Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Тимошенко, Системы элементов, сохраняющие меру на многообразиях групп, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 12, 119–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8216>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 10:55:05

УДК 512.54

Е. И. Тимошенко

Системы элементов, сохраняющие меру на многообразиях групп

Доказано, что для любого l , $1 \leq l \leq r$, система элементов $\{v_1, \dots, v_l\}$ свободной метабелевой группы S ранга $r \geq 2$ является примитивной тогда и только тогда, когда она сохраняет меру на многообразии метабелевых групп $\mathfrak{A}^2$. Отсюда получаем, что система элементов $\{v_1, \dots, v_l\}$ примитивна в группе S тогда и только тогда, когда она примитивна в ее проконечном пополнении $\hat{S}$. Кроме того доказано, что существуют многообразие $\mathfrak{M}$ и непримитивный элемент $v \in F_r(\mathfrak{M})$ такой, что v сохраняет меру на $\mathfrak{M}$.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: многообразие групп, метабелева группа, разрешимая группа, примитивная система элементов, сохраняющая меру система элементов.

DOI: 10.4213/sm8216

Для полноты изложения напомним необходимые определения из [1].

Пусть $\mathfrak{M}$ – некоторое многообразие групп. Обозначим через $F = F(\mathfrak{M})$ свободную группу многообразия $\mathfrak{M}$ и пусть $X = \{x_1, \dots, x_r\}$ – базис этой группы. Рассмотрим систему элементов $\{v_1, \dots, v_l\}$, $1 \leq l \leq r$, группы F . Пусть G – некоторая конечная группа из многообразия $\mathfrak{M}$. Обозначим через G^r прямое произведение $\underbrace{G \times \dots \times G}_r$. Система элементов $\{v_1, \dots, v_l\}$ определя-

ет вербальное отображение $\varphi_{\{v_1, \dots, v_l\}}$ группы G^r в группу G^l , которое каждому элементу $\bar{g} = (g_1, \dots, g_r)$ из группы G^r ставит в соответствие элемент $\bar{h} = (v_1(g_1, \dots, g_r), \dots, v_l(g_1, \dots, g_r)) \in G^l$. Зададим на множестве G^r равномерное распределение, соответствующее случайному выбору элементов $\bar{g}$ из G^r . Это означает, что каждый элемент $\bar{g}$ из группы G^r выбирается с вероятностью $|G|^{-r}$. Говорят, что система элементов $\{v_1, \dots, v_l\}$ *сохраняет меру на группе G* , если каждый элемент $\bar{h} \in G^l$ появляется в качестве образа при отображении $\varphi_{\{v_1, \dots, v_l\}}$ точно $|G|^{r-l}$ раз, т.е. с вероятностью $|G|^{-l}$. Система элементов $\{v_1, \dots, v_l\}$, сохраняющая меру на любой конечной группе $G \in \mathfrak{M}$, называется *сохраняющей меру на многообразии $\mathfrak{M}$* .

Дадим другое определение системы элементов, сохраняющей меру на многообразии. Оно равносильно приведенному выше, но имеет то преимущество, что может использоваться для топологических (проконечных) групп.

Зафиксируем конечную группу $G \in \mathfrak{M}$ и рассмотрим все гомоморфизмы $\text{Hom}(F, G)$ из группы F в группу G . Выберем из множества $\text{Hom}(F, G)$ случайно гомоморфизм. Это значит, что каждый гомоморфизм появляется с одинаковой вероятностью $|G|^{-r}$. Система элементов $\{v_1, \dots, v_l\}$ сохраняет меру,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00084) и Программы Министерства образования и науки РФ (грант № 14.В37.21.0359).

если для каждой конечной группы G и каждого случайно выбранного гомоморфизма $\alpha \in \text{Hom}(F_r, G)$ образы $\{\alpha(v_1), \dots, \alpha(v_l)\}$ распределены равномерно в группе G^l , т.е. каждый образ появляется с вероятностью $|G|^{-l}$.

Из определения следует, что свойство системы элементов $\{v_1, \dots, v_l\}$ группы F сохранять меру на многообразии $\mathfrak{M}$ не зависит от того, в каком базисе группы F записаны эти элементы.

Система элементов $\{v_1, \dots, v_l\}$, $1 \leq l \leq r$, относительно свободной группы F ранга r называется *примитивной системой элементов*, если ее можно дополнить до базиса группы F .

В [2] сформулирована гипотеза о связи между примитивными системами элементов и системами элементов, сохраняющими меру.

ГИПОТЕЗА 1. Система элементов $\{v_1, \dots, v_l\}$, $1 \leq l \leq r$, абсолютно свободной группы $\mathbf{F}$ ранга r является примитивной тогда и только тогда, когда она сохраняет меру.

Эта гипотеза получила подтверждение для $l = 1, r - 1, r$ (см. [2], [3]). Гипотеза 1 интересна для многообразий групп.

ГИПОТЕЗА 2. Система элементов $\{v_1, \dots, v_l\}$, $1 \leq l \leq r$, относительно свободной группы $F = F(\mathfrak{M})$ ранга r является примитивной тогда и только тогда, когда она сохраняет меру на многообразии $\mathfrak{M}$.

В [1] эта гипотеза изучалась для многообразия метабелевых групп $\mathfrak{A}^2$. Было доказано, что система из одного или r элементов свободной метабелевой группы ранга r сохраняет меру на многообразии метабелевых групп тогда и только тогда, когда она примитивна. Однако для произвольного l , $1 \leq l \leq r$, вопрос о совпадении примитивных систем длины l свободной метабелевой группы S ранга r с системами, сохраняющими меру на многообразии метабелевых групп, оставался открытым.

Мы будем использовать производные Фокса при дальнейших доказательствах. Напомним их определение и некоторые свойства.

В свободной (абсолютно) группе $\mathbf{F}$ зафиксируем базис $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_r\}$. На групповом кольце $\mathbb{Z}\mathbf{F}$ определим дифференцирование – левые производные Фокса ∂_i , $i = 1, \dots, r$, в базисе $\mathbf{X}$. Они однозначно заданы условиями

$$\begin{aligned} \partial_i \mathbf{x}_j &= \delta_{ij}, \\ \partial_i(u + v) &= \partial_i u + \partial_i v, \quad \partial_i(uv) = \partial_i(u)\varepsilon(v) + u\partial_i(v), \quad u, v \in \mathbb{Z}\mathbf{F}, \end{aligned} \quad (1)$$

где ε – естественный гомоморфизм колец $\varepsilon: \mathbb{Z}\mathbf{F} \rightarrow \mathbb{Z}$, а δ_{ij} – символ Кронекера.

Для производных Фокса имеет место следующее основное тождество:

$$\partial_1 v(x_1 - 1) + \dots + \partial_r v(x_r - 1) = v - 1, \quad v \in \mathbf{F}. \quad (2)$$

Многообразие всех абелевых групп экспоненты $n \geq 0$ обозначим через $\mathfrak{A}_n$. Пусть $A(n)$ – свободная группа многообразия $\mathfrak{A}_n$ с базисом $\{a_1, \dots, a_r\}$, $\mathbb{Z}_m$ – кольцо вычетов по модулю m . Рассмотрим гомоморфизм

$$\phi: \mathbb{Z}\mathbf{F} \rightarrow \mathbb{Z}_m A(n),$$

индуцированный естественным гомоморфизмом колец $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_m$ и гомоморфизмом групп $\mathbf{F} \rightarrow A(n)$, при котором $\mathbf{x}_i \mapsto a_i$. Используя ϕ , продолжим дифференцирования ∂_i до отображений из $\mathbb{Z}\mathbf{F}$ в кольцо $\mathbb{Z}_m A(n)$. Полученные отображения $\mathbb{Z}\mathbf{F} \rightarrow \mathbb{Z}_m A(n)$ будем называть дифференцированиями из $\mathbb{Z}\mathbf{F}$ в $\mathbb{Z}_m A(n)$ и обозначать через ∂_i^* .

Так как при ∂_i^* все элементы из $\mathbf{F}''$ отображаются в нуль, то можно считать, что ∂_i^* – дифференцирования из $\mathbb{Z}S$ в $\mathbb{Z}_m A(n)$.

В [4] (см. также [5]) доказана следующая

ТЕОРЕМА 1 (критерий примитивности). Пусть $\{v_1, \dots, v_l\}$, $1 \leq l \leq r$, – система элементов группы $S_{m,n}$, $m, n \geq 2$, $J(v) = (\partial_j^* v_i)_{l \times r}$ – матрица, составленная из значений производных Фокса от элементов v_i в кольце $\mathbb{Z}_m A(n)$. Система элементов $\{v_1, \dots, v_l\}$ примитивна тогда и только тогда, когда:

- 1) существует матрица $B_{r \times l}$ над кольцом $\mathbb{Z}_m A(n)$ такая, что $J(v) \cdot B = E_{l \times l}$ – единичная матрица;
- 2) образы элементов $v_1, \dots, v_l$ в группе $A(n)$ образуют примитивную систему.

Нам потребуется следующая лемма из работы [1] автора.

ЛЕММА 1. Пусть S – свободная метабелева группа ранга r . Если система элементов $\{v_1, \dots, v_l\}$, $1 \leq l \leq r$, этой группы сохраняет меру на многообразии метабелевых групп $\mathfrak{A}^2$, то образ этой системы элементов в абелевой группе $A_r = S/S'$ является примитивной системой.

ТЕОРЕМА 2. Пусть S – свободная метабелева группа ранга $r \geq 2$ с базисом $X = \{x_1, \dots, x_r\}$. Система элементов $\{v_1, \dots, v_l\}$, $1 \leq l \leq r$, группы S примитивна тогда и только тогда, когда она сохраняет меру на многообразии $\mathfrak{A}^2$ всех метабелевых групп.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что система элементов $\{v_1, \dots, v_l\}$ примитивна. Свойство системы элементов сохранять меру на многообразии не зависит от того, в каком базисе группы S элементы $v_1, \dots, v_l$ записаны. Поэтому можно считать, что данная примитивная система равна $\{x_1, \dots, x_l\}$. Для любой конечной группы $G \in \mathfrak{A}^2$ система элементов $\{x_1, \dots, x_l\}$ определяет вербальное отображение $\varphi_{\{x_1, \dots, x_l\}}$ группы G^r на группу G^l по правилу

$$(g_1, \dots, g_r) \mapsto (g_1, \dots, g_l), \quad g_i \in G.$$

Очевидно, что каждый элемент $(g_1, \dots, g_l) \in G^l$ имеет точно $|G|^{r-l}$ прообразов в группе G^r . Поэтому система элементов $\{x_1, \dots, x_l\}$ сохраняет меру на многообразии $\mathfrak{A}^2$.

Предположим, что система элементов $\{v_1, \dots, v_l\}$ сохраняет меру на многообразии $\mathfrak{A}^2$. По лемме 1 образы элементов $\{v_1, \dots, v_l\}$ в свободной абелевой группе S/S' составляют примитивную систему элементов. Любой автоморфизм группы S/S' индуцирован автоморфизмом группы S . Поэтому любая примитивная система элементов группы S/S' индуцирована примитивной системой элементов группы S . Следовательно, можно предположить, что $v_i = x_i c_i$, $c_i \in S'$, $i = 1, \dots, l$.

Так как система элементов $\{v_1, \dots, v_l\}$ примитивна в любой группе $S_{m,n}$, то она примитивна в группе S .

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\mathbf{F}$ – свободная (абсолютно) группа ранга r и $\mathfrak{N}_c$ – многообразие групп ступени нильпотентности не выше c . Система элементов $\{v_1, \dots, v_l\} \in \mathbf{F}^l$, $1 \leq l \leq r$, сохраняет меру на многообразии $\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда она сохраняет меру на многообразии $\mathfrak{A}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathfrak{A}^2 \subseteq \mathfrak{N}_c\mathfrak{A}$, то всякая система элементов, сохраняющая меру на многообразии $\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}$, сохраняет меру на многообразии $\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}$.

Предположим, что система элементов $\{v_1, \dots, v_l\}$ сохраняет меру на многообразии $\mathfrak{A}^2$. По теореме 2 она примитивна в группе $S = F_r(\mathfrak{A}^2)$. Пусть элементы $\{v_1, \dots, v_r\}$ образуют базис в группе S . Группа $F_r(\mathfrak{N}_c\mathfrak{A})$ изоморфна факторгруппе $\mathbf{F}/[\mathbf{F}', \dots, \mathbf{F}']$. Эта группа содержит нильпотентную нормальную подгруппу $\mathbf{F}'/[\mathbf{F}', \dots, \mathbf{F}']$. Нетрудно проверить, что элементы $\{v_1, \dots, v_r\}$, порождающие группу $\mathbf{F}/[\mathbf{F}', \dots, \mathbf{F}']$ по модулю коммутанта ее нормальной подгруппы $\mathbf{F}'/[\mathbf{F}', \dots, \mathbf{F}']$, порождают (свободно) группу $F_r(\mathfrak{N}_c\mathfrak{A})$. Поэтому система элементов $\{v_1, \dots, v_l\}$ примитивна в группе $F_r(\mathfrak{N}_c\mathfrak{A})$. Следовательно, она сохраняет меру на многообразии $\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Система элементов $\{v_1, \dots, v_l\}$, $1 \leq l \leq r$, из свободной группы $F(\mathfrak{N}_c\mathfrak{A})$ ранга r примитивна тогда и только тогда, когда она сохраняет меру на многообразии $\mathfrak{N}_c\mathfrak{A}$.

Доказательство следствия 2 аналогично доказательству следствия 1.

Рассмотрим теперь свободную проконечную метабелеву группу. Топологическая группа, представимая в виде проективного предела конечных групп, называется *проконечной*. Необходимые сведения о проконечных группах можно найти в [7] и [8]. Класс проконечных групп совпадает с классом компактных вполне несвязных хаусдорфовых групп.

Свободная проконечная группа $\widehat{\mathbf{F}}$ с конечным множеством свободных порождающих $\mathcal{X} = \{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ – это проконечная группа, для которой зафиксировано отображение $j: \mathcal{X} \rightarrow \widehat{\mathbf{F}}$ со следующим универсальным свойством: для любого отображения $\xi: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}$ множества $\mathcal{X}$ в произвольную проконечную группу $\mathcal{P}$ существует единственный (непрерывный) гомоморфизм $\mu: \widehat{\mathbf{F}} \rightarrow \mathcal{P}$, для которого $\xi = \mu \cdot j$. Образ $j(\mathcal{X})$ называется базисом группы $\widehat{\mathbf{F}}$. Все базисы группы $\widehat{\mathbf{F}}$ равносильны. Элемент $w \in \widehat{\mathbf{F}}$ называется примитивным, если его можно включить в некоторый базис. Известно, что группа $\widehat{\mathbf{F}}$ является проконечным пополнением свободной группы $\mathbf{F}$.

Пусть класс групп $\mathcal{G}$ замкнут относительно взятия подгрупп, факторгрупп и конечных прямых произведений. Проконечная группа $\mathcal{P}$, равная проективному пределу групп из класса $\mathcal{G}$, называется проконечной $\mathcal{G}$ -группой.

Если в качестве $\mathcal{G}$ взять многообразие всех метабелевых групп $\mathfrak{A}^2$, то получим многообразие проконечных $\mathfrak{A}^2$ -групп. Свободная группа $\widehat{S}$ ранга r этого многообразия – профинитное пополнение свободной метабелевой группы S ранга r .

В [1] доказано следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Система элементов $\{v_1, \dots, v_l\}$, $1 \leq l \leq r$, свободной проконечной $\mathfrak{A}^2$ -группы $\widehat{S}$ ранга r примитивна тогда и только тогда, когда она сохраняет меру на многообразии проконечных $\mathfrak{A}^2$ -групп.

Из этого предложения и теоремы 2 получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $\{v_1, \dots, v_l\}$, $1 \leq l \leq r$, – система элементов свободной метабелевой группы S ранга r и $\widehat{S}$ – проконечное пополнение S . Система $\{v_1, \dots, v_l\}$ примитивна в S тогда и только тогда, когда она примитивна в $\widehat{S}$.

Пусть R – кольцо с единицей. Вектор $(\rho_1, \dots, \rho_r)$, $\rho_i \in R$, называется унимодулярным, если $\rho_1 \rho'_1 + \dots + \rho_r \rho'_r = 1$ для некоторых $\rho'_i \in R$.

Элемент v абсолютно свободной группы $\mathbf{F}$ конечного ранга r назовем унимодулярным, если унимодулярен вектор $(\partial_1 v, \dots, \partial_r v) \in (\mathbb{Z}\mathbf{F})^r$, составленный из значений производных Фокса в кольце $\mathbb{Z}\mathbf{F}$.

Существует тесная связь между примитивными элементами, унимодулярными элементами и элементами, сохраняющими меру. Так, например, из [9] следует, что элемент v группы $\mathbf{F}$ примитивен тогда и только тогда, когда он унимодулярен. В [3] доказано, что элемент $v \in \mathbf{F}$ сохраняет меру (на многообразии всех групп) тогда и только тогда, когда он примитивен. Таким образом, для многообразия всех групп свойства элемента $v \in \mathbf{F}$ быть примитивным, сохранять меру и быть унимодулярным совпадают.

Аналогичная ситуация имеет место для многообразия метабелевых групп. Обозначим через $\text{Pr}(S)$ множество примитивных элементов свободной метабелевой группы S ранга r , через $\text{Sa}(S)$ – множество ее элементов, сохраняющих меру на многообразии метабелевых групп, а через $\text{Un}(S)$ – множество унимодулярных элементов группы S , т.е. множество тех ее элементов, для которых вектор $(\partial_1 v, \dots, \partial_r v) \in (\mathbb{Z}(S/S'))^r$ унимодулярен. Из теоремы 2 и результатов работ [10]–[12] получаются следующие эквивалентности:

$$v \in \text{Pr}(S) \iff v \in \text{Sa}(S) \iff v \in \text{Un}(S).$$

Для выяснения связи между понятиями “быть примитивным” и “сохранять меру на многообразии” интересным является следующий вопрос: существует ли многообразие $\mathfrak{M}$ и непримитивный элемент $v \in F_r(\mathfrak{M})$ такой, что v сохраняет меру на $\mathfrak{M}$? Ответ дает

ТЕОРЕМА 3. *Существует непримитивный элемент v в свободной группе многообразия $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2$, сохраняющий меру на этом многообразии.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим элемент $v = x_1[x_1, x_2, x_2, x_1, x_2]$ из группы $F_2(\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2)$. В [13; теорема 3] доказано, что правый идеал кольца $\mathbb{Z}(F_2(\mathfrak{N}_2))$, порожденный значениями производных Фокса $\partial_i g$, $i = 1, 2$, совпадает со всем кольцом. Значит, элемент v унимодулярен. Там же доказано, что элемент v не примитивен в $F_2(\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2)$.

Пусть G – конечная группа из многообразия $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2$. Покажем, что элемент v сохраняет меру на G . Так как группа G конечна и принадлежит многообразию $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2$, то любой гомоморфизм из $F_2(\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2)$ на G можно пропустить через относительно свободную группу ранга два многообразия $\mathfrak{A}_m\mathfrak{B}$, где $m > 0$, $\mathfrak{B}$ – некоторое многообразие нильпотентных групп конечной экспоненты. Образы производных Фокса $\partial_i g$, $i = 1, 2$, в кольце $\mathbb{Z}(F_2(\mathfrak{B}))$ порождают правый идеал, совпадающий со всем кольцом. В [13; следствие 1] доказано, что для многообразий вида $\mathfrak{A}_m\mathfrak{M}$, где $m > 0$, $\mathfrak{M}$ – любое локально конечное многообразие, элемент v примитивен тогда и только тогда, когда вектор $(\partial_i v, \partial_2 v) \in (\mathbb{Z}F_2(\mathfrak{B}))^2$

унимодулярен. Значит, образ элемента v примитивен в группе $F_2(\mathfrak{A}_m\mathfrak{B})$. Следовательно, элемент v сохраняет меру на многообразии $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2$.

Список литературы

- [1] Е. И. Тимошенко, “Примитивные и сохраняющие меру системы элементов на многообразиях метабелевых и метабелевых проконечных групп”, *Сиб. матем. журн.*, **54**:1 (2013), 199–207; англ. пер.: Е. И. Timoshenko, “Primitive and measure-preserving systems of elements on the varieties of metabelian and metabelian profinite groups”, *Siberian Math. J.*, **54**:1 (2013), 152–158.
- [2] D. Puder, *Primitive words, free factors and measure preservation*, arXiv: abs/1104.3991.
- [3] D. Puder, O. Pazanchevski, *Measure preserving words are primitive*, arXiv: 1202.3269.
- [4] Ч. К. Гупта, Е. И. Тимошенко, “Примитивные системы элементов в многообразии $\mathfrak{A}_m\mathfrak{A}_n$: критерий и индуцирование”, *Алгебра и логика*, **38**:5 (1999), 513–530; англ. пер.: С. К. Gupta, Е. И. Timoshenko, “Primitive systems of elements in the varieties $\mathfrak{A}_m\mathfrak{A}_n$: a criterion and induction”, *Algebra and Logic*, **38**:5 (1999), 277–288.
- [5] Е. И. Тимошенко, *Эндоморфизмы и универсальные теории разрешимых групп*, Новосибирский гос. тех. ун-т, Новосибирск, 2011.
- [6] С. К. Gupta, V. A. Roman’kov, “Finite separability of tameness and primitivity in certain relatively free groups”, *Comm. Algebra*, **23**:11 (1995), 4101–4108.
- [7] J. Wilson, *Profinite groups*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **19**, Clarendon Press, New York, 1998.
- [8] О. В. Мельников, В. Н. Ремесленников, В. А. Романьков, Л. А. Скорняков, И. П. Шестаков, *Общая алгебра*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1990.
- [9] У. У. Умирбаев, “Примитивные элементы свободных групп”, *УМН*, **49**:2 (1994), 175–176; англ. пер.: U. U. Umirbaev, “Primitive elements of free groups”, *Russian Math. Surveys*, **49**:2 (1994), 184–185.
- [10] Е. И. Тимошенко, “Об алгоритмической разрешимости проблемы включения в базис свободной метабелевой группы”, *Матем. заметки*, **51**:3 (1992), 117–121; англ. пер.: Е. И. Timoshenko, “Algorithmic solvability of the problem of inclusion in a basis of a free metabelian group”, *Math. Notes*, **51**:3 (1992), 304–307.
- [11] В. А. Романьков, “Критерии примитивности систем элементов свободной метабелевой группы”, *Укр. матем. журн.*, **43** (1991), 996–1002; англ. пер.: V. A. Roman’kov, “Criteria for the primitivity of a system of elements of a free metabelian group”, *Ukrainian Math. J.*, **43**:7–8 (1991), 930–935.
- [12] С. К. Gupta, Е. И. Timoshenko, “Primitivity in the free groups of the variety $\mathfrak{A}_m\mathfrak{A}_n$ ”, *Comm. Algebra*, **24**:9 (1996), 2859–2876.
- [13] Е. И. Тимошенко, “О примитивных системах элементов в многообразии $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2$ и некоторых локально конечных многообразиях”, *Алгебра и логика*, **37**:6 (1998), 687–699; англ. пер.: Е. И. Timoshenko, “Primitive systems of elements in the variety $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_2$ and some locally finite varieties of groups”, *Algebra and Logic*, **37**:6 (1998), 391–398.

Евгений Иосифович Тимошенко
(Evgenii I. Timoshenko)

Новосибирский государственный технический
университет
E-mail: eitim45@gmail.com

Поступила в редакцию
29.01.2013 и 21.06.2013