Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Золотарёв, Задача рассеяния для нелокальных потенциалов, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 11, 39–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8209>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 14:29:50

УДК 517.983.248

В. А. Золотарёв

Задача рассеяния для нелокальных потенциалов

Для интегро-дифференциального оператора, который является одномерным возмущением самосопряженного оператора второй производной на полуоси, решены прямая и обратная задачи рассеяния. Описаны данные рассеяния, отвечающие изучаемому классу операторов.

Библиография: 28 названий.

Ключевые слова: одномерное возмущение, нелокальный потенциал, обратная задача рассеяния.

DOI: 10.4213/sm8209

Введение

Задача рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля имеет богатую историю (см. [1]–[3]) и многочисленные приложения (см. [2]–[7]), которые в первую очередь касаются интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Для быстро убывающих решений этих нелинейных уравнений ключевую роль играет метод обратной задачи рассеяния (см. [7]), основы которого были заложены в классических работах В. А. Марченко [1], [2].

Абстрактная теория рассеяния (теория Като–Бирмана) основана на изучении волновых операторов $W_{\pm}$ (см. [8], [9]), которые отвечают унитарным подгруппам $\exp\{itH\}$ и $\exp\{itH_0\}$, где H и H_0 – самосопряженные операторы, причем $H = H_0 + V$. Достаточным условием существования $W_{\pm}$ является требование, чтобы разность резольвент операторов H и H_0 была ядерной (см. [8], [9]), которое, в частности, имеет место, если оператор V ядерный. Последнее означает, что при надлежащей функциональной реализации V является интегральным оператором, и его принято (см. [5], [10]–[15]) называть нелокальным потенциалом. Оператор H с нелокальным потенциалом V , где V является интегральным оператором с вырожденным ядром (так называемый сепарабельный потенциал конечного ранга; см. [5]), представляет собой оператор энергии (электрона, например) вблизи кристаллической поверхности (см. [10], [16]). Термин “нелокальный потенциал”, как и “нелокальный оператор”, имеет весьма широкое толкование; так, в [11] изучалась обратная спектральная задача для “нелокального” оператора Штурма–Лиувилля

$$Ly = -y''(x) + v(x)y(1)$$

в $L^2_{(0,1)}$ с граничными условиями $y(0) = 0$, $y'(1) + \langle y, v \rangle = 0$, где $v(x) \in L^2_{(0,1)}$. Следует отметить, что модель Фридрихса, играющая важную роль в теории

рассеяния (см. [8]), представляет собой интегральное возмущение оператора умножения на независимую переменную (см. [17]).

Настоящая работа посвящена решению прямой и обратной задач рассеяния для оператора

$$Ly = -y''(x) + \alpha \int_{\mathbb{R}_+} y(t) \overline{v(t)} dt \cdot v(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (0.1)$$

с краевым условием

$$y(0) = 0, \quad (0.2)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, а $v(x)$ такова, что

$$\int_{\mathbb{R}_+} (1 + x^2) |v(x)|^2 dx < \infty. \quad (0.3)$$

После синус-преобразования Фурье оператор L (0.1), (0.2) переходит в сумму операторов, один из которых является оператором умножения на независимую переменную λ в $L^2(\mathbb{R}_+)$, а второй представляет собой интегральный оператор в $L^2(\mathbb{R}_+)$ ранга 1 с ядром $\alpha \widetilde{v}_s(x) \overline{\widetilde{v}_s(\lambda)}$, где $\widetilde{v}_s(\lambda)$ – синус-преобразование Фурье функции $v(x)$. Таким образом, мы приходим к модели Фридрихса, интегральное возмущение в которой одномерно.

Традиционно схема рассеяния базируется на изучении асимптотического поведения решений Иоста оператора L (0.1), (0.2). В § 1 построены решения Иоста изучаемого оператора и исследованы их свойства. Исследованию функции рассеяния оператора L (0.1), (0.2) посвящен § 2. Показано, что при $\alpha > 0$ существует конечное число связных состояний (собственных функций), отвечающих положительным собственным значениям; а при $\alpha < 0$ помимо такого набора связных состояний существует еще одно односвязное состояние, соответствующее отрицательному собственному значению. Данное утверждение имеет определенную аналогию для несамосопряженного оператора Шрёдингера (см. [18], [19]). В § 3 изучаются прямая и обратная задачи рассеяния в случае $\alpha > 0$. Используя краевую задачу Римана, получаем выражение функции рассеяния через функцию спектрального сдвига (теорема 2). Показано, что функция спектрального сдвига имеет конечное число точек разрыва, причем последние соответствуют связным состояниям (аналог теоремы Левинсона). Дано описание данных рассеяния в случае, когда $\alpha > 0$, а $v(x)$ вещественна и удовлетворяет условию (0.3) (класс Ω_n). Завершает § 3 решение обратной задачи рассеяния (теорема 7). Так как по функции рассеяния (или функции спектрального сдвига) восстанавливается только квадрат модуля синус-преобразования Фурье функции $v(x)$, то для однозначного нахождения по данным рассеяния возмущения $\{\alpha, v(x)\}$ предлагается взять две функции рассеяния, отвечающие наборам $\{\alpha, v(x) + h(x)\}$ и $\{\alpha, v(x) - h(x)\}$, где $v(x)$ вещественна, а $h(x)$ – известная вещественная функция, синус-преобразование Фурье которой почти всюду отлично от нуля. В этом случае число α и функция $v(x)$ восстанавливаются по этим данным рассеяния единственным образом. Решению задач, аналогичных рассмотренным в § 3, в случае $\alpha < 0$ посвящен § 4.

Основными результатами § 3 и § 4 являются решение обратной задачи (теоремы 7, 10) и описание данных рассеяния классов Ω_n , $\Omega_{n,x}$ для нелокальных потенциалов.

Выражаю искреннюю признательность и благодарность В. А. Марченко за интерес к работе и за стимулирующие беседы.

§ 1. Решения Иоста

1.1. Рассмотрим краевую задачу на полуоси $\mathbb{R}_+$, задаваемую интегро-дифференциальным уравнением

$$-y''(x) + \alpha \int_{\mathbb{R}_+} y(t) \overline{v(t)} v(x) dt = \lambda^2 y(x), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad (1.1)$$

и краевым условием

$$y(0) = 0, \quad (1.2)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, а $v(x)$ – комплекснозначная функция, удовлетворяющая условию (0.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Одномерное возмущение в (1.1) инвариантно относительно инволюции $v(x) \rightarrow e^{i\varphi} v(x)$ ($\varphi \in \mathbb{R}$). Его можно нормировать двумя способами, первый из которых состоит в том, что мы априори можем полагать, что $\alpha = \pm 1$, в силу перенормировки $v(x) \rightarrow \sqrt{|\alpha|} v(x)$; а второй заключается в том, что мы можем считать, что $\|v(x)\|_{L^2} = 1$, а α – произвольное число из $\mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Условия (0.3) и $(1+x^2)^{-1/2} \in L^2_{\mathbb{R}_+}$ влекут $v(x) \in L^2_{\mathbb{R}_+}$ в силу неравенства Коши–Буняковского.

Из условия (0.3) вытекает, что при $x \rightarrow \infty$ уравнение (1.1) переходит в элементарное $y'' + \lambda^2 y(x) = 0$. Поэтому естественно искать решение $e(x, \lambda)$ уравнения (1.1), которое удовлетворяет граничному условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-i\lambda x} e(x, \lambda) = a(\lambda), \quad (1.3)$$

где $a(\lambda)$ – некоторая функция от λ . Нетрудно показать (см. [2], [3]), что $e(x, \lambda)$ является решением интегрального уравнения

$$e(x, \lambda) = a(\lambda) e^{i\lambda x} + \int_x^\infty \frac{\sin \lambda(t-x)}{\lambda} \alpha \int_{\mathbb{R}_+} e(s, \lambda) \overline{v(s)} v(t) ds dt. \quad (1.4)$$

Умножив (1.4) на $\overline{v(x)}$ и проинтегрировав по полуоси $\mathbb{R}_+$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} e(x, \lambda) \overline{v(x)} dx &= a(\lambda) \int_{\mathbb{R}_+} e^{i\lambda x} \overline{v(x)} dx \\ &+ \alpha \int_{\mathbb{R}_+} e(s, \lambda) \overline{v(s)} ds \int_{\mathbb{R}_+} \int_x^\infty \frac{\sin \lambda(t-x)}{\lambda} v(t) dt \overline{v(x)} dx. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}_+} e(x, \lambda) \overline{v(x)} dx = \frac{a(\lambda) \tilde{v}^*(\lambda)}{1 - \alpha \varphi(\lambda)}, \quad (1.5)$$

где $\tilde{v}(\lambda)$ – преобразование Фурье функции $v(x)$,

$$\tilde{v}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-i\lambda x} v(x) dx, \quad (1.6)$$

$$\tilde{v}^*(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\tilde{v}(\bar{\lambda})}. \quad (1.7)$$

Получаем

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}_+} \int_x^\infty \frac{\sin \lambda(t-x)}{\lambda} v(t) dt \overline{v(x)} dx = \int_{\mathbb{R}_+} \overline{v(x)} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin \lambda y}{\lambda} v(x+y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin \lambda y}{\lambda} dy \int_{\mathbb{R}_+} \overline{v(x)} v(x+y) dx, \end{aligned} \quad (1.8)$$

и $\varphi(x)$ является четной: $\varphi(-\lambda) = \varphi(\lambda)$. Пусть

$$g(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}_+} v(x) \overline{v(x+y)} dx, \quad y \in \mathbb{R}_+. \quad (1.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Доопределив функцию $v(x)$ нулем на $\mathbb{R}_+$, получим

$$g(y) = \int_{\mathbb{R}_+} v(x) \overline{v(x+y)} dx = \int_y^\infty v(t-y) \overline{v(t)} dt = \int_{\mathbb{R}_+} v(t-y) \overline{v(t)} dt = \overline{g(-y)}.$$

Следовательно, в этом случае $g(y)$ продолжается на $\mathbb{R}_-$ по правилу $g(-y) = \overline{g(y)}$. Так как свертка двух функций из $L^1_{\mathbb{R}}$ есть функция из $L^1_{\mathbb{R}}$, а свертка функций из $L^1_{\mathbb{R}}$ и $L^2_{\mathbb{R}}$ является функцией из $L^2_{\mathbb{R}}$ (см. [20], [21]), то $g(y)$ (1.9) принадлежит $L^1_{\mathbb{R}_+} \cap L^2_{\mathbb{R}_+}$ (потому что $v(x) \in L^1_{\mathbb{R}_+} \cap L^2_{\mathbb{R}_+}$; см. замечание 2).

Из (1.8) следует, что

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{2i\lambda} (\Phi^*(\lambda) - \Phi^*(-\lambda)), \quad (1.10)$$

где

$$\Phi(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-i\lambda y} g(y) dy. \quad (1.11)$$

Так как

$$\Phi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-i\lambda y} \int_{\mathbb{R}_+} v(x) \overline{v(x+y)} dx dy = \int_{\mathbb{R}_+} e^{i\lambda x} v(x) dx \int_x^\infty e^{-i\lambda t} \overline{v(t)} dt,$$

то, интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) &= - \int_{\mathbb{R}_+} \int_x^\infty e^{-i\lambda t} \overline{v(t)} dt d \left(\int_x^\infty e^{i\lambda y} v(y) dy \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} e^{-i\lambda t} \overline{v(t)} dt \int_{\mathbb{R}_+} e^{i\lambda y} v(y) dy - \int_{\mathbb{R}_+} \int_x^\infty e^{i\lambda y} v(y) dy e^{-i\lambda x} \overline{v(x)} dx \\ &= \tilde{v}(-\lambda) \overline{\tilde{v}(-\lambda)} - \overline{\Phi(\lambda)}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 1. Пусть $\tilde{v}(\lambda)$ имеет вид (1.6), а $\Phi(\lambda)$ соответственно (1.11), где $g(y)$ выражается через $v(x)$ формулой (1.9). Тогда при всех $\lambda \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\Phi(\lambda) + \overline{\Phi(\lambda)} = \tilde{v}(-\lambda)\overline{\tilde{v}(-\lambda)}. \quad (1.12)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Функции $\tilde{v}(\lambda)$ (1.6), $\Phi(\lambda)$ (1.11) принадлежат классу Харди H_-^2 (см. [20]–[22]) и ограничены в замкнутой нижней полуплоскости $\mathbb{C}_-$ (при $\lambda \in \mathbb{R}$ они ограничены как преобразования Фурье функций из $L_{\mathbb{R}_+}^1$; см. [20], [21]). Кроме того, $\tilde{v}(\lambda)$ и $\Phi(\lambda)$ равномерно непрерывны при $\lambda \in \mathbb{R}$ (как преобразования Фурье функций из $L_{\mathbb{R}_+}^1$) и почти всюду дифференцируемы, причем $\tilde{v}'(\lambda)$, $\Phi'(\lambda) \in L_{\mathbb{R}}^2$. Последнее следует из того, что $xv(x) \in L_{\mathbb{R}_+}^2$ и $yg(y) \in L_{\mathbb{R}_+}^2$ (см. [20], [21]). Второе включение вытекает из равенства

$$yg(y) = \int_{\mathbb{R}_+} v(x)\overline{v(x+y)}(x+y) dx - \int_{\mathbb{R}_+} xv(x)\overline{v(x+y)} dx$$

в силу замечания 3.

Обратное утверждение к лемме 1 выглядит следующим образом.

ЛЕММА 2. Пусть $\Phi(\lambda)$ принадлежит H_-^2 и удовлетворяет соотношению (1.12), где $\tilde{v}(\lambda)$ – преобразование Фурье (1.6) функции $v(x) \in L_{\mathbb{R}_+}^1 \cap L_{\mathbb{R}_+}^2$. Тогда $\Phi(\lambda)$ имеет вид (1.11), при этом $g(y)$ выражается через $v(x)$ формулой (1.9).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы Винера–Пэли (см. [20], [21]) следует, что $\Phi(\lambda)$ имеет вид

$$\Phi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-i\lambda y} f(y) dy,$$

где $f(y) \in L_{\mathbb{R}_+}^2$. По функции $v(x) \in L_{\mathbb{R}_+}^1 \cap L_{\mathbb{R}_+}^2$ построим $g(y)$ и зададим

$$\Psi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-i\lambda y} g(y) dy.$$

Так как $\Phi(\lambda)$ и $\Psi(\lambda)$ удовлетворяют соотношению (1.12), то $F(\lambda) + \overline{F(\lambda)} = 0$, где $F(\lambda) = \Phi(\lambda) - \Psi(\lambda)$, поэтому

$$0 = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-i\lambda y} (f(y) - g(y)) dy + \int_{\mathbb{R}_+} e^{i\lambda y} (\overline{f(-y)} - \overline{g(-y)}) dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\lambda y} h(y) dy,$$

где $h(y) = (f(y) - g(y))\chi_{\mathbb{R}_+}(y) + (\overline{f(-y)} - \overline{g(-y)})\chi_{\mathbb{R}_-}(y)$; $\chi_{\mathbb{R}_\pm}(y)$ – характеристические функции множеств $\mathbb{R}_\pm$. Из равенства Парсеваля следует, что $h(y) = 0$ и, значит, $f(y) = g(y)$.

Чтобы выражение (1.5) не имело особенностей, выберем $a(\lambda) = 1 - \alpha\varphi(\lambda)$.

ТЕОРЕМА 1. Решение Иоста $e(x, \lambda)$ уравнения (1.1), удовлетворяющее граничному условию (1.3), где $a(\lambda) = 1 - \alpha\varphi(\lambda)$, а $\varphi(\lambda)$ имеет вид (1.8), есть

$$e(x, \lambda) = e^{i\lambda x} (1 - \alpha\varphi(\lambda)) + \alpha \int_x^\infty \frac{\sin \lambda(t-x)}{\lambda} v(t) dt \cdot \tilde{v}^*(\lambda), \quad (1.13)$$

при этом $\tilde{v}^*(\lambda)$ определяется по функции $v(x)$ формулами (1.6), (1.7).

В силу четности $\varphi(\lambda)$ функция

$$e(x, -\lambda) = e^{-i\lambda x}(1 - \alpha\varphi(\lambda)) + \alpha \int_x^\infty \frac{\sin \lambda(t-x)}{\lambda} v(t) dt \cdot \tilde{v}^*(-\lambda) \quad (1.14)$$

также является решением уравнения (1.1) и удовлетворяет граничному условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{i\lambda x} e(x, -\lambda) = a(\lambda) = (1 - \alpha\varphi(\lambda)). \quad (1.15)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Умножая (1.13) на $\overline{v(x)}$ и интегрируя по полуоси $\mathbb{R}_+$, получим

$$\langle e(x, \lambda) - e^{i\lambda x}, v(x) \rangle_{L^2} = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (1.16)$$

в силу (1.6)–(1.8).

1.2. Покажем, что функции $e(x, \lambda)$ (1.13), $e(x, -\lambda)$ (1.14) образуют фундаментальную систему решений уравнения (1.1). Определим множество E_α :

$$E_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : \Phi^*(\lambda) - \Phi^*(-\lambda) = \frac{2i\lambda}{\alpha} \right\}, \quad (1.17)$$

где $\Phi(\lambda)$ имеет вид (1.11). Если $\lambda \in E_\alpha \setminus \{0\}$, то $1 = \alpha\varphi(\lambda)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Множество E_α симметрично ($\lambda \in E_\alpha \Leftrightarrow -\lambda \in E_\alpha$) и ограничено в силу леммы Римана–Лебега (см. [20], [21]). Из непрерывности $\Phi(\lambda)$ (замечание 4) следует, что E_α замкнуто.

ЛЕММА 3. При всех $\lambda \in \mathbb{R} \setminus E_\alpha$, где E_α имеет вид (1.17), функции $e(x, \lambda)$ (1.13) и $e(x, -\lambda)$ (1.14) линейно независимы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы следует из асимптотического поведения (1.3), (1.15) решений $e(x, \lambda)$ и $e(x, -\lambda)$. Приведем непосредственное доказательство. Полагая противное, предположим, что при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$ нашлись числа $\mu, \nu \in \mathbb{C}$ такие, что $\mu e(x, \lambda) + \nu e(x, -\lambda) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$; тогда

$$\begin{cases} \mu e(x, \lambda) + \nu e(x, -\lambda) = 0, \\ \mu e'(x, \lambda) + \nu e'(x, -\lambda) = 0. \end{cases}$$

Определитель данной системы есть

$$\begin{aligned} \Delta(x, \lambda) &\stackrel{\text{def}}{=} e(x, \lambda)e'(x, -\lambda) - e(x, -\lambda)e'(x, \lambda) \\ &= -2i\lambda(1 - \alpha\varphi(\lambda))^2 - i\lambda\alpha\psi(x, \lambda)(1 - \alpha\varphi(\lambda))[\tilde{v}^*(\lambda)e^{-ix\lambda} - \tilde{v}^*(-\lambda)e^{ix\lambda}] \\ &\quad + \alpha\psi'(x, \lambda)(1 - \alpha\varphi(\lambda))[\tilde{v}^*(-\lambda)e^{ix\lambda} - \tilde{v}^*(\lambda)e^{-ix\lambda}], \end{aligned}$$

где

$$\psi(x, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_x^\infty \frac{\sin \lambda(t-\lambda)}{\lambda} v(t) dt.$$

В результате элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} \Delta(x, \lambda) = & -2i\lambda(1 - \alpha\varphi(\lambda))^2 \\ & + \alpha(1 - \alpha\varphi(\lambda)) \left[\tilde{v}^*(\lambda) \int_x^\infty e^{-i\lambda t} v(t) dt - \tilde{v}^*(-\lambda) \int_x^\infty e^{i\lambda t} v(t) dt \right]. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Если $\Delta(x, \lambda) = 0$ при всех $x \in \mathbb{R}_+$ для данного фиксированного числа λ , то и $\Delta'(x, \lambda) = 0$. Из $\Delta'(x, \lambda) = 0$ при условии, что $1 \neq \alpha\varphi(\lambda)$, следует $\{\tilde{v}^*(-\lambda)e^{i\lambda x} - \tilde{v}^*(\lambda)e^{-i\lambda x}\}v(x) = 0$. Учитывая, что $v(x) \neq 0$ на множестве положительной меры, получим, что $\tilde{v}^*(-\lambda)e^{i\lambda x} - \tilde{v}^*(\lambda)e^{-i\lambda x} = 0$ на этом множестве положительной меры. Таким образом, $\tilde{v}^*(\lambda) = \tilde{v}^*(-\lambda) = 0$ и, значит, $\Delta(x, \lambda) = 2i\lambda(1 - \alpha\varphi(\lambda))^2$, что и доказывает лемму.

Изучим детальнее множество E_α (1.17). Напомним известную теорему Титчмарша (см. [20], [23]).

ТЕОРЕМА ТИЧМАРША. Пусть $F(x) \in L^2_{\mathbb{R}}$; тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) функция $F(\lambda)$ голоморфно продолжаема в $\mathbb{C}_+$ и принадлежит классу Харди H^2_+ ;
- 2) справедлива первая формула Собоцкого

$$\operatorname{Re} F(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{Im} F(x)}{x - \lambda} dx, \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

- 3) справедлива вторая формула Собоцкого

$$\operatorname{Im} F(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{Re} F(x)}{x - \lambda} dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Интегралы в пп. 2), 3) понимаются в смысле главного значения, а соответствующие формулы называются дисперсионными соотношениями (см. [3], [7], [8], [23]).

Функция $\Phi^*(\lambda)$ принадлежит классу Харди H^2_+ (замечание 4), причем

$$\operatorname{Re} \Phi^*(\lambda) = \frac{1}{2} |\tilde{v}(-\lambda)|^2, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

в силу (1.12). Используя п. 3) теоремы Тичмарша, получим

$$\Phi^*(\lambda) = \frac{1}{2} |\tilde{v}(-\lambda)|^2 + \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1.19)$$

Если $\lambda \in E_\alpha$ (1.17), то из $\Phi^*(\lambda) - \Phi^*(-\lambda) = 2i\lambda/\alpha$ следует

$$\begin{cases} |\tilde{v}(\lambda)| = |\tilde{v}(-\lambda)|, \\ \lambda \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(-t)|^2}{t^2 - \lambda^2} dt + \frac{2\pi}{\alpha} \right\} = 0. \end{cases} \quad (1.20)$$

Второе равенство в (1.20), помимо $\lambda = 0$, дает уравнение

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(-t)|^2}{t^2 - \lambda^2} dt + \frac{2\pi}{\alpha} = 0. \quad (1.21)$$

Покажем, что данное уравнение может иметь не более чем конечное число решений. Если множество E_α содержит бесконечное число точек, то из замечания 6 следует, что существует такая последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ из E_α , что $\lambda_k \rightarrow \lambda_0$ ($k \rightarrow \infty$) и $\lambda_0 \in E_\alpha$. Вычитая равенства (1.21) при $\lambda = \lambda_k$ и $\lambda = \lambda_0$ и учитывая, что $\lambda_k \neq \lambda_0$, получим

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(-t)|^2}{(t^2 - \lambda_k^2)(t^2 - \lambda_0^2)} dt = 0 \quad \forall k.$$

Устремляя λ_k к λ_0 , будем иметь

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(-t)|^2}{(t^2 - \lambda_0^2)^2} dt = 0,$$

что возможно только в случае $\tilde{v}(-t) = 0$, и, значит, $v(x) = 0$. Последнее противоречит (1.21). Комплексных корней уравнение (1.21) не имеет в силу неванлинновости функции

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(-t)|^2}{t^2 - z} dt, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}.$$

ЛЕММА 4. Множество E_α (1.17) состоит не более чем из конечного числа точек,

$$E_\alpha = \{0\} \cup \{\pm\mu_k : \mu_k > 0 \ (1 \leq k \leq n, \ n < \infty); \ |\tilde{v}(\mu_k)| = |\tilde{v}(-\mu_k)|\}, \quad (1.22)$$

где μ_k – корни уравнения (1.20).

Вторая компонента в объединении (1.22) может оказаться пустым множеством, например, при $0 < \alpha \ll 1$.

§ 2. Функция рассеяния

2.1. Пусть $e(x, \lambda)$ и $e(x, -\lambda)$ имеют вид (1.13) и (1.14); тогда функция

$$w(x, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} e(x, -\lambda) - S(\lambda)e(x, \lambda) \quad (2.1)$$

является решением уравнения (1.1). Из краевого условия (1.2) $w(0, \lambda) = 0$ однозначно находится коэффициент $S(\lambda)$.

ЛЕММА 5. При всех $\lambda \in \mathbb{R} \setminus E_\alpha$, где E_α имеет вид (1.17), функция $w(x, \lambda)$ (2.1) является решением краевой задачи (1.1), (1.2); при этом

$$S(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e(0, -\lambda)}{e(0, \lambda)}, \quad S^{-1}(\lambda) = S(-\lambda) \quad (2.2)$$

и, кроме того,

$$w'(0, \lambda) = -\frac{2i\lambda(1 - \alpha\varphi(\lambda))^2}{e(0, \lambda)}. \quad (2.3)$$

Равенство (2.3) вытекает из (1.19), так как $\omega'(0, \lambda) = \Delta(0, \lambda)/e(0, \lambda)$.

Функцию $S(\lambda)$ (2.2) назовем *функцией рассеяния*, так как решение $w(x, \lambda)$ (2.1) имеет асимптотику

$$w(x, \lambda) \rightarrow (1 - \alpha\varphi(\lambda))(e^{-i\lambda x} - S(\lambda)e^{i\lambda x}), \quad x \rightarrow \infty. \quad (2.4)$$

Используя (1.13), (1.14) и (1.9), запишем функцию $S(\lambda)$ (2.2) в виде

$$S(\lambda) = \frac{2i\lambda + \alpha[\tilde{v}(-\lambda)\tilde{v}^*(-\lambda) - \tilde{v}(\lambda)\tilde{v}^*(-\lambda) - \Phi^*(\lambda) + \Phi^*(-\lambda)]}{2i\lambda + \alpha[\tilde{v}(-\lambda)\tilde{v}^*(\lambda) - \tilde{v}(\lambda)\tilde{v}^*(\lambda) - \Phi^*(\lambda) + \Phi^*(-\lambda)]};$$

тогда, учитывая (1.12), получим

$$S(\lambda) = \frac{2i\lambda + \alpha[\Phi(\lambda) + \Phi^*(-\lambda) - \tilde{v}(\lambda)\tilde{v}^*(-\lambda)]}{2i\lambda + \alpha[\tilde{v}(-\lambda)\tilde{v}^*(\lambda) - \Phi^*(\lambda) - \Phi(-\lambda)]}. \quad (2.5)$$

ЛЕММА 6. При всех $\lambda \in \mathbb{R}$ для функции рассеяния $S(\lambda)$ (2.2) справедливо представление

$$S(\lambda) = -\frac{r(-\lambda)}{r(\lambda)} = 1 - \alpha \frac{|\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2}{r(\lambda)}, \quad (2.6)$$

где

$$r(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} 2i\lambda + \alpha[\tilde{v}(-\lambda)\tilde{v}^*(\lambda) - \Phi^*(\lambda) - \Phi(-\lambda)], \quad (2.7)$$

а $\tilde{v}(\lambda)$ и $\Phi(\lambda)$ имеют вид (1.6), (1.11); кроме того,

$$\overline{r(\lambda)} = r(-\lambda), \quad \overline{S(\lambda)} = S(-\lambda) \quad (2.8)$$

и имеют место соотношения

$$S(\infty) = 1, \quad S(\lambda) = 1 + o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty. \quad (2.9)$$

Утверждение леммы вытекает из (2.5) и (1.12).

Функция $r(\lambda)$ (2.7) голоморфно продолжаема в $\mathbb{C}_+$ (замечание 4), а $r(-\lambda)$ соответственно в $\mathbb{C}_-$. Так как $r(\lambda) \neq r(-\lambda)$ при $\lambda \in \mathbb{R}$, то $r(-\lambda)$ не является аналитическим продолжением $r(\lambda)$ в полуплоскость $\mathbb{C}_-$.

ЛЕММА 7. Функция

$$f(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{v}(-\lambda)\tilde{v}^*(\lambda) - \Phi^*(\lambda) - \Phi(-\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.10)$$

принадлежит классу Харди H_+^2 , ограничена в замкнутой полуплоскости $\overline{\mathbb{C}_+}$ и равномерно непрерывна на вещественной оси $\mathbb{R}$. Кроме того, $f(\lambda)$ почти всюду дифференцируема на $\mathbb{R}$ и $f'(\lambda) \in L_{\mathbb{R}}^2$, причем

$$2 \operatorname{Re} f(\lambda) = -|\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2 \leq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограниченность и равномерная непрерывность, а также дифференцируемость почти всюду на $\mathbb{R}$ функции $f(\lambda)$ (2.10) вытекает из аналогичных свойств $\tilde{v}(\lambda)$ и $\Phi(\lambda)$ (замечание 4). Соотношение (2.11) является следствием равенства (1.12),

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} f(\lambda) &= \tilde{v}(-\lambda)\tilde{v}^*(\lambda) + \tilde{v}^*(-\lambda)\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(\lambda)\tilde{v}^*(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)\tilde{v}^*(-\lambda) \\ &= -|\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2. \end{aligned}$$

Для функции $f(\lambda)$ (2.10) запишем дисперсионное соотношение из п. 3) теоремы Тичмарша; тогда, учитывая (2.11), получим

$$f(\lambda) = -\frac{1}{2}|\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2 - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

В результате мы приходим к формуле Сохоцкого (см. [25]), дающей граничные значения на $\mathbb{R}$ из верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ интеграла типа Коши

$$f(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} dt, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (2.13)$$

Так как $f(-\lambda) \in H_-^2$, то из (2.12) после замены $t \rightarrow -t$ под знаком интеграла следует

$$-f(-\lambda) = \frac{1}{2}|\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2 - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (2.14)$$

Представление (2.14) совпадает со второй формулой Сохоцкого (см. [24]) для граничных значений из $\mathbb{C}_-$ на $\mathbb{R}$ интеграла типа Коши (2.13).

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Формулы Сохоцкого (2.13), (2.14) доказываются в предположении, что плотность $|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем, не превосходящим единицы. Из работы Б. В. Хведелидзе [25] следует, что если плотность интеграла типа Коши принадлежит $L_{\mathbb{R}}^p$ ($p > 1$), то соответствующий особый интеграл также принадлежит $L_{\mathbb{R}}^p$, причем некасательные предельные значения интеграла типа Коши существуют почти всюду и для них справедливы формулы Сохоцкого. В нашем случае $|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2$ непрерывна и принадлежит $L_{\mathbb{R}}^2$ и, значит, формулы (2.12), (2.14) справедливы при всех $\lambda \in \mathbb{R}$.

ЛЕММА 8. *Функции*

$$r(\lambda) = 2i\lambda + \alpha f(\lambda), \quad -r(-\lambda) = 2i\lambda - \alpha f(-\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.15)$$

где $f(\lambda)$ имеет вид (2.10), являются граничными значениями на $\mathbb{R}$ из полуплоскостей $\mathbb{C}_{\pm}$ функции

$$A(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} 2i\lambda - \frac{\alpha}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} dt, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad (2.16)$$

при этом $A(-\lambda) = -A(\lambda)$. Для функций $f(\lambda)$ и $f(-\lambda)$ справедливы представления (2.12) и (2.14).

Итак, граничные значения $A_{\pm}(\lambda)$ на $\mathbb{R}$ из $\mathbb{C}_{\pm}$ функции $A(\lambda)$ (2.16) есть

$$A_+(\lambda) = r(\lambda), \quad A_-(\lambda) = -r(-\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (2.17)$$

где $r(\lambda)$ имеет вид (2.7).

2.2. Найдем комплексные корни функции $A(\lambda)$ (2.16).

ТЕОРЕМА 2. При $\alpha > 0$ функция $A(\lambda)$ (2.16) не обращается в нуль, когда $\lambda \in \mathbb{C}_+$, а при $\alpha < 0$ эта функция имеет один простой корень $\lambda = i\kappa$ ($\kappa > 0$) в $\mathbb{C}_+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение $A(\lambda) = 0$ означает, что

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} dt = -\frac{4\pi\lambda}{\alpha}. \quad (2.18)$$

Неванлинновская функция, стоящая в левой части равенства (2.18), отображает $\mathbb{C}_+$ в $\mathbb{C}_+$, поэтому при $\alpha > 0$ решение уравнения (2.18) в $\mathbb{C}_+$ не существует. Пусть $\alpha < 0$ и $\lambda \in \mathbb{C}_+$; тогда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} dt &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} dt + \int_{\mathbb{R}_-} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} dt - \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t + \lambda} dt = 2\lambda \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t^2 - \lambda^2} dt, \end{aligned}$$

и, значит, уравнение (2.18) имеет вид

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t^2 - \lambda^2} dt = -\frac{2\pi}{\alpha}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \quad (2.19)$$

Вычитая из (2.19) комплексно сопряженное, получим

$$(\lambda^2 - \bar{\lambda}^2) \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{|t^2 - \lambda^2|^2} dt = 0.$$

Тогда либо $\lambda^2 - \bar{\lambda}^2 = (\lambda - \bar{\lambda})(\lambda + \bar{\lambda}) = 0$, что означает, что λ чисто мнимое, либо

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{|t^2 - \lambda^2|^2} dt = 0.$$

Так как подынтегральная функция неотрицательна, то данное равенство возможно, лишь если $\tilde{v}(t) = \tilde{v}(-t)$ почти всюду, и, значит, $v(x) = 0$. Итак, корни уравнения (2.19) лежат на мнимой оси $i\mathbb{R} \cap \mathbb{C}_+$.

Если корень λ уравнения (2.19) более чем однократен, то он будет корнем и производной

$$2\lambda \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{(t^2 - \lambda^2)^2} dt = 0.$$

Последнее при $\lambda \in \mathbb{C}_+$ невозможно, так как $t^2 - \lambda^2 = t^2 + |\lambda|^2 > 0$ в силу того, что λ чисто мнимое. Значит, все корни уравнения (2.19) простые.

Пусть λ_1 и λ_2 – два корня уравнения (2.19); тогда, вычитая равенства (2.19) при различных значениях λ_1 и λ_2 , получим

$$(\lambda_1^2 - \lambda_2^2) \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{(t^2 - \lambda_1^2)(t^2 - \lambda_2^2)} dt = 0.$$

Отсюда следует, что $\lambda_1 = \lambda_2$ ввиду положительности интеграла, потому что $t^2 - \lambda_k^2 = t^2 + |\lambda_k|^2 > 0$ ($k = 1, 2$).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Так как

$$r(\lambda) = 2i\lambda e(0, \lambda),$$

то, во-первых, $2i\lambda e(0, \lambda)$ голоморфно продолжаема в $\mathbb{C}_+$, а во-вторых, при $\alpha < 0$ имеет место $e(0, i\kappa) = 0$, где $i\kappa$ ($\kappa > 0$) – корень функции $A(\lambda)$ (2.16).

ЛЕММА 9. Если $\alpha < 0$ и $\lambda = i\kappa$ ($\kappa > 0$) – нуль функции $A(\lambda)$ (2.16), то решение Иоста $e(x, i\kappa)$ (1.13) краевой задачи (1.1), (1.2) принадлежит пространству $L^2_{\mathbb{R}_+}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (1.6), (1.7), (1.10), (1.12), запишем функцию $e(x, \lambda)$ (1.13) в виде

$$\begin{aligned} 2i\lambda e(x, \lambda) &= 2i\lambda e^{i\lambda x} - \alpha e^{i\lambda x} (\Phi^*(\lambda) - \Phi^*(-\lambda)) \\ &\quad + \alpha \int_x^\infty (e^{i\lambda(t-x)} - e^{-i\lambda(t-x)}) v(t) dt \cdot \tilde{v}^*(\lambda) \\ &= 2i\lambda e^{i\lambda x} - \alpha e^{i\lambda x} \Phi^*(\lambda) + \alpha \tilde{v}^*(\lambda) \int_x^\infty e^{i\lambda(t-x)} v(t) dt \\ &\quad + \alpha e^{i\lambda x} \left[\tilde{v}(\lambda) \tilde{v}^*(\lambda) - \Phi(-\lambda) - \int_x^\infty e^{-i\lambda t} v(t) dt \cdot \tilde{v}^*(\lambda) \right] \\ &= 2i\lambda e^{i\lambda x} - \alpha e^{i\lambda x} \Phi^*(\lambda) - \alpha e^{i\lambda x} \Phi(-\lambda) + \alpha \tilde{v}^*(\lambda) \int_x^\infty e^{i\lambda(t-x)} v(t) dt \\ &\quad + \alpha \int_0^x e^{i\lambda(x-t)} v(t) dt \cdot \tilde{v}^*(\lambda). \end{aligned}$$

Каждое из слагаемых полученного выражения при $\lambda = i\kappa$ ($\kappa > 0$) принадлежит $L^2_{\mathbb{R}_+}$, что и доказывает лемму.

СЛЕДСТВИЕ 1. При $\alpha < 0$ существует одно односвязное состояние (см. [3], [23]), которое задается собственной функцией $e(x, i\kappa)$ ($\in L^2_{\mathbb{R}_+}$) краевой задачи (1.1), (1.2), отвечающее собственному значению $\lambda^2 = -\kappa^2$ ($\lambda = i\kappa$, $\kappa > 0$), где $\lambda = i\kappa$ – корень функции $A(\lambda)$ (2.16), а $e(x, \lambda)$ имеет вид (1.13).

2.3. Описание вещественных корней функций $A_\pm(\lambda)$ (2.17) равносильно изучению нулей функции $r(\lambda)$ (2.15).

ЛЕММА 10. Уравнение $r(\lambda) = 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} \tilde{v}(\lambda) = \tilde{v}(-\lambda), \\ \Phi^*(\lambda) - \Phi^*(-\lambda) = \frac{2i\lambda}{\alpha}, \end{cases} \quad (2.20)$$

где $\tilde{v}(\lambda)$ и $\Phi(\lambda)$ имеют вид (1.6) и (1.11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (2.11), (2.15) следует

$$\operatorname{Re} r(\lambda) = \alpha \operatorname{Re} f(\lambda) = -\alpha |\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2,$$

что дает первое равенство в (2.20). Учитывая (1.12) и $\tilde{v}(\lambda) = \tilde{v}(-\lambda)$, получим

$$\begin{aligned} r(\lambda) &= 2i\lambda + \alpha [\tilde{v}(-\lambda) \tilde{v}^*(\lambda) - \Phi^*(\lambda) + \Phi^*(-\lambda) - \tilde{v}(\lambda) \tilde{v}^*(-\lambda)] \\ &= 2i\lambda - \alpha [\Phi^*(\lambda) - \Phi^*(-\lambda)], \end{aligned}$$

что доказывает второе соотношение в (2.20).

ЛЕММА 11. Множество вещественных нулей функции $r(\lambda)$ (2.7) конечно и имеет вид

$$E_{r,n} = \{0; \pm\lambda_k : \lambda_k > 0 \ (1 \leq k \leq n, \ n \in \mathbb{N})\}, \quad (2.21)$$

при этом числа $\lambda_k > 0$ являются простыми корнями уравнения

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t^2 - \lambda^2} dt + \frac{2\pi}{\alpha} = 0 \quad (2.22)$$

и $\tilde{v}(\lambda_k) = \tilde{v}(-\lambda_k)$ для всех k ($1 \leq k \leq n$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конечность множества $E_{r,n}$ (2.21) вытекает из включения $E_{r,n} \subset E_\alpha$, где E_α имеет вид (1.17) в силу леммы 4 и (2.20). Учитывая (2.12) и (2.15), получим, что нули функции $r(\lambda)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \tilde{v}(\lambda) = \tilde{v}(-\lambda), \\ \frac{\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} dt + 2\lambda = 0. \end{cases}$$

Для ненулевых корней функции $r(\lambda)$ второе соотношение этой системы совпадает с уравнением (2.22). Пусть

$$F(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t^2 - \lambda^2} dt + \frac{2\pi}{\alpha}.$$

Покажем, что если $r(w) = 0$ ($w > 0$), то w является простым корнем функции $F(\lambda)$. Из равенства $F(w) = 0$ следует

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t^2 - \lambda^2} dt - \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t^2 - w^2} dt \\ &= (\lambda - w)(\lambda + w) \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{(t^2 - \lambda^2)(t^2 - w^2)} dt. \end{aligned}$$

Последний интеграл при $\lambda = w$ равен

$$\int_{\mathbb{R}_+} |\psi(t, w)|^2 \frac{dt}{(t + w)^2} \geq 0, \quad (2.23)$$

где

$$\psi(t, w) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t) - \tilde{v}(w) + \tilde{v}(-w)}{t - w} = -2i \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin tx - \sin tw}{t - w} v(x) dx.$$

Функция $\psi(t, w)$ непрерывна (по t) и ограничена в силу (0.3), поэтому интеграл (2.23) конечен. Если $w (> 0)$ является корнем функции $F(\lambda)$ кратности больше 1, то интеграл (2.23) равен нулю, что в силу неотрицательности выражения (2.23) дает $\psi(t, w) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$. А это означает, что $\tilde{v}(t) = \tilde{v}(-t)$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$. Последнее возможно лишь при $v(x) \equiv 0$, что и доказывает простоту корней уравнения (2.22).

По определению $E_{r,0} = \{0\}$.

Пусть $\lambda_k \in E_{r,n}$ ($\lambda_k > 0$); тогда решение $e(x, \lambda_k)$ (1.13) имеет вид

$$e(x, \lambda_k) = \alpha \int_x^\infty \frac{\sin \lambda_k(t-x)}{\lambda_k} v(t) dt \cdot \tilde{v}^*(\lambda_k), \quad (2.24)$$

причем $e(0, \lambda_k) = 0$ в силу $\tilde{v}(\lambda_k) = \tilde{v}(-\lambda_k)$. Итак, функция $e(x, \lambda_k)$ (2.24) является решением краевой задачи (1.1), (1.2). Чтобы показать, что $e(x, \lambda_k) \in L^2_{\mathbb{R}_+}$, воспользуемся теоремой Харди (см. [20], [27], [28]).

ТЕОРЕМА ХАРДИ. Если $f(x) \in L^p_{\mathbb{R}_+}$ ($p > 1$), то функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt, \quad \psi(x) = \int_x^\infty \frac{f(t)}{t} dt \quad (2.25)$$

также принадлежат $L^p_{\mathbb{R}_+}$.

Так как для $e(x, \lambda_k)$ (2.24) справедлива оценка

$$|e(x, \lambda_k)| \leq \left| \frac{\alpha \tilde{v}(\lambda_k)}{\lambda_k} \right| \int_x^\infty |v(t)| dt = \left| \frac{\alpha \tilde{v}(\lambda_k)}{\lambda_k} \right| \int_x^\infty \frac{|tv(t)|}{t} dt,$$

то, применяя теорему Харди ($tv(t) \in L^2_{\mathbb{R}_+}$ (0.3)), получим, что $e(x, \lambda_k) \in L^2_{\mathbb{R}_+}$.

ЛЕММА 12. Если $\lambda_k (\neq 0)$ принадлежит $E_{r,n}$ (2.21), то функция $e(x, \lambda_k)$ (2.24) является решением краевой задачи (1.1), (1.2) и принадлежит пространству $L^2_{\mathbb{R}_+}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если множество $E_{r,n}$ (2.21) состоит более чем из одной точки ($n \geq 1$), то существует конечное число односвязных состояний (см. [3], [23]), которые задают собственные функции $e(x, \lambda_k) (\in L^2_{\mathbb{R}_+})$ краевой задачи (1.1), (1.2), отвечающие собственным значениям $\lambda_k^2 (> 0)$, где $e(x, \lambda_k)$ имеют вид (2.24).

Решение $e(x, \lambda)$ (1.13) при $\lambda = 0$ есть

$$e(x, 0) = 1 - \alpha \int_{\mathbb{R}_+} \int_x^\infty (t-x)v(t) dt \overline{v(x)} dx + \alpha \int_x^\infty (t-x)v(t) dt \int_{\mathbb{R}_+} \overline{v(y)} dy.$$

Нетрудно показать, что $e(0, 0) \neq 0$, и, значит, $e(x, 0)$ не является решением краевой задачи (1.1), (1.2).

§ 3. Прямая и обратная задачи рассеяния ($\alpha > 0$)

3.1. Используя (2.17), запишем равенство (2.6) в виде

$$S(\lambda)A_+(\lambda) = A_-(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

где $A_\pm(\lambda)$ – граничные значения функции $A(\lambda)$ (2.16) на $\mathbb{R}$ из полуплоскостей $\mathbb{C}_\pm$. Зададим функцию

$$B(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{A(\lambda)}{2i\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}; \quad (3.2)$$

тогда граничные значения $B(\lambda)$ на $\mathbb{R}$ из $\mathbb{C}_\pm$ есть (лемма 8)

$$B_+(\lambda) = \frac{r(\lambda)}{2i\lambda}, \quad B_-(\lambda) = -\frac{r(-\lambda)}{2i\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

и, значит, $B_-(\lambda) = B_+(-\lambda)$. В результате мы приходим к краевой задаче Римана (см. [25])

$$S(\lambda)B_+(\lambda) = B_-(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

Учитывая (2.7), (2.12), (2.14), получим

$$B_\pm(\lambda) = 1 \mp \frac{\alpha}{4i\lambda} |\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2 + \frac{\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t^2 - \lambda^2} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

поэтому

$$B_\pm(\infty) = 1. \quad (3.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Из (3.4), (3.5) следует, что функция рассеяния $S(\lambda)$ определяется выражением $|\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2$ и числом α . Таким образом, у краевых задач (1.1), (1.2), отвечающих наборам $\{\alpha, v(x)\}$ и $\{\alpha_1, v_1(\lambda)\}$, у которых $\alpha = \alpha_1$ и $|\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2 = |\tilde{v}_1(\lambda) - \tilde{v}_1(-\lambda)|^2$, будут совпадать функции рассеяния: $S(\lambda) = S_1(\lambda)$.

3.2. Представим функцию $A(\lambda)$ (2.16) в виде $A(\lambda) = -iC(\lambda)$, где

$$C(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} 2\lambda + \frac{\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} dt, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (3.7)$$

Функция $C(\lambda)$ является неванлинновской ($\alpha > 0$), отображает $\mathbb{C}_+$ в $\mathbb{C}_+$, и, значит, $\arg C(\lambda) \in [0, \pi]$ при $\lambda \in \mathbb{C}_+$. Таким образом,

$$A(\lambda) = |A(\lambda)|e^{\pi i \eta(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad (3.8)$$

при этом мы будем считать, что

$$-\frac{1}{2} \leq \eta(\lambda) \leq \frac{1}{2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \quad (3.9)$$

Граничные значения $A_+(\lambda)$ на $\mathbb{R}$ функции $A(\lambda)$ (2.16) из верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ есть

$$A_+(\lambda) = 2i\lambda - \frac{\alpha}{2} |\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2 - \frac{\alpha}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.10)$$

Поэтому

$$A_+(\lambda) = |A_+(\lambda)|e^{\pi i \xi(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.11)$$

в силу (3.8), где $\xi(\lambda)$ – граничные значения на $\mathbb{R}$ из $\mathbb{C}_+$ функции $\eta(\lambda)$, причем

$$-\frac{1}{2} \leq \xi(\lambda) \leq \frac{1}{2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.12)$$

Из (3.10), (3.11) следует, что

$$\operatorname{tg} \pi \xi(\lambda) = - \frac{4\lambda + \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} dt}{\alpha |\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2}. \quad (3.13)$$

Правая часть равенства (3.13) является нечетной функцией, следовательно, $\operatorname{tg} \pi \xi(\lambda) + \operatorname{tg} \pi \xi(-\lambda) = 0$ и, значит, $\sin \pi(\xi(\lambda) + \xi(-\lambda)) = 0$; поэтому $\xi(\lambda) + \xi(-\lambda) = n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Учитывая (3.12), получим, что $n = 0$; таким образом, $\xi(\lambda)$ есть нечетная функция:

$$\xi(-\lambda) = -\xi(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.14)$$

Используя (3.12) и свойства функции $y = \operatorname{tg} x$, мы из (3.13) получим асимптотическое поведение $\xi(\lambda)$ на бесконечности:

$$\xi(\lambda) \rightarrow -\frac{1}{2}, \quad \lambda \rightarrow +\infty; \quad \xi(\lambda) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \lambda \rightarrow -\infty. \quad (3.15)$$

Справедливы следующие очевидные неравенства:

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \pi x \geq \pi x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ \operatorname{tg} \pi x \leq \pi x, & x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right]. \end{cases} \quad (3.16)$$

Из (3.15) вытекает, что при больших $\lambda (\gg 1)$ имеет место $0 \leq \xi(\lambda) + 1/2 \leq 1/2$, поэтому, учитывая (3.16), получим

$$\pi \left(\xi(\lambda) + \frac{1}{2} \right) \leq \operatorname{tg} \pi \left(\xi(\lambda) + \frac{1}{2} \right) = -\operatorname{ctg} \pi \xi(\lambda), \quad \lambda \gg 1.$$

Используя (3.13), приходим к неравенству

$$\pi \left(\xi(\lambda) + \frac{1}{2} \right) \leq \frac{\alpha |\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2}{4\lambda + \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} dt}, \quad \lambda \gg 1.$$

Так как обе части данного неравенства неотрицательны, а функция $\tilde{v}(\lambda)$ ограничена и $\tilde{v}(\lambda) \in L_{\mathbb{R}}^2$, то отсюда следует, что

$$\lambda \left(\xi(\lambda) + \frac{1}{2} \right) \in L_{(N, \infty)}^1$$

и

$$\left(\xi(\lambda) + \frac{1}{2} \right) \in L_{(N, \infty)}^2, \quad \lambda \left(\xi(\lambda) + \frac{1}{2} \right) \in L_{(N, \infty)}^2.$$

Справедливость аналогичных включений на любом конечном интервале $(0, N)$, где $0 < N < \infty$, вытекает из ограниченности (3.12) функции $\xi(\lambda)$. Итак,

$$\lambda \left(\xi(\lambda) + \frac{1}{2} \right) \in L_{\mathbb{R}_+}^1, \quad \left(\xi(\lambda) + \frac{1}{2} \right) \in L_{\mathbb{R}_+}^2, \quad \lambda \left(\xi(\lambda) + \frac{1}{2} \right) \in L_{\mathbb{R}_+}^2. \quad (3.17)$$

Числитель и знаменатель дроби (3.13) являются непрерывными (даже равномерно непрерывными в силу леммы 7) функциями. Непрерывность $\operatorname{tg} \pi \xi(\lambda)$ (3.13) может нарушаться лишь при тех $\lambda \in \mathbb{R}$, где $\tilde{v}(\lambda) = \tilde{v}(-\lambda)$. Если при этих λ ($\tilde{v}(\lambda) = \tilde{v}(-\lambda)$) числитель дроби (3.13) отличен от нуля, то функция $\xi(\lambda)$ будет непрерывной при указанных λ , причем $\xi(\lambda) = 1/2$ (либо $\xi(\lambda) = -1/2$) в силу (3.12) и того, что главное значение $\operatorname{arctg} x$ принадлежит $[-\pi/2, \pi/2]$. Итак, точки разрыва функции $\xi(\lambda)$ содержатся в общих корнях числителя и знаменателя выражения (3.13). Последнее в силу (3.10) означает, что эти точки являются нулями функции $A_+(\lambda)$, а значит, и $r(\lambda)$ (2.17). Используя лемму 11, приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 13. Пусть $\alpha > 0$; тогда функция $\xi(\lambda)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, за исключением конечного числа точек $E_{r,n}$ (2.21). Кроме того, сходятся интегралы

$$\int_{\mathbb{R}_{\pm}} \left| \lambda \left(\xi(\lambda) \pm \frac{1}{2} \right) \right| d\lambda < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}_{\pm}} (1 + \lambda^2) \left| \xi(\lambda) \pm \frac{1}{2} \right|^2 d\lambda < \infty. \quad (3.18)$$

То, что множество точек разрыва функции $\xi(\lambda)$ совпадает с $E_{r,n}$, следует из (3.13), так как частное (3.13) имеет полюс нечетного порядка при $\lambda \in E_{r,n}$. Сходимость интегралов (3.18) на $\mathbb{R}_-$ вытекает из (3.17) в силу нечетности (3.14) функции $\xi(\lambda)$.

Функция $C(\lambda)$ (3.7) отображает $\mathbb{C}_-$ в $\mathbb{C}_-$, поэтому аналогично (3.8) имеем

$$A(\lambda) = |A(\lambda)| e^{\pi i \tilde{\eta}(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-, \quad (3.19)$$

причем

$$\frac{1}{2} \leq \tilde{\eta}(\lambda) \leq \frac{3}{2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-. \quad (3.20)$$

Граничные значения на $\mathbb{R}$ из $\mathbb{C}_-$ функции $A(\lambda)$ (2.16) есть

$$A_-(\lambda) = 2i\lambda + \frac{\alpha}{2} |\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2 - \frac{\alpha}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.21)$$

Следовательно,

$$A_-(\lambda) = |A_-(\lambda)| e^{\pi i \tilde{\eta}_-(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.22)$$

где $\tilde{\eta}_-(\lambda)$ – граничные значения на $\mathbb{R}$ из $\mathbb{C}_-$ функции $\tilde{\eta}(\lambda)$; при этом

$$\frac{1}{2} \leq \tilde{\eta}_-(\lambda) \leq \frac{3}{2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.23)$$

Из (3.21), (3.22) вытекает

$$\operatorname{tg} \pi \tilde{\eta}_-(\lambda) = \frac{4\lambda + \frac{\alpha}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} dt}{\alpha |\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2}. \quad (3.24)$$

Так как $\operatorname{tg} \pi \xi(\lambda) + \operatorname{tg} \pi \tilde{\eta}_-(\lambda) = 0$ в силу (3.13), (3.24), то $\sin \pi (\xi(\lambda) + \tilde{\eta}_-(\lambda)) = 0$ и, значит, $\xi(\lambda) + \tilde{\eta}_-(\lambda) = n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Используя (3.12), (3.23), находим, что $n = 1$, поэтому $\tilde{\eta}_-(\lambda)$ выражается через $\xi(\lambda)$:

$$\tilde{\eta}_-(\lambda) = 1 - \xi(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Учитывая $|A_+(\lambda)| = |A_-(\lambda)|$, в силу (3.10), (3.21) мы из (3.1) получим

$$S(\lambda) = \exp\{\pi i(\tilde{\eta}_-(\lambda) - \xi(\lambda))\} = \exp\left\{2\pi i\left(\frac{1}{2} - \xi(\lambda)\right)\right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.25)$$

ТЕОРЕМА 3. При $\alpha > 0$ функция рассеяния $S(\lambda)$ (2.2) допускает представление

$$S(\lambda) = \exp\{-2\pi i\zeta(\lambda)\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.26)$$

где $\zeta(\lambda)$ – вещественная функция, непрерывная на $\mathbb{R}$, за исключением конечного числа точек $E_{r,n} \setminus \{0\}$, где $E_{r,n}$ имеет вид (2.21).

Функция $\zeta(\lambda)$ почти всюду дифференцируема и обладает свойствами

$$\zeta(-\lambda) = -\zeta(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \zeta(\lambda) \leq 1, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad (3.27)$$

причем

$$\lambda\zeta(\lambda) \in L^1_{\mathbb{R}}, \quad \lambda\zeta(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}. \quad (3.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зададим функцию

$$\zeta(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \xi(\lambda) + \frac{1}{2} \operatorname{sign} \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad (3.29)$$

где $\pi\xi(\lambda)$ – выбранный выше аргумент $A_+(\lambda)$ (3.11). Чтобы изучить поведение функции $\zeta(\lambda)$ (3.29) при $\lambda \rightarrow \pm 0$, запишем формулу (3.13) в виде

$$\operatorname{tg} \pi\xi(\lambda) = -\frac{1}{\lambda\alpha} \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t^2 - \lambda^2} dt \right) \left| \int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin \lambda x}{\lambda} v(x) dx \right|^{-2}. \quad (3.30)$$

Числитель в (3.30) при $\lambda = 0$ положителен:

$$1 + \frac{\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \left| \frac{\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)}{t} \right|^2 dt > 1,$$

так как $\alpha > 0$. Интеграл в левой части данного неравенства конечен, потому что функция

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin tx}{t} v(x) dx$$

принадлежит $L^2_{\mathbb{R}_+}$. Последнее вытекает из равенства

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{\sin tx}{t} v(x) dx = \int_{\mathbb{R}_+} \cos tx \int_x^\infty v(y) dy dx$$

в силу теорем Харди и Планшереля.

Из (3.30) следует, что $\xi(+0) = -1/2$ и $\xi(-0) = 1/2$, поэтому для функции $\xi(\lambda)$ (3.29) имеем $\zeta(+0) = \zeta(-0) = 0$. Полагая по определению, что $\zeta(0) = 0$, мы получим, что $\zeta(\lambda)$ будет непрерывной в точке $\lambda = 0$.

Представление (3.26) вытекает из (3.25), а свойства (3.27) следуют из (3.12), (3.14), наконец, условия (3.28) являются следствием (3.18).

ЗАМЕЧАНИЕ 10. Из ограниченности $\zeta(\lambda)$ и $\lambda\zeta(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}$ (3.28) следует, что $\zeta(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Функция $\zeta(\lambda)$ из (3.26) является функций спектрального сдвига (см. [8], [26]). Соотношение $S(\lambda)S(-\lambda) = 1$ вытекает из нечетности (3.27) функции $\zeta(\lambda)$.

3.3. Обратимся к задаче Римана (3.4). Каждая из функций $B_{\pm}(\lambda)$ (3.3) при продолжении в $\mathbb{C}_{\pm}$ не обращается в нуль (теорема 2, $\alpha > 0$), а в силу леммы 11 на вещественной оси функции $B_{\pm}(\lambda)$ могут иметь $2n + 1$ корней (множество $E_{r,n}$ (2.21)).

Рассмотрим вначале случай, когда $E_{r,n} = E_{r,0} = \{0\}$. Так как

$$B_{\pm}(0) = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \left| \frac{\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)}{t} \right|^2 dt > 0$$

в силу $\alpha > 0$, то в этом случае функции $B_{\pm}(\lambda)$ не обращаются в нуль в замкнутых полуплоскостях $\overline{\mathbb{C}_{\pm}}$. Поэтому (см. [24]) индекс задачи Римана (3.4) равен нулю. Логарифмируя равенство (3.4), получим

$$\ln B_+(\lambda) - \ln B_-(\lambda) = -\ln S(\lambda).$$

Отсюда стандартным образом (см. [24]) находим решение задачи (3.4)

$$B(\lambda) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\ln S(t)}{t - \lambda} dt \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad (3.31)$$

и оно единственно (см. [24]) в силу нормировки (3.6). Граничные значения $B_{\pm}(\lambda)$ функции $B(\lambda)$ (3.31) на $\mathbb{R}$ из полуплоскостей $\mathbb{C}_{\pm}$ равны

$$B_{\pm}(\lambda) = \exp \left\{ \mp \frac{1}{2} \ln S(\lambda) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\ln S(t)}{t - \lambda} dt \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.32)$$

Из $S(-\lambda) = S^{-1}(\lambda)$ следует, что $B_-(\lambda) = B_+(-\lambda)$. Учитывая (3.26), получим

$$B_{\pm}(\lambda) = \exp \left\{ \pm \pi i \zeta(\lambda) + \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta(t)}{t - \lambda} dt \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.33)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\alpha > 0$ и функция $r(\lambda)$ (2.7) не обращается в нуль при $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда функция $\tilde{v}(\lambda)$ (1.6), являющаяся преобразованием Фурье $v(x)$, и функция $\zeta(\lambda)$, задающая представление (3.26) функции рассеяния $S(\lambda)$, удовлетворяют соотношению

$$|\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2 = \frac{4\lambda}{\alpha} \sin \pi \zeta(\lambda) \cdot \exp \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta(t)}{t - \lambda} dt \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.34)$$

Для доказательства (3.34) следует заметить, что

$$\frac{1}{2} (B_+(\lambda) - B_-(\lambda)) = \frac{\alpha}{4\lambda} |\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2 \quad (3.35)$$

в силу (3.5), и применить представления (3.33) для $B_{\pm}(\lambda)$.

3.4. Займемся изучением свойств функции $\zeta(\lambda)$, которые вытекают из выбора класса функций $v(x)$ (0.3).

Для функции

$$B_+(\lambda) = \exp \left\{ \pi i \zeta(\lambda) + \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta(t)}{t - \lambda} dt \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.36)$$

в силу (3.3) и (2.7) имеет место представление

$$B_+(\lambda) = \frac{r(\lambda)}{2i\lambda} = 1 + \frac{\alpha}{2i\lambda} [\tilde{v}(-\lambda)\tilde{v}^*(\lambda) - \Phi^*(\lambda) - \Phi(-\lambda)]. \quad (3.37)$$

Так как $B_+(\lambda)$ не равна нулю при $\lambda \in \mathbb{R}$ и ограничена (лемма 7), то из (3.36) следует

$$m < \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta(t)}{t - \lambda} dt < M. \quad (3.38)$$

Используя лемму 7 и (3.37), получим, что функция $2i\lambda(B_+(\lambda) - 1)$ почти всюду дифференцируема, а ее производная принадлежит $L^2_{\mathbb{R}}$, поэтому

$$\lambda B'_+(\lambda) + (B_+(\lambda) - 1) \in L^2_{\mathbb{R}}.$$

Отсюда в силу $B_+(\lambda) - 1 \in L^2_{\mathbb{R}}$ заключаем, что

$$\lambda B'_+(\lambda) = \lambda \left\{ \pi i \zeta'(\lambda) + \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta(t)}{(t - \lambda)^2} dt \right\} B_+(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}.$$

Так как $B_+^{-1}(\lambda)$ существует и ограничена по модулю в силу (3.38), то

$$\lambda B'_+(\lambda) B_+^{-1}(\lambda) = \pi i \lambda \zeta'(\lambda) + \lambda \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta(t)}{(t - \lambda)^2} dt \in L^2_{\mathbb{R}}.$$

В результате мы приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 14. Если $\alpha > 0$ и функция $r(\lambda)$ (2.7) не обращается в нуль при $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то для функции $\zeta(\lambda)$ из представления (3.26) справедливы включения

$$\lambda \zeta'(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}, \quad \lambda \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta(t)}{(t - \lambda)^2} dt \in L^2_{\mathbb{R}}. \quad (3.39)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 12. Второе условие в (3.39) эквивалентно тому, что

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{t \zeta(t)}{(t - \lambda)^2} dt \in L^2_{\mathbb{R}}, \quad (3.40)$$

так как преобразование Гильберта функции $\zeta(t) \in L^2_{\mathbb{R}}$ (замечание 10) есть функция из $L^2_{\mathbb{R}}$.

Полагая, что $v(x)$ вещественна, запишем соотношение (3.34) в виде

$$\tilde{v}_s^2(\lambda) = \frac{\lambda}{\alpha} \cdot \sin \pi \zeta(\lambda) \cdot \exp \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta(t)}{t - \lambda} dt \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.41)$$

где $\tilde{v}_s(\lambda)$ – синус-преобразование Фурье $v(x)$,

$$\tilde{v}_s(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}_+} \sin \lambda x v(x) dx. \quad (3.42)$$

Дифференцируя равенство (3.41), получим

$$\begin{aligned} 2\tilde{v}_s(\lambda)\tilde{v}_s'(\lambda) = & \frac{1}{\alpha} \left\{ \sin \pi \zeta(\lambda) + \pi \lambda \zeta'(\lambda) \cos \pi \zeta(\lambda) + \lambda \sin \pi \zeta(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta(t) dt}{(t-\lambda)^2} \right\} \\ & \times \exp \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta(t) dt}{t-\lambda} \right\}, \end{aligned}$$

или, учитывая (3.41),

$$2\tilde{v}_s(\lambda)\tilde{v}_s'(\lambda) = \left\{ \frac{1}{\lambda} + \pi \zeta'(\lambda) \operatorname{ctg} \pi \zeta(\lambda) + \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta(t) dt}{(t-\lambda)^2} \right\} \tilde{v}_s^2(\lambda). \quad (3.43)$$

Покажем, что множество решений уравнения $\tilde{v}_s(\lambda) = 0$ состоит не более чем из счетного числа изолированных точек. Действительно, полагая противное, предположим, что нашелся такой интервал $I \subset \mathbb{R}$, что $\tilde{v}_s(\lambda) = 0$ для всех $\lambda \in I$, а это означает, что $\tilde{v}(-\lambda) = \tilde{v}(\lambda)$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Так как функции $\tilde{v}(-\lambda)$ и $\tilde{v}(\lambda)$ голоморфно продолжаемы в $\mathbb{C}_+$ и в $\mathbb{C}_-$ соответственно и непрерывны на I , то в силу принципа аналитического продолжения ($\tilde{v}(-\lambda) = \tilde{v}(\lambda)$ для всех $\lambda \in I$) мы получим, что $\tilde{v}(-\lambda)$ ($= \tilde{v}(\lambda)$) аналитичны на I и, значит, бесконечно дифференцируемы. Итак, $\tilde{v}_s(\lambda)$ бесконечно дифференцируема при $\lambda \in I$ и $\tilde{v}_s^{(n)}(\lambda) = 0$, когда $\lambda \in I$, поэтому

$$\int_{\mathbb{R}_+} t^{2n} \sin \lambda t v(t) dt = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, \quad \forall \lambda \in I.$$

Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}_+} \cos \mu t \sin \lambda t v(t) dt = 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}, \quad \forall \lambda \in I,$$

что в силу теоремы Планшереля дает $\sin \lambda t v(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \forall \lambda \in I$, и, значит, $v(t) = 0$ при $t \in \mathbb{R}_+$.

Учитывая это замечание, из (3.43) получим, что вне счетного множества точек λ (где $\tilde{v}_s(\lambda) = 0$) справедливо равенство

$$2\tilde{v}_s'(\lambda) = \frac{\tilde{v}_s(\lambda)}{\lambda} + \pi \zeta'(\lambda) \operatorname{ctg} \pi \zeta(\lambda) \tilde{v}_s(\lambda) + \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta(t)}{(t-\lambda)^2} dt \cdot \tilde{v}_s(\lambda). \quad (3.44)$$

Так как функция $\tilde{v}_s(\lambda)/\lambda$ ограничена при $\lambda = 0$ в силу (0.3), то $\tilde{v}_s(\lambda)/\lambda \in L^2_{\mathbb{R}}$. Записав третье слагаемое в (3.44) в виде

$$\lambda \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta(t) dt}{(t-\lambda)^2} \cdot \frac{\tilde{v}_s(\lambda)}{\lambda}$$

и используя (3.39), а также ограниченность $\tilde{v}_s(\lambda)/\lambda$, получим, что оно принадлежит $L^2_{\mathbb{R}}$. Отсюда и из того, что $\tilde{v}'_s(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}$, следует, что

$$\zeta'(\lambda) \operatorname{ctg} \pi \zeta(\lambda) \tilde{v}_s(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}, \quad (3.45)$$

т. е.

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda (\zeta'(\lambda))^2 \left(\frac{1}{\sin \pi \zeta(\lambda)} - \sin \pi \zeta(\lambda) \right) \exp \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta(t)}{t - \lambda} dt \right\} d\lambda < \infty. \quad (3.46)$$

Учитывая (3.38), мы приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 15. Пусть $\alpha > 0$ и $r(\lambda)$ (2.7) не обращается в нуль при $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, кроме того, функция $v(x)$ вещественна и имеет место (0.3). Тогда сходится интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda (\zeta'(\lambda))^2 \left(\frac{1}{\sin \pi \zeta(\lambda)} - \sin \pi \zeta(\lambda) \right) d\lambda < \infty, \quad (3.47)$$

где $\zeta(\lambda)$ – функция спектрального сдвига из представления (3.26) для $S(\lambda)$.

Теперь мы можем дать описание данных рассеяния в том случае, когда $v(x)$ вещественна и удовлетворяет условию (0.3), а функция $r(\lambda)$ (2.7) не имеет нулей при $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Класс Ω_0 . Вещественную непрерывную нечетную функцию $\zeta(\lambda)$, для которой имеет место $0 \leq \zeta(\lambda) \leq 1$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$, будем относить к классу Ω_0 , если:

- 1) функция $\lambda \zeta(\lambda)$ принадлежит пространству $L^1_{\mathbb{R}}$;
- 2) функция

$$F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta(t)}{t - \lambda} dt$$

ограничена, почти всюду дифференцируема и $\lambda F'(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}$;

- 3) функция $\zeta(\lambda)$ почти всюду дифференцируема и сходится интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda (\zeta'(\lambda))^2 \left(\frac{1}{\sin \pi \zeta(\lambda)} - \sin \pi \zeta(\lambda) \right) d\lambda < \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Из условия $\lambda \zeta(\lambda) \in L^1_{\mathbb{R}}$, а также из ограниченности и непрерывности функции $\zeta(\lambda)$ следует, что $\zeta(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}$ и $\lambda \zeta(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}$.

Действительно, $\lambda \zeta(\lambda) \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \infty$ в силу $\lambda \zeta(\lambda) \in L^1_{\mathbb{R}}$ и непрерывности $\zeta(\lambda)$, поэтому функция $\lambda \zeta(\lambda)$ ограничена на $\mathbb{R}$. Отсюда вытекает, что $\lambda \zeta(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}$.

Чтобы показать, что $\zeta(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}$, нам в силу ограниченности $\zeta(\lambda)$ следует убедиться в квадратичной интегрируемости модуля функции $\zeta(\lambda)$ в окрестности бесконечно удаленной точки. Последнее очевидно, так как

$$\int_{|\lambda| > N} |\zeta(\lambda)|^2 d\lambda = \int_{|\lambda| > N} \frac{1}{\lambda^2} |\lambda \zeta(\lambda)|^2 d\lambda < \infty$$

в силу $\lambda \zeta(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\zeta(\lambda) \in \Omega_0$ и $\tilde{v}_s(\lambda)$ – синус-преобразование Фурье (3.42) вещественной функции $v(x)$. Тогда если имеет место (3.41), то $v(x)$ удовлетворяет условию (0.3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам необходимо показать, что функция $\tilde{v}_s(\lambda)$ (3.42) принадлежит $L^2_{\mathbb{R}}$ и $\tilde{v}'_s(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}$ (см. [20], [21]). Так как $\lambda\zeta(\lambda) \in L^1_{\mathbb{R}}$ (п. 1) класса Ω_0 , а функция $F(\lambda)$ ограничена (п. 2) класса Ω_0 , то из (3.41) в силу оценки $|\sin \pi\zeta(\lambda)| \leq \pi|\zeta(\lambda)|$ следует, что $\tilde{v}_s(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}$.

Для доказательства $\tilde{v}'_s(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}$ воспользуемся равенством (3.44). Так как $\tilde{v}_s(0) = 0$, то первое слагаемое правой части (3.44) есть функция из $L^2_{\mathbb{R}}$. Второе слагаемое суммы (3.44) также принадлежит $L^2_{\mathbb{R}}$, потому что $\lambda F'(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}$, а функция $\tilde{v}_s(\lambda)/\lambda$ ограничена, что вытекает из (3.41) в силу ограниченности $F(\lambda)$ и $\sin \pi\zeta(\lambda)/\lambda$. Чтобы завершить доказательство предложения, осталось заметить, что включение (3.45) эквивалентно условию 3) класса Ω_0 в силу ограниченности функции $F(\lambda)$.

3.5. Перейдем к обратной задаче – задаче восстановления параметров одномерного возмущения α и $v(x)$ по функции спектрального сдвига $\zeta(\lambda)$, полагая, что $v(x)$ вещественна, а $\zeta(\lambda) \in \Omega_0$.

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\zeta_+(\lambda)$ и $\zeta_-(\lambda)$ – две функции спектрального сдвига краевой задачи (1.1), (1.2), отвечающие наборам $\{\alpha, v(x) + h(x)\}$ и $\{\alpha, v(x) - h(x)\}$ соответственно, где $\alpha > 0$, а функции $v(x)$, $h(x)$ вещественные и удовлетворяют условию (0.3). Предположим, что $\|v(x)\|_{L^2_{\mathbb{R}+}} = 1$, а известная функция $h(x)$ такова, что ее синус-преобразование Фурье $\tilde{h}_s(\lambda) \neq 0$ (п.в.) и $|h(x)| < C (\ll 1)$.

Тогда если $\zeta_+(\lambda) \in \Omega_0$, то по двум функциям спектрального сдвига $\zeta_+(\lambda)$ и $\zeta_-(\lambda)$ число $\alpha (> 0)$ и функция $v(x)$ восстанавливаются однозначно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно показать, что если $\zeta_+(\lambda) \in \Omega_0$ и $h(x)$ удовлетворяет условию $|h(x)| < C (\ll 1)$, то функция $\zeta_-(\lambda)$ также принадлежит классу Ω_0 . Последнее вытекает из того, что функция $r(\lambda)$ (2.7) претерпевает малое возмущение при малых изменениях $v(x)$.

Если $\zeta_+(\lambda)$ и $\zeta_-(\lambda)$ принадлежат классу Ω_0 , то из (3.41) мы по этим функциям находим выражения

$$\alpha \tilde{v}_s^2(\lambda) + \alpha 2\tilde{v}_s(\lambda)\tilde{h}_s(\lambda) + \alpha \tilde{h}_s^2(\lambda), \quad \alpha \tilde{v}_s^2(\lambda) - \alpha 2\tilde{v}_s(\lambda)\tilde{h}_s(\lambda) + \alpha \tilde{h}_s^2(\lambda),$$

вычитая которые, единственным образом вычисляем $\alpha \tilde{v}_s(\lambda)$, так как $\tilde{h}_s(\lambda)$ известна и отлична от нуля почти всюду. Число $\alpha (> 0)$ находится из условия нормировки $\|\tilde{v}_s(\lambda)\|_{L^2_{\mathbb{R}}} = 1$.

В качестве $h(x)$ можно выбрать $h(x) = cx/(x^2 + a^2)$ ($c > 0$, $a > 0$), тогда функция $\tilde{h}_s(\lambda) = 2^{-1}\pi ce^{-a\lambda}$ будет удовлетворять условиям теоремы.

3.6. Пусть множество нулей функции $r(\lambda)$ (2.7) имеет вид $E_{r,n}$ (2.21), где $n \geq 1$. Запишем задачу Римана (3.4) в следующей форме:

$$\left(\frac{\lambda - ib}{\lambda + ib} \right)^{2n} S(\lambda) \cdot \frac{(\lambda + ib)^{2n}}{\prod_{k=1}^n (\lambda^2 - \lambda_k^2)} B_+(\lambda) = \frac{(\lambda - ib)^{2n}}{\prod_{k=1}^n (\lambda^2 - \lambda_k^2)} B_-(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.48)$$

где $b > 0$. Функции

$$B_{\pm}(\lambda, b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\lambda \pm ib)^{2n}}{\prod_{k=1}^n (\lambda^2 - \lambda_k^2)} B_{\pm}(\lambda) \quad (3.49)$$

голоморфно продолжаемы в $\mathbb{C}_{\pm}$ и не имеют нулей в замкнутых полуплоскостях $\overline{\mathbb{C}_{\pm}}$ (точка $\lambda = 0$ не является корнем функций $B_{\pm}$ в силу рассуждений п. 3.3). Кроме того, из (3.6) следует

$$B_{\pm}(\infty, b) = 1. \quad (3.50)$$

Итак, задача Римана (3.48) имеет вид

$$S(\lambda, b) B_+(\lambda, b) = B_-(\lambda, b), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.51)$$

где

$$S(\lambda, b) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\lambda - ib}{\lambda + ib} \right)^{2n} S(\lambda). \quad (3.52)$$

Единственное в силу (3.50) решение (см. п. 3.2) краевой задачи (3.51) задается формулой

$$B(\lambda, b) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\ln S(t, b)}{t - \lambda} dt \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (3.53)$$

Граничные значения функции $B(\lambda, b)$ (3.53) на вещественной оси из полуплоскостей $\mathbb{C}_{\pm}$ есть

$$B_{\pm}(\lambda) = \exp \left\{ \mp \frac{1}{2} \ln S(\lambda, b) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\ln S(t, b)}{t - \lambda} dt \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (3.54)$$

Учитывая (3.49) и (3.52), находим

$$B_{\pm}(\lambda) = \frac{\prod_{k=1}^n (\lambda^2 - \lambda_k^2)}{(\lambda^2 + b^2)^n} \exp \left\{ \mp \frac{1}{2} \ln S(\lambda) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\ln S(t, b)}{t - \lambda} dt \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Так как

$$\left| \frac{t - ib}{t + ib} \right| = 1, \quad \arg \frac{t - ib}{t + ib} = -2 \operatorname{arctg} \frac{b}{t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

то

$$B_{\pm}(\lambda) = \psi^n(\lambda, b) \prod_{k=1}^n (\lambda^2 - \lambda_k^2) \exp \left\{ \mp \frac{1}{2} \ln S(\lambda) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\ln S(t)}{t - \lambda} dt \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.55)$$

где

$$\psi(\lambda, b) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\lambda^2 + b^2} \exp \left\{ \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{arctg}(b/t)}{t - \lambda} dt \right\}. \quad (3.56)$$

ЛЕММА 16. Функция $\psi(\lambda, b)$ (3.56) не зависит от параметра b ($b > 0$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что функция

$$F(\lambda, b) = \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\arctg(b/t)}{t - \lambda} dt - \ln(\lambda^2 + b^2)$$

такова, что $F(\lambda, b) = F(\lambda, 1)$ для любого $b > 0$. Так как (см. [20])

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{t}{t^2 + y^2} \frac{dt}{t - \lambda} = \frac{y}{\lambda^2 + y^2} \quad \forall y > 0,$$

то, интегрируя данное равенство по переменной y в пределах от 1 до b и применяя теорему Фубини (что возможно в силу $\arctg(y/t) \in L^2_{\mathbb{R}}$ при каждом $y > 0$), мы и получим необходимое $F(\lambda, b) = F(\lambda, 1)$.

Поэтому мы априори можем считать, что $b = 1$. Учитывая (3.26) и (3.55), находим вид функций $B_{\pm}(\lambda)$:

$$B_{\pm}(\lambda) = \psi^n(\lambda) \prod_{k=1}^n (\lambda^2 - \lambda_k^2) \exp \left\{ \pm \pi i \zeta(\lambda) + \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta(t)}{t - \lambda} dt \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.57)$$

где

$$\psi(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\lambda^2 + 1} \exp \left\{ \frac{2}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{\arctg(1/t)}{t - \lambda} dt \right\}. \quad (3.58)$$

Используя (3.35), мы получим следующий аналог теоремы 4.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\alpha > 0$ и множество нулей функции $r(\lambda)$ (2.7) имеет вид $E_{r,n}$ (2.21), где $n \geq 1$. Тогда функция $\tilde{v}(\lambda)$ (1.6), являющаяся преобразованием Фурье $v(x)$, и функция $\zeta(\lambda)$, задающая представление (3.26) функции рассеяния $S(\lambda)$, удовлетворяют соотношению

$$|\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2 = \frac{4\lambda}{\alpha} \psi^n(\lambda) \prod_{k=1}^n (\lambda^2 - \lambda_k^2) \sin \pi \zeta(\lambda) \cdot \exp \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta(t)}{t - \lambda} dt \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.59)$$

где $\psi(\lambda)$ имеет вид (3.58).

3.7. Изучим свойства функции $\zeta(\lambda)$, полагая, что множество нулей $r(\lambda)$ (2.7) имеет вид $E_{r,n}$ (2.21), где $n \geq 1$. Используя (3.57) и (3.58), запишем $B_+(\lambda)$ в следующей форме:

$$B_+(\lambda) = Q_n(\lambda) \exp \left\{ \pi i \zeta(\lambda) + \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta_n(\lambda)}{t - \lambda} dt \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.60)$$

где

$$Q_n(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{k=1}^n \frac{\lambda^2 - \lambda_k^2}{\lambda^2 + 1}, \quad \zeta_n(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \zeta(\lambda) + \frac{2n}{\pi} \arctg \frac{1}{\lambda}. \quad (3.61)$$

Экспонента в (3.60) ограничена и не обращается в нуль (в силу (3.37) и лемм 7, 11), поэтому аналогично (3.38) имеет место

$$m < \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta_n(t)}{t - \lambda} dt < M. \quad (3.62)$$

Используя лемму 7 и (3.37), мы получим, что $\lambda B'_+(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}$ (см. п. 3.4). Так как $\lambda Q'_n(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}$, то, повторяя рассуждения доказательства леммы 14, мы приходим к следующему утверждению.

ЛЕММА 17. Пусть $\alpha > 0$ и множество корней функции $r(\lambda)$ (2.7) имеет вид $E_{r,n}$ (2.21) ($n \geq 1$). Тогда для функции $\zeta(\lambda)$ из представления (3.26) справедливы включения

$$\lambda Q_n(\lambda) \zeta'(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}, \quad \lambda Q_n(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta_n(t)}{t - \lambda} dt \in L^2_{\mathbb{R}}, \quad (3.63)$$

где $Q_n(\lambda)$ и $\zeta_n(\lambda)$ заданы формулами (3.61).

Считая, что $v(x)$ вещественная, и используя (3.61), запишем соотношение (3.61) в виде

$$\tilde{v}_s^2(\lambda) = \frac{\lambda}{\alpha} Q_n(\lambda) \sin \pi \zeta(\lambda) \exp \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta_n(t)}{t - \lambda} dt \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (3.64)$$

где $\tilde{v}_s(\lambda)$ – синус-преобразование Фурье (3.42) функции $v(x)$. Дифференцируя равенство (3.64), получим

$$\begin{aligned} 2\tilde{v}_s(\lambda) \tilde{v}_s'(\lambda) &= \frac{1}{\alpha} \left\{ Q_n(\lambda) \sin \pi \zeta(\lambda) + \lambda Q_n'(\lambda) \sin \pi \zeta(\lambda) + \lambda Q_n(\lambda) \pi \zeta'(\lambda) \cos \pi \zeta(\lambda) \right. \\ &\quad \left. + \lambda Q_n(\lambda) \sin \pi \zeta(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta_n(t)}{(t - \lambda)^2} dt \right\} \exp \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta_n(t)}{t - \lambda} dt \right\}, \end{aligned}$$

или, учитывая (3.64),

$$2\tilde{v}_s(\lambda) \tilde{v}_s'(\lambda) = \left\{ \frac{1}{\lambda} + \frac{Q_n'(\lambda)}{Q_n(\lambda)} + \pi \zeta'(\lambda) \operatorname{ctg} \pi \zeta(\lambda) + \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta_n(t)}{(t - \lambda)^2} dt \right\} \tilde{v}_s^2. \quad (3.65)$$

Поэтому вне счетного множества точек λ , где $\tilde{v}_s(\lambda) = 0$ (см. п. 3.4), справедливо равенство

$$2\tilde{v}_s'(\lambda) = \frac{\tilde{v}_s(\lambda)}{\lambda} + \frac{Q_n'(\lambda)}{Q_n(\lambda)} \tilde{v}_s(\lambda) + \pi \zeta'(\lambda) \operatorname{ctg} \pi \zeta(\lambda) \tilde{v}_s(\lambda) + \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta_n(t)}{(t - \lambda)^2} dt \cdot \tilde{v}_s(\lambda). \quad (3.66)$$

Очевидно, что $\tilde{v}_s(\lambda)/\lambda \in L^2_{\mathbb{R}}$. Так как

$$\frac{Q_n'(\lambda)}{Q_n(\lambda)} \tilde{v}_s(\lambda) = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 1} \sum_{k=1}^n (\lambda_k^2 + 1) \frac{\tilde{v}_s(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2},$$

то, используя ограниченность функций

$$\frac{\tilde{v}_s(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

которая имеет место в силу леммы 11, мы получим, что второе слагаемое в (3.66) принадлежит $L^2_{\mathbb{R}}$. Записав последнее слагаемое в (3.66) в виде

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta_n(t)}{(t - \lambda)^2} dt \cdot \tilde{v}_s(\lambda) = \lambda Q_n(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta_n(t)}{(t - \lambda)^2} dt \cdot \frac{\tilde{v}_s(\lambda)}{\lambda Q_n(\lambda)}$$

и учитывая ограниченность функции $\tilde{v}_s(\lambda)/(\lambda Q_n(\lambda))$ (лемма 11), мы приходим к тому, что оно лежит в пространстве $L^2_{\mathbb{R}}$ в силу (3.63). Отсюда и из условия $\tilde{v}'_s(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}$ вытекает, что

$$\zeta'(\lambda) \operatorname{ctg} \pi \zeta(\lambda) \tilde{v}_s(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}. \quad (3.67)$$

Таким образом, сходится интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} (\zeta'(\lambda))^2 \frac{\lambda \cos^2 \pi \zeta(\lambda)}{\sin \pi \zeta(\lambda)} Q_n(\lambda) \exp \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta_n(t)}{t - \lambda} dt \right\} d\lambda < \infty.$$

Используя двустороннюю оценку (3.62), мы получим следующее утверждение.

ЛЕММА 18. Пусть $\alpha > 0$ и множество нулей функции $r(\lambda)$ (2.7) имеет вид $E_{r,n}$ (2.21) ($n \geq 1$), кроме того, $v(x)$ вещественна и имеет место (0.3). Тогда сходится интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} (\zeta'(\lambda))^2 \lambda Q_n(\lambda) \left(\frac{1}{\sin \pi \zeta(\lambda)} - \sin \pi \zeta(\lambda) \right) d\lambda < \infty, \quad (3.68)$$

где $\zeta(\lambda)$ – функция спектрального сдвига из представления (3.26) для $S(\lambda)$, а $Q_n(\lambda)$ имеет вид (3.61).

Описание данных рассеяния в данном случае состоит в следующем.

Класс Ω_n . Вещественную нечетную непрерывную на множестве $\mathbb{R} \setminus \{\pm \lambda_k\}_1^n$, где $\lambda_k > 0$ ($1 \leq k \leq n$, $n \in \mathbb{N}$), функцию $\zeta(\lambda)$, удовлетворяющую условию $0 \leq \zeta(\lambda) \leq 1$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$, будем относить к классу Ω_n , если:

- 1) функция $\lambda \zeta(\lambda)$ принадлежит $L^2_{\mathbb{R}}$;
- 2) функция

$$F_n(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta_n(t)}{t - \lambda} dt$$

ограничена и почти всюду дифференцируема, причем

$$\lambda Q_n(\lambda) F'_n(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}},$$

где $Q_n(\lambda)$ и $\zeta_n(\lambda)$ имеют вид (3.61);

- 3) функция $\zeta(\lambda)$ почти всюду дифференцируема и сходится интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda Q_n(\lambda) (\zeta'(\lambda))^2 \left(\frac{1}{\sin \pi \zeta(\lambda)} - \sin \pi \zeta(\lambda) \right) d\lambda < \infty.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\zeta(\lambda) \in \Omega_n$ и $\tilde{v}_s(\lambda)$ – синус-преобразование Фурье (3.42) вещественной функции $v(x)$. Тогда если имеет место (3.64), то $v(x)$ удовлетворяет условию (0.3).

Доказательство теоремы повторяет рассуждения, использованные при доказательстве утверждения 1, при этом необходимо воспользоваться равенством (3.66).

Решение обратной задачи содержится в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\zeta_+(\lambda)$ и $\zeta_-(\lambda)$ – две функции спектрального сдвига краевой задачи (1.1), (1.2), отвечающие наборам $\{\alpha, v(x) + h(x)\}$ и $\{\alpha, v(x) - h(x)\}$ соответственно, где $\alpha > 0$, а функции $v(x)$ и $h(x)$ вещественны и удовлетворяют условию (0.3). Предположим, что $\|v(x)\|_{L^2_{\mathbb{R}}} = 1$, а известная функция $h(x)$ такова, что ее синус-преобразование Фурье $\tilde{h}_s(\lambda)$ не равно нулю почти всюду.

Тогда по $\zeta_+(\lambda) \in \Omega_{n_+}$ и $\zeta_-(\lambda) \in \Omega_{n_-}$ число α и функция $v(x)$ восстанавливаются единственным образом.

Доказательство данной теоремы аналогично доказательству теоремы 5.

§ 4. Прямая и обратная задачи рассеяния ($\alpha < 0$)

4.1. Функция $A(\lambda)$ (2.16) при $\alpha < 0$ имеет один простой корень $\lambda = i\kappa \in \mathbb{C}_+$ ($\kappa > 0$) в силу теоремы 2, поэтому функции $A_{\pm}(\lambda)/(\lambda \mp i\kappa)$ при продолжении в $\mathbb{C}_{\pm}$ не обращаются в нуль. Так как (см. (3.10), (3.21))

$$A_{\pm}(\lambda) = 2i\lambda \mp \frac{\alpha}{2} |\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2 + \frac{\alpha i\lambda}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t^2 - \lambda^2} dt, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4.1)$$

то $A_{\pm}(0) = 0$.

ЛЕММА 19. При $\alpha < 0$ значение $\lambda = 0$ является простым корнем функций $A_{\pm}(\lambda)$ (4.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $(A_{\pm}(\lambda)/\lambda)|_{\lambda=0} \neq 0$. Из (4.1) следует

$$\operatorname{Im} \left(\frac{A_{\pm}(\lambda)}{\lambda} \right) \Big|_{\lambda=0} = 2 \left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t^2} dt \right).$$

Так как (см. (2.19))

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t^2 + \kappa^2} dt = -\frac{2\pi}{\alpha} > 0 \quad (4.2)$$

($\alpha < 0$), то

$$\operatorname{Im} \left(\frac{A_{\pm}(\lambda)}{\lambda} \right) \Big|_{\lambda=0} = \frac{\alpha \kappa^2}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t^2(t^2 - \kappa^2)} dt < 0$$

и, значит,

$$\left(\frac{A_{\pm}(\lambda)}{\lambda} \right) \Big|_{\lambda=0} \neq 0.$$

Используя (4.2), преобразуем выражение (2.16) для $A(\lambda)$:

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= 2i\lambda + \frac{\alpha i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} dt = \frac{\alpha i}{2\pi} \left\{ 2\lambda \frac{2\pi}{\alpha} + \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} dt \right\} \\ &= \frac{\alpha \lambda i}{\pi} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{(t^2 - \lambda^2)} dt - \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t^2 + \varkappa^2} dt \right\} \\ &= \frac{\alpha \lambda i}{\pi} (\varkappa^2 + \lambda^2) \int_{\mathbb{R}_+} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{(t^2 - \lambda^2)(t^2 + \varkappa^2)} dt \\ &= \frac{i\alpha}{2\pi} (\lambda^2 + \varkappa^2) \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} \frac{dt}{t^2 + \varkappa^2}. \end{aligned}$$

Итак,

$$A(\lambda) = \frac{i\alpha}{2\pi} (\lambda^2 + \varkappa^2) C(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, \quad (4.3)$$

где

$$C(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} \frac{dt}{t^2 + \varkappa^2}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (4.4)$$

Функция $C(\lambda)$ (4.4) является неанлиновской и отображает $\mathbb{C}_+$ в $\mathbb{C}_+$, поэтому $\arg C(\lambda) \in [0, \pi]$ при $\lambda \in \mathbb{C}_+$, следовательно,

$$-iC(\lambda) = |C(\lambda)|e^{\pi i \eta(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+, \quad (4.5)$$

причем

$$-\frac{1}{2} \leq \eta(\lambda) \leq \frac{1}{2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+. \quad (4.6)$$

Граничные значения на $\mathbb{R}$ из $\mathbb{C}_+$ функции $-iC(\lambda)$ есть

$$-iC_+(\lambda) = \pi \frac{|\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2}{\lambda^2 + \varkappa^2} - i \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} \frac{dt}{t^2 + \varkappa^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.7)$$

Из (4.5) вытекает

$$-iC_+(\lambda) = |C_+(\lambda)|e^{\pi i \xi(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4.8)$$

где $\xi(\lambda)$ – граничные значения на $\mathbb{R}$ из $\mathbb{C}_+$ функции $\eta(\lambda)$, при этом

$$-\frac{1}{2} \leq \xi(\lambda) \leq \frac{1}{2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.9)$$

Учитывая (4.7), (4.8), получим

$$\operatorname{tg} \pi \xi(\lambda) = - \frac{(\lambda^2 + \varkappa^2) \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|}{t - \lambda} \frac{dt}{t^2 + \varkappa^2}}{\pi |\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2}. \quad (4.10)$$

Правая часть равенства (4.10) является нечетной функцией, поэтому $\operatorname{tg} \pi \xi(\lambda) + \operatorname{tg} \pi \xi(-\lambda) = 0$, следовательно, $\sin \pi(\xi(\lambda) + \xi(-\lambda)) = 0$ и, значит, $\xi(\lambda) + \xi(-\lambda) = n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Используя (4.9), находим, что $n = 0$, т.е.

$$\xi(-\lambda) = -\xi(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.11)$$

Преобразуем числитель дроби (4.10):

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda^2 + \varkappa^2}{t - \lambda} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t^2 + \varkappa^2} dt &= - \int_{\mathbb{R}} \left(\lambda + t + \frac{t^2 + \varkappa^2}{\lambda - t} \right) \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t^2 + \varkappa^2} dt \\ &= -\lambda \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t^2 + \varkappa^2} dt + \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} dt, \end{aligned}$$

что после использования (4.2) дает

$$\operatorname{tg} \pi \xi(\lambda) = - \frac{\frac{2\pi\lambda}{\alpha} + \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} dt}{\pi |\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.12)$$

Отсюда в силу (4.9) и $\alpha < 0$ находим асимптотическое поведение $\xi(\lambda)$ на бесконечности:

$$\xi(\lambda) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \lambda \rightarrow \infty; \quad \xi(\lambda) \rightarrow -\frac{1}{2}, \quad \lambda \rightarrow -\infty. \quad (4.13)$$

Из (4.9) и (4.13) следует, что при $\lambda \gg 1$ имеет место $-1/2 \leq \xi(\lambda) - 1/2 \leq 0$, поэтому, учитывая (3.16), получим

$$\pi \left(\xi(\lambda) - \frac{1}{2} \right) = -\operatorname{ctg} \pi \xi(\lambda), \quad \lambda \gg 1,$$

и, значит,

$$\pi \left(\frac{1}{2} - \xi(\lambda) \right) \leq \frac{\pi |\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2}{-\frac{2\pi\lambda}{\alpha} - \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} dt}, \quad \lambda \gg 1,$$

в силу (4.12). Используя это неравенство, мы приходим к следующему утверждению, которое аналогично лемме 13.

ЛЕММА 20. Пусть $\alpha < 0$; тогда функция $\xi(\lambda)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, за исключением конечного числа точек $E_{r,n}$, где $E_{r,n}$ имеет вид (2.21). Кроме того, сходятся интегралы

$$\int_{\mathbb{R}_{\pm}} \left| \lambda \left(\xi(\lambda) \mp \frac{1}{2} \right) \right| d\lambda < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}_{\pm}} (1 + \lambda^2) \left| \xi(\lambda) \mp \frac{1}{2} \right|^2 d\lambda < \infty. \quad (4.14)$$

Функция $C(\lambda)$ (4.4) отображает $\mathbb{C}_-$ в $\mathbb{C}_-$, поэтому аналогично (4.5) имеем

$$-iC(\lambda) = |C(\lambda)| e^{\pi i \tilde{\eta}(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-, \quad (4.15)$$

причем

$$\frac{1}{2} \leq \tilde{\eta}(\lambda) \leq \frac{3}{2}, \quad \lambda \in \mathbb{C}_-. \quad (4.16)$$

Граничные значения функции $-iC(\lambda)$ на $\mathbb{R}$ из $\mathbb{C}_-$ есть

$$-iC_-(\lambda) = -\pi \frac{|\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2}{\lambda^2 + \varkappa^2} - i \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} \frac{dt}{t^2 + \varkappa^2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.17)$$

Следовательно,

$$-iC_-(\lambda) = |C_-(\lambda)|e^{\pi i\tilde{\eta}_-(\lambda)}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4.18)$$

где $\tilde{\eta}_-(\lambda)$ – граничные значения на $\mathbb{R}$ из $\mathbb{C}_-$ функции $\tilde{\eta}(\lambda)$, при этом

$$\frac{1}{2} \leq \tilde{\eta}_-(\lambda) \leq \frac{3}{2}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.19)$$

Из (4.17), (4.18) следует

$$\operatorname{tg} \pi \tilde{\eta}_-(\lambda) = \frac{(\lambda^2 + \varkappa^2) \int_{\mathbb{R}} \frac{|\tilde{v}(t) - \tilde{v}(-t)|^2}{t - \lambda} \frac{dt}{t^2 + \varkappa^2}}{\pi |\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2}. \quad (4.20)$$

Так как $\operatorname{tg} \pi \xi(\lambda) + \operatorname{tg} \pi \tilde{\eta}_-(\lambda) = 0$ в силу (4.10), (4.20), то $\sin \pi(\xi(\lambda) + \tilde{\eta}_-(\lambda)) = 0$ и, значит, $\xi(\lambda) + \tilde{\eta}_-(\lambda) = n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Учитывая (4.9), (4.19), находим, что $n = 1$; таким образом,

$$\tilde{\eta}_-(\lambda) = 1 - \xi(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.21)$$

Запишем равенство (3.1) в виде $S(\lambda)(-iC_+(\lambda)) = -iC_-(\lambda)$; тогда из $|C_+(\lambda)| = |C_-(\lambda)|$ (см. (4.7), (4.17)) и (4.5), (4.15) в силу (4.21) вытекает

$$S(\lambda) = \exp\{\pi i(\tilde{\eta}_-(\lambda) - \xi(\lambda))\} = \exp\left\{2\pi i\left(\frac{1}{2} - \xi(\lambda)\right)\right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.22)$$

Справедлив следующий аналог теоремы 3.

ТЕОРЕМА 8. При $\alpha < 0$ функция рассеяния $S(\lambda)$ (2.2) допускает представление

$$S(\lambda) = \exp\{-2\pi i\zeta(\lambda)\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4.23)$$

где $\zeta(\lambda)$ – вещественная непрерывная на $\mathbb{R}$ функция, за исключением конечного числа точек $E_{r,n}$, где $E_{r,n}$ имеет вид (2.21).

Функция $\zeta(\lambda)$ почти всюду дифференцируема и обладает свойствами

$$\zeta(-\lambda) = -\zeta(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad -1 \leq \zeta(\lambda) \leq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad (4.24)$$

причем

$$\lambda\zeta(\lambda) \in L^1_{\mathbb{R}}, \quad \lambda\zeta(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}. \quad (4.25)$$

Доказательство теоремы повторяет доказательство теоремы 3. Для этого следует задать функцию $\zeta(\lambda)$:

$$\zeta(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \xi(\lambda) - \frac{1}{2} \operatorname{sign} \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (4.26)$$

В отличие от случая $\alpha > 0$ функция $\zeta(\lambda)$ (4.26) имеет разрыв в точке $\lambda = 0$, так как $\xi(+0) = -1/2$, $\xi(-0) = 1/2$ в силу (4.10).

4.2. Запишем равенство (3.1) в виде

$$S(\lambda, b, \varkappa) B_+(\lambda, b, \varkappa) = B_-(\lambda, b, \varkappa), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4.27)$$

где

$$B_{\pm}(\lambda, b, \varkappa) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\lambda \pm ib)^{2n+1}}{\prod_{k=1}^n (\lambda^2 - \lambda_k^2)} \frac{A_{\pm}(\lambda)}{2i\lambda(\lambda \mp i\varkappa)}, \quad b > 0, \quad (4.28)$$

$$S(\lambda, b, \varkappa) \stackrel{\text{def}}{=} S(\lambda) \left(\frac{\lambda - ib}{\lambda + ib} \right)^{2n+1} \frac{\lambda - i\varkappa}{\lambda + i\varkappa}. \quad (4.29)$$

Функции $B_{\pm}(\lambda, b, \varkappa)$ (4.28) голоморфно продолжаемы в $\mathbb{C}_{\pm}$ и не обращаются в нуль в замкнутых полуплоскостях $\overline{\mathbb{C}}_{\pm}$ (теорема 2, лемма 11). Кроме того, $B_-(\lambda, b, \varkappa) = B_+(-\lambda, b, \varkappa)$ и

$$B_{\pm}(\infty, b, \varkappa) = 1. \quad (4.30)$$

Индекс задачи Римана (4.27) равен нулю (см. [24]), а ее решение единственно (в силу (4.30)) и имеет вид

$$B(\lambda, b, \varkappa) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\ln S(t, b, \varkappa)}{t - \lambda} dt \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}. \quad (4.31)$$

Граничные значения на $\mathbb{R}$ из $\mathbb{C}_{\pm}$ функции $B(\lambda, b, \varkappa)$ (4.31) есть

$$B_{\pm}(\lambda, b, \varkappa) = \exp \left\{ \mp \frac{1}{2} \ln S(\lambda, b, \varkappa) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\ln S(t, b, \varkappa)}{t - \lambda} dt \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (4.32)$$

Учитывая (4.28) и (4.29), получим

$$A_{\pm}(\lambda) = 2i\lambda \sqrt{\lambda^2 + \varkappa^2} \frac{\prod_{k=1}^n (\lambda^2 - \lambda_k^2)}{(\lambda^2 + b^2)^{n+1/2}} \exp \left\{ \mp \frac{1}{2} \ln S(\lambda) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\ln S(t, b, \varkappa)}{t - \lambda} dt \right\}.$$

Отсюда следует (см. п. 3.6)

$$\begin{aligned} A_{\pm}(\lambda) &= 2i\lambda(\lambda^2 + \varkappa^2) \prod_{k=1}^n (\lambda^2 - \lambda_k^2) \psi^{n+1/2}(\lambda, b) \psi^{1/2}(\lambda, \varkappa) \\ &\times \exp \left\{ \mp \frac{1}{2} \ln S(\lambda) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\ln S(t)}{t - \lambda} dt \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

где $\psi(\lambda, b)$ имеет вид (3.56) и не зависит от числа b (> 0) в силу леммы 16, поэтому $\psi(\lambda, a) = \psi(\lambda, \varkappa) = \psi(\lambda, 1)$. Учитывая (3.26), находим вид функций $A_{\pm}(\lambda)$:

$$A_{\pm}(\lambda) = 2i\lambda(\lambda^2 + \varkappa^2) \prod_{k=1}^n (\lambda^2 - \lambda_k^2) \psi^{n+1}(\lambda) \exp \left\{ \pm \pi i \zeta(\lambda) + \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta(t)}{t - \lambda} dt \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4.34)$$

где $\psi(\lambda)$ имеет вид (3.58). Так как

$$A_+(\lambda) - A_-(\lambda) = -\alpha |\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2$$

в силу (4.1), то, используя (4.34), мы приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\alpha < 0$ и $E_{r,n}$ (2.21) – множество вещественных нулей функции $r(\lambda)$ (2.7), а $i\kappa \in \mathbb{C}_+$ ($\kappa > 0$) – корень функции $A(\lambda)$ (2.16). Тогда функция спектрального сдвига $\zeta(\lambda)$, задающая представление (3.26) функции рассеяния $S(\lambda)$, и преобразование Фурье $\tilde{v}(\lambda)$ (1.6) функции $v(x)$ удовлетворяют соотношению

$$|\tilde{v}(\lambda) - \tilde{v}(-\lambda)|^2 = \frac{4\lambda}{\alpha} \psi^{n+1}(\lambda) (\lambda^2 + \kappa^2) \prod_{k=1}^n (\lambda^2 - \lambda_k^2) \sin \pi \zeta(\lambda) \exp \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta(t)}{t - \lambda} dt \right\} \quad (4.35)$$

при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, где $\psi(\lambda)$ имеет вид (3.58).

Из (4.34) следует, что функция $B_+(\lambda) = A_+(\lambda)/(2i\lambda)$ может быть представлена в следующей форме:

$$B_+(\lambda) = Q_{n,\kappa}(\lambda) \exp \left\{ \pi i \zeta(\lambda) + \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta_{n+1}(t)}{t - \lambda} dt \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4.36)$$

где

$$Q_{n,\kappa}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\lambda^2 + \kappa^2}{\lambda^2 + 1} \prod_{k=1}^n \frac{\lambda^2 - \lambda_k^2}{\lambda^2 + 1}, \quad \zeta_{n+1}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \zeta(\lambda) + \frac{2(n+1)}{\pi} \arctg \frac{1}{\lambda}. \quad (4.37)$$

Аналогично (3.62) имеет место

$$m < \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta_{n+1}(\lambda)}{t - \lambda} dt < M. \quad (4.38)$$

Справедливо следующее утверждение, которое является аналогом леммы 17.

ЛЕММА 21. Пусть $\alpha < 0$ и $\lambda = i\kappa$ – корень функции $A(\lambda)$ (2.16), а $E_{r,n}$ (2.21) – множество вещественных нулей $A_+(\lambda)$ (2.17). Тогда для функции $\zeta(\lambda)$ из представления (4.23) справедливы включения

$$\lambda Q_{n,\kappa}(\lambda) \zeta'(\lambda) \in L_{\mathbb{R}}^2, \quad \lambda Q_{n,\kappa}(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta_{n+1}(t)}{(t - \lambda)^2} dt \in L_{\mathbb{R}}^2, \quad (4.39)$$

где $Q_{n,\kappa}(\lambda)$ и $\zeta_{n+1}(\lambda)$ имеют вид (4.37).

В случае вещественности $v(x)$ запишем равенство (4.35) в следующей форме:

$$\tilde{v}_s^2(\lambda) = \frac{\lambda}{\alpha} Q_{n,\kappa}(\lambda) \sin \pi \zeta(\lambda) \exp \left\{ \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta_{n+1}(t)}{t - \lambda} dt \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad (4.40)$$

где $\tilde{v}_s(\lambda)$ – синус-преобразование Фурье (3.42) функции $v(x)$, а $Q_{n,\kappa}(\lambda)$ и $\zeta_{n+1}(\lambda)$ имеют вид (4.37).

Повторяя рассуждения п. 3.6, получим следующий аналог леммы 19.

ЛЕММА 22. Пусть $\alpha < 0$ и $\lambda = i\kappa$ ($\kappa > 0$) – корень функции $A(\lambda)$ (2.16), а $E_{r,n}$ (2.21) – множество вещественных нулей $A_+(\lambda)$ (2.17), кроме того, $v(x)$ вещественна и имеет место (0.3). Тогда сходится интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda Q_{n,\kappa}(\lambda) (\zeta'(\lambda))^2 \left(\frac{1}{\sin \pi \zeta(\lambda)} - \sin \pi \zeta(\lambda) \right) d\lambda < \infty, \quad (4.41)$$

где $\zeta(\lambda)$ – функция спектрального сдвига из представления (4.23) для $S(\lambda)$, а $Q_{n,\varkappa}(\lambda)$ имеет вид (4.37).

Описание данных рассеяния в случае $\alpha < 0$ заключается в следующем.

Класс $\Omega_{n,\varkappa}$. Вещественную нечетную непрерывную на $\mathbb{R} \setminus \{0, \pm\lambda_k\}_1^n$, где $\lambda_k > 0$ ($1 \leq k \leq n$, $n \in \mathbb{N}$), функцию $\zeta(\lambda)$, удовлетворяющую условию $-1 \geq \zeta(\lambda) \geq 0$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$, будем относить к классу $\Omega_{n,\varkappa}$, если:

- 1) функция $\lambda\zeta(\lambda)$ принадлежит $L^2_{\mathbb{R}}$;
- 2) функция

$$F_{n+1}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\zeta_{n+1}(t)}{t - \lambda} dt$$

ограничена и почти всюду дифференцируема, причем $\lambda Q_{n,\varkappa}(\lambda) F'_{n+1}(\lambda) \in L^2_{\mathbb{R}}$, где $Q_{n,\varkappa}(\lambda)$ и $\zeta_{n+1}(\lambda)$ имеют вид (4.37);

- 3) функция $\zeta(\lambda)$ почти всюду дифференцируема и сходится интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda Q_{n,\varkappa}(\lambda) (\zeta'(\lambda))^2 \left(\frac{1}{\sin \pi \zeta(\lambda)} - \sin \pi \zeta(\lambda) \right) d\lambda < \infty.$$

Справедлив следующий аналог предложения 2.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\zeta(\lambda) \in \Omega_{n,\varkappa}$ и $\tilde{v}_s(\lambda)$ – синус-преобразование Фурье (3.42) вещественной функции $v(x)$. Тогда если имеет место (4.40), то $v(x)$ удовлетворяет условию (0.3).

Аналогично теореме 7 справедливо следующее утверждение, дающее решение обратной задачи.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $\zeta_+(\lambda)$ и $\zeta_-(\lambda)$ – две функции спектрального сдвига краевой задачи (1.1), (1.2), отвечающие наборам $\{\alpha, v(x) + h(x)\}$ и $\{\alpha, v(x) - h(x)\}$, где $\alpha < 0$, а функции $v(x)$ и $h(x)$ вещественны и удовлетворяют условию (0.3). Предположим, что $\|v(x)\|_{L^2_{\mathbb{R}}} = 1$, а известная функция $h(x)$ такова, что ее синус-преобразование Фурье $\tilde{h}_s(\lambda)$ не равно нулю почти всюду.

Тогда по $\zeta_+(\lambda) \in \Omega_{n_+, \varkappa_+}$ и $\zeta_-(\lambda) \in \Omega_{n_-, \varkappa_-}$ число α и функция $v(x)$ восстанавливаются единственным образом.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 5.

Отметим, что у классов $\Omega_{n_+, \varkappa_+}$ и $\Omega_{n_-, \varkappa_-}$ различны, вообще говоря, не только числа $\varkappa_+$, $\varkappa_-$ и n_+ , n_- , но и наборы $\{\lambda_k^+\}_1^{n_+}$, $\{\lambda_k^-\}_1^{n_-}$.

Список литературы

- [1] В. А. Марченко, “Восстановление потенциальной энергии по фазам рассеяния волн”, Докл. АН СССР, **104** (1955), 695–698.
- [2] В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977, 331 с.; англ. пер.: V. A. Marchenko, *Sturm–Liouville operators and applications*, Oper. Theory Adv. Appl., **22**, Birkhäuser, Basel, 1986, xii+367 pp.
- [3] Л. Д. Фаддеев, “Обратная задача квантовой теории рассеяния”, УМН, **14:4** (88) (1959), 57–119; англ. пер.: L. D. Faddeyev, “The inverse problem in the quantum theory of scattering”, *J. Mathematical Phys.*, **4** (1963), 72–104.

- [4] Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма–Лиувилля*, Наука, М., 1984, 240 с.; англ. пер.: B. M. Levitan, *Inverse Sturm–Liouville problems*, VSP, Zeist, 1987, x+240 pp.
- [5] К. Шадан, П. Сабатье, *Обратные задачи в квантовой теории рассеяния*, Мир, М., 1980, 408 с.; пер. с англ.: K. Chadán, P. C. Sabatier, *Inverse problems in quantum scattering theory*, Texts Monogr. Phys., Springer-Verlag, New York–Berlin, 1977, xxii+344 pp.
- [6] Л. П. Нижник, *Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений*, Научова думка, Киев, 1991, 232 с.
- [7] В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи*, Наука, М., 1980, 320 с.; англ. пер.: S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevskii, V. E. Zakharov, *Theory of solitons. The inverse scattering method*, Contemp. Soviet Math., Consultants Bureau [Plenum], New York, 1984, xi+276 pp.
- [8] Д. Р. Яфаев, *Математическая теория рассеяния. Общая теория*, Изд-во СПб. ун-та, Санкт-Петербург, 1994, 423 с.; англ. пер.: D. R. Yafaev, *Mathematical scattering theory. General theory*, Transl. Math. Monogr., **105**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, x+341 pp.
- [9] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики*, т. 3: *Теория рассеяния*, Мир, М., 1982, 445 с.; пер. с англ.: M. Reed, B. Simon, *Methods of modern mathematical physics*, v. III: *Scattering theory*, Academic Press, New York–London, 1979, xv+463 pp.
- [10] В. Хейне, М. Коэн, Д. Уэйр, *Теория псевдопотенциала*, пер. с англ., Мир, М., 1973, 557 с.
- [11] Л. П. Нижник, В. Г. Тарасов, “Обратная задача рассеяния для одного интегро-дифференциального уравнения”, *Прямые и обратные задачи теории рассеяния*, Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1981, 61–76.
- [12] В. М. Музафаров, “Обратная задача рассеяния в классе нелокальных потенциалов. I”, *ТМФ*, **70**:1 (1987), 30–51; англ. пер.: V. M. Muzafarov, “Inverse scattering problem in a class of nonlocal potentials. I”, *Theoret. and Math. Phys.*, **70**:1 (1987), 20–34.
- [13] В. М. Музафаров, “Обратная задача рассеяния в классе нелокальных потенциалов. II. Связанные парциальные каналы”, *ТМФ*, **71**:1 (1987), 3–12; англ. пер.: V. M. Muzafarov, “Inverse scattering problem in a class of nonlocal potentials. II. Coupled partial channels”, *Theoret. and Math. Phys.*, **71**:1 (1987), 339–346.
- [14] S. Albeverio, R. O. Hryniv, L. P. Niznik, “Inverse spectral problems for non-local Sturm–Liouville operators”, *Inverse problems*, **23**:2 (2007), 523–535.
- [15] T. A. Weber, “Nonlocal potentials, isolated states, and Levinson’s theorem”, *J. Math. Phys.*, **40**:1 (1999), 140–149.
- [16] Н. И. Плетникова, “Асимптотика собственных функций оператора Шрёдингера с нелокальным потенциалом”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем.*, 2007, № 1, 109–120.
- [17] Л. Д. Фаддеев, “О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра”, *Краевые задачи математической физики. 2. Сборник работ. Посвящается памяти Владимира Андреевича Стеклова в связи со столетием со дня его рождения*, Тр. МИАН СССР, **73**, Наука, М.–Л., 1964, 292–313.
- [18] В. Э. Лянце, “О дифференциальном операторе со спектральными особенностями. I”, *Матем. сб.*, **64(106)**:4 (1964), 521–561; англ. пер.: V. E. Lyantse, “A differential operator with spectral singularities. I”, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **60**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1967, 185–225.
- [19] Б. С. Павлов, “О несамосопряженном операторе Шрёдингера”, *Спектральная теория и волновые процессы*, Пробл. мат. физ., **1**, Изд-во ЛГУ, Л., 1966, 102–132.

- [20] Е. Титчмарш, *Введение в теорию интегралов Фурье*, ОГИЗ, М., 1948, 479 с.; пер. с англ.: E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals*, Oxford, Oxford Univ. Press, 1937, x+390 pp.
- [21] Н. И. Ахиезер, *Лекции об интегральных преобразованиях*, Изд-во Харьк. ун-та “Вища школа”, Харьков, 1984, 120 с.; англ. пер.: N. I. Akhiezer, *Lectures on integral transforms*, Transl. Math. Monogr., **70**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, vi+108 pp.
- [22] Дж. Гарнет, *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984, 470 с.; пер. с англ.: J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Pure Appl. Math., **96**, Academic Press, Inc., New York–London, 1981, xvi+467 pp.
- [23] Х. М. Нуссенцвейг, *Причинность и дисперсионные соотношения*, Мир, М., 1976, 462 с.; пер. с англ.: H. M. Nussenzweig, *Causality and dispersion relations*, Math. Sci. Engrg., **95**, Academic Press, New York–London, 1972, xii+435 pp.
- [24] Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, 3-е изд., Наука, М., 1977, 640 с.; англ. пер. 2-го изд.: F. D. Gakhov, *Boundary value problems*, Pergamon Press, Oxford–New York–Paris; Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.–London, 1966, xix+561 pp.
- [25] Б. В. Хведелидзе, “Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения”, *Тр. Тбил. матем. ин-та АН ГрузССР*, **23** (1956), 3–158.
- [26] М. Г. Крейн, “О формуле следов в теории возмущений”, *Матем. сб.*, **33(75)**:3 (1953), 597–626.
- [27] G. H. Hardy, “Notes on some points in the integral calculus. LX. An inequality between integrals”, *Messenger Math.*, **54** (1925), 150–156.
- [28] Е. Титчмарш, *Теория функций*, 2-е изд., Наука, М., 1980, 464 с.; пер. с англ.: E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*, 2nd ed., Oxford Univ. Press, London, 1939, x+454 pp.

Владимир Алексеевич Золотарёв
(Vladimir A. Zolotarev)

Физико-технический институт низких температур
им. Б. И. Веркина НАН Украины, г. Харьков;
Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина
E-mail: vazolotarev@gmail.com

Поступила в редакцию
03.01.2013 и 13.06.2014