который обозначим

$$\lambda^\dagger = \min\{\Lambda_1(\mu) \mid \mu \in \mathbb{R}\}. \quad (3.24)$$

Во-вторых, для любого $\lambda \geq \lambda^\dagger$ найдется вектор-функция

$$\Omega \ni (y, z) \mapsto e^{i\mu z} U(y), \quad (3.25)$$

удовлетворяющая всем соотношениям (3.3)–(3.5), за исключением краевого условия на торце полуцилиндра; по ней при помощи стандартной процедуры (см., например, обзор [16]) выстраивается сингулярная последовательность Вейля в точке λ для оператора $A_\triangleleft - \lambda\rho$ задачи (3.3)–(3.5) (ср. конец п. 1 в § 1).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для задач (1.6)–(1.8) и (1.6), (1.7), (1.9) вектор-функция вида (3.25) существует при любом $\lambda \geq 0$, так как для соответствующей модельной задачи на полном сечении ω цилиндра Ω

$$\begin{aligned} L(\nabla_y, i\mu)U(y) - \Lambda\rho U(y), & \quad y \in \omega, \\ D(\nu(y), 0)^\top AD(\nabla_y, i\mu)U(y) = 0, & \quad y \in \partial\omega, \end{aligned} \quad (3.26)$$

справедливо равенство $\Lambda_1(0) = 0$ (всякий постоянный вектор удовлетворяет задаче (3.26) с $\mu = 0$).

3.4. Пучок и жордановы цепочки. При $\lambda \in (0, \lambda^\dagger)$ оператор задачи (3.16), рассматриваемый как отображение

$$\mathcal{H}(\Omega) \ni u \mapsto \mathcal{F} \in \mathcal{H}(\Omega)^*, \quad (3.27)$$

является фредгольмовым; здесь $\mathcal{H}(\Omega)^*$ – пространство линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{H}(\Omega)$. Для проверки этого факта можно воспользоваться результатами теории эллиптических краевых задач в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность¹ (см. ключевые работы [7], [47]–[49] и, например, [8; гл. 6]). При этом нужно изменить интерпретацию спектральной задачи (3.18) (или (3.17)–(3.19) в классической постановке), а именно, зафиксировать $\Lambda = \lambda \in (0, \lambda^\dagger)$ и рассматривать μ как спектральный параметр. Теперь этой задаче отвечает квадратичный пучок²

$$\mathbb{C} \ni \mu \mapsto \mathfrak{A}_\Lambda(\mu): \mathcal{H}(\omega_\triangleleft) \mapsto \mathcal{H}(\omega_\triangleleft)^*. \quad (3.28)$$

Согласно общим результатам из [44; гл. 1] и [50] (см., например, [8; гл. 1]) спектр $\mathfrak{S}_\Lambda$ пучка (3.28) расположен внутри объединения полосы и двойного угла, содержащих мнимую ось,

$$\{\mu \in \mathbb{C}: |\operatorname{Im} \mu| \leq d_\Lambda, |\operatorname{Im} \mu| \leq k_\Lambda |\operatorname{Re} \mu|\};$$

здесь $d_\Lambda > 0$ и $k_\Lambda > 0$ – некоторые величины, зависящие от Λ . Кроме того, спектр $\mathfrak{S}_\Lambda$ состоит из нормальных собственных чисел, в частности не имеет

¹Эта теория обычно имеет дело с задачами в классической постановке, однако переход к обобщенным решениям и интегральным тождествам не встречает сколько-нибудь заметных препятствий (ср. [16]).

²Одновременно применяем два обозначения λ и Λ для спектрального параметра, происходящего из разных задач, основной (1.6), (1.7), (1.9) и модельной (3.17)–(3.19).

конечных точек сгущения. Задача (3.17)–(3.19) является формально самосопряженной, и коэффициенты входящих в нее дифференциальных операторов вещественные, а значит,

$$\mu \in \mathfrak{S}_\Lambda \implies \bar{\mu} \in \mathfrak{S}_\Lambda, \quad \mu \in \mathfrak{S}_\Lambda \implies -\mu \in \mathfrak{S}_\Lambda, \quad (3.29)$$

т.е. множество $\mathfrak{S}_\Lambda$ обладает симметрией относительно обеих, вещественной и мнимой, осей.

Если $\lambda = \Lambda_1(\mu)$ при $\mu \in \mathbb{R}$, то μ – собственное число пучка $\mathfrak{A}_\lambda$. Таким образом, для $\lambda \geq \lambda^\dagger$ на вещественной оси найдется хотя бы одна точка спектра $\mathfrak{S}_\lambda$. По определениям последовательности (3.21), функции (3.22) и точки отсечки (3.24) в случае $\lambda \in (0, \lambda^\dagger)$ вещественная ось свободна от спектра пучка $\mathfrak{A}_\lambda$. Именно отсутствие собственных чисел пучка на вещественной оси и является критерием фредгольмовости оператора (3.27) задачи (3.3)–(3.5) (см. [7], а также, например, [8; § 3.1, § 5.1]).

В соответствии со вторым свойством (3.29) спектра $\mathfrak{S}_\Lambda$ возможны два характера поведения собственных чисел пучка $\mathfrak{A}_\lambda$ при $\lambda \geq \lambda^\dagger$ (при $\lambda < \lambda^\dagger$ таковых нет). Первый случай сверяем с требованием

$$\lambda^\dagger = \Lambda_1(0), \quad (3.30)$$

причем безразлично, имеются ли другие вещественные числа μ_0 , для которых

$$\lambda^\dagger = \Lambda_1(\mu_0), \quad \mu_0 \neq 0. \quad (3.31)$$

Во втором случае соотношение (3.30) нарушено, т.е. $\lambda^\dagger < \Lambda_1(0)$, но выполнено первое равенство (3.31), которое к тому же остается верным при замене $\mu_0 \mapsto -\mu_0$.

Пусть μ_0 – какое-то вещественное собственное число пучка $\mathfrak{A}_{\lambda^\dagger}$, т.е. выполнено одно из соотношений (3.30) или (3.31). Пусть еще U^0 – соответствующий собственный вектор. Отличительная особенность пучков – возможность возникновения присоединенных векторов, формирующих вместе с собственным вектором жорданову цепочку $\{U^0, U^1, \dots, U^{\varkappa-1}\}$ и являющихся решениями абстрактных уравнений

$$\mathfrak{A}_{\lambda^\dagger} U^p = - \sum_{q=1}^p \frac{1}{q!} \frac{d^q \mathfrak{A}_{\lambda^\dagger}}{d\mu^q}(\mu_0) U^{p-q}, \quad p = 0, \dots, \varkappa - 1. \quad (3.32)$$

Суммирование по q , конечно же, можно проводить до верхнего предела $\min\{2, p\}$. В частности, присоединенный вектор U_1 первого порядка отыскивается из уравнения

$$\mathfrak{A}_{\lambda^\dagger} U^1 = - \frac{d\mathfrak{A}_{\lambda^\dagger}}{d\mu}(\mu_0) U^0, \quad (3.33)$$

которое переписывается как интегральное тождество

$$\begin{aligned} (AD(\nabla_y, i\mu_0)U^1, D(\nabla_y, i\mu_0)V)_{\omega_\triangleleft} - \lambda\rho(U^1, V)_{\omega_\triangleleft} &= F^1(V) \\ &:= i\{(AD(\nabla_y, i\mu_0)U^0, D(e_{(3)})V)_{\omega_\triangleleft} - (AD(D(e_{(3)})U^0, D(\nabla_y, i\mu_0)V)_{\omega_\triangleleft}\}, \\ V &\in \mathcal{H}(\omega_\triangleleft). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Правая часть тождества (3.34) образовалась согласно уравнению (3.33) в результате дифференцирования по переменной μ формы $(AD(\nabla_y, i\mu)U, D(\nabla_y, i\mu)V)_{\omega_{\triangleleft}}$, фигурирующей в интегральном тождестве (3.20), которое обслуживает краевую задачу (3.17)–(3.19). Если $\mu_0 = 0$, то комплексное число $i\mu$ исчезает из формы и ввиду вещественности коэффициентов дифференциальных операторов собственный вектор U^0 можно взять вещественным. Таким образом, одно из условий разрешимости $F_1(U^0) = 0$ самосопряженной задачи (3.34) (альтернатива Фредгольма) выполнено автоматически, так как разность в фигурных скобках в правой части (3.33) при (вещественной) пробной функции $V = U^0$ равна нулю. На самом деле равенство

$$\operatorname{Im}(AD(\nabla_y, i\mu)U^0, D(e_{(3)})U^0)_{\omega_{\triangleleft}} = 0, \quad (3.35)$$

обеспечивающее выполнение одного из условий разрешимости задачи (3.34), имеет место при любом собственном числе $\mu_0 \in \mathbb{R}$ пучка $\mathfrak{A}_{\lambda^\dagger}$. Более того, присоединенный вектор первого порядка существует всегда. Приведем пояснения, но не будем разбираться в общей ситуации, так как информация, указанная в этом пункте, и само равенство (3.35) далее по существу не используются.

Собственное число μ_0 , разумеется, может быть кратным геометрически ($J > 1$), т.е. ему могут отвечать линейно независимые собственные векторы $U_{(1)}^0, \dots, U_{(J)}^0$; здесь $J \geq 1$. Согласно [46; § 7.3] можно так зафиксировать эти собственные векторы, чтобы в некоторой (вообще говоря, узкой) окрестности точки μ_0 функции

$$\mu \mapsto \Lambda^{(j)}(\mu), \quad \mu \mapsto U^{(j)}(\mu; y), \quad j = 1, \dots, J,$$

оказались аналитическими; здесь $\Lambda_{(1)}^0(\mu), \dots, \Lambda_{(J)}^0(\mu)$ – все собственные числа оператора $A(\mu)$ (не пучка!), расположенные вблизи точки (3.31), а $U^{(j)}(\mu; \cdot)$ – соответствующие собственные векторы. В силу определения (3.24) точки отсечки справедливы равенства

$$\partial_\mu \Lambda_{(j)}^0(0) = 0, \quad j = 1, \dots, J,$$

которые как раз и обеспечивают существование присоединенного вектора первого порядка для любого из собственных векторов $U_{(1)}^0, \dots, U_{(J)}^0$, а значит, и справедливость соотношений (3.35) для последних. В общей ситуации асимптотические конструкции, приводящие к этому выводу, весьма громоздки (см. [46; гл. 8]), однако при дополнительном предположении геометрической простоты ($J = 1$) собственного числа μ_0 они значительно упрощаются. Проведем необходимый асимптотический анализ и сошлемся, например, на [51; гл. 9] в части обоснования асимптотик³.

Согласно [44; гл. 1] жорданова цепочка $\{U^0, \dots, U^{\varkappa-1}\}$, отвечающая простому собственному числу μ_0 , обладает конечной длиной⁴, т.е. уравнение (3.32) с $p = \varkappa$ неразрешимо и ввиду геометрической простоты собственного числа по

³В [51] рассматриваются линейные, но не самосопряженные пучки, а сведение квадратичного пучка к такому не встречает затруднений.

⁴В общей ситуации приходится оперировать канонической системой жордановых цепочек, каждая из которых, впрочем, также обладает конечной длиной.

альтернативе Фредгольма отличается от нуля следующая величина:

$$\begin{aligned} t &:= \left\langle \frac{d\mathfrak{A}_{\lambda^\dagger}}{d\mu}(\mu_0)U^{\varkappa-1}, U^0 \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \frac{d^2\mathfrak{A}_{\lambda^\dagger}}{d\mu^2}(\mu_0)U^{\varkappa-2}, U^0 \right\rangle \\ &= i(AD(e_{(3)})U^{\varkappa-1}, D(\nabla_y, i\mu)U^0)_{\omega_\triangleleft} - i(AD(\nabla_y, i\mu)U^{\varkappa-1}, D(e_{(3)})U^0)_{\omega_\triangleleft} \\ &\quad + (AD(e_{(3)})U^{\varkappa-2}, D(e_{(3)})U^0)_{\omega_\triangleleft}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Действуя по схеме из [51; гл. 9], рассмотрим спектральный параметр $\Lambda^\varepsilon = \lambda^\dagger + \varepsilon$, где ε – малое положительное число, и примем асимптотические анзацы

$$\mu_\varepsilon = \mu_0 + \varepsilon^{1/\varkappa}M + \varepsilon^{2/\varkappa}0 + \dots + \varepsilon^{(\varkappa-1)/\varkappa}0 + \varepsilon 0 + \dots, \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} U^\varepsilon(y) &= U^0(y) + \varepsilon^{1/\varkappa}MU^1(y) + \varepsilon^{2/\varkappa}M^2U^2(y) + \dots \\ &\quad + \varepsilon^{(\varkappa-1)/\varkappa}M^{\varkappa-1}U^{\varkappa-1} + \varepsilon U'(y) + \dots. \end{aligned} \quad (3.38)$$

При этом M и U' – число и вектор-функция, подлежащие определению, а многоточия в конце формул (3.37) и (3.38) заменяют младшие члены, несущественные для предпринимаемого асимптотического анализа. Подставим анзацы в уравнение $\mathfrak{A}_{\Lambda^\varepsilon}(\mu_\varepsilon)U^\varepsilon = 0$ и соберем коэффициенты при $\varepsilon^{p/\varkappa}$, приравняв их суммы к нулю. В случаях $p = 0, \dots, \varkappa - 1$ получаем соотношения

$$M^p\mathfrak{A}_{\lambda^\dagger}U^0 + MM^{p-1}\frac{d\mathfrak{A}_{\lambda^\dagger}}{d\mu}(\mu_0)U^{p-1} + M^2M^{p-2}\frac{1}{2}\frac{d^2\mathfrak{A}_{\lambda^\dagger}}{d\mu^2}(\mu_0)U^{p-2} = 0,$$

которые выполняются автоматически в силу уравнений (3.32) для элементов жордановой цепочки. В случае $p = \varkappa$ коэффициенты при ε образуют соотношение

$$\mathfrak{A}_{\lambda^\dagger}U' + M^\varkappa \left(\frac{d\mathfrak{A}_{\lambda^\dagger}}{d\mu}(\mu_0)U^{\varkappa-1} + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathfrak{A}_{\lambda^\dagger}}{d\mu^2}(\mu_0)U^{\varkappa-2} \right) + \frac{d\mathfrak{A}_{\lambda^\dagger}}{d\Lambda}(\mu_0)U^0 = 0. \quad (3.39)$$

Обращаясь к интегральному тождеству (3.20), обнаруживаем, что производная $\partial_\Lambda \mathfrak{A}_{\lambda^\dagger}(\mu_0)$, фигурирующая в последнем слагаемом, определена так:

$$\left\langle \frac{d\mathfrak{A}_{\lambda^\dagger}}{d\Lambda}(\mu_0)U^0, V \right\rangle = -\rho(U^0, V)_{\omega_\triangleleft}.$$

Следовательно, единственное по предположению условие разрешимости абстрактного уравнения (3.39), записанного как интегральное тождество

$$\begin{aligned} (AD(\nabla_y, i\mu_0)U', D(\nabla_y, i\mu_0)V)_{\omega_\triangleleft} - \rho(U', V)_{\omega_\triangleleft} &= \lambda^\dagger \rho(U^0, V)_{\omega_\triangleleft} \\ &\quad + i((AD(\nabla_y, i\mu_0)U^{\varkappa-1}, D(e_{(3)})V)_{\omega_\triangleleft} - (AD(e_{(3)})U^{\varkappa-1}, D(\nabla_y, i\mu_0)V)_{\omega_\triangleleft}) \\ &\quad - (AD(e_{(3)})U^{\varkappa-2}, D(e_{(3)})U^0)_{\omega_\triangleleft}, \quad V \in \mathcal{H}(\omega_\triangleleft), \end{aligned}$$

превращается в алгебраическое уравнение

$$tM^\varkappa = \rho\|U^0; \mathcal{H}(\omega_\triangleleft)\|^2 \quad (3.40)$$

с коэффициентом (3.36) и положительным свободным членом. Корни уравнения (3.40) приобретают вид

$$M_j = \tau^{1/\varkappa} e^{i(\vartheta+2\pi j)/\varkappa}, \quad j = 0, \dots, \varkappa - 1, \quad (3.41)$$

где $\tau = \rho|t|^{-1}\|U^0; \mathcal{H}(\omega_{\triangleleft})\|^2$ и $\vartheta = \arg(1/t) \in [0, 2\pi)$. Поскольку известно, что при малом $\varepsilon > 0$ в окрестности точки μ_0 расположены два вещественных собственных числа $\mu_{\pm}^{\varepsilon}$ пучка $\mathfrak{A}_{\lambda^{\dagger}+\varepsilon}$ (ср. тонированные прямоугольники на рис. 5, а и б), то для некоторых целых $j \neq k$ должны выполняться соотношения $\vartheta + 2\pi j = 0$ и $\vartheta + 2\pi k = \pi\kappa$, а значит, $\kappa = 2(k - j)$ – четное число и $\vartheta = 0$, т.е. $t \in \mathbb{R}_+$. Сделанные выводы – следствие асимптотических формул

$$\mu_j^{\varepsilon} = \mu_0 + \varepsilon^{1/\kappa} M_j + \tilde{\mu}_j^{\varepsilon}, \quad j = 0, \dots, \kappa - 1, \quad (3.42)$$

с коэффициентами (3.41) и остатками $\tilde{\mu}_j^{\varepsilon} = O(\varepsilon^{2/\kappa})$, оцененными согласно результатам из [51; гл. 9]. Подчеркнем, что приведенная оценка остатка оправдывает только главный поправочный член разложения (3.37), а при продолжении асимптотической процедуры младшие члены, вообще говоря, могут оказаться ненулевыми, т.е. упрощенные анзацы (3.37) и (3.38) достаточны лишь для вывода формул (3.42) (подробности см. опять-таки в [51; гл. 9]).

Рис. 5. Графики функций $\mu \mapsto \Lambda_1(\mu) - \lambda^{\dagger}$

Итак, присоединенный вектор первого порядка существует обязательно, т.е. справедливо соотношение (3.35).

3.5. Достаточное условие существования захваченной волны. Воспользуемся формулой (см., например, [6; § 10.2])

$$\underline{\Sigma}_{\triangleleft} = \inf_{u \in \mathcal{H}(\Omega_{\triangleleft})} \frac{(AD(\nabla)u, D(\nabla)u)_{\Omega_{\triangleleft}}}{\rho\|u; L^2(\Omega_{\triangleleft})\|^2} \quad (3.43)$$

для нижней грани спектра $\Sigma_{\triangleleft}$ самосопряженного положительно определенно-оператора $A_{\triangleleft}$ задачи (3.3)–(3.5) (напоминаем, что полуторалинейная форма, фигурирующая в интегральном тождестве (3.16), замкнута, эрмитова и положительно определена). Если оказалось, что $\underline{\Sigma}_{\triangleleft} < \lambda^{\dagger}$, то дискретный спектр $\Sigma_{\triangleleft}^d$ не пуст, так как точка $\underline{\Sigma}_{\triangleleft}$ заведомо содержится в спектре $\Sigma_{\triangleleft}$, но лежит ниже непрерывного спектра $\Sigma_{\triangleleft}^c = \Sigma_{\triangleleft} \setminus \Sigma_{\triangleleft}^d$. Допустим противное, а именно, $\underline{\Sigma}_{\triangleleft} = \lambda^{\dagger}$ (соотношение $\underline{\Sigma}_{\triangleleft} > \lambda^{\dagger}$, разумеется, невозможно). Тогда из формулы (3.43) вытекает неравенство

$$\lambda^{\dagger} \rho\|u; L^2(\Omega_{\triangleleft})\|^2 \leq (AD(\nabla)u, D(\nabla)u)_{\Omega_{\triangleleft}} \quad (3.44)$$

для всех $u \in \mathcal{H}(\Omega_{\triangleleft})$. Подберем пробную функцию так, чтобы прийти к противоречию. Применим вариационный метод и положим

$$u^{\delta}(y, z) = e^{(i\mu_0 - \delta)z} U^0(y), \quad (3.45)$$

где $\delta > 0$, а μ_0 и U^0 – собственное число и вектор пучка $\mathfrak{A}_{\lambda^\dagger}$, обсуждавшиеся в предыдущем пункте. Благодаря экспоненциально затухающему множителю вектор-функция (3.45) попадает в пространство Соболева $H^1(\Omega_{\triangleleft})$ и в силу краевых условий (3.19) удовлетворяет условиям Дирихле из списка (3.4), (3.5). Иными словами, $u^{\delta} \in \mathcal{H}(\Omega_{\triangleleft})$. Кроме того,

$$\begin{aligned} \rho \|u; L^2(\Omega_{\triangleleft})\|^2 &= \rho \int_0^\infty e^{-2\delta z} dz \int_{\omega_{\triangleleft}} |U^0(y)|^2 dy = \frac{\rho}{2\delta} \|U^0; L^2(\omega_{\triangleleft})\|^2, \\ (AD(\nabla)u^{\delta}, D(\nabla)u^{\delta})_{\Omega_{\triangleleft}} &= \int_0^\infty e^{-2\delta z} dz (AD(\nabla_y, i\mu_0 - \delta)U^0, D(\nabla_y, i\mu_0 - \delta)U^0)_{\omega_{\triangleleft}} \\ &= \frac{1}{2\delta} ((AD(\nabla_y, i\mu_0)U^0, D(\nabla_y, i\mu_0)U^0)_{\omega_{\triangleleft}} - \delta(AD(\nabla_y, i\mu_0)U^0, D(e_{(3)})U^0)_{\omega_{\triangleleft}} \\ &\quad - \delta(AD(e_{(3)})U^0, D(\nabla_y, i\mu_0)U^0)_{\omega_{\triangleleft}} + \delta^2(AD(e_{(3)})U^0, D(e_{(3)})U^0)_{\omega_{\triangleleft}}). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Подставим эти выражения в неравенство (3.44) и заметим, что члены $O(\delta^{-1})$ из правых частей соотношений (3.46) взаимно уничтожаются в нем согласно интегральному тождеству (3.20) с ингредиентами $U = V = U^0$, $\mu = \mu_0$ и $\Lambda = \Lambda_1(\mu_0) = \lambda^\dagger$. В результате неравенство принимает вид

$$2 \operatorname{Re}(AD(\nabla_y, i\mu_0)U^0, D(e_{(3)})U^0)_{\omega_{\triangleleft}} \leq \delta(AD(e_{(3)})U^0, D(e_{(3)})U^0)_{\omega_{\triangleleft}}. \quad (3.47)$$

Если

$$\operatorname{Re}(AD(\nabla_y, i\mu_0)U^0, D(e_{(3)})U^0)_{\omega_{\triangleleft}} > 0, \quad (3.48)$$

то при достаточно малом $\delta > 0$ соотношение (3.47) становится абсурдным. Полученное противоречие означает, что $\Sigma_{\triangleleft}^d \neq \emptyset$. Именно этот факт и нуждался в проверке.

ТЕОРЕМА 2. Пусть справедливы требования симметрии, сформулированные в § 3, п. 1. Тогда при условии (3.48) искусственно образованная задача (3.3)–(3.5) в секторальном цилиндре $\Omega_{\triangleleft}$ и, следовательно, исходная задача Неймана (1.6), (1.7), (1.9) в целом цилиндре Ω имеют собственное число $\lambda_{\triangleleft} \in (0, \lambda^\dagger)$, а соответствующий собственный вектор экспоненциально затухает при $z \rightarrow +\infty$.

3.6. Достаточное условие существования захваченной волны (продолжение). В формулах (3.48) и (3.35) фигурирует одно и то же скалярное произведение, а значит, из левой части (3.48) можно было бы удалить символ Re . Вычислим обсуждаемое скалярное произведение в ситуации $\mu_0 = 0$ (ср. рис. 5, а). Как уже отмечалось, собственный вектор U^0 можно взять вещественным. Более того, благодаря специальному блочно-диагональному строению (2.1) матрицы жесткости A задача (3.17)–(3.19) при $\mu = 0$ распадается на две независимые задачи теории упругости: плоскую для двумерного вектора $U' = (U_1, U_2)^\top$ и антиплоскую для скаляра U_3 , описывающие соответственно поперечные смещения и депланацию в цилиндре.

Обращаясь к представлениям (1.4) и (2.1) матриц D и A , видим, что для собственного вектора $U^0 = (U_1^0, U_2^0, 0)^\top$ (плоско-деформированное состояние) верны формулы

$$\begin{aligned} AD(\nabla)U^0 &= \sigma(U_1^0, U_2^0, 0) = (\bullet \bullet \bullet 0 0 \bullet)^\top, \\ (U_1^0, U_2^0, 0)D(e_{(3)})^\top &= (0 0 0 \bullet \bullet 0)^\top, \end{aligned}$$

где символом $\bullet$ помечены элементы, которые могут отличаться от нуля. Для $U^0 = (0, 0, U_3^0)^\top$ (антиплоское состояние) аналогичные формулы выглядят так:

$$\sigma(0, 0, U_3^0) = (0 0 0 \bullet \bullet 0)^\top, \quad (0, 0, U_3^0)D(e_{(3)})^\top = (0 0 \bullet 0 0 0)^\top.$$

В обоих случаях получаем, что

$$(AD(\nabla_y, 0)U^0, D(e_{(3)})U^0)_{\omega_\triangleleft} = 0. \quad (3.49)$$

Установим два достаточных условия захвата упругой волны, отличающихся от указанного теоремой 2.

ТЕОРЕМА 3. Пусть справедливы требования симметрии, сформулированные в § 3, п. 1. Предположим также, что

$$\operatorname{Re}(AD(\nabla_y, i\mu_0)U^0, D(e_{(3)})U^0)_{\omega_\triangleleft} = 0, \quad (3.50)$$

но вектор-функция

$$\omega_\triangleleft \ni y \mapsto D(e_{(3)})^\top AD(\nabla_y, i\mu_0)U^0(y) \quad (3.51)$$

не является тождественным нулем. Тогда задача (3.3)–(3.5) в $\Omega_\triangleleft$ и задача (1.6), (1.7), (1.9) в Ω имеют собственное число $\lambda_\triangleleft \in (0, \lambda^\dagger)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся приемом, предложенным в работе [21], а именно, изменим определение (3.45) пробной функции:

$$u^\delta(y, z) = e^{(i\mu_0 - \delta)z}U^0(y) + \sqrt{\delta}e^{i\mu_0}v(y, z);$$

здесь v – гладкая вектор-функция с компактным носителем. Тогда при учете представления (3.46) придаем соотношениям (3.46) следующий вид:

$$\begin{aligned} \rho\|u; L^2(\Omega_\triangleleft)\|^2 &= \frac{\rho}{2\delta}\|U^0; L^2(\omega_\triangleleft)\|^2 + \frac{\rho}{\sqrt{\delta}}\operatorname{Re}(U^0, v)_{\Omega_\triangleleft} + O(1), \\ (AD(\nabla)u^\delta, D(\nabla)u^\delta)_{\Omega_\triangleleft} &= \frac{1}{2\delta}\left((AD(\nabla_y, i\mu_0)U^0, D(\nabla_y, i\mu_0)U^0)_{\omega_\triangleleft} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\delta}}\operatorname{Re}(AD(\nabla_y, i\mu_0)U^0, D(\nabla_y, i\mu_0 + \partial_z)v)_{\Omega_\triangleleft}\right) + O(1). \end{aligned} \quad (3.52)$$

В итоге неравенство (3.44) превращается в такое:

$$\delta^{-1/2}\operatorname{Re}((AD(\nabla_y, i\mu_0)u, D(\nabla_y, i\mu_0 + \partial_z)v)_{\Omega_\triangleleft} - \lambda^\dagger\rho(U^0, v)_{\Omega_\triangleleft}) \geq -C_v. \quad (3.53)$$

При этом все интегралы сходятся ввиду компактности носителя пробной функции v , C_v – зависящая от нее постоянная, заменяющая величины $O(1)$ в правых

частях равенств (3.52). Интегрируя по частям и вспоминая задачу (3.17)–(3.19), в которой $U = U^0$, $\mu = \mu_0$ и $\Lambda = \lambda^\dagger$, переписываем формулу (3.53) следующим образом:

$$\operatorname{Re} \int_{\omega_\triangleleft} \overline{v(y, 0)}^\top D(e_{(3)})^\top AD(\nabla_y, i\mu_0)U^0(y) dy \geq -C_v \sqrt{\delta}. \quad (3.54)$$

Если хотя бы одна из компонент вектор-функции (3.51), появившейся в подынтегральном выражении, отлична от нуля в какой-либо точке $y^0 \in \omega_\triangleleft$, то можно подобрать вектор-функцию v , локализованную в малой окрестности точки y^0 , так, чтобы левая часть (3.54) стала отрицательной. Тем самым, получено искомого противоречие при $\delta \in (0, \delta_v)$ и малом $\delta_v > 0$.

Вернемся к рассмотрению случая $\mu_0 = 0$, в котором первое условие (3.50) теоремы 3 (или, что то же, (3.49)) заведомо выполнено. Обсудим второе. Если нулевому собственному числу пучка $\mathfrak{A}_{\lambda^\dagger}$ отвечает собственный вектор $U^0 = (0, 0, U_3^0)^\top$, то в силу формул (1.4) и (2.1), (3.1) вектор-функция

$$D(e_{(3)})^\top AD(\nabla_y, 0)U^0 = \frac{1}{2}A_{44} \left(\frac{\partial U_3^0}{\partial y_1}, \frac{\partial U_3^0}{\partial y_2}, 0 \right)^\top, \quad (3.55)$$

разумеется, не может обратиться в тождественный нуль на $\omega_\triangleleft$ (иначе $U_3^0 = \text{const}$, что невозможно). Пусть теперь $U^0 = (U_1^0, U_2^0, 0)^\top$; простые вычисления показывают, что

$$D(e_{(3)})^\top AD(\nabla_y, 0)U^0 = A_{13} \left(0, 0, \frac{\partial U_1^0}{\partial y_1} + \frac{\partial U_2^0}{\partial y_2} \right)^\top. \quad (3.56)$$

Во-первых, в отличие от выражения (3.55), где обязательно $A_{44} > 0$, в выражении (3.56) может выполняться равенство $A_{13} = 0$ (пример: нулевой коэффициент Пуассона у изотропного материала). Во-вторых, нет каких-либо общих доводов, почему двумерный вектор $U^{0'} = (U_1^0, U_2^0)^\top$ не может быть соленоидальным, т.е. обладать нулевой дивергенцией $\operatorname{div} U^{0'}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть справедливы требования симметрии из § 3, п. 1 а также соотношение (3.30). Пусть еще модельная задача (3.17)–(3.19) на сечении $\omega_\triangleleft$ с параметрами $\mu_0 = 0$ и $\Lambda = \lambda^\dagger$ имеет (нетривиальный) собственный вектор U^0 , для которого выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- (i) $U_1^0 = U_2^0 = 0$ в $\omega_\triangleleft$;
- (ii) $U_3^0 = 0$ в $\omega_\triangleleft$, но $A_{13} \neq 0$ и вектор $U^{0'}$ не является соленоидальным всюду в $\omega_\triangleleft$.

Тогда у задач (3.3)–(3.5) в секториальном цилиндре $\Omega_\triangleleft$ и (1.6), (1.7), (1.9) в целом цилиндре Ω есть собственное число $\lambda_\triangleleft \in (0, \lambda^\dagger)$.

§ 4. Варианты и обобщения

4.1. Простые видоизменения. Все рассуждения и вычисления из § 2 и § 3 остаются в силе и тогда, когда матрица жесткости A и плотность ρ зависят от поперечных переменных $y = (y_1, y_2)$. Понятно, что в § 3 на эту зависимость приходится накладывать ограничения симметрии, а в § 2 требуется гладкость коэффициентов.

Если Ω – цилиндр со скошенным торцом $\omega_{\angle} = \{x : y \in \omega, z = ky_1\}$ и боковой поверхностью Γ , например, при удачном выборе системы координат $y = (y_1, y_2)$

$$\Omega = \{x \in \omega \times \mathbb{R} : z > ky_1\},$$

то приведенные в §2 выкладки в целом сохраняются и для решения задачи (1.6), (1.7) с условиями Дирихле

$$u(y_1, y_2, ky_1) = 0, \quad y \in \omega. \quad (4.1)$$

Именно, равенство (2.4) заменяется таким:

$$0 = - \int_{\omega_{\angle}} \overline{\partial_z u(y, ky_1)}^{\top} D(n_{\angle})^{\top} AD(\nabla) u(y, ky_1) ds_x. \quad (4.2)$$

Здесь $n_{\angle} = (1 + k^2)^{-1/2}(-e_{(3)} + ke_{(1)})$ – единичный вектор внешней нормали на торце $\omega_{\angle}$. Поскольку

$$\frac{\partial u}{\partial y_2}(y, ky_1) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y_1}(y, ky_1) + k \frac{\partial u}{\partial z}(y, ky_1) = 0$$

согласно соотношению (3.2), то после простых преобразований равенство (4.2) принимает вид

$$0 = \int_{\omega} \overline{\partial_z u(y, ky_1)}^{\top} D(n_{\angle})^{\top} AD(n_{\angle}) \partial_z u(y, ky_1) dy,$$

а (3×3) -матрица $D(n_{\angle})^{\top} AD(n_{\angle})$ оказывается симметричной и положительно определенной. На этом пути при сформулированных в §2, п. 1 условиях устанавливается отсутствие собственных чисел у задачи (1.6), (1.7), (4.1), причем важным моментом доказательства является возможность при помощи тех же ссылок и рассуждений, что и в §2, п. 3, проверить оценку (2.6) для собственной вектор-функции около нового ребра $\{x : y \in \partial\omega, z = ky_1\}$ с переменным раствором (в статье [11] имеется нужная информация о степенных решениях смешанной краевой задачи теории упругости для выпуклого изотропного клина, а общая теория эллиптических краевых задач в областях с кусочно-гладкими границами, разумеется, не требует постоянства раствора ребра).

Аналогичные выводы можно сделать и для других форм поверхности $\{x : y \in \omega, z = h(y)\}$ защемленного торца не только при гладкой, но даже при кусочно-гладкой профильной функции h . При этом обязательно нужно заботиться о сходимости всех интегралов. Мы еще вернемся к обсуждению особенностей решений в §4, п. 5.

В принципе границу $\partial\omega$ сечения цилиндра можно считать кусочно-гладкой или липшицевой. В §3 для такого обобщения результатов вообще нет никаких препятствий, но в §2 опять-таки требуется детальное изучение сингулярностей решения.

4.2. Полости и трещины. Если нарушено условие (3.48), обеспечивающее в теореме 2 существование собственного числа у задачи Неймана в Ω , то захваченную волну все-таки можно построить, изменив цилиндрическую форму волновода, а именно образовав полость в его теле (ср. работы [17]–[19], [52]).

Пусть $\Theta \subset \bar{\Omega}$ – замкнутое, не обязательно связное множество, обладающее той же геометрической симметрией, что и сечение ω , а поврежденный волновод $\Omega^0 = \Omega \setminus \Theta$ имеет липшицеву границу. Рассмотрим систему уравнений (1.6) в Ω^0 с краевыми условиями Неймана (1.7) на всей поверхности $\partial\Omega^0$ и образуем вспомогательную задачу в секториальной части $\Omega_{\triangleleft}^0 = \Omega_{\triangleleft} \setminus \Theta_{\triangleleft}$ путем постановки искусственных краевых условий (3.4) и (3.5) на усекающих поверхностях $T_0 \setminus \Theta$ и $T_1 \setminus \Theta$ соответственно. Вариационная постановка последней

$$(AD(\nabla)u, D(\nabla)v)_{\Omega_{\triangleleft}^0} = \lambda \rho(u, v)_{\Omega_{\triangleleft}^0}, \quad v \in \mathcal{H}(\Omega_{\triangleleft}^0), \quad (4.3)$$

вполне аналогична интегральному тождеству (3.16), так как форма из левой части (4.3) остается скалярным произведением в пространстве

$$\mathcal{H}(\Omega_{\triangleleft}^0) = \{u \in H^1(\Omega_{\triangleleft}^0) : u_1 = u_3 = 0 \text{ на } T_0 \setminus \Theta, \ u_\varphi = 0 \text{ на } T_1 \setminus \Theta\}.$$

Используя прежние аргументы, заметим, что $e^{-\delta z} = 1 + O(\delta)$ при $(y, z) \in \Theta$, и, следуя [21], [19], модифицируем выкладки (3.46) с пробной функцией (3.45), а именно,

$$\begin{aligned} \rho\|u; L^2(\Omega_{\triangleleft}^0)\|^2 &= \rho\|u; L^2(\Omega_{\triangleleft})\|^2 - \rho\|u; L^2(\Theta_{\triangleleft})\|^2 \\ &= (2\delta)^{-1} \rho\|U^0; L^2(\omega_{\triangleleft})\|^2 - \rho\|u; L^2(\Theta_{\triangleleft})\|^2 + O(\delta), \\ (AD(\nabla)u^\delta, D(\nabla)u^\delta)_{\Omega_{\triangleleft}^0} &= (2\delta)^{-1} (AD(\nabla_y, i\mu_0)U^0, D(\nabla_y, i\mu_0)U^0)_{\omega_{\triangleleft}} \\ &- \operatorname{Re}(AD(\nabla_y, i\mu_0)U^0, D(e_{(3)})U^0)_{\omega_{\triangleleft}} - (AD(\nabla_y, i\mu_0)U^0, D(\nabla_y, i\mu_0)U^0)_{\Theta} + O(\delta). \end{aligned}$$

В итоге формула

$$\underline{\Sigma(\Omega_{\triangleleft}^0)} = \inf_{u \in \mathcal{H}(\Omega_{\triangleleft}^0)} \frac{(AD(\nabla)u, D(\nabla)u)_{\Omega_{\triangleleft}^0}}{\rho\|u; L^2(\Omega_{\triangleleft}^0)\|^2}$$

для нижней грани спектра $\Sigma(\Omega_{\triangleleft}^0)$ задачи (4.3) и предположение $\underline{\Sigma(\Omega_{\triangleleft}^0)} = \lambda^\dagger$ приводят к неравенству

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(AD(\nabla_y, i\mu_0)U^0, D(e_{(3)})U^0)_{\Omega_{\triangleleft}^0} \\ + (AD(\nabla_y, i\mu_0)U^0, D(\nabla_y, i\mu_0)U^0)_{\Theta_{\triangleleft}} - \lambda^\dagger \rho(U^0, U^0)_{\Theta_{\triangleleft}} \leq -C\delta. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Поскольку в силу интегрального тождества (3.20) верно соотношение

$$\int_{\omega_{\triangleleft}} G^0(y) dy = 0,$$

где

$$G^0(y) = \overline{D(\nabla_y, i\mu_0)U^0(y)}^\top AD(\nabla_y, i\mu_0)U^0(y) - \lambda^\dagger \rho|U^0(y)|^2,$$

то множество $\omega_{\triangleleft}$ распадается на два: $\omega_{\triangleleft}^- = \{y : G^0(y) \leq 0\}$ и $\omega_{\triangleleft}^+ = \{y : G^0(y) > 0\}$. Предположив, что функция F^0 не обращается в нуль тождественно на $\omega_{\triangleleft}$, помещаем полость Θ в непустой цилиндр $\omega_{\triangleleft}^+ \times \mathbb{R}_+$ и, увеличивая ее размер в продольном направлении, делаем не зависящую от δ левую часть (4.4) положительной. Как уже пояснялось, противоречие, возникающее при малом δ , означает, что спектр $\Sigma(\Omega_{\triangleleft}^0)$ задачи (4.3) не пуст, а значит, существуют собственное число и захваченная волна в полуцилиндре Ω с полостями Θ .

Пусть теперь собственный вектор U^0 порождает нулевую величину (3.50), но не удовлетворяет другим требованиям, предъявленным в теоремах 3 или 4. Добиться эффекта захвата волны можно образованием в теле Ω кольцевой трещины (двусторонней поверхности $\Theta^\pm$, обладающей нужной симметрией), если только вектор-функция

$$\omega_{\triangleleft} \ni y \mapsto \overline{U^0(y)} D(b)^\top A D(\nabla_y, i\mu_0) U^0(y)$$

не оказывается тождественным нулем при всех векторах $b \in \mathbb{R}^3$ (в формуле (3.50) фигурирует только конкретный вектор $b = e_{(3)}$). Сопутствующие рассуждения и выводы можно найти в работе [19] для несколько иной ситуации.

4.3. Полуцилиндр с заземленной боковой поверхностью. Заменяем краевое условие Неймана (1.7) условием Дирихле

$$u(y, z) = 0, \quad (y, z) \in \Gamma = \partial\omega \times \mathbb{R}_+. \quad (4.5)$$

В обеих задачах, задаче Дирихле (1.6), (4.5), (1.8) или смешанной краевой (1.6), (4.5), (1.9), непрерывный спектр приобретает положительную точку отсечки $\lambda^\dagger$, так как благодаря условию (4.5) неравенство Корна (3.11) выполнено на самом множестве Ω , а не на его секториальной части $\Omega_{\triangleleft}$.

Дословное повторение рассуждений переносит все результаты § 2 на задачу (1.6), (4.5), (1.8), т.е. захват упругой волны полуцилиндром с полностью заземленной поверхностью невозможен.

Изложенные в § 3 приемы позволяют найти точки дискретного спектра задачи (1.6), (4.5), (1.9) без каких-либо предположений о симметрии, однако весьма возможно, что при постановке искусственных краевых условий (3.4), (3.5) на плоскостях симметрии удастся обнаружить и собственные числа, вкрапленные в непрерывный спектр. Не будем доказывать и даже формулировать соответствующие теоремы ввиду достаточной их очевидности и сомнительного прикладного значения.

4.4. Одна двумерная задача. В однородной изотропной полуполосе $\Pi_+ = (-1/2, 1/2) \times \mathbb{R}_+$ рассмотрим плоскую задачу теории упругости

$$-M\Delta u' - (L + M)\nabla\nabla \cdot u' = \lambda\rho u' \quad \text{в } \Pi_+, \quad (4.6)$$

$$u' = 0 \quad \text{при } y = \pm \frac{1}{2}, \quad z > 0, \quad (4.7)$$

$$\sigma_{22}(u') = 0, \quad \sigma_{12}(u') = 0 \quad \text{при } |y| < \frac{1}{2}, \quad z = 0. \quad (4.8)$$

Здесь $u' = (u_1, u_2)^\top$, $\nabla = \text{grad}$ и $\nabla \cdot = \text{div}$, т.е. $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ – оператор Лапласа, а $L \geq 0$ и $M > 0$ – постоянные Ламе (такие “странные” обозначения введены из-за того, что привычные литеры λ и μ заняты под спектральные параметры). Напряжения заданы формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(u') &= 2M\partial_y u_1 + L\nabla \cdot u', & \sigma_{22}(u') &= 2M\partial_z u_2 + L\nabla \cdot u', \\ \sigma_{12}(u') &= \sigma_{21}(u') = M(\partial_z u_1 + \partial_y u_2), \end{aligned}$$

деформации имеют вид (1.3), а упругая энергия, запасенная телом Π_+ , равна $(1/2)E(u'; \Pi_+)$, где $E(u'; \Pi_+) = E(u', u'; \Pi_+)$ и

$$E(u', v'; \Pi_+) = \sum_{j,k=1}^2 \int_{\Pi_+} \sigma_{jk}(u'; y, z) \varepsilon_{jk}(v'; y, z) dy dz.$$

Модельная задача типа (3.17)–(3.19) с параметром $\mu = 0$ выглядит так:

$$\begin{aligned} -(L + 2M) \partial_y^2 U_1(y) &= \Lambda \rho U_1(y), & y \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), & U_1\left(\pm \frac{1}{2}\right) = 0, \\ -M \partial_y^2 U_2(y) &= \Lambda \rho U_2(y), & y \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), & U_2\left(\pm \frac{1}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

Ее решения находятся легко:

$$\begin{aligned} U_1^{j-1}(y) &= \sin\left(\pi j \left(y + \frac{1}{2}\right)\right), & \Lambda_1^{j-1} &= \rho^{-1}(L + 2M)\pi^2 j^2, \\ U_2^{k-1}(y) &= \sin\left(\pi k \left(y + \frac{1}{2}\right)\right), & \Lambda_2^{k-1} &= \rho^{-1}M\pi^2 k^2, \end{aligned}$$

здесь $j, k \in \mathbb{N}$. Наименьшее из собственных чисел выступает в качестве точки отсечки

$$\lambda^\dagger = \rho^{-1}M\pi^2. \quad (4.9)$$

Для проверки равенства (4.9) заметим, что непрерывные спектры задачи (4.6)–(4.8) в полуполосе Π_+ и задачи (4.6), (4.7) в полосе $\Pi = (-1/2, 1/2) \times \mathbb{R}$ совпадают. Поэтому достаточно убедиться в том, что при $\lambda \in (0, \lambda^\dagger)$ вариационная задача

$$E(u', v'; \Pi) - \lambda \rho (y', v')_\Pi = (f, v')_\Pi, \quad v' \in H_0^1(\Pi) = H_0^1(\Pi; \partial\Pi), \quad (4.10)$$

однозначно разрешима при любой правой части $f \in L^2(\Pi)$. Считая вектор-функцию $u' \in H_0^1(\Pi)$ вещественной, запишем соотношения

$$\begin{aligned} E(u'; \Pi) - \lambda \rho (u', u')_\Pi &= \frac{\lambda}{\lambda^\dagger} \left(\left(\frac{\lambda^\dagger}{\lambda} - 1 \right) E(u'; \Pi) + E(u'; \Pi) - \lambda \rho (u', u')_\Pi \right), \\ E(u'; \Pi) - \lambda^\dagger \rho (u', u')_\Pi &= \int_\Pi (2M(|\partial_y u_1|^2 + |\partial_z u_2|^2) + L|\partial_y u_1 + \partial_z u_2|^2 \\ &\quad + M(|\partial_z u_1|^2 + 2\partial_z u_1 \partial_y u_2 + |\partial_y u_2|^2) - M\pi^2(|u_1|^2 + |u_2|^2)) dy dz \\ &\geq \int_\Pi \left(M \sum_{j=1}^2 (|\partial_y u_j|^2 - \pi^2 |u_j|^2) + M(|\partial_y u_1|^2 + 2\partial_y u_1 \partial_z u_2 + |\partial_z u_2|^2) \right) dy dz \geq 0. \end{aligned}$$

Пояснения к последней цепочке: сначала были отброшены неотрицательные члены $M|\partial_z u_j|^2$ и $L|\partial_y u_1 + \partial_z u_2|^2$, затем при учете условия Дирихле на $\partial\Pi$ произведено интегрирование по частям, заменяющее произведение $\partial_z u_1 \partial_y u_2$ произведением $\partial_y u_1 \partial_z u_2$, и, наконец, учтено неравенство Фридрихса

$$\int_{-1/2}^{1/2} |V(y)|^2 dy \leq \frac{1}{\pi^2} \int_{-1/2}^{1/2} |\partial_y V(y)|^2 dy, \quad V \in H_0^1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Итак, левая часть (4.10) – скалярное произведение в пространстве $H_0^1(\Pi)$, т.е. однозначная разрешимость задачи (4.10) вытекает из теоремы Рисса о представлении функционала в гильбертовом пространстве.

Итак, поскольку

$$\sigma_{22}(0, U_2^0; y, 0) = 0, \quad \sigma_{12}(0, U_2^0; y, 0) = M\pi \cos\left(\pi\left(y + \frac{1}{2}\right)\right),$$

то применяем двумерный вариант теоремы 4 и обнаруживаем, что у задачи (4.6)–(4.8) имеется собственное число на интервале $(0, \rho^{-1}M\pi^2)$.

4.5. Напоминание об особенностях решений. Рассмотрим полуполосу Π_+ с несколькими краевыми надрезами (рис. 6, а)

$$\theta_j = \{(y, z) : y = d_j, z \in (0, l)\}, \quad j = 1, \dots, J;$$

здесь $-1/2 < d_1 < \dots < d_J < 1/2$ и $l > 0$. Положим $\Theta = \theta_1 \cup \dots \cup \theta_J$ и в области $\Pi_+^0 = \Pi_+ \setminus \Theta$ рассмотрим систему уравнений (4.6) с краевыми условиями Дирихле (4.7) на иссеченном торце $\{(y, z) : z = 0, |y| < 1/2, y \neq d_j, j = 1, \dots, J\}$ и Неймана (4.8) на боковых сторонах $\Gamma^\pm = \{\pm 1/2\} \times \mathbb{R}_+$ и берегах $\theta_j^\pm$ разрезов.

Рис. 6. Полоса с краевыми надрезами (а) и колья, вставленные в грунт (b)–(d)

Дифференцирование вдоль оси z сохраняет перечисленные уравнения в Π_+^0 и краевые условия на Γ , $\theta_1^\pm, \dots, \theta_J^\pm$. На первый взгляд кажется, что выкладки из § 2, п. 2 устанавливают отсутствие собственных чисел сформулированной задачи. Однако из-за известных корневых особенностей напряжений и деформаций в вершинах трещин (см. [11], а также, например, [12], [8]) интегралы расходятся, а вывод становится неверным. Подтвердим возможность появления захваченных волн примером.

Пусть $J = 2$ и $d_1 = -h/2$, $d_2 = 1/2$. В формулу

$$\underline{\Sigma} = \inf_{u \in \mathcal{H}(\Omega \setminus \Theta)} \frac{E(u, u; \Pi_+ \setminus \Theta)}{\rho \|u; L^2(\Pi_+ \setminus \Theta)\|^2} \quad (4.11)$$

для нижней грани спектра рассматриваемой задачи подставим поле смещений u^w , которое равно нулю всюду в $\Pi_+ \setminus \Theta$, за исключением тонкого прямоугольника $(-h/2, h/2) \times (0, l)$, выделенного на рис. 6, а. На этом прямоугольнике положим

$$u_1^w(y, z) = w(z), \quad u_1^w(y, z) = -y \partial_z w(z), \quad (4.12)$$

причем w – любая функция из $C_c^\infty(0, l)$. Имеем

$$\varepsilon_{11}(u) = 0, \quad \varepsilon_{22}(u) = -y \partial_z^2 w(z), \quad \varepsilon_{12}(u) = \varepsilon_{21}(u) = 0,$$

а значит,

$$E(u^w, u^w; \Pi_+ \setminus \Theta) = O(h^3), \quad \|u^w; L^2(\Pi_+ \setminus \Theta)\|^2 = O(h).$$

Таким образом, величина (4.11) приобретает порядок $O(h^2)$ и потому при малом h располагается ниже точки отсечки (4.9), что и делает дискретный спектр задачи непустым. Подчеркнем, что при помощи максиминимального принципа (см., например, [6; теорема 10.2.2]) и полей смещений (4.12), построенных по линейно независимым функциям $w_1, \dots, w_N \in C_c^\infty(0, l)$ (например, имеющим непересекающиеся носители), можно при достаточно малом h поместить на интервал $(0, \lambda^\dagger)$ любое наперед заданное количество N собственных чисел.

Рассмотрим теперь круговой цилиндр $\Omega_\vee = \{(y, z): |y| < R, z > -k(R - |y|)\}$ с заостренным торцом (см. рис. 6, б). Его боковую поверхность $\Gamma_R = \{(y, z): |y| = R, z > 0\}$ считаем свободной от напряжений (условие Неймана (1.7)), а конусообразный конец $\omega_\vee = \{(y, z): |y| < R, z = -k(R - |y|)\}$, $k > 0$, – жестко защемленным (условие Дирихле). Один из результатов статьи [13] устанавливает ограниченность напряжений и деформаций в вершине $(0, 0, -kR)$ конуса, а вычисления, аналогичные проделанным в § 2, п. 3, вместе с комментариями из § 4, п. 1 обеспечивают оценки (2.6). Таким образом, заключаем, что упругих волн в цилиндре $\Omega_\vee$ нет.

Рисунок 6, в иллюстрирует рассмотренную задачу: кол вбит в грунт по кромке заострения. Если же кол более заглублен, как показано на рис. 6, с, то условие Неймана должно быть назначено на $\Gamma_R^H = \{(y, z): |y| = R, z > H\}$, а условие Дирихле – на поверхностях $\omega_\vee$ и $\{(y, z): |y| = R, z \in (0, H)\}$. В результате появляется линия смены типа краевого условия – окружность $\gamma_R^H = \{(y, z): |y| = R, z = H\}$. Предложенный в [53] метод устанавливает особенности $\rho^{\pm i\beta+1/2} \Psi^\pm(\phi)$, $\beta \geq 0$, у смещений на γ_R^H , а значит, процедура проверки отсутствия собственных чисел из § 2 опять не работает. Те же проблемы возникают, если кол вставлен недостаточно глубоко (рис. 6, д). К сожалению, автору не удалось построить примеры захваченных волн ни для одной из этих ситуаций.

Список литературы

- [1] P. Hahnwein, “Some remarks on the compressed matrix representation of symmetric second-order and fourth-order tensors”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **190**:22–23 (2001), 2753–2770.
- [2] A. Bertram, *Elasticity and plasticity of large deformations*, Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [3] С. Г. Лехницкий, *Теория упругости анизотропного тела*, 2-е изд., Наука, М., 1977; англ. пер. 1-го изд.: S. G. Lekhnitskii, *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*, Holden-Day, San Francisco, 1963.

- [4] С. А. Назаров, *Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки*, Научная книга, Новосибирск, 2002.
- [5] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, Мир, М., 1971; пер. с фр.: J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, 1968.
- [6] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Изд-во ЛГУ, Л., 1980; англ. пер.: M. S. Birman, M. Z. Solomyak, *Spectral-theory of self-adjoint operators in Hilbert space*, Math. Appl. (Soviet Ser.), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1987.
- [7] В. А. Кондратьев, “Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками”, Тр. ММО, **16**, Из-во Моск. ун-та, М., 1967, 209–292.
- [8] S. A. Nazarov, B. A. Plamenevsky, *Elliptic problems in domains with piecewise smooth boundaries*, de Gruyter Exp. Math., **13**, de Gruyter, Berlin, 1994.
- [9] G. Cardone, T. Durante, S. A. Nazarov, “The localization effect for eigenfunctions of the mixed boundary value problem in a thin cylinder with distorted ends”, *SIAM J. Math. Anal.*, **42**:6 (2010), 2581–2609.
- [10] F. Rellich, “Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten”, *Jber. Deutsch. Math. Verein.*, **53**:1 (1943), 57–65.
- [11] M. L. Williams, “Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plate in extension”, *J. Appl. Mech.*, **19**:2 (1952), 526–528.
- [12] В. З. Партон, П. И. Перлин, *Методы математической физики теории упругости*, Наука, М., 1981; англ. пер.: V. Z. Parton, P. I. Perlin, *Mathematical methods of the theory of elasticity*, v. I, II, Mir, Moscow, 1984.
- [13] В. А. Козлов, В. Г. Мазья, “Спектральные свойства операторных пучков, порожденных эллиптическими краевыми задачами в конусе”, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:2 (1988), 38–46; англ. пер.: V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya, “Spectral properties of the operator bundles generated by elliptic boundary-value problems in a cone”, *Funct. Anal. Appl.*, **22**:2 (1988), 114–121.
- [14] D. V. Evans, M. Levitin, D. Vasil'ev, “Existence theorems for trapped modes”, *J. Fluid Mech.*, **261** (1994), 21–31.
- [15] C. M. Linton, P. McIver, “Embedded trapped modes in water waves and acoustics”, *Wave Motion*, **45**:1–2 (2007), 16–29.
- [16] S. A. Nazarov, “Properties of spectra of boundary value problems in cylindrical and quasicylindrical domains”, *Sobolev spaces in mathematics*, v. II, Int. Math. Ser. (N. Y.), **9**, Springer-Verlag, Berlin, 2008, 261–309.
- [17] С. А. Назаров, “Ловушечные моды для цилиндрического упругого волновода с демпфирующей прокладкой”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:5 (2008), 863–881; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Trapped modes in a cylindrical elastic waveguide with a damping gasket”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **48**:5 (2008), 816–833.
- [18] G. Cardone, V. Minutolo, S. A. Nazarov, “Gaps in the essential spectrum of periodic elastic waveguides”, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, **89**:9 (2009), 729–741.
- [19] С. А. Назаров, “Асимптотика частот упругих волн, захваченных малой трещиной в цилиндрическом волноводе”, *Механика твердого тела*, 2010, № 6, 112–122; англ. пер.: S. A. Nazarov, “The asymptotics of frequencies of elastic waves trapped by a small crack in an anisotropic waveguide”, *Mechanics of Solids*, **45** (2010), 856–864.
- [20] P. Duclos, P. Exner, “Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions”, *Rev. Math. Phys.*, **7**:1 (1995), 73–102.
- [21] И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, “Экспоненциально затухающие решения задачи о дифракции на жесткой периодической границе”, *Матем. заметки*, **73**:1 (2003), 138–140; англ. пер.: I. V. Kamotskii, S. A. Nazarov, “Exponentially decreasing

- solutions of diffraction problems on a rigid periodic boundary", *Math. Notes*, **73**:1–2 (2003), 129–131.
- [22] С. А. Назаров, "Вариационный и асимптотический методы поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра", *Сиб. матем. журн.*, **51**:5 (2010), 1086–1101; англ. пер.: S. A. Nazarov, "Variational and asymptotic methods for finding eigenvalues below the continuous spectrum threshold", *Sib. Math. J.*, **51**:5 (2010), 866–878.
- [23] I. Roitberg, D. Vassiliev, T. Weidl, "Edge resonance in an elastic semi-strip", *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **51**:1 (1998), 1–13.
- [24] B. A. Auld, E. M. Tsao, "A variational analysis of edge resonance in a semi-infinite plate", *IEEE Trans. Sonics Ultrason.*, **24**:5 (1977), 317–326.
- [25] M. Koshiha, S. Karakida, M. Suzuki, "Finite-element analysis of edge resonance in a semi-infinite elastic plate", *Electron. Lett.*, **19**:7 (1983), 256–257.
- [26] E. Le Clezio, M. V. Predoi, M. Constaings, B. Hosten, M. Rousseau, "Numerical predictions and experiments on the free-plate edge mode", *Ultrasonics*, **41**:1 (2003), 25–40.
- [27] M. Zernov, A. V. Pichugin, J. Kaplunov, "Eigenvalue of a semi-infinite elastic strip", *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **462**:2068 (2006), 1255–1270.
- [28] V. Pagneux, "Revisiting the edge resonance for Lamb waves in a semi-infinite plate", *J. Acoust. Soc. Am.*, **120**:2 (2006), 649–656.
- [29] M. Zernov, J. Kaplunov, "Three-dimensional edge waves in plates", *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, **464**:2090 (2008), 301–318.
- [30] A. Holst, D. Vassiliev, "Edge resonance in an elastic semi-infinite cylinder", *Appl. Anal.*, **74**:3–4 (2000), 479–495.
- [31] H. D. McNiven, "Extensional waves in a semi-infinite elastic rod", *J. Acoust. Soc. Amer.*, **33** (1961), 23–27.
- [32] J. Zemanek, Jr., "An experimental and theoretical investigation of elastic wave propagation in a cylinder", *J. Acoust. Soc. Amer.*, **51**:1 (1972), 265–283.
- [33] R. D. Gregory, I. Gladwell, "Axisymmetric waves in a semi-infinite elastic rod", *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, **33**:2 (1998), 327–337.
- [34] V. Pagneux, "Complex resonance and localized vibrations at the edge of a semi-infinite elastic cylinder", *Math. Mech. Solids*, **17**:1 (2011), 17–26.
- [35] C. Müller, "On the behavior of the solutions of the differential equation $\Delta u = F(x, u)$ in the neighborhood of a point", *Comm. Pure Appl. Math.*, **7** (1954), 505–515.
- [36] M. H. Protter, "Unique continuation for elliptic equations", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **95** (1960), 81–91.
- [37] R. Leis, *Initial-boundary value problems in mathematical physics*, Teubner, Stuttgart, 1986.
- [38] A. Pliš, "A smooth linear elliptic differential equation without any solution in a sphere", *Comm. Pure Appl. Math.*, **14** (1961), 599–617.
- [39] L. Bers, F. John, M. Schechter, *Partial differential equations* (Boulder, Colorado, 1957), Interscience, New York, 1964.
- [40] С. Лангер, С. А. Назаров, М. Шпековиус-Нойгебауер, "Аффинные преобразования трехмерных анизотропных сред и явные формулы для фундаментальных матриц", *Прикл. мех. и тех. физ.*, **47**:2 (2006), 95–102; англ. пер.: S. Langer, S. A. Nazarov, M. Specovius-Neugebauer, "Affine transforms of three-dimensional anisotropic media and explicit formulas for fundamental matrices", *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **47**:2 (2006), 229–235.
- [41] В. А. Кондратьев, "О гладкости решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в окрестности ребра", *Дифференц. уравнения*, **6**:10 (1970), 1831–1843.

- [42] В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, “Об эллиптичности краевых задач в областях с кусочно гладкой границей”, *Тр. симпозиума по мех. сплошных сред и родственным пробл. анализа*, **1**, Мецниереба, Тбилиси, 1973, 171–181.
- [43] В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, “Шаудеровские оценки решений эллиптических краевых задач в областях с ребрами на границе”, *Дифференц. уравнения с частными производными*, Тр. сем. С. Л. Соболева, **2**, Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1978, 69–102.
- [44] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965; англ. пер.: I. C. Gohberg, M. G. Kreĭn, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. Math. Monogr., **18**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.
- [45] Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике*, Наука, М., 1980; пер. с фр.: G. Duvaut, J.-L. Lions, *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris, 1972.
- [46] Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972; пер. с англ.: T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1966.
- [47] В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, “О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками”, *Math. Nachr.*, **76:1** (1977), 29–60.
- [48] В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, “Оценки в L_p и в классах Гёльдера и принцип максимума Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе”, *Math. Nachr.*, **77:1** (1978), 25–82.
- [49] С. А. Назаров, “Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов”, *УМН*, **54:5** (1999), 77–142; англ. пер.: S. A. Nazarov, “The polynomial property of self-adjoint elliptic boundary-value problems and an algebraic description of their attributes”, *Russian Math. Surveys*, **54:5** (1999), 947–1014.
- [50] М. С. Агранович, М. И. Вишик, “Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида”, *УМН*, **19:3** (1964), 53–161; англ. пер.: M. S. Agranovich, M. I. Vishik, “Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general type”, *Russian Math. Surveys*, **19:3** (1964), 53–157.
- [51] М. М. Вайнберг, В. А. Треногин, *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, Наука, М., 1969; англ. пер.: M. M. Vainberg, V. A. Trenogin, *Theory of branching of solutions of non-linear equations*, Transl. Math. Monogr., **26**, Noordhoff, Leyden, 1974.
- [52] С. А. Назаров, “Локализованные упругие поля в периодических волноводах с дефектами”, *Прикл. мех. и тех. физ.*, **52:2** (2011), 183–194; англ. пер.: S. A. Nazarov, “Localized elastic fields in periodic waveguides with defects”, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **52:2** (2011), 311–320.
- [53] С. А. Назаров, “Трещина на стыке анизотропных тел. Сингулярности напряжений и инвариантные интегралы”, *Прикл. матем. и мех.*, **62:3** (1998), 489–502; англ. пер.: S. A. Nazarov, “The interface crack in anisotropic bodies. Stress singularities and invariant integrals”, *J. Appl. Math. Mech.*, **62:3** (1998), 453–464.

Сергей Александрович Назаров
(Sergei A. Nazarov)

Институт проблем машиноведения РАН,
г. Санкт-Петербург;

Математико-механический факультет
Санкт-Петербургского государственного
университета

E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk

Поступила в редакцию
27.12.2012