Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Гришухин, Параллелоэдры ненулевой толщины, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 5, 59–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm821>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:32:57

УДК 511.9

В. П. Гришухин

Параллелоэдры ненулевой толщины

В 1959 г. Б. А. Венков ввел понятие многогранника, имеющего ненулевую толщину в направлении некоторого подпространства, и изучал параллелоэдры ненулевой толщины. В настоящей работе изучаются свойства параллелоэдра, имеющего ненулевую толщину в направлении прямой. В частности, доказывается, что параллелоэдр ненулевой толщины в направлении некоторой прямой есть сумма Минковского параллелоэдра нулевой толщины в этом направлении с некоторым отрезком этой прямой. Даны необходимые и достаточные условия того, что сумма параллелоэдра с отрезком есть снова параллелоэдр.

Библиография: 12 наименований.

§ 1. Введение

Эта работа посвящена расширению результатов Б. А. Венкова, полученных им в статье “О проектировании параллелоэдров”, опубликованной в журнале “Математический сборник” за 1959 г. (см. [1]). В ней Б. А. Венков определяет n -мерный многогранник P , имеющий *ненулевую толщину в направлении k -мерного подпространства X^k* , как многогранник, пересечение которого с любым аффинным k -подпространством, параллельным X^k , либо пусто, либо k -мерно. Венков использует это определение для исследования параллелоэдров ненулевой толщины.

Параллелоэдр — это такой многогранник, параллельные переносы которого заполняют все пространство без зазоров и пересечений по внутренним точкам. Центры параллелоэдров этого заполнения образуют решетку L . Разбиение пространства на параллелоэдры обладает в некотором смысле двойственным разбиением на многогранники Делоне, ребра которых есть основные векторы решетки L .

В работе [1] Венков показал, что проекция вдоль X^k параллелоэдра, имеющего ненулевую толщину в направлении X^k , есть снова параллелоэдр. Кроме того, центры параллелоэдров, смежных друг с другом по фасетам, параллельным X^k (т.е. имеющим ненулевую толщину в направлении X^k), образуют $(n - k)$ -мерную подрешетку L^{n-k} в L . Подпространство $X(L^{n-k})$, натянутое на эту подрешетку, трансверсально X^k и разбито на параллелоэдры, являющиеся проекциями параллелоэдров исходного разбиения. Следуя работе [2], назовем подрешетку L^{n-k} *слоевой*, так как решетка L представляется в виде объединения *слоев*, являющихся параллельными сдвигами L^{n-k} . Подпространство $X(L^{n-k})$ и его параллельные сдвиги называются *слоевыми плоскостями*.

Специальным случаем параллелоэдра является многогранник Вороного $P_V(f)$, связанный с некоторой положительно определенной квадратичной формой f . В упомянутой выше работе [1] Венков показал, что многогранник Вороного имеет ненулевую толщину в направлении X^k тогда и только тогда, когда слоевые плоскости пересекают многогранники Делоне только по граням и эти грани имеют

размерности $\leq n - k$, т.е. когда слоевые плоскости разбиты на многогранники Делоне размерности $n - k$. При этом слоевые плоскости ортогональны X^k .

Очевидно, множество всех граней многогранника частично упорядочено по включению. Назовем *типом* многогранника P класс изоморфизма частично упорядоченного множества его граней. Вороной назвал тип многогранника Вороного его L -*типом*.

Напомним, что множество всех положительно определенных квадратичных форм f' таких, что форма f' получена из f непрерывным преобразованием так, что $P_V(f')$ имеет тот же L -тип, что и $P_V(f)$, заполняют в пространстве всех квадратичных форм связную L -область $\mathcal{D}(f)$ формы f . Каждая L -область есть открытый многогранный конус. В упомянутой работе Венков показал, что если замыкание $\mathcal{D}(f)$ содержит форму ранга k , то это замыкание содержит грань размерности $k(k+1)/2$ форм ранга k , а многогранник Вороного $P_V(f)$ имеет ненулевую толщину в направлении некоторого подпространства X^k .

В нашей статье изучаются многогранники, имеющие ненулевую толщину в направлении некоторого вектора z . Почти очевидно, что если P имеет ненулевую толщину в некотором направлении, то небольшое растяжение или сжатие P в этом направлении не меняет его типа. Аналогично, если P имеет ненулевую толщину в направлении вектора z , то сумма Минковского многогранника P и некоторого отрезка, параллельного вектору z , имеет тот же тип, что и P . В этой работе показано, что многогранник P , имеющий ненулевую толщину в направлении z , может быть представлен в виде суммы отрезка, параллельного z , и многогранника, имеющего нулевую толщину в направлении z .

На конечном множестве векторов, порождающих направления, по которым многогранник P имеет ненулевую толщину, определен толщинный матроид $M(P)$. Здесь показано, что каждый k -флэт толщинного матроида $M(P)$ представлен в P зоной взаимно параллельных k -граней, а если P есть параллеледр, то толщинный матроид $M(P)$ регулярен (или, что то же, унимодулярен).

В настоящей статье показано, что для $k = 1$ разбиение слоевых плоскостей на фасы многогранников Делоне справедливо для произвольных параллеледров, имеющих ненулевую толщину в направлении z , а не только для многогранников Вороного. Но теперь слоевые плоскости не ортогональны z , а лишь трансверсальны этому направлению.

В [3] показано, что $P_V(f)$ имеет ненулевую толщину в направлении z тогда и только тогда, когда замыкание $\mathcal{D}(f)$ имеет в качестве крайнего луча форму $(z^T x)^2$ ранга 1. Согласно сказанному выше, если параллеледр P имеет ненулевую толщину в направлении z , то он есть сумма отрезка $S(z)$ с параллеледром нулевой толщины в направлении z . Вообще говоря, не для всякого параллеледра его сумма Минковского с отрезком является параллеледром. В этой статье даются необходимые и достаточные условия, когда эта сумма является параллеледром.

§ 2. Многогранники ненулевой толщины

В этой статье под *многогранником* подразумевается *ограниченный* (или *компактный*) многогранник.

Назовем для краткости всякий n -мерный многогранник n -многогранником. В частности, понятно, что такое k -грань n -многогранника. Например, 0-грани —

это вершины, 1-границы — это ребра. Назовем также $(n - 1)$ -границы *фасетами*.

Множество всех k -граней n -многогранника разбивается на *зоны* взаимно параллельных k -граней. Назовем такую зону k -зоной; 1-зона называется реберной зоной.

Напомним, что n -многогранник имеет *ненулевую толщину в направлении* k -подпространства X , если его пересечение с любым аффинным подпространством, параллельным X , либо пусто, либо k -мерно. Назовем q -грань, $q \geq k$, *параллельной* k -подпространству X , если ее толщина в направлении X ненулевая. Скажем, что q -грань F *трансверсальна* X , если пересечение X с q -подпространством Y , параллельным F , состоит из одной точки.

Пусть P есть n -многогранник ненулевой толщины в направлении k -подпространства X . Спроектируем P вдоль X на некоторое трансверсальное X $(n - k)$ -подпространство. Тогда всякая q -грань P , параллельная X , спроектируется в $(q - k)$ -грань проекции P , а всякая r -грань, не параллельная X , спроектируется либо внутрь $(q - k)$ -границы проекции P , если она принадлежит некоторой q -границе, $q > k$, параллельной X , либо, в противном случае, внутрь проекции P .

П. Энгель [4] называет реберную зону Z многогранника P *замкнутой*, если всякая 2-грань P содержит либо два, либо ни одного ребра Z . В противном случае зона называется *открытой*.

Заметим, что всякая $(k + 1)$ -грань содержит не более двух параллельных k -граней. Поэтому обобщим определение Энгеля следующим образом. Назовем k -зону Z многогранника P *замкнутой*, если всякая $(k + 1)$ -грань P содержит либо два, либо ни одной грани зоны Z . В противном случае зона называется *открытой*.

ЛЕММА 1. Пусть P есть многогранник и $X \subset \mathbb{R}^n$ есть k -подпространство. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) P имеет ненулевую толщину в направлении X ;
- 2) P имеет замкнутую k -зону Z , грани которой параллельны X .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 2). Спроектируем P вдоль X на некоторое $(n - k)$ -подпространство, трансверсальное X . Так как P имеет ненулевую толщину в направлении X , всякая q -грань проекции P есть проекция некоторой $(q + k)$ -границы. В частности, вершины проекции есть проекции k -граней P , а ребра проекции есть проекции $(k + 1)$ -граней P . Так как всякое ребро содержит две концевые вершины, то всякая $(k + 1)$ -грань P , содержащая k -грань, параллельную X , содержит и другую такую грань. Поэтому k -зона, состоящая из параллельных X k -граней, замкнута.

2) $\Rightarrow$ 1). Снова спроектируем P вдоль X . Пусть P' есть проекция P . Пусть $G = G(P')$ есть граф, вершины и ребра которого являются вершинами и ребрами P' соответственно. Так как P' есть ограниченный многогранник, то G связан. Очевидно, вершины G есть проекции q -граней P , $q \leq k$. Назовем вершину G , являющуюся проекцией k -границы, *правильной*. Пусть v — правильная вершина, являющаяся проекцией k -границы F . Очевидно, F принадлежит замкнутой зоне Z . Поэтому все ребра G , инцидентные в G вершине v , есть проекции $(k + 1)$ -граней P . Следовательно, вторые вершины ребер графа G , инцидентных вершине v , тоже правильные. Иначе говоря, все вершины G , смежные некоторой правильной вершине, сами правильные. Так как G связан, все его вершины правильные, а все его ребра

являются проекциями $(k + 1)$ -граней P . Очевидно, если бы P имел нулевую толщину в направлении X , то проекция P имела бы неправильную вершину. Поэтому P имеет ненулевую толщину в направлении X .

§ 3. Сумма Минковского многогранника с отрезком

Всякий n -многогранник P описывается следующей системой линейных неравенств:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : p_i^T x \leq b_i, i \in I\}, \quad (1)$$

где $p^T x$ есть скалярное произведение векторов p и x . Здесь I есть множество фaset P . Фасета $F_i, i \in I$, лежит в гиперплоскости, задаваемой равенством $p_i^T x = b_i$. Назовем вектор $p_i, i \in I$, *фасетным* вектором.

Для скаляра α определим функцию

$$\operatorname{sgn}(\alpha) = \begin{cases} +1, & \text{если } \alpha > 0, \\ -1, & \text{если } \alpha < 0, \\ 0, & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Всякий вектор $z \in \mathbb{R}^n$ разбивает множество $\mathcal{P}$ всех фасетных векторов на три класса следующим образом. Положим

$$\sigma_i := \operatorname{sgn}(p_i^T z), \\ I_\sigma(z) = \{i \in I : \sigma_i = \sigma\}, \quad \text{где } \sigma \in \{0, \pm 1\}.$$

Тогда $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0(z) \cup \mathcal{P}_+(z) \cup \mathcal{P}_-(z)$, где

$$\mathcal{P}_\sigma(z) = \{p_i : i \in I_\sigma(z)\}.$$

Фасетные векторы $p \in \mathcal{P}_0(z)$ определяют фасеты, параллельные вектору z . Фасетные векторы $p \in \mathcal{P}_+(z)$ определяют фасеты, образующие по терминологии Б. Делоне [5] *верхнюю шапочку*. Аналогично, фасетные векторы $p \in \mathcal{P}_-(z)$ определяют фасеты, образующие *нижнюю шапочку*.

Пусть $l(z) \in \mathbb{R}^n$ есть некоторая прямая, проходящая через начало координат и натянутая на вектор z . Пусть $S(z)$ есть отрезок этой прямой, симметричный относительно начала, т.е.

$$S(z) = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda z, -1 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Рассмотрим аффинное $(n - m)$ -мерное подпространство $\mathbb{R}^n$:

$$X^{n-m} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x = b_i, 1 \leq i \leq m\}. \quad (2)$$

Очевидно, что вектор z трансверсален X^{n-m} , если $a_i^T z \neq 0$ для всех i . В этом случае сумма Минковского $X^{n-m} + S(z)$ есть $(n - m + 1)$ -мерная полоса. Эта полоса имеет $(n - m)$ -границ:

$$X^\sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x = b_i + \sigma a_i^T z, 1 \leq i \leq m\}, \quad \text{где } \sigma \in \{\pm 1\}. \quad (3)$$

Заметим, что если $a_i^T z = 0$ для всех i , то $X^{+1} = X^{-1} = X^{n-m}$.

Рассмотрим полупространство

$$H(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq b\}.$$

Пусть X есть ограничивающая его гиперплоскость. Если $a^T z \neq 0$, то $X + S(z)$ есть n -мерная полоса. Пусть $\sigma = \text{sgn}(a^T z)$. Тогда $b - \sigma a^T z < b$ и $(n-1)$ -грань $X^{-\sigma}$ этой полосы лежит в полупространстве $H(a, b)$. Поэтому $H(a, b) + S(z)$ есть полупространство, ограниченное гиперплоскостью X^σ , т.е.

$$H(a, b) + S(z) = H(a, b + \sigma a^T z), \quad \text{где } \sigma = \text{sgn}(a^T z). \quad (4)$$

Рассмотрим многогранное множество

$$Y(a_i, b_i \mid i \in I) = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \leq b_i, i \in I\}.$$

Если мощность $|I| = 2$ и векторы a_1 и a_2 не параллельны, то $Y(a_i, b_i \mid i = 1, 2)$ есть двугранный угол. Положим $\sigma_i = \text{sgn}(a_i^T z)$, $i = 1, 2$. Если $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$ и $\sigma_1 = -\sigma_2$, то, не теряя общности, будем считать, что $\sigma_1 > 0$.

ЛЕММА 2.

$$Y(a_i, b_i \mid i = 1, 2) + S(z) = \begin{cases} Y(a_i, b'_i \mid i = 1, 2), & \text{если } \sigma_1 \sigma_2 \geq 0, \\ Y(a_i, b'_i \mid i = 1, 2, 3), & \text{если } \sigma_1 > 0, \sigma_2 < 0, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} b'_i &= b_i + \sigma_i a_i^T z, \quad i = 1, 2, \\ a_3 &= (a_1^T z) a_2 - (a_2^T z) a_1, \quad b'_3 = (a_1^T z) b_2 - (a_2^T z) b_1. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно,

$$Y(a_i, b_i \mid i = 1, 2) + S(z) \subseteq Y(a_i, b'_i \mid i = 1, 2); \quad (5)$$

$(n-2)$ -грань угла $Y(a_i, b_i \mid i = 1, 2)$ есть

$$X^{n-2} = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x = b_i, i = 1, 2\},$$

т.е. она есть X^{n-m} из (2) при $m = 2$; $(n-1)$ -мерные грани суммы $X^{n-2} + S(z)$ задаются формулой (3) при $m = 2$. Легко видеть, что если $\sigma_1 \sigma_2 = \sigma \geq 0$, то одна из двух $(n-2)$ -граней X^σ и $X^{-\sigma}$ суммы $X^{n-2} + S(z)$ совпадает с $(n-2)$ -гранью угла $Y(a_i, b_i + \sigma_i(a_i^T z) \mid i = 1, 2)$. Поэтому вся полоса $X^{n-2} + S(z)$ лежит в этом угле и (5) выполняется как равенство. Иначе говоря, если $\sigma_1 = \sigma_2$ или $\sigma_i = 0$ хотя бы для одного i , то сумма угла с отрезком есть снова угол. Мы доказали первую часть утверждения леммы.

Пусть теперь $\sigma_1 \neq \sigma_2$ и $\sigma_1 = -\sigma_2 > 0$, т.е. $\sigma_1 \sigma_2 < 0$. В этом случае грань X^{σ_1} полосы $X^{n-2} + S(z)$ лежит в аффинной гиперплоскости $a_1^T x = b_1 + \sigma_1(a_1^T z)$ и для $x \in X^{\sigma_1}$ выполняется строгое неравенство (см. (3))

$$a_2^T x = b_2 + \sigma_1(a_2^T z) = b_2 - \sigma_2(a_2^T z) < b_2 + \sigma_2(a_2^T z).$$

Аналогично, X^{σ_2} лежит в гиперплоскости $a_2^T x = b_2 + \sigma_2(a_2^T z)$ и для $x \in X^{\sigma_2}$ имеем $a_1^T x < b_1 + \sigma_1(a_1^T z)$. Поэтому полоса $X^{n-2} + S(z)$ становится новой $(n-1)$ -гранью суммы $Y(a_i, b_i \mid i = 1, 2) + S(z)$. Пусть уравнение опорной гиперплоскости этой $(n-1)$ -грани есть $a^T x = b$. Тогда

$$Y(a_i, b_i \mid i = 1, 2) + S(z) = Y(a_i, b'_i \mid i = 1, 2, 3),$$

где $a_3 = a$, $b'_3 = b$, $b'_i = b_i + \sigma_i(a_i^T z)$, $i = 1, 2$.

Найдем a и b . Так как все три гиперплоскости $X_1 = \{x : a_1^T x = 0\}$, $X_2 = \{x : a_2^T x = 0\}$ и $X = \{x : a^T x = 0\}$ содержат $(n-2)$ -подпространство Y^{n-2} , параллельное X^{n-2} , то их пересечение есть Y^{n-2} . Это значит, что векторы a_1, a_2 и a линейно зависимы, т.е.

$$a = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2.$$

Найдем коэффициенты μ_1 и μ_2 . По определению

$$X^{n-2} + S(z) = \{y = x + \lambda z : a_i^T x = b_i, i = 1, 2, -1 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq \{y : a^T y = b\}.$$

Имеем

$$a^T(x + \lambda z) = \mu_1 a_1^T(x + \lambda z) + \mu_2 a_2^T(x + \lambda z) = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \lambda(\mu_1(a_1^T z) + \mu_2(a_2^T z)) = b.$$

Так как b не зависит от переменного λ , получаем равенство

$$\mu_1(a_1^T z) + \mu_2(a_2^T z) = 0, \quad \text{т.е.} \quad \mu_1 = -\mu_2 \frac{a_2^T z}{a_1^T z}.$$

Таким образом, с точностью до общего множителя a и b задаются равенствами

$$a = \frac{\mu_2}{a_1^T z}((a_1^T z)a_2 - (a_2^T z)a_1), \quad b = \frac{\mu_2}{a_1^T z}((a_1^T z)b_2 - (a_2^T z)b_1).$$

Уравнение опорной гиперплоскости грани $X^{n-2} + S(z)$ запишем в виде

$$a_3 x = ((a_1^T z)a_2 - (a_2^T z)a_1)^T x = (a_1^T z)b_2 - (a_2^T z)b_1 = b'_3.$$

Осталось лишь показать, что $Y(a_i, b'_i \mid i = 1, 2, 3)$ лежит в полупространстве $\{x : a_3^T x \leq b'_3\}$. Для этого достаточно показать, что $Y(a_i, b_i \mid i = 1, 2)$ лежит в этом полупространстве. Пусть $x \in Y(a_i, b_i \mid i = 1, 2)$, т.е. $a_i^T x \leq b_i$, $i = 1, 2$. Тогда, так как $a_1^T z > 0$, $a_2^T z < 0$, имеем

$$a_3 x = (a_1^T z)a_2^T x - (a_2^T z)a_1^T x \leq (a_1^T z)b_2 - (a_2^T z)b_1 = b_3.$$

Тем самым, доказана вторая часть леммы.

Из леммы 2 легко вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть n -многогранник P задается системой (1). Для $i \in I_+(z)$, $j \in I_-(z)$ положим

$$p_{ij} = (p_i^T z)p_j - (p_j^T z)p_i, \quad b_{ij} = (p_i^T z)b_j - (p_j^T z)b_i.$$

Пусть $I_{\pm}(z)$ есть множество пар ij таких, что $i \in I_+(z)$, $j \in I_-(z)$ и пересечение $F_i \cap F_j$ есть $(n-2)$ -грань P . Тогда

$$P + S(z) = \{x \in \mathbb{R}^n : p_i^T x \leq b_i + \sigma_i(p_i^T z), i \in I, p_{ij}^T x \leq b_{ij}, ij \in I_{\pm}(z)\}. \quad (6)$$

Скажем, что многогранник P имеет ненулевую толщину δ в направлении $l(z)$, если δ есть минимум длин всех непустых пересечений P с прямыми, параллельными $l(z)$.

ЛЕММА 3. Пусть P есть n -многогранник и $z \in \mathbb{R}^n$ — некоторый вектор длины $|z|$. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) многогранник P имеет толщину $2|z|$ в направлении $l(z)$;
- 2) $P = P_0 + S(z)$, где P_0 имеет нулевую толщину в направлении $l(z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 2). Для того чтобы P можно было представить в виде суммы $P_0 + S(z)$, необходимо, чтобы проекции вдоль $l(z)$ многогранников P и P_0 совпадали. Покажем, что в качестве P_0 можно взять многогранник

$$P'_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : p_i^T x \leq b_i - \sigma_i(p_i^T z), i \in I\}.$$

Многогранник P'_0 получен из P следующим образом. Фасеты верхней шапочки опускаются параллельно самим себе на вектор z , а фасеты нижней шапочки точно так же поднимаются на вектор z . При этом некоторые боковые стенки могут исчезнуть. Точнее, некоторые k -границы, параллельные z , становятся $(k-1)$ -гранями. Нужно лишь показать, что проекции P'_0 и P вдоль $l(z)$ совпадают и P'_0 имеет нулевую толщину. Для этого достаточно показать, что для каждой прямой l , параллельной $l(z)$ и имеющей непустое пересечение с P , пересечение $l \cap P'_0$ не пусто. Но это следует из того, что $|l \cap P| \geq 2|z|$. Если $|l \cap P| = 2|z|$, то $l \cap P'_0$ состоит из одной точки. Так как толщина P равна $2|z|$, то существует такая прямая l , что $l \cap P'_0$ есть точка и поэтому P'_0 имеет нулевую толщину вдоль $l(z)$.

2) $\Rightarrow$ 1). Заметим, что длина $S(z)$ равна $2|z|$. Очевидно, что толщина $P_0 + S(z)$ больше или равна $2|z|$. Она равна в точности $2|z|$, так как P_0 имеет нулевую толщину в направлении $l(z)$.

§ 4. Толщинный матроид $M(P)$

Так как многогранник имеет конечное число реберных зон, то из леммы 1 вытекает, что любой многогранник имеет конечное число прямых, в направлении которых он может иметь ненулевую толщину.

Пусть $Q(P)$ есть множество векторов z таких, что многогранник P имеет ненулевую толщину в направлении $l(z)$. Обозначим через P/z и $Q(P)/z$ проекции P и $Q(P)$ вдоль z на некоторую гиперплоскость, трансверсальную z . Аналогично, обозначим P_0 из леммы 3 через $P - z$. Для простоты положим $Q - z = Q - \{z\}$.

ЛЕММА 4. $Q(P/z) = Q(P)/z$ и $Q(P - z) = Q(P) - z$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, любая прямая, имеющая одномерное пересечение с P/z , есть проекция некоторой прямой, имеющей одномерное пересечение с P . Обратно, всякая прямая, не параллельная $l(z)$ и имеющая одномерное пересечение с P , проектируется в некоторую прямую, имеющую одномерное пересечение с P/z . Поэтому $Q(P/z) = Q(P)/z$.

Напомним, что любая прямая, в направлении которой P имеет ненулевую толщину, представима в P замкнутой реберной зоной. Так как $P - z$ получено из P сдвигом верхней и нижней шапочек параллельно z , то ребра зоны, не параллельной z , просто сдвигаются, оставаясь параллельными себе. При этом некоторые ребра могут склеиться, но зона останется замкнутой, так как склеивающиеся ребра принадлежат одной 2-границы. Поэтому $Q(P - z) = Q(P) - z$.

Множество векторов $Q = Q(P)$ естественно снабжено структурой матроида $M(Q)$, который назовем *толщинным матроидом*. Всякий матроид на множестве Q однозначно задается системой *замкнутых* подмножеств или, что то же, *флэтов*. Подмножество $F \subseteq Q$ называется флэтом, если оно содержит все $z \in Q$, принадлежащие линейному подпространству, порожденному F . Размерность этого подпространства называется рангом флэта F . Флэт ранга k называется k -флэтом. Очевидно, само множество $Q(P)$ есть флэт.

Множество всех флэтов замкнуто относительно пересечения и частично упорядочено по включению. Оно является *геометрической решеткой*. Для любого подмножества $X \subseteq Q$ минимальный по включению флэт, содержащий X , называется *замыканием* X и обозначается $\text{cl } X$. При этом $\text{rk}(\text{cl } X)$ называется рангом X , т.е. $\text{rk } X = \text{rk}(\text{cl } X)$.

Подробнее о матроидах см. любую книгу о матроидах, например [6].

Есть две важные операции на матроидах: сжатие и удаление элемента $z \in Q$. *Удаление* z есть просто ограничение структуры матроида на множество $Q - \{z\}$. $M(Q - \{z\})$ обозначается $M(Q) - z$. *Сжатие* z есть проектирование вдоль z пространства, порожденного Q , на некоторую гиперплоскость этого пространства, трансверсальную z . Сжатый по z матроид M обозначается M/z .

Множество флэтов матроида M/z есть множество проекций вдоль z флэтов M , содержащих z . Флэты матроида $M - z$ есть множества вида $\text{cl } X$, $X \subseteq Q - z$, с удаленным z , если он принадлежит $\text{cl } X$.

Пусть $M(P) = M(Q(P))$. Из сказанного выше вытекает следствие леммы 4:

СЛЕДСТВИЕ 2. $M(P/z) = M(P)/z$ и $M(P - z) = M(P) - z$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть P есть n -многогранник и Q есть множество векторов z таких, что $l(z)$, $z \in Q$, есть направления, вдоль которых P имеет ненулевую толщину. Тогда всякому k -флэту F *толщинного матроида* $M(P)$ соответствует зона k -граней, параллельных F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем индукцией по мощности $m = |Q|$ множества Q . Если $m = 1$, то утверждение предложения вытекает из леммы 1. Пусть предложение верно для Q' таких, что $|Q'| = m - 1$. Пусть $z \in Q$. По предположению индукции каждому k -флэту матроида $M(P/z)$ соответствует зона k -граней многогранника P/z . Но каждая k -грань F многогранника P/z есть проекция $(k + 1)$ -грани P ,

содержащей z . Флэт матроида $M(P/z)$, соответствующий k -грани F , по следствию 2 есть проекция некоторого флэта $M(P)$, содержащего z . Поэтому утверждение предложения верно для флэтов $M(P)$, содержащих z . Так как это верно для любых $z \in Q$, то предложение доказано.

Пусть $X(F)$ есть подпространство, порожденное F . Согласно лемме 1 предложение 1 эквивалентно следующему предложению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для любого флэта F толщинного матроида $M(P)$ многогранник P имеет ненулевую толщину в направлении $X(F)$.*

К сожалению, обратное утверждение неверно. Если P имеет ненулевую толщину в направлении подпространства X , то P необязательно имеет ненулевую толщину в направлении прямых, лежащих в X . Более того, толщинный матроид $M(P)$ может быть пустым для многогранника P , имеющего ненулевую толщину в направлении X .

§ 5. Параллелоэдры

Параллелоэдр размерности n есть такой n -многогранник, параллельные трансляции которого заполняют все пространство без дыр и пересечений по внутренним точкам. Эти трансляции образуют группу трансляций, изоморфную точечной решетке центров всех параллелоэдров, заполняющих пространство.

В статье [7] Б. А. Венков доказал, что n -многогранник P является параллелоэдром тогда и только тогда, когда:

- I. P центрально симметричен.
- II. Все его $(n - 1)$ -мерные грани центрально симметричны.
- III. Проекция P вдоль любой его $(n - 2)$ -мерной грани есть либо параллелограмм, либо центрально симметричный шестиугольник.

Для удобства ссылок назовем эти три условия *условиями Венкова*.

Ребра многоугольников, упомянутых в условии Венкова III, есть проекции четырех или шести фасет параллелоэдра P . Скажем, что эти четыре или шесть фасет образуют *поясок*. Всякая $(n - 2)$ -грань P , являющаяся пересечением фасет пояска, назовем $(n - 2)$ -гранью пояска.

Любая фасетная зона параллелоэдра (т.е. $(n - 1)$ -зона) содержит две противоположные фасеты. А согласно свойству Венкова III всякая $(n - 2)$ -зона параллелоэдра содержит четыре или шесть $(n - 2)$ -граней соответствующего пояска.

Б. Делоне в [5] перечислил все параллелоэдры размерности не больше четырех. Он называет *зоной* множество всех граней, параллельных данному направлению l . Он говорит, что зона 4-параллелоэдра P *замкнута*, если всякая 2-грань проекции P вдоль l является проекцией некоторой фасеты этой зоны. Но Делоне допускает, что ребра проекции могут быть проекциями как 2-граней, так и ребер P (а вершины проекции могут быть проекциями как ребер, так и вершин P). Мы видим, что определение Б. Делоне замкнутой зоны слабее, чем определение П. Энгеля. Это и понятно, так как Делоне работает с параллелоэдрами не обязательно ненулевой толщины.

Параллелоэдр размерности n называется *примитивным*, если в определяемом им разбиении пространства в каждой вершине сходится минимально возможное число $n + 1$ параллелоэдров. Примитивный параллелоэдр имеет $2^n - 1$ пар фасет, и каждый его поясok содержит шесть фасет. Решетка, образованная центрами примитивных параллелоэдров, называется *примитивной*.

Пусть P есть параллелоэдр. Так как P центрально симметричен, то он задается следующим образом:

$$P = P(0) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : -\frac{1}{2}p_i^T t_i \leq p_i^T x \leq \frac{1}{2}p_i^T t_i, i \in I \right\}, \quad (7)$$

где $t_i/2$ есть центр фасеты F_i , лежащей в аффинной гиперплоскости $\{x : p_i^T x = p_i^T t_i/2\}$, а I есть множество всех пар параллельных фасет. Очевидно, что фасетные векторы p_i определены с точностью до скалярного множителя.

Вектор t_i соединяет центр параллелоэдра $P(0)$ со смежным с ним по фасете F_i параллелоэдром $P(t_i)$. Векторы $t_i, i \in I$, порождают решетку, точками которой являются центры параллелоэдров, покрывающих пространство $\mathbb{R}^n$. Б. Венков [1] называет векторы множества $\{\pm t_i : i \in I\}$ *основными* векторами.

Важным специальным случаем параллелоэдра является многогранник Вороного $P_V(t)$ некоторой точки t произвольной решетки L . $P_V(t)$ есть множество точек $\mathbb{R}^n$, более близких к t , чем к другим точкам L . Таким образом,

$$P_V(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : x^2 \leq (x - t)^2, t \in L\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : t^T x \leq \frac{1}{2}t^2, t \in L \right\}.$$

Среди бесконечного числа неравенств, определяющих $P_V(0)$, существенно только конечное их число. Соответствующие векторы есть основные векторы решетки L . Итак, многогранник Вороного $P_V(0)$ задается системой неравенств (7), где $p_i = t_i$ для всех $i \in I$.

Произвольный базис $\{b_i : 1 \leq i \leq n\}$ решетки L определяет положительно определенную форму $f(x) = (\sum_{i=1}^n b_i x_i)^2$. Поэтому говорят, что многогранник Вороного $P_V = P_V(f)$ определен формой f . Пусть выбран базис, задающий квадратичную форму f . Небольшое изменение базиса меняет решетку L и форму f . При этом меняется многогранник Вороного $P_V(f)$. Напомним, что тип P_V называется его L -типом. Во введении было сказано, что множество всех положительно определенных квадратичных форм f' таких, что форма f' получена из f непрерывным преобразованием так, что $P_V(f')$ имеет тот же L -тип, что и $P_V(f)$, заполняет в пространстве всех квадратичных форм L -область $\mathcal{D}(f)$ формы f . Каждая L -область есть открытый многогранный конус.

§ 6. Двойки и тройки фасетных векторов

Напомним, что согласно свойству Венкова III любая $(n - 2)$ -зона параллелоэдра содержит либо четыре, либо шесть $(n - 2)$ -граней. Поэтому 2-плоскость, ортогональная $(n - 2)$ -граням такой зоны, содержит с точностью до знака либо два, либо три фасетных вектора.

Назовем три фасетных вектора, лежащих в 2-плоскости и определяющих $(n - 2)$ -зону и шесть фасет, *тройкой*. Аналогично, два фасетных вектора, определяющих $(n - 2)$ -зону и четыре фасеты, назовем *двойкой*.

Обозначим через F_i фасету, ортогональную фасетному вектору p_i . Тогда противоположная грань $-F_i$ определяется фасетным вектором $-p_i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Для двойки (p_i, p_j) все четыре $(n-2)$ -границ зоны, порожденной $F_i \cap F_j$, центрально симметричны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что параллелоэдр $P(t_i)$ смежен с $P(0)$ по фасете F_i . Четыре параллелоэдра $P(0)$, $P(t_i)$, $P(t_j)$ и $P(t_i + t_j)$ имеют грань $F_i \cap F_j$ в качестве общей $(n-2)$ -границ. Параллелоэдр $P(t_i + t_j)$ есть трансляция $P(0)$ на вектор решетки $t_i + t_j$. Заметим, что $(n-2)$ -границы $F_i \cap F_j$ и $(-F_i) \cap (-F_j)$ центрально симметричны друг другу относительно центра $P(0)$. При трансляции на вектор $t_i + t_j$ грань $(-F_i) \cap (-F_j)$ совмещается с гранью $F_i \cap F_j$. Отсюда вытекает, что сами эти грани центрально симметричны. Аналогично, центрально симметричны и $(n-2)$ -границы $(-F_i) \cap F_j$ и $F_i \cap (-F_j)$.

Пусть (p_i, p_j, p_k) есть такая тройка, в которой векторы упорядочены по часовой стрелке. Очевидно, векторы тройки линейно зависимы. Так как они определены с точностью до множителя, выберем эти множители так, чтобы выполнялось равенство

$$p_i + p_j + p_k = 0. \quad (8)$$

Попутно заметим, что основные векторы t_i , t_j , t_k , соответствующие векторам тройки (p_i, p_j, p_k) , удовлетворяют такому же равенству

$$t_i + t_j + t_k = 0. \quad (9)$$

Это следует из того, что параллелоэдры $P(t_i)$ и $P(-t_k)$, смежные с $P(0)$ по фасетам F_i и $-F_k$, определяемым векторами p_i и $-p_k$, смежны между собой по фасете, параллельной фасете F_j . Поэтому основной вектор, идущий из центра $P(t_i)$ в центр $P(-t_k)$, есть t_j , т.е. $t_i + t_j = -t_k$.

ЛЕММА 5. *Для того чтобы сумма Минковского параллелоэдра P и отрезка $S(z)$ была параллелоэдром, необходимо, чтобы $p^T z = 0$ хотя бы для одного вектора $p \in (p_i, p_j, p_k)$ каждой тройки параллелоэдра P .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Тройка (p_i, p_j, p_k) определяет неограниченный шестигранный цилиндр, ось которого перпендикулярна плоскости этой тройки. Этот цилиндр имеет шесть двугранных углов. Пары $(n-1)$ -граней этих углов определяются следующими парами фасетных векторов:

$$(p_i, -p_k), \quad (-p_k, p_j), \quad (p_j, -p_i), \quad (-p_i, p_k), \quad (p_k, -p_j), \quad (-p_j, p_i).$$

Естественно, что противоположный угол определяется противоположной парой, т.е. парой фасетных векторов с обратными знаками. Таким образом, достаточно рассматривать только первые три пары.

Для $l \in \{i, j, k\}$ положим $\sigma_l = \text{sgn}(p_l^T z)$. Чтобы сумма $P + S(z)$ была параллелоэдром, необходимо, чтобы каждый шестигранный цилиндр оставался шестигранным. Для этого необходимо, чтобы каждый двугранный его угол оставался двугранным углом. Так как каждый двугранный угол шестигранного цилиндра

определяется парой фасетных векторов типа $(p, -p')$, то согласно лемме 2 для этого необходимо, чтобы

$$\sigma_i \sigma_j \leq 0, \quad \sigma_j \sigma_k \leq 0, \quad \sigma_i \sigma_k \leq 0 \quad (10)$$

для каждой тройки (p_i, p_j, p_k) .

Предположим, что $p_l^T z \neq 0$ для всех $l \in \{i, j, k\}$. Равенство (8) влечет равенство $p_i^T z + p_j^T z + p_k^T z = 0$, из которого вытекает, что существуют два индекса $l \in \{i, j, k\}$, для которых $p_l^T z$ имеют одинаковый знак. Отсюда вытекает, что хотя бы одно из трех произведений в (10) положительно. Получено противоречие, из которого вытекает утверждение леммы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Если параллелоэдр P имеет ненулевую толщину в направлении $l(z)$, то $p^T z = 0$ хотя бы для одного вектора p из каждой тройки (p_i, p_j, p_k) и каждой двойки $p \in (p_i, p_j)$ в P .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, и пусть тройка (p_i, p_j, p_k) такова, что $p^T z \neq 0$ для всех $p \in (p_i, p_j, p_k)$. Тогда $(n-2)$ -границ шестигранного цилиндра, определяемого этой тройкой, трансверсальны z . Среди этих $(n-2)$ -граней есть грань, определяемая векторами p и q такими, что знаки $\text{sgn}(p^T z)$, $\text{sgn}(q^T z)$ различны и отличны от нуля. Это значит, что параллелоэдр P имеет в этой грани нулевую толщину.

Случай двойки рассматривается аналогично. Полученное противоречие доказывает предложение.

Напомним, что $I_0(z) = \{i \in I : p_i^T z = 0\}$ и $\mathcal{P}_0(z) = \{p_i : i \in I_0(z)\}$. Предложение 4 утверждает, в частности, что каждая тройка и каждая двойка фасетных векторов должна пересекаться с множеством $\mathcal{P}_0(z)$, если параллелоэдр имеет ненулевую толщину в направлении $l(z)$.

Предложение 4 и лемма 5 показывают, что если параллелоэдр P имеет ненулевую толщину в направлении $l(z)$, то сумма $P + S(z)$ предположительно является параллелоэдром с замкнутой зоной ребер, параллельных z . Эту сумму можно понимать как растяжение параллелоэдра P вдоль прямой $l(z)$. Естественно напрашивается мысль о возможности вычитания отрезка из параллелоэдра P с замкнутой зоной. Именно это утверждает теорема 1, доказанная ниже.

Предложение 3 позволяет доказать, что описанное в лемме 5 необходимое условие того, чтобы сумма Минковского параллелоэдра P и отрезка $S(z)$ была параллелоэдром, является и достаточным.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть P есть параллелоэдр и $S(z)$ – отрезок, симметричный относительно начала. Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) *сумма Минковского $P + S(z)$ есть параллелоэдр;*
- 2) *$p^T z = 0$ хотя бы для одного вектора $p \in (p_i, p_j, p_k)$ каждой тройки параллелоэдра P .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) следует из леммы 5. Докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 1). Для этого нужно показать, что многогранник $P + S(z)$ есть параллелоэдр, если верно утверждение 2). Покажем, что в этом случае для $P + S(z)$

выполнены все три условия Венкова. Так как P и $S(z)$ оба центрально симметричны, то и $P + S(z)$ центрально симметричен и условие Венкова I выполнено.

Из утверждения 2) этой теоремы вытекает, что каждый шестигранный цилиндр, стенки которого ортогональны тройкам фасетных векторов, остается шестигранным. Новые шестигранные цилиндры возникают из четырехгранных цилиндров, определяемых такими двойками (p_i, p_j) , что $\text{sgn}(p_i^T z) = -\text{sgn}(p_j^T z)$. Поэтому условие Венкова III выполнено для $P + S(z)$.

Осталось показать, что фасеты многогранника $P + S(z)$ центрально симметричны. Если для фасеты F , определяемой фасетным вектором p , выполнено $p^T z = 0$, то $F + S(z)$ есть фасета $P + S(z)$ и она центрально симметрична. Если $p^T z \neq 0$, то F переходит в параллельно сдвинутую на вектор z фасету $P + S(z)$. Каждая новая фасета F' порождается $(n - 2)$ -гранью G пояски некоторой двойки (p_i, p_j) . Фасета F' является призмой $G + S(z)$. Но согласно предложению 3 грань G центрально симметрична. Поэтому центрально симметрична и новая фасета $G + S(z)$. Таким образом, условие Венкова II выполнено для $P + S(z)$.

§ 7. Многогранники Делоне

Наряду с разбиением Вороного пространства на параллелоэдры существует комбинаторно двойственное ему разбиение Делоне на многогранники Делоне. Комбинаторная двойственность означает, что каждая k -грань разбиения Делоне трансверсальна подпространству, натянутому на некоторую $(n - k)$ -грань разбиения Вороного.

Пусть v есть вершина параллелоэдра $P(0)$, имеющего центр в нулевой точке решетки L , определяемой группой трансляций, порожденных основными векторами $t_i, i \in I$. Рассмотрим все параллелоэдры $P(t)$ разбиения Вороного, имеющие с $P(0)$ общую вершину v . Пусть $T = \{t\}$ есть множество всех центров этих $P(t)$. Выпуклая оболочка всех центров $t \in T$ и есть многогранник Делоне $P_D(v)$. Таким образом, каждой вершине разбиения Вороного соответствует ее многогранник Делоне. Ребра $P_D(v)$ есть параллельные переносы некоторых основных векторов t_i , т.е. $t - t' = t_i$, если для $t, t' \in T$ разность $t - t'$ есть ребро $P_D(v)$.

Аналогично, если F^k есть k -грань параллелоэдра $P(0)$, то выпуклая оболочка центров всех параллелоэдров $P(t)$, имеющих общую с $P(0)$ k -грань F^k , есть $(n - k)$ -грань G^{n-k} разбиения Делоне. Одной из вершин G^{n-k} является нулевая точка 0 решетки L . Назовем множество всех многогранников Делоне P_D , имеющих 0 в качестве вершины, *звездой*. Звезда содержит комплекс всех граней разбиения Делоне, имеющих вершину 0 . Это в точности те грани, которые трансверсальны граням параллелоэдра $P(0)$.

По построению k -грань F^k разбиения Вороного и $(n - k)$ -грань G^{n-k} разбиения Делоне однозначно определяют друг друга. Мы говорим, что они *двойственны* друг другу. В частности, вершина v параллелоэдра $P(0)$ двойственна многограннику Делоне $P_D(v)$, а вершина 0 многогранника $P_D(v)$ двойственна параллелоэдру $P(0)$.

Многогранник Делоне $P_D(v)$ является симплексом для любой вершины параллелоэдра P тогда и только тогда, когда P примитивен.

§ 8. Слоевые плоскости

С. С. Рышков и Е. П. Барановский в [2] определили *слоевую плоскость* примитивной решетки многогранника Вороного как $(n-1)$ -плоскость пространства $\mathbb{R}^n$, которая есть объединение фасет многогранников Делоне решетки $L \subset \mathbb{R}^n$.

Б. Венков доказал важную теорему [1; теорема 2] о разбиении Делоне примитивной решетки, многогранник Вороного которой имеет ненулевую толщину.

ТЕОРЕМА 2 (Венков [1; теорема 2]). *Для того чтобы многогранник Вороного P_V примитивной решетки имел ненулевую толщину в направлении R^k , $0 < k < n$, необходимо и достаточно, чтобы в $\mathbb{R}^n$ существовала плоскость R^{n-k} , заполненная клетками размерности $\leq n-k$ триангуляции (S^n) .*

Здесь под клетками размерности $\leq n-k$ понимаются q -границы, $q \leq n-k$, разбиения Делоне, являющегося триангуляцией (S^n) , так как P_V примитивен. Но аналогичная теорема верна не только для многогранников Вороного и не только для примитивных параллелепедов, но и для произвольных параллелепедов ненулевой толщины. Ниже мы ее докажем для $k=1$.

Итак, всякий параллелепед P определяет два разбиения его содержащего пространства $\mathbb{R}^n$: 1) разбиение Вороного и 2) разбиение Делоне. Назовем гиперплоскость $X \subset \mathbb{R}^n$ *слоевой плоскостью* (определяемой параллелепедом P), если она есть объединение фасет разбиения Делоне. Из определения слоевой плоскости следует, что она не пересекает никакой многогранник Делоне по внутренним точкам. В частности, никакой основной вектор t_i не пересекает слоевую плоскость.

Пусть $l(z)$ есть прямая, натянутая на вектор z , и пусть параллелепед P имеет ненулевую толщину в направлении $l(z)$. Б. Венков [1; теорема 1] доказал, что в этом случае основные векторы t_i , $i \in I_0(z)$, порождают $(n-1)$ -мерную решетку $L(z)$, лежащую в гиперплоскости $X(z)$, трансверсальной вектору z .

ЛЕММА 6. *Пусть P есть параллелепед и $z \in \mathbb{R}^n$ есть вектор, $I_0(z) = \{i \in I : p_i^T z = 0\}$, $L(z)$ есть решетка, порожденная основными векторами t_i , $i \in I_0(z)$, и $X(z)$ есть подпространство, натянутое на $L(z)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

- 1) P имеет замкнутую реберную зону Z , ребра которой параллельны $l(z)$;
- 2) подпространство $X(z)$ есть слоевая гиперплоскость.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $u_1 \in Z$. Все фасеты разбиения Вороного, содержащие ребро u_1 , определяются некоторыми фасетными векторами p_i , $i \in I_0(z)$. Соответствующие основные векторы t_i порождают подпространство $X(z)$, в котором лежит решетка $L(z)$. Фасета G_1 звезды, двойственная u_1 , лежит в $X(z)$ и порождает $X(z)$. Поэтому $X(z)$ – гиперплоскость. Пусть T_1 есть 2-грань $P(0)$, содержащая ребро u_1 . Пусть u_2 есть второе ребро замкнутой зоны Z , принадлежащее T_1 , и G_2 есть фасета звезды, двойственная u_2 . Применяя к u_2 аргументы, ранее примененные к u_1 , видим, что G_2 параллельна G_1 . А так как фасета G_2 пересекает G_1 по $(n-2)$ -границе звезды, которая двойственна T_1 , то G_2 лежит в $X(z)$. Аналогично, для $i=2, 3, 4, \dots$ рассмотрим 2-грань T_i , содержащую ребра $u_i, u_{i+1} \in Z$, и применим те же аргументы к фасете G_i , двойственной u_i . Получим, что G_i лежит в $X(z)$. Так как зона Z состоит из конечного числа ребер, то

существует i_0 такое, что $u_{i_0} = u_1$. Мы получили множество фасет звезды, лежащих в $X(z)$ и таких, что G_i пересекает G_{i-1} и G_{i+1} . Поэтому пересечение звезды с гиперплоскостью $X(z)$ состоит из фасет этой звезды. Так как это верно для всех параллелоэдров, имеющих центры в $X(z)$, гиперплоскость $X(z)$ заполнена фасетами разбиения Делоне. Поэтому $X(z)$ – слоевая плоскость.

2) $\Rightarrow$ 1). Рассмотрим ребра параллелоэдра $P = P(0)$, двойственные тем фасетам разбиения Делоне, на которые разбита $X(z)$. Очевидно, эти ребра образуют зону Z и параллельны прямой $l(z)$. Покажем, что зона Z замкнута. Если она не замкнута, то существует 2-грань T параллелоэдра P , содержащая в точности одно ребро $u_1 \in Z$. Ребра T образуют многоугольник. Пусть $u_1, u_2, \dots, u_k$ – ребра T , идущие именно в этой последовательности. Пусть G_i есть фасета звезды, двойственная ребру u_i , $1 \leq i \leq k$. Множество фасет $\{G_i : 1 \leq i \leq k\}$ имеет общую $(n-2)$ -грань G^{n-2} , двойственную 2-гранни T . Очевидно, $G^{n-2} \subset G_1 \subset X(z)$. Так как для $2 \leq i \leq k$ ребро u_i не параллельно u_1 , то существует фасета F_l параллелоэдра P , содержащая u_i и такая, что $l \notin I_0(z)$. Поэтому фасета звезды G_i , двойственная u_i , содержит ребро t_l , $l \notin I_0(z)$, и поэтому фасета G_i не параллельна G_1 и, следовательно, не лежит в $X(z)$. Поэтому существует индекс j такой, что фасеты G_j и G_{j+1} лежат в разных полупространствах, определяемых $X(z)$, но их пересечение $G_j \cap G_{j+1} = G^{n-2}$ лежит в $X(z)$. Так как фасеты G_j и G_{j+1} – соседние в последовательности фасет $\{G_i : 1 \leq i \leq k\}$, то G_j и G_{j+1} являются фасетами некоторого одного многогранника Делоне P_D^j звезды и $X(z)$ пересекает P_D^j по внутренним точкам. Это противоречит определению слоевой плоскости $X(z)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть P есть параллелоэдр и $z \in \mathbb{R}^n$ есть вектор, $I_0(z) = \{i \in I : p_i^T z = 0\}$, $L(z)$ есть решетка, порожденная основными векторами t_i , $i \in I_0(z)$, и $X(z)$ есть гиперплоскость, натянутая на $L(z)$. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1) P имеет ненулевую толщину в направлении $l(z)$;
- 2) P имеет замкнутую реберную зону Z , ребра которой параллельны $l(z)$;
- 3) для некоторого $\lambda > 0$ $P = P_0 + \lambda S(z)$, где P_0 есть параллелоэдр, имеющий нулевую толщину в направлении $l(z)$;
- 4) гиперплоскость $X(z)$ – слоевая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 2) доказана в лемме 1. Эквивалентность 2) $\Leftrightarrow$ 4) доказана в лемме 6. Используя лемму 3 и ее доказательство, докажем эквивалентность 1) $\Leftrightarrow$ 3). Согласно лемме 3 эта эквивалентность верна для некоторого многогранника P_0 нулевой толщины и λ такого, что $2\lambda|z|$ есть толщина P . Нужно показать, что P_0 есть параллелоэдр. Но это очевидно, так как нетрудно проверить, что для P_0 выполнены все три условия Венкова.

Пусть $f(x) = (\sum_{i=1}^n b_i x_i)^2$ есть квадратичная форма, определяющая многогранник Вороного $P_V(f)$ в решетке, заданной базисом $\{b_i : 1 \leq i \leq n\}$. Напомним, что L -область $\mathcal{D}(f) = \mathcal{D}(P_V)$ есть многогранный открытый конус таких квадратичных форм f' , что $P_V(f')$ имеет тот же L -тиш, что и $P_V(f)$.

В [1] Венков доказал следующую теорему:

ТЕОРЕМА 4 (Венков [1; теоремы 10 и 11]). Если замыкание L -области $\mathcal{D}(f)$ содержит форму ранга k , то замыкание $\mathcal{D}(f)$ имеет в качестве $k(k+1)/2$ -

границы L -область форм ранга k и многогранник Вороного $P_V(f)$ имеет ненулевую толщину в направлении X^k .

В случае $k = 1$ теорема 4 утверждает, что если $P = P_V(f)$, то условие 1) теоремы 3 вытекает из следующего условия:

5) форма $f_z(x) = (z^T x)^2 = (\sum_{i=1}^n (z^T b_i) x_i)^2$ ранга 1 лежит на крайнем луче замыкания L -области $\mathcal{D}(f)$, т.е. $f + \lambda f_z \in \mathcal{D}(f)$ для всех $\lambda \geq 0$.

В [3] показано, что для многогранника Вороного $P = P_V(f)$ условия 1), 2) и 4) теоремы 3 эквивалентны условию 5).

Предположим, что сумма $P_V(f) + S(z)$ есть параллелоэдр. Тогда этот параллелоэдр P не есть многогранник Вороного, так как его фасетные векторы не совпадают с основными векторами. Как видно из выражения (6), фасетные векторы $P_V(f)$ остаются фасетными векторами $P_V(f) + S(z)$, но основные векторы t_i меняются, так как правая часть $t_i^2/2 = p_i^2/2$ переходит в $p_i^2/2 + \sigma_i(p_i^T z) = p_i^T(p_i + 2\sigma_i z)/2$, т.е. новые основные векторы имеют вид $t_i = p_i + 2\sigma_i z$.

Аналогично, после вычитания отрезка из многогранника Вороного ненулевой толщины возникает параллелоэдр, не являющийся многогранником Вороного. Но в обоих случаях можно явно указать аффинное преобразование, переводящее полученный параллелоэдр в многогранник Вороного. Это обстоятельство не позволяет дать короткое доказательство приводимого ниже предложения 5.

Пусть $\mathcal{D}(P_V)$ есть L -область n -многогранника Вороного P_V . Напомним, что если P_V не примитивен, то размерность $\mathcal{D}(P_V)$ меньше $n(n+1)/2$. В этом случае $\mathcal{D}(P_V)$ есть общая грань замыкания некоторых L -областей примитивных многогранников Вороного.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть P_V есть такой многогранник Вороного, что $P_V + S(z)$ не есть параллелоэдр ни для какого вектора z . Тогда всякая L -область, замыкание которой имеет $\mathcal{D}(P_V)$ в качестве грани, не имеет крайних лучей ранга 1.

Доказательство этого предложения будет дано в другом месте.

Заметим, что если параллелоэдр P таков, что условие (2) теоремы 1 не выполнено ни для какого вектора z , то $P + S(z)$ не есть параллелоэдр. Если в этом случае P есть многогранник Вороного P_V , то по предложению 5 всякая L -область, замыкание которой имеет $\mathcal{D}(P_V)$ в качестве грани, не имеет крайних лучей ранга 1. Можно показать, и это будет сделано в другом месте, что этим свойством обладает многогранник Вороного решетки D_{2m}^+ , $m \geq 4$.

Определение решетки D_{2m}^+ дано в [8; раздел 7.3]. Эта решетка есть центрировка корневой решетки D_{2m} вектором, определяющим центр ее многогранника Делоне, который есть полукуб. Для $m = 4$ решетка D_8^+ есть корневая решетка E_8 . Можно показать, что решетка D_{2m}^+ жесткая, т.е. ее L -область одномерна. Для $m = 4$ это доказано в [9].

§9. Параллелоэдры ненулевой толщины в нескольких направлениях

Очевидно, отрезок $S(z)$ есть одномерный параллелоэдр. То же верно относительно суммы Минковского двух или трех отрезков. Вообще, сумма k отрезков $\sum_{i=1}^k S(z_i)$ есть многогранник, называемый *зонотопом*. Всякий зонотоп центрально симметричен, и все его грани всех размерностей центрально симметричны.

Поэтому для зонотопа выполнены первые два условия Венкова. Мак-Муллен [10] доказал, что для того, чтобы для зонотопа $\sum_{i=1}^k S(z_i)$ было выполнено третье условие Венкова, т.е. для того, чтобы зонотоп был параллелоэдром, необходимо и достаточно, чтобы множество векторов $Z = \{z_i : 1 \leq i \leq k\}$ было натянуто на унимодулярную систему векторов.

Скажем, что множество векторов Z *натянута* на множество векторов Y , если для всякого вектора $z \in Z$ найдется ненулевой коэффициент $\beta_z \in \mathbb{R}$ такой, что $\{\beta_z z : z \in Z\} = Y$.

Напомним, что множество векторов U образует *унимодулярную систему*, если всякий вектор $u \in U$ имеет целочисленные координаты в любом базисном подмножестве $B \subseteq U$. Из этого определения легко вывести, что эти координаты принимают значения 0 или ± 1 . Всякая унимодулярная система U является представлением *регулярного* или, что то же, *унимодулярного* матроида $M(U)$. Среди многих эквивалентных свойств, однозначно определяющих регулярный матроид, напомним следующее свойство (см. [6; гл. VII, теорема 7.35(v)]):

матроид $M(U)$ ранга q регулярен тогда и только тогда, когда для всякого $(q-1)$ -флэта $X \subseteq M(U)$ существует вектор v_X такой, что для любого $u \in U$ выполнено

$$v_X^T u = \begin{cases} 0, & u \in X, \\ \pm 1, & u \notin X. \end{cases} \quad (11)$$

Ниже будет показано, что если параллелоэдр имеет ненулевую толщину в нескольких направлениях z , где $z \in Z$, то толщинный матроид $M(P)$ регулярен, т.е. что множество Z натянуто на унимодулярную систему. Напомним также, что если параллелоэдр P имеет ненулевую толщину в направлении z , то этому направлению соответствует слоевая плоскость $H(z)$, состоящая из фасет разбиения Делоне.

Пусть $\mathcal{H}_0 = \{H(z) : z \in Z\}$ есть семейство слоевых плоскостей, соответствующих направлениям $z \in Z$. Пусть L есть решетка разбиения Вороного. Каждая гиперплоскость H семейства $\mathcal{H}_0$ такова, что $H \cap L$ есть $(n-1)$ -мерная подрешетка в L . Поэтому решетка L разбивается на $(n-1)$ -мерные слои $L^k(H)$, $k \in \mathbb{Z}$, параллельные нулевому слою $L^0(H) = H \cap L$. Пусть $H = H_u = \{x \in \mathbb{R}^n : u^T x = 0\}$. Здесь вектор u определен с точностью до скалярного множителя. Выберем его так, чтобы $u^T v = k$ для любой точки $v \in L^k(u) \equiv L^k(H_u)$. Введем систему гиперплоскостей $\mathcal{H} \supset \mathcal{H}_0$ такую, что с каждой гиперплоскостью H_u она содержит и аффинные гиперплоскости $H_u^k = \{x \in \mathbb{R}^n : u^T x = k\}$, параллельные H_u и порожденные слоями $L^k(u)$. Пусть U есть множество векторов, задающих все гиперплоскости семейства $\mathcal{H}_0$. Они проходят через точку $0 \in L$.

Множество U векторов, задающих гиперплоскости семейства $\mathcal{H}_0$, определяет матроид $M(U)$. Всякое подмножество $U' \subseteq U$ ранга k определяет $(n-k)$ -мерное подпространство $Y(U') = \{\cap H_u : u \in U'\}$, ортогональное флэту $\text{cl } U'$. Заметим, что равенство $H(z) = H_u$ порождает взаимно однозначное соответствие между множествами Z и U . Оказывается, что это соответствие продолжается до изоморфизма матроидов $M(P)$ и $M(U)$.

ЛЕММА 7. *Матроид $M(U)$ изоморфен толщинному матриду $M(P)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что оба матроида $M(P)$ и $M(U)$ не содержат петель и параллельных элементов. Поэтому достаточно доказать, что порядковые решетки флэтов матроидов $M(U)$ и $M(P)$ изоморфны.

Напомним, что согласно предложению 1 каждому k -флэту Z^k матроида $M(P)$ соответствует зона k -граней P . А любой k -грани F^k параллелоэдра P соответствует $(n - k)$ -грань G^{n-k} разбиения Делоне. Очевидно, что грань G^{n-k} есть пересечение фасет разбиения Делоне. Фасеты, имеющие пересечение G^{n-k} , двойственны ребрам грани F^k . Так как эти ребра параллельны векторам z , образующим k -флэт Z^k , то эти фасеты порождают слоевые плоскости $H(z)$, $z \in Z^k$. С другой стороны, очевидно, множество векторов $u \in U$, определяющих гиперплоскости $H_u = H(z)$, $z \in Z^k$, образуют k -флэт U^k матроида $M(U)$, соответствующий k -флэту Z^k матроида $M(P)$. Так как подпространство $Y(U^k)$, определяемое флэтом U^k , содержит 0, то оно содержит и $(n - k)$ -грань G^{n-k} разбиения Делоне, являющуюся пересечением фасет, порождающих слоевые плоскости $H(z) = H_u$, $u \in U^k$.

Тем самым, установлено взаимно однозначное соответствие между флэтами матроидов $M(P)$ и $M(U)$. Из построения очевидно, что это соответствие флэтов порождает изоморфизм решеток этих флэтов.

ЛЕММА 8. *Матроид $M(U)$ регулярен.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся приведенной выше характеристикой регулярного матроида и формулой (11).

Пусть ранг $M(U)$ равен $q \leq n$. Если $q < n$, то $(n - q)$ -подпространство $Y(U)$ разбито на $(n - q)$ -грани разбиения Делоне решетки L . Пусть G^{n-q} есть одна из граней этого разбиения, принадлежащая звезде. Пусть U^{q-1} есть произвольный $(q - 1)$ -флэт матроида $M(U)$. Подпространство $Y(U^{q-1})$ размерности $n - q + 1$ содержит $Y(U)$ и разбито на $(n - q + 1)$ -грани разбиения Делоне. Пусть $G^{n-q+1} \supset G^{n-q}$ есть грань этого разбиения. Она принадлежит звезде. Если ребро грани многогранника Делоне, принадлежащего звезде, содержит вершину 0, то оно есть основной вектор t_i для некоторого $i \in I$. Возьмем некоторое такое ребро t_i грани G^{n-q+1} , не принадлежащее подграни G^{n-q} . Так как это ребро не лежит в $Y(U)$, то оно не принадлежит гиперплоскостям H_u для $u \in U - U^{q-1}$. Покажем, что вектор t_i можно взять в качестве вектора v_X из (11). Очевидно, $t_i^T u = 0$ для $u \in U^{q-1}$. Пусть $u \in U$ не принадлежит флэту U^{q-1} . Напомним, что вектор t_i не пересекает слоевые плоскости. Так как он не лежит в слоевой плоскости H_u , то он соединяет $0 \in L^0(u)$ с некоторой точкой подрешетки $L^k(u)$, где либо $k = 1$, либо $k = -1$. Поэтому $t_i^T u \in \{\pm 1\}$ для любого $u \in U - U^{q-1}$. Поскольку это верно для любого $(q - 1)$ -флэта, то тем самым доказано, что матроид $M(U)$ регулярен.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Можно показать, что если P есть многогранник Вороного P_V , то семейство слоевых плоскостей $\mathcal{H} = \{H_u^k : k \in \mathbb{Z}, u \in U\}$ есть *дайсинг* решетки многогранника P_V , как этот дайсинг определен в [11]. В статье [11] доказано, что дайсинг $\mathcal{H}$ определяется унимодулярной системой U . В этом случае множества Z и U совпадают.

Леммы 7 и 8 влекут следующий результат:

ТЕОРЕМА 5. *Толщинный матроид $M(P)$ параллелоэдра P регулярен.*

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если ранг толщинного матроида $M(P)$ равен размерности P , то регулярность матроида $M(P)$ можно доказать прямым способом, используя следующую характеристику бинарного матроида. Матроид ранга n бинарен (т.е. представим над полем характеристики 2) тогда и только тогда, когда всякий его $(n-2)$ -флэт принадлежит не более чем трем $(n-1)$ -флэтам (см. [6; теорема 7.22 (iv)]). Поэтому предложение 1 и свойство III Венкова показывают, что толщинный матроид $M(P)$ ранга n бинарен. Так как $M(P)$ естественно представим над действительным полем $\mathbb{R}$, то он регулярен. К сожалению, это доказательство не работает, если ранг матроида $M(P)$ меньше n .

Пусть параллелоэдр P имеет ненулевую толщину в направлении всех $z \in Z$. Согласно теореме 5 множество Z натянуто на унимодулярную систему. По теореме 3, если параллелоэдр P имеет ненулевую толщину в направлении z , то $P = P_1 + \lambda_z S(z)$, где P_1 имеет нулевую толщину в направлении z , но ненулевую толщину в направлении всех $y \in Z - \{z\}$. Итерируя, получаем, что $P = P_0 + \sum_{z \in Z} \lambda_z S(z)$. Здесь многогранник $P(Z) = \sum_{z \in Z} \lambda_z S(z)$ есть зонотоп. Так как множество векторов Z натянуто на унимодулярную систему, то согласно результату Мак-Муллена [10] $P(Z)$ есть параллелоэдр. Мы получили следующий результат:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Если параллелоэдр P имеет ненулевую толщину во всех направлениях $z \in Z$, то $P = P_0 + P(Z)$, где P_0 имеет нулевую толщину в направлениях $z \in Z$ и $P(Z)$ есть параллелоэдр, являющийся зонотопом.*

Известно, что всякая унимодулярная система размерности n содержит не более, чем $n(n+1)/2$ векторов, см. [12]. Поэтому n -параллелоэдр может иметь ненулевую толщину в не более, чем $n(n+1)/2$ направлениях.

Например, рассмотрим корневую решетку D_n . Она имеет $n(n-1)$ фасетных векторов $e_i \pm e_j$, $1 \leq i < j \leq n$, где $\{e_i : i \in N\}$ есть ортонормальный базис $\mathbb{R}^n$ и $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Можно показать, что $n + 2^n$ векторов $z_i = e_i$, $i \in N$, и $z(S) = \sum_{i \in S} e_i - \sum_{i \in N-S} e_i$, $S \subseteq N$, есть все векторы z , удовлетворяющие условиям леммы 5, т.е. такие, что сумма $P(D_n) + S(z)$ есть параллелоэдр. Но в действительности к $P(D_n)$ можно одновременно прибавить не более $n(n+1)/2 - 1$ таких отрезков.

Список литературы

1. Венков Б. А. О проектировании параллелоэдров // Матем. сб. 1959. Т. 49. С. 207–224.
2. Рышков С. С., Барановский Е. П. C -типы n -мерных решеток и пятимерные примитивные параллелоэдры (с приложением к теории покрытий) // Труды МИАН. 1976. Т. 137.
3. Deza M., Grishukhin V. Rank 1 forms, closed zones and laminae // J. Théor. Nombres Bordeaux. 2002. V. 14. P. 103–112.
4. Engel P. Investigations of parallelohedra in $\mathbb{R}^d$ // Voronoi's impact on modern science / ed. P. Engel, H. Syta. V. 2. Kyiv: Institute of Mathematics, 1998. P. 22–60.
5. Delaunay B. N. Sur la partition régulière de l'espace à 4 dimensions // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1929. №1. P. 79–110; 1929. №2. P. 145–164.
6. Айгнер М. Комбинаторная теория. М.: Мир, 1982.
7. Венков Б. А. Об одном классе эвклидовых многогранников // Вестн. ЛГУ. 1954. №2. С. 11–31.

8. *Conway J. H., Sloane N. J. A.* Sphere packings, lattices and groups. Berlin: Springer-Verlag, 1988. (Grundlehren Math. Wiss. V. 290.)
9. *Baranovskii E. P., Grishukhin V. P.* Non-rigidity degree of a lattice and rigid lattices // European J. Combin. 2001. V. 22. P. 921–935.
10. *McMullen P.* Space tiling zonotopes // Mathematika. 1975. V. 22. P. 202–211.
11. *Erdahl E., Ryshkov S. S.* On lattice dicing // European J. Combin. 1994. V. 15. P. 459–481.
12. *Danilov V. I., Grishukhin V. P.* Maximal unimodular systems of vectors // European J. Combin. 1999. V. 20. P. 507–526.

Центральный экономико-математический институт РАН
E-mail: grishuhn@cemi.rssi.ru

Поступила в редакцию
20.03.2003