Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Ю. Панов, Ренормализованные энтропийные решения задачи Коши для неоднородного квазилинейного уравнения первого порядка, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 10, 91–126

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8217>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 16:56:30

УДК 517.956.35

Е. Ю. Панов

Ренормализованные энтропийные решения задачи Коши для неоднородного квазилинейного уравнения первого порядка

Введено понятие ренормализованного энтропийного решения задачи Коши для неоднородного квазилинейного уравнения первого порядка. Доказаны теоремы существования и единственности, принцип сравнения. Исследована связь с обобщенными энтропийными решениями.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: квазилинейные уравнения первого порядка, обобщенные энтропийные решения, принцип сравнения, ренормализованные решения, существование и единственность.

DOI: 10.4213/sm8217

§ 1. Введение

В слое $(t, x) \in \Pi_T = (0, T) \times \mathbb{R}^n$, $T > 0$, рассмотрим задачу Коши для неоднородного квазилинейного уравнения первого порядка

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) = g(t, x, u), \quad (1.1)$$

где вектор потока $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in C^1(\mathbb{R}^n)$, а функция-источник $g(t, x, u)$ является функцией Каратеодори (т.е. эта функция измерима по (t, x) при любом фиксированном $u \in \mathbb{R}$ и непрерывна по u для всех $(t, x) \in \Pi_T$) такой, что $|g(t, x, k)| \in L^1_{\text{loc}}(\Pi_T)$ для всех $k \in \mathbb{R}$. Предположим также, что для некоторой константы $L = L(g) \geq 0$

$$g(t, x, v) - g(t, x, u) \leq L(v - u) \quad \forall v, u \in \mathbb{R}, \quad v > u. \quad (1.2)$$

Из этого условия, в частности, следует, что

$$\max_{|u| \leq R} |g(t, x, u)| \in L^1_{\text{loc}}(\Pi_T) \quad \forall R > 0. \quad (1.3)$$

Действительно, ввиду (1.2) при $|u| \leq R$ справедливы неравенства

$$g(t, x, R) - L(R - u) \leq g(t, x, u) \leq g(t, x, -R) + L(u + R),$$

из которых следует, что

$$|g(t, x, u)| \leq |g(t, x, -R)| + |g(t, x, R)| + 2LR \in L^1_{\text{loc}}(\Pi_T).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00230-а).

В начальном условии

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (1.4)$$

предполагается, что функция $u_0(x)$ лишь измерима.

При условии $u_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ определено понятие обобщенного энтропийного решения задачи (1.1), (1.4) в смысле С. Н. Кružжова [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $u = u(t, x) \in L^1_{\text{loc}}(\Pi_T)$ называется обобщенным энтропийным решением (о.э.р.) задачи Коши (1.1), (1.4), если $\varphi(u(t, x)) \in L^1_{\text{loc}}(\Pi_T, \mathbb{R}^n)$, $g(t, x, u(t, x)) \in L^1_{\text{loc}}(\Pi_T)$ и

а) для всех $k \in \mathbb{R}$

$$|u - k|_t + \text{div}_x [\text{sign}(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k))] - \text{sign}(u - k)g(t, x, u) \leq 0 \quad (1.5)$$

в смысле распределений на Π_T (в $\mathcal{D}'(\Pi_T)$);

б) $\text{ess lim}_{t \rightarrow 0+} u(t, \cdot) = u_0$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, т.е. существует множество $\mathcal{E} \subset (0, T)$ полной меры Лебега такое, что при $t \in \mathcal{E}$ $u(t, \cdot) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и $u(t, \cdot) \rightarrow u_0$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ при $t \rightarrow 0$, $t \in \mathcal{E}$.

Предполагается, что функция

$$\text{sign } v = \begin{cases} 1, & v > 0, \\ -1 & v < 0, \\ 0, & v = 0. \end{cases}$$

Условие (1.5) означает, что для любой пробной функции $f = f(t, x) \in C^1_0(\Pi_T)$, $f \geq 0$, выполнено интегральное неравенство

$$\int [|u - k|f_t + \text{sign}(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k)) \cdot \nabla_x f + \text{sign}(u - k)g(t, x, u)f] dt dx \geq 0,$$

где $\cdot$ обозначает скалярное умножение на $\mathbb{R}^n$.

Из условия (1.5) в пределе при $k \rightarrow \pm\infty$ легко выводится равенство

$$u_t + \text{div}_x \varphi(u) - g(t, x, u) = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T) \quad (1.6)$$

(см., например, [2; следствие 1]), показывающее, что о.э.р. $u(t, x)$ является и обобщенным решением уравнения (1.1).

Нам потребуются также понятия обобщенного энтропийного субрешения и обобщенного энтропийного суперрешения задачи (1.1), (1.4) (см., например, [2]–[4]). Обозначим $v^+ = \max(v, 0)$, $v^- = (-v)^+$, $\text{sign}^+(v) = (\text{sign } v)^+$, $\text{sign}^-(v) = -(\text{sign } v)^-$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Измеримая функция $u = u(t, x)$ называется обобщенным энтропийным субрешением (о.э.субр.) задачи Коши (1.1), (1.4), если $u^+ \in L^1_{\text{loc}}(\Pi_T)$, $\varphi(u^+) \in L^1_{\text{loc}}(\Pi_T, \mathbb{R}^n)$, $g(t, x, u^+) \in L^1_{\text{loc}}(\Pi_T)$ и

а) для всех $k \in \mathbb{R}$

$$((u - k)^+)_t + \text{div}_x [\text{sign}^+(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k))] - \text{sign}^+(u - k)g(t, x, u) \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T); \quad (1.7)$$

б) $\text{ess lim}_{t \rightarrow 0+} (u(t, \cdot) - u_0)^+ = 0$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Заметим, что из оценок

$$(u - k)^+ \leq u^+ + k^-, \quad |\text{sign}^+(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k))| \leq |\varphi(u^+)| + 2 \max_{|u| \leq |k|} |\varphi(u)|,$$

$$\text{sign}^+(u - k)|g(t, x, u)| \leq |g(t, x, u^+)| + \max_{|u| \leq |k|} |g(t, x, u)|$$

и свойства (1.3) следуют включения

$$(u - k)^+, \text{sign}^+(u - k)g(t, x, u) \in L_{\text{loc}}^1(\Pi_T),$$

$$\text{sign}^+(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k)) \in L_{\text{loc}}^1(\Pi_T, \mathbb{R}^n)$$

для всех $k \in \mathbb{R}$, и распределение в левой части (1.7) корректно определено.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Назовем измеримую функцию $u = u(t, x)$ обобщенным энтропийным суперрешением (о.э.суперр.) задачи (1.1), (1.4), если $u^- \in L_{\text{loc}}^1(\Pi_T)$, $\varphi(-u^-) \in L_{\text{loc}}^1(\Pi_T, \mathbb{R}^n)$, $g(t, x, -u^-) \in L_{\text{loc}}^1(\Pi_T)$ и

а) для всех $k \in \mathbb{R}$

$$((u - k)^-)_t + \text{div}_x [\text{sign}^-(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k))] - \text{sign}^-(u - k)g(t, x, u) \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T); \quad (1.8)$$

б) $\text{ess lim}_{t \rightarrow 0+} (u(t, \cdot) - u_0)^- = 0$ в $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$.

В силу оценок

$$(u - k)^- \leq u^- + k^+, \quad |\text{sign}^-(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k))| \leq |\varphi(-u^-)| + 2 \max_{|u| \leq |k|} |\varphi(u)|,$$

$$|\text{sign}^-(u - k)g(t, x, u)| \leq |g(t, x, -u^-)| + \max_{|u| \leq |k|} |g(t, x, u)|$$

справедливы включения

$$(u - k)^-, \text{sign}^-(u - k)g(t, x, u) \in L_{\text{loc}}^1(\Pi_T),$$

$$\text{sign}^-(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k)) \in L_{\text{loc}}^1(\Pi_T, \mathbb{R}^n)$$

для всех $k \in \mathbb{R}$ и распределение в левой части (1.8) корректно определено.

Из условий определений 1–3 вытекает, что функция $u(t, x)$ является о.э.р. задачи (1.1), (1.4) тогда и только тогда, когда она является о.э.субр. и о.э.суперр. этой задачи одновременно.

Действительно, если $u(t, x)$ – о.э.р. задачи (1.1), (1.4), то очевидно, что $u^\pm, g(t, x, \pm u^\pm) \in L_{\text{loc}}^1(\Pi_T)$, $\varphi(\pm u^\pm) \in L_{\text{loc}}^1(\Pi_T, \mathbb{R}^n)$ и для любого $k \in \mathbb{R}$ выполнены условия (см. (1.5), (1.6))

$$l_1 \doteq |u - k|_t + \text{div}_x [\text{sign}(u - k)(\varphi(u) - \varphi(k))] - \text{sign}(u - k)g(t, x, u) \leq 0,$$

$$l_2 \doteq (u - k)_t + \text{div}_x (\varphi(u) - \varphi(k)) - g(t, x, u) = u_t + \text{div}_x \varphi(u) - g(t, x, u) = 0$$

в $\mathcal{D}'(\Pi_T)$. Прибавляя $\pm l_2$ к распределению l_1 и учитывая, что $|v| \pm v = 2v^\pm$, $\text{sign } v \pm 1 = 2 \text{sign}^\pm v$ при $v \neq 0$, получим неравенства (1.7) и (1.8) при всех $k \in \mathbb{R}$ таких, что множество уровня $u^{-1}(k)$ имеет нулевую меру Лебега на Π_T . Поскольку множество таких k имеет полную меру и потому всюду плотно в $\mathbb{R}$,

то по предложению 2 из [2] неравенства (1.7) и (1.8) выполнены при всех $k \in \mathbb{R}$. Начальные условия из определений 2, 3 следуют из неравенств $(u(t, \cdot) - u_0)^\pm \leq |u(t, \cdot) - u_0|$ и условия б) определения 1. Итак, u – о.э.субр. и о.э.суперр. задачи (1.1), (1.4).

Обратно, если функция $u = u(t, x)$ – одновременно о.э.субр. и о.э.суперр. задачи (1.1), (1.4), то $u = u^+ - u^- \in L^1_{\text{loc}}(\Pi_T)$, $g(t, x, u) = g(t, x, u^+) + g(t, x, -u^-) - g(t, x, 0) \in L^1_{\text{loc}}(\Pi_T)$, $\varphi(u) = \varphi(u^+) + \varphi(-u^-) - \varphi(0) \in L^1_{\text{loc}}(\Pi_T, \mathbb{R}^n)$. Соотношение (1.5) получается при суммировании (1.7) и (1.8). Наконец, начальное условие определения 1 следует из равенства $|u(t, \cdot) - u_0| = (u(t, \cdot) - u_0)^+ + (u(t, \cdot) - u_0)^-$ и требований $\text{ess lim}_{t \rightarrow 0+} (u(t, \cdot) - u_0)^\pm = 0$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Поэтому, $u(t, x)$ – о.э.р. задачи (1.1), (1.4).

В случае, когда функции $u_0(x)$, $g(t, x, 0)$ ограничены, имеются о.э.субр. и о.э.суперр. задачи (1.1), (1.4), зависящие только от временной переменной t . Точнее, справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Предположим, что $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g(t, x, 0) \in L^\infty(\Pi_T)$ и $A = \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$, $B = \|g(t, x, 0)\|_{L^\infty(\Pi_T)}$. Тогда функции*

$$u_- = -[Ae^{Lt} + (B/L)(e^{Lt} - 1)], \quad u_+ = [Ae^{Lt} + (B/L)(e^{Lt} - 1)]$$

($u_\pm = \pm(A + Bt)$ при $L = 0$) являются соответственно о.э.субр. и о.э.суперр. задачи (1.1), (1.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\pm u_\pm \geq 0$, то по условию (1.2)

$$\begin{aligned} g(t, x, u_+(t)) &\leq g(t, x, 0) + Lu_+(t) \leq B + Lu_+ = (u_+)'(t), \\ g(t, x, u_-(t)) &\geq g(t, x, 0) + Lu_-(t) \geq -B + Lu_-(t) = (u_-)'(t). \end{aligned}$$

Поэтому в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+)$

$$\begin{aligned} ((u_- - k)^+)' - \text{sign}^+(u_- - k)g(t, x, u_-) \\ = \text{sign}^+(u_-(t) - k)((u_-)'(t) - g(t, x, u_-(t))) &\leq 0, \\ ((u_+ - k)^-)' - \text{sign}^-(u_+ - k)g(t, x, u_+) \\ = \text{sign}^-(u_+(t) - k)((u_+)'(t) - g(t, x, u_+(t))) &\leq 0. \end{aligned}$$

Учитывая также, что $u_-(0) = -A \leq u_0(x)$, $u_+(0) = A \geq u_0(x)$, мы видим, что выполнены все требования определений 2 и 3, и, значит, функции $u_-(t)$, $u_+(t)$ являются соответственно о.э.субр. и о.э.суперр. задачи (1.1), (1.4).

В случае $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $g \equiv 0$ хорошо известен классический результат С. Н. Кружкова [1] о существовании и единственности ограниченного о.э.р. $u(t, x) \in L^\infty(\Pi_T)$ задачи (1.1), (1.4). Для неограниченных о.э.р. нарушается такое важное “гиперболическое” свойство, как конечность скорости распространения начального возмущения, что может приводить к потере корректности задачи Коши (см. примеры в [5]–[7]). В частности, естественные требования $u, g(t, x, u) \in L^1_{\text{loc}}(\Pi_T)$, $\varphi(u) \in L^1_{\text{loc}}(\Pi_T, \mathbb{R}^n)$ могут оказаться слишком ограниченными. Однако, отказавшись от этих требований, мы не можем рассматривать энтропийные условия (и даже само уравнение) в рамках теории распределений. Для корректного определения таких решений $u = u(t, x)$ (называемых

ренормализованными) используются энтропийные условия для суперпозиций $s(u)$, где s – ограниченные функции специального вида. Ренормализованные энтропийные решения задачи (1.1), (1.4) были впервые введены в работе [8] в случае $g \equiv 0$ и $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. В [8] доказаны существование и единственность ренормализованного энтропийного решения. В статье [9] эти результаты были обобщены на случай произвольных измеримых начальных данных. В настоящей работе мы распространяем результаты [9] на неоднородный случай.

§ 2. Основные понятия

Пусть $s_{a,b}(u) = \max(\min(u, b), a)$ – срезающая функция на уровнях a, b , где $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Эта функция предполагается определенной на расширенной числовой прямой $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ в соответствии с равенствами $s_{a,b}(+\infty) = b$, $s_{a,b}(-\infty) = a$. Пусть

$$\chi_{(a,b]}(u) = \begin{cases} 1, & u \in (a, b], \\ 0, & u \notin (a, b], \end{cases}$$

– характеристическая функция промежутка $(a, b]$.

Ниже часто будет использоваться обозначение χ_A для характеристической функции множества в $\mathbb{R}$ или Π_T . Здесь A – соответствующее множество или условие (предикат), его задающее. Например, функция $\chi_{(a,b]}(u) = \chi_{a < u \leq b}(u)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Измеримая функция $u = u(t, x)$ на Π_T называется ренормализованным энтропийным субрешением (р.э.субр.) задачи (1.1), (1.4), если для всех $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$:

$$(s_{a,b}(u))_t + \operatorname{div}_x \varphi(s_{a,b}(u)) - \chi_{(a,b]}(u)g(t, x, u) = \mu_b - \mu_a \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T),$$

где μ_k , $k \in \mathbb{R}$, – семейство неотрицательных локально конечных мер на Π_T ($\mu_k \in M_{\text{loc}}(\Pi_T)$, $\mu_k \geq 0$);

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\mu_k(\Pi_T) + \int_{u > k} (g(t, x, k))^- dt dx \right) = 0;$$

$\operatorname{ess} \lim_{t \rightarrow 0+} (s_{a,b}(u(t, x)) - s_{a,b}(u_0(x)))^+ = 0$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Измеримая функция $u = u(t, x)$ на Π_T называется ренормализованным энтропийным суперрешением (р.э.суперр.) задачи (1.1), (1.4), если для всех $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$:

$$(s_{a,b}(u))_t + \operatorname{div}_x \varphi(s_{a,b}(u)) - \chi_{(a,b]}(u)g(t, x, u) = \mu_b - \mu_a \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T),$$

где $\mu_k \in M_{\text{loc}}(\Pi_T)$, $k \in \mathbb{R}$, – семейство неотрицательных локально конечных мер на Π_T ;

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} \left(\mu_k(\Pi_T) + \int_{u < k} (g(t, x, k))^+ dt dx \right) = 0;$$

$\operatorname{ess} \lim_{t \rightarrow 0+} (s_{a,b}(u(t, x)) - s_{a,b}(u_0(x)))^- = 0$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Наконец, ренормализованным энтропийным решением (р.э.р.) задачи (1.1), (1.4) называется измеримая функция $u = u(t, x)$, которая одновременно является р.э.субр. и р.э.суперр. этой задачи.

Заметим, что в определении 4 функции $u_0(x)$, $u(t, x)$ могут принимать и бесконечные значения $\pm\infty$. Например, автомodelное решение $u(t, x) = x/(2t)$ уравнения Бюргерса $u_t + (u^2)_x = 0$ является р.э.р. задачи Коши с начальной функцией

$$u_0(x) = \begin{cases} +\infty, & x > 0, \\ -\infty, & x < 0. \end{cases}$$

С учетом [8; предложение 2.7] при $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \equiv 0$ понятия р.э.субр., р.э.суперр. и р.э.р. совпадают с введенными в [8].

Как показано в следующем предложении, понятие р.э.р. можно сформулировать независимо от понятий р.э.субр. и р.э.суперр.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Измеримая функция $u = u(t, x)$ является р.э.р. задачи (1.1), (1.4) тогда и только тогда, когда для всех $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$,

$$(s_{a,b}(u))_t + \operatorname{div}_x \varphi(s_{a,b}(u)) - \chi_{(a,b]}(u)g(t, x, u) = \mu_b - \mu_a \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T), \quad (2.1)$$

где $\mu_k \in M_{\text{loc}}(\Pi_T)$, $k \in \mathbb{R}$, — семейство неотрицательных локально конечных мер на Π_T ;

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\mu_k(\Pi_T) + \int_{k(u-k) > 0} (\operatorname{sign} k \cdot g(t, x, k))^- dt dx \right) = 0; \quad (2.2)$$

$$\operatorname{ess} \lim_{t \rightarrow 0+} |s_{a,b}(u(t, x)) - s_{a,b}(u_0(x))| = 0 \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n). \quad (2.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если u — р.э.субр. и р.э.суперр., то по определению 4 найдутся семейства мер $\mu_k, \tilde{\mu}_k \in M_{\text{loc}}(\Pi_T)$, $k \in \mathbb{R}$, такие, что $\mu_k, \tilde{\mu}_k \geq 0$ и для всех $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$,

$$(s_{a,b}(u))_t + \operatorname{div}_x \varphi(s_{a,b}(u)) - \chi_{(a,b]}(u)g(t, x, u) = \mu_b - \mu_a = \tilde{\mu}_b - \tilde{\mu}_a \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T),$$

причем $\mu_b(\Pi_T) \rightarrow 0$, $\tilde{\mu}_a(\Pi_T) \rightarrow 0$ соответственно при $b \rightarrow +\infty$ и $a \rightarrow -\infty$. Из неравенств $0 \leq \mu_a = \mu_b + \tilde{\mu}_a - \tilde{\mu}_b \leq \mu_b + \tilde{\mu}_a$ в пределе при $b \rightarrow +\infty$ тогда следует, что $0 \leq \mu_a \leq \tilde{\mu}_a$ и, следовательно, $\mu_a(\Pi_T) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow -\infty$. Итак, $\mu_k(\Pi_T) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Далее, при $k > 0$

$$\int_{k(u-k) > 0} (\operatorname{sign} k \cdot g(t, x, k))^- dt dx = \int_{u > k} (g(t, x, k))^- dt dx \rightarrow 0, \quad k \rightarrow +\infty,$$

а при $k < 0$

$$\int_{k(u-k) > 0} (\operatorname{sign} k \cdot g(t, x, k))^- dt dx = \int_{u < k} (g(t, x, k))^+ dt dx \rightarrow 0, \quad k \rightarrow -\infty,$$

(снова по определению 4), и соотношения (2.1), (2.2) доказаны. Условие (2.3) непосредственно следует из требований определения 4 и очевидного равенства

$$\begin{aligned} & |s_{a,b}(u(t, x)) - s_{a,b}(u_0(x))| \\ &= (s_{a,b}(u(t, x)) - s_{a,b}(u_0(x)))^+ + (s_{a,b}(u(t, x)) - s_{a,b}(u_0(x)))^-. \end{aligned}$$

Обратно, пусть выполнены условия (2.1)–(2.3). Поскольку при $k > 0$

$$\int_{u>k} (g(t, x, k))^- dt dx = \int_{k(u-k)>0} (\text{sign } k g(t, x, k))^- dt dx,$$

а при $k < 0$

$$\int_{u<k} (g(t, x, k))^+ dt dx = \int_{k(u-k)>0} (\text{sign } k g(t, x, k))^- dt dx,$$

то выполнены условия

$$\begin{aligned} & \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\mu_k(\Pi_T) + \int_{u>k} (g(t, x, k))^- dt dx \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow -\infty} \left(\mu_k(\Pi_T) + \int_{u<k} (g(t, x, k))^+ dt dx \right) = 0, \end{aligned}$$

входящие в определения р.э.субр. и р.э.суперр. Далее, начальные условия

$$\begin{aligned} \text{ess } \lim_{t \rightarrow 0+} (s_{a,b}(u(t, x)) - s_{a,b}(u_0(x)))^+ &= 0 \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \\ \text{ess } \lim_{t \rightarrow 0+} (s_{a,b}(u(t, x)) - s_{a,b}(u_0(x)))^- &= 0 \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

вытекают из (2.3) ввиду очевидных неравенств

$$\begin{aligned} (s_{a,b}(u(t, x)) - s_{a,b}(u_0(x)))^+ &\leq |s_{a,b}(u(t, x)) - s_{a,b}(u_0(x))|, \\ (s_{a,b}(u(t, x)) - s_{a,b}(u_0(x)))^- &\leq |s_{a,b}(u(t, x)) - s_{a,b}(u_0(x))|. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $u = u(t, x)$ – одновременно р.э.субр. и р.э.суперр. задачи (1.1), (1.4), т.е. u – р.э.р. этой задачи. Предложение доказано.

Отметим также, что в определении р.э.субр. и р.э.суперр. характеристическую функцию $\chi_{(a,b]}(u)$ промежутка $(a, b]$ можно заменить на характеристическую функцию $\chi_{[a,b)}(u)$ промежутка $[a, b)$. В частности, справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Измеримая функция $u = u(t, x)$, удовлетворяющая соответствующему начальному условию, – р.э.суперр. задачи (1.1), (1.4) тогда и только тогда, когда $\int_{u<k} (g(t, x, k))^+ dt dx \rightarrow 0$, $k \rightarrow -\infty$, и найдется семейство $\mu'_k \in M_{\text{loc}}(\Pi_T)$, $k \in \mathbb{R}$, неотрицательных локально конечных мер на Π_T таких, что $\lim_{k \rightarrow -\infty} \mu'_k(\Pi_T) = 0$ и для всех $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$,*

$$(s_{a,b}(u))_t + \text{div}_x \varphi(s_{a,b}(u)) - \chi_{[a,b)}(u)g(t, x, u) = \mu'_b - \mu'_a \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T). \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u = u(t, x)$ – р.э.суперр. задачи (1.1), (1.4). Фиксируем $a \in \mathbb{R}$. Тогда при $c < a < b$ справедливо соотношение

$$(s_{c,b}(u))_t + \text{div}_x \varphi(s_{c,b}(u)) - \chi_{(c,b]}(u)g(t, x, u) = \mu_b - \mu_c \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T),$$

где μ_k , $k \in \mathbb{R}$, – семейство неотрицательных локально конечных мер на Π_T из определения р.э.суперр. Из этого соотношения следует, что для любой функции $f = f(t, x) \in C_0^1(\Pi_T)$

$$\begin{aligned} \langle \mu_c, f \rangle &\doteq \int f(t, x) d\mu_c(t, x) = \langle \mu_b, f \rangle + \int_{\Pi_T} [s_{c,b}(u)f_t + \varphi(s_{c,b}(u)) \cdot \nabla_x f \\ &\quad + \chi_{(c,b]}(u)g(t, x, u)f] dt dx. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из (2.5) при $f \geq 0$ следует, что семейство мер μ_c , $c \in (a-1, b)$, ограничено в $M_{\text{loc}}(\Pi_T)$. Далее, при $c \rightarrow a-$

$$s_{c,b}(u) \rightarrow s_{a,b}(u), \quad \chi_{(c,b]}(u) \rightarrow \chi_{[a,b]}(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

и с использованием теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла из (2.5) вытекает, что для любой $f = f(t, x) \in C_0^1(\Pi_T)$

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow a-} \langle \mu_c, f \rangle &= \langle \mu_b, f \rangle + \int_{\Pi_T} [s_{a,b}(u)f_t + \varphi(s_{a,b}(u)) \cdot \nabla_x f \\ &\quad + \chi_{[a,b]}(u)g(t, x, u)f] dt dx. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В частности, μ_c сходится при $c \rightarrow a-$ слабо в $\mathcal{D}'(\Pi_T)$ к распределению

$$\mu_b - [(s_{a,b}(u))_t + \text{div}_x \varphi(s_{a,b}(u)) - \chi_{[a,b]}(u)g(t, x, u)].$$

С другой стороны, поскольку семейство μ_c ограничено, а значит, и предкомпактно в $M_{\text{loc}}(\Pi_T)$, оно сходится при $c \rightarrow a-$ к некоторой неотрицательной мере $\mu'_a \in M_{\text{loc}}(\Pi_T)$. Поэтому,

$$\mu'_a = \mu_b - [(s_{a,b}(u))_t + \text{div}_x \varphi(s_{a,b}(u)) - \chi_{[a,b]}(u)g(t, x, u)]$$

для всех $b > a$. Полагая в этом равенстве $b = d > a$ и переходя к пределу при $d \rightarrow b-$, получим с учетом соотношений

$$\begin{aligned} s_{a,d}(u) &\rightarrow s_{a,b}(u), \quad \chi_{[a,d]}(u) \rightarrow \chi_{[a,b]}(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}, \\ \mu_d &\rightarrow \mu'_b \quad \text{слабо в } M_{\text{loc}}(\Pi_T), \end{aligned}$$

что

$$(s_{a,b}(u))_t + \text{div}_x \varphi(s_{a,b}(u)) - \chi_{[a,b]}(u)g(t, x, u) = \mu'_b - \mu'_a.$$

Осталось доказать, что $\mu'_k(\Pi_T) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow -\infty$. По определению р.э.суперр. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $R > 0$ такое, что $\mu_k(\Pi_T) \leq \varepsilon$ при $k < -R$. Поскольку $\mu_a \rightarrow \mu'_k$ при $a \rightarrow k-$ слабо в $M_{\text{loc}}(\Pi_T)$, то по известному свойству слабой сходимости получаем, что при $k < -R$ также и $\mu'_k(\Pi_T) \leq \varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ $\mu'_k(\Pi_T) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow -\infty$, что и требуется.

Обратно, если выполнено (2.4), то из этого соотношения в пределе при $a' \rightarrow a+$, $b' \rightarrow b+$ вытекает тождество

$$(s_{a,b}(u))_t + \text{div}_x \varphi(s_{a,b}(u)) - \chi_{(a,b]}(u)g(t, x, u) = \mu_b - \mu_a,$$

входящее в определение р.э.суперр., где меры μ_k – слабые пределы при $k' \rightarrow k +$ семейства мер $\mu'_{k'}$. При этом предельное соотношение $\lim_{k \rightarrow -\infty} \mu_k(\Pi_T) = 0$ легко следует из условия $\lim_{k \rightarrow -\infty} \mu'_k(\Pi_T) = 0$ и свойств слабых пределов. Итак, $u(t, x)$ – р.э.суперр. задачи (1.1), (1.4). Лемма доказана.

Аналогично доказывается, что утверждение леммы 1 справедливо и для р.э.субр. В этом случае, конечно, в формулировке соответствующего утверждения нужно использовать предельные соотношения $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu'_k(\Pi_T) = 0$ и

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{u > k} (g(t, x, k))^- dt dx = 0 \text{ вместо}$$

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} \mu'_k(\Pi_T) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow -\infty} \int_{u < k} (g(t, x, k))^+ dt dx = 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из леммы 1 и определения 4 следует равенство: для всех $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$,

$$\chi_{u=a} g(t, x, a) - \chi_{u=b} g(t, x, b) = (\chi_{[a,b)}(u) - \chi_{(a,b]}(u)) g(t, x, u) = (\mu_b - \mu'_b) - (\mu_a - \mu'_a),$$

из которого вытекает, что для некоторой локально конечной меры μ справедливо тождество

$$\mu'_a - \mu_a = \mu + \chi_{u=a} g(t, x, a) dt dx. \quad (2.7)$$

Поскольку для почти всех $a \in \mathbb{R}$ множество уровня $u^{-1}(a)$ имеет нулевую меру и, значит, $\chi_{u=a} g(t, x, a) dt dx = 0$, из (2.7) следует, что $\mu = \mu'_a - \mu_a$ для почти всех $a \in \mathbb{R}$. Из предельных свойств мер μ'_a, μ_a тогда вытекает, что $\mu = 0$. Поэтому $\mu'_a - \mu_a = \chi_{u=a} g(t, x, a) dt dx$ и, в частности, $\mu'_a = \mu_a$ для почти всех $a \in \mathbb{R}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Измеримая функция u – р.э.суперр. задачи (1.1), (1.4) тогда и только тогда, когда $-u$ – р.э.субр. задачи

$$u_t - \operatorname{div}_x \varphi(-u) = -g(t, x, -u), \quad u(0, x) = -u_0(x) \quad (2.8)$$

(заметим, что функция $-g(t, x, -u)$ удовлетворяет условию (1.2) с той же константой L , что и функция $g(t, x, u)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u = u(t, x)$ – р.э.суперр. задачи (1.1), (1.4). Тогда ввиду равенства

$$\int_{-u > k} (-g(t, x, -k))^- dt dx = \int_{u < -k} (g(t, x, -k))^+ dt dx \quad (2.9)$$

выполнено соотношение

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-u > k} (-g(t, x, -k))^- dt dx = 0,$$

входящее в определение р.э.субр. задачи (2.8). Далее, по лемме 1 для всех $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, справедливо равенство

$$\begin{aligned} (s_{a,b}(-u))_t - \operatorname{div}_x \varphi(-s_{a,b}(-u)) + \chi_{(a,b]}(-u) g(t, x, u) \\ = -[(s_{-b,-a}(u))_t + \operatorname{div}_x \varphi(s_{-b,-a}(u)) - \chi_{[-b,-a)}(u) g(t, x, u)] = \mu'_{-b} - \mu'_{-a} \end{aligned}$$

в $\mathcal{D}'(\Pi_T)$, где $\mu'_k \in M_{\text{loc}}(\Pi_T)$, $k \in \mathbb{R}$, – семейство неотрицательных локально конечных мер из леммы 1. При этом $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu'_{-k}(\Pi_T) = \lim_{k \rightarrow -\infty} \mu'_k(\Pi_T) = 0$. Итак, функция $-u$ удовлетворяет условиям определения 4 р.э.субр. с $\mu_k = \mu'_{-k}$. Заметим также, что

$$\begin{aligned} & \text{ess} \lim_{t \rightarrow 0+} (s_{a,b}(-u(t, x)) - s_{a,b}(-u_0(x)))^+ \\ & = \text{ess} \lim_{t \rightarrow 0+} (s_{-b,-a}(u(t, x)) - s_{-b,-a}(u_0(x)))^- = 0 \end{aligned}$$

в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ и начальное условие из определения р.э.субр. также выполнено. Итак, $-u$ – р.э.субр. задачи (2.8).

Обратно, пусть $-u$ – р.э.субр. задачи (2.8) и $\mu_k \in M_{\text{loc}}(\Pi_T)$, $k \in \mathbb{R}$, – семейство неотрицательных локально конечных мер на Π_T из определения 4 таких, что $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu_k(\Pi_T) = 0$. Тогда из (2.9) легко следует, что

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} \int_{u < k} (g(t, x, k))^+ dt dx = 0.$$

Далее, ввиду равенств

$$\begin{aligned} & (s_{a,b}(u))_t + \text{div}_x \varphi(s_{a,b}(u)) - \chi_{[a,b]}(u)g(t, x, u) \\ & = -[(s_{-b,-a}(-u))_t + \text{div}_x \varphi(-s_{-b,-a}(-u)) + \chi_{(-b,-a]}(-u)g(t, x, u)] \\ & = \mu_{-b} - \mu_{-a} \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T), \\ & \text{ess} \lim_{t \rightarrow 0+} (s_{a,b}(u(t, x)) - s_{a,b}(u_0(x)))^- \\ & = \text{ess} \lim_{t \rightarrow 0+} (s_{-b,-a}(-u(t, x)) - s_{-b,-a}(-u_0(x)))^+ = 0 \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

и утверждения леммы 1, мы видим, что $u(t, x)$ – р.э.суперр. задачи (1.1), (1.4). Следствие доказано.

Покажем, что в классе ограниченных функций понятия р.э.р. и о.э.р. совпадают. Точнее, верно следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Предположим, что $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u(t, x) \in L^\infty(\Pi_T)$. В этом случае $u(t, x)$ является р.э.субр. (р.э.суперр., р.э.р.) задачи (1.1), (1.4) тогда и только тогда, когда $u(t, x)$ – о.э.субр. (о.э.суперр., о.э.р.) этой задачи.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u = u(t, x)$ – р.э.субр. задачи (1.1), (1.4) и $k \in \mathbb{R}$, $b > \max(k, M)$, где $M = \max(\|u\|_\infty, \|u_0\|_\infty)$. Тогда $\max(u, k) = s_{k,b}(u)$ почти всюду на Π_T . Поэтому

$$\begin{aligned} & (\max(u, k))_t + \text{div}_x \varphi(\max(u, k)) - \text{sign}^+(u - k)g(t, x, u) \\ & = (s_{k,b}(u))_t + \text{div}_x \varphi(s_{k,b}(u)) - \chi_{(k,b]}(u)g(t, x, u) = \mu_b - \mu_k \end{aligned} \quad (2.10)$$

в $\mathcal{D}'(\Pi_T)$, где $\mu_k \in M_{\text{loc}}(\Pi_T)$, $k \in \mathbb{R}$, – семейство неотрицательных мер, указанное в определении р.э.субр. Так как $\mu_b(\Pi_T) \rightarrow 0$ при $b \rightarrow +\infty$, то из (2.10) в пределе при $b \rightarrow +\infty$ следует, что

$$(\max(u, k))_t + \text{div}_x \varphi(\max(u, k)) - \text{sign}^+(u - k)g(t, x, u) = -\mu_k \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T). \quad (2.11)$$

Так как

$$(u-k)^+ = \max(u, k) - k, \quad \text{sign}^+(u-k)(\varphi(u) - \varphi(k)) = \varphi(\max(u, k)) - \varphi(k), \quad (2.12)$$

из (2.11) вытекает, что u удовлетворяет требованию (1.7) для всех $k \in \mathbb{R}$. Далее, из начального условия

$$\text{ess lim}_{t \rightarrow 0+} (s_{a,b}(u(t, \cdot)) - s_{a,b}(u_0))^+ = 0 \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

при $a = -M$, $b = M$ следует, что

$$\text{ess lim}_{t \rightarrow 0+} (u(t, \cdot) - u_0)^+ = 0 \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Итак, u — о.э.субр. задачи (1.1), (1.4).

Обратно, предположим, что u является о.э.субр. задачи (1.1), (1.4). Тогда из условия (1.7) и равенств (2.12) следует, что для всех $k \in \mathbb{R}$

$$(\max(u, k))_t + \text{div}_x \varphi(\max(u, k)) - \text{sign}^+(u-k)g(t, x, u) \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T).$$

По известному представлению неотрицательных распределений

$$(\max(u, k))_t + \text{div}_x \varphi(\max(u, k)) - \text{sign}^+(u-k)g(t, x, u) = -\mu_k \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T), \quad (2.13)$$

где $\mu_k \in M_{\text{loc}}(\Pi_T)$, $\mu_k \geq 0$. Ввиду очевидных равенств

$$\begin{aligned} s_{a,b}(u) &= \max(u, a) - \max(u, b) + b, \\ \varphi(s_{a,b}(u)) &= \varphi(\max(u, a)) - \varphi(\max(u, b)) + \varphi(b), \\ \chi_{(a,b]}(u)g(t, x, u) &= (\text{sign}^+(u-a) - \text{sign}^+(u-b))g(t, x, u) \end{aligned}$$

из (2.13) вытекает представление (2.1)

$$(s_{a,b}(u))_t + \text{div}_x \varphi(s_{a,b}(u)) - \chi_{(a,b]}(u)g(t, x, u) = \mu_b - \mu_a.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mu_k &= -[(\max(u, k))_t + \text{div}_x \varphi(\max(u, k)) - \text{sign}^+(u-k)g(t, x, u)] \\ &= -[((u-k)^+)_t + \text{div}_x (\text{sign}^+(u-k)(\varphi(u) - \varphi(k))) - \text{sign}^+(u-k)g(t, x, u)] \end{aligned} \quad (2.14)$$

в $\mathcal{D}'(\Pi_T)$, откуда следует, что $\mu_k = 0$ при $k \geq \|u\|_\infty$ (в частности, $\mu_k(\Pi_T) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$). Заметим также, что при таких k множество $\{u(t, x) > k\}$ имеет нулевую меру и, следовательно, $\int_{u > k} (g(t, x, k))^- dt dx = 0$.

Наконец, для всех $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$,

$$(s_{a,b}(u) - s_{a,b}(u_0))^+ \leq (u - u_0)^+ \rightarrow 0 \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n),$$

когда $t \rightarrow 0$, $t \in \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — некоторое множество полной меры в $(0, T)$. Поэтому

$$\text{ess lim}_{t \rightarrow 0+} (s_{a,b}(u(t, \cdot)) - s_{a,b}(u_0))^+ = 0 \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Итак, u – р.э.субр. задачи (1.1), (1.4).

Утверждение, касающееся суперрешений доказывается аналогично. Это утверждение также следует из уже доказанного утверждения для субрешений, с учетом того, что u является о.э.суперр. (р.э.суперр.) задачи (1.1), (1.4) тогда и только тогда, когда $-u$ – о.э.субр. (р.э.субр.) задачи (2.8) (см. следствие 1 и [2]).

Наконец, так как о.э.р. (р.э.р.) u характеризуется тем, что u является одновременно о.э.субр. и о.э.суперр. (р.э.субр. и р.э.суперр.), то функция u – о.э.р. задачи (1.1), (1.4) тогда и только тогда, когда она является р.э.р. этой задачи. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для неограниченных функций утверждения предложения 3 неверны. Например, построенные в [5] ненулевые локально ограниченные о.э.р. задачи Коши для уравнения $u_t + (u^3)_x = 0$ с нулевой начальной функцией не могут являться р.э.р. этой задачи, так как р.э.р. этой задачи единственно (см. следствие 3 ниже) и, значит, должно совпадать с нулевым о.э.р.

§ 3. Принцип сравнения и единственность р.э.р.

Покажем, что для ренормализованных энтропийных суб- и суперрешений верен принцип сравнения. Более обще, мы докажем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть измеримые функции $u = u(t, x)$, $v = v(t, x)$ являются соответственно р.э.субр. и р.э.суперр. задачи (1.1), (1.4) с начальными данными $u_0(x)$, $v_0(x)$ и функциями-источниками $g(t, x, u)$, $h(t, x, u)$ соответственно. Тогда для почти всех $t \in (0, T)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u(t, x) - v(t, x))^+ dx \leq e^{Lt} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - v_0(x))^+ dx + \int_{(0, t) \times \mathbb{R}^n} q(\tau, x) d\tau dx \right), \quad (3.1)$$

где $L = \min(L(g), L(h))$, $q(t, x) = \sup_{u \in \mathbb{R}} (g(t, x, u) - h(t, x, u))^+$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общность, мы можем предположить, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - v_0(x))^+ dx < +\infty, \quad \int_{(0, t) \times \mathbb{R}^n} q(\tau, x) d\tau dx < +\infty \quad \forall t \in (0, T)$$

(иначе (3.1) очевидно). В частности, $q(t, x) < +\infty$ для почти всех $(t, x) \in \Pi_T$.

Так же, как в работах [8], [9], мы применяем аналог известного метода Кружкова удвоения переменных.

Пусть $\mu_k, \mu'_k \in M_{\text{loc}}(\Pi_T)$, $k \in \mathbb{R}$, – семейства неотрицательных мер из определения 4 и леммы 1 для соответственно р.э.субр. $u(t, x)$ и р.э.суперр. $v(t, x)$. В соответствии с определением 4 и леммой 1 при $k \rightarrow +\infty$

$$\mu_k(\Pi_T) + \int_{u > k} (g(t, x, k))^- dt dx + \mu'_{-k}(\Pi_T) + \int_{v < -k} (h(t, x, -k))^+ dt dx \rightarrow 0. \quad (3.2)$$

Далее, для любых вещественных a, b, k таких, что $a \leq b$, очевидны равенства

$$\begin{aligned} (s_{a,b}(u) - s_{a,b}(k))^+ &= s_{k',b}(u) - k', \\ \text{sign}^+(u - k)(\varphi(s_{a,b}(u)) - \varphi(s_{a,b}(k))) &= \varphi(s_{k',b}(u)) - \varphi(k'), \end{aligned}$$

где обозначено $k' = s_{a,b}(k)$. Из этих равенств и определения р.э.субр. следует, что

$$\begin{aligned} ((s_{a,b}(u) - s_{a,b}(k))^+)_t + \text{div}_x [\text{sign}^+(u - k)(\varphi(s_{a,b}(u)) - \varphi(s_{a,b}(k)))] \\ - \chi_{(k',b]}(u)g(t, x, u) = \mu_b - \mu_{k'} \leq \mu_b. \end{aligned}$$

Полагая $k = v(\tau, y)$, $(\tau, y) \in \Pi_T$, получим, что

$$\begin{aligned} ((s_{a,b}(u) - s_{a,b}(v))^+)_t + \text{div}_x [\text{sign}^+(u - v)(\varphi(s_{a,b}(u)) - \varphi(s_{a,b}(v)))] \\ - \chi_{(s_{a,b}(v),b]}(u)g(t, x, u) \leq \mu_b \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T(t, x)). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Аналогично с использованием равенств

$$\begin{aligned} (s_{a,b}(k) - s_{a,b}(v))^+ &= k' - s_{a,k'}(v), \\ \text{sign}^+(k - v)(\varphi(s_{a,b}(k)) - \varphi(s_{a,b}(v))) &= \varphi(k') - \varphi(s_{a,k'}(v)) \end{aligned}$$

из леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned} ((s_{a,b}(k) - s_{a,b}(v))^+)_\tau + \text{div}_y [\text{sign}^+(k - v)(\varphi(s_{a,b}(k)) - \varphi(s_{a,b}(v)))] \\ + \chi_{[a,k')}(v)h(\tau, y, v) = \mu'_a - \mu'_{k'} \leq \mu'_a \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T(\tau, y)). \end{aligned}$$

Подставляя в это равенство $k = u(t, x)$, получим соотношение

$$\begin{aligned} ((s_{a,b}(u) - s_{a,b}(v))^+)_\tau + \text{div}_y [\text{sign}^+(u - v)(\varphi(s_{a,b}(u)) - \varphi(s_{a,b}(v)))] \\ + \chi_{[a,s_{a,b}(u))}(v)h(\tau, y, v) \leq \mu'_a \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T(\tau, y)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Складывая соотношения (3.3), (3.4), рассматриваемые в пространстве распределений на декартовом произведении $\Pi_T(t, x) \times \Pi_T(\tau, y)$, получим неравенство

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) ((s_{a,b}(u) - s_{a,b}(v))^+) \\ + (\text{div}_x + \text{div}_y) [\text{sign}^+(u - v)(\varphi(s_{a,b}(u)) - \varphi(s_{a,b}(v)))] \\ - (\chi_{(s_{a,b}(v),b]}(u)g(t, x, u) - \chi_{[a,s_{a,b}(u))}(v)h(\tau, y, v)) \\ \leq \mu_b(t, x) + \mu'_a(\tau, y) \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T(t, x) \times \Pi_T(\tau, y)). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь $u = u(t, x)$, $v = v(\tau, y)$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \chi_{(s_{a,b}(v),b]}(u)g(t, x, u) - \chi_{[a,s_{a,b}(u))}(v)h(\tau, y, v) \\ = \text{sign}^+(s_{a,b}(u) - s_{a,b}(v))(\tilde{g}(t, x, u) - \tilde{h}(\tau, y, v)), \end{aligned}$$

где обозначено

$$\tilde{g}(t, x, u) = \chi_{[a,b]}(u)g(t, x, u), \quad \tilde{h}(\tau, y, v) = \chi_{[a,b]}(v)h(\tau, y, v).$$

Поэтому (3.5) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) ((\bar{u} - \bar{v}))^+ + (\operatorname{div}_x + \operatorname{div}_y) [\operatorname{sign}^+(u - v)(\varphi(\bar{u}) - \varphi(\bar{v}))] \\ - \operatorname{sign}^+(\bar{u} - \bar{v})(\tilde{g}(t, x, u) - \tilde{h}(\tau, y, v)) \leq \mu_b(t, x) + \mu'_a(\tau, y) \end{aligned} \quad (3.6)$$

в $\mathcal{D}'(\Pi_T(t, x) \times \Pi_T(\tau, y))$, где использованы следующие обозначения (при фиксированных a, b): $\bar{u} = s_{a,b}(u(t, x))$, $\bar{v} = s_{a,b}(v(\tau, y))$.

Соотношение (3.6) играет ключевую роль для применения метода удвоения переменных. Используя этот метод (см., например, [3]), мы придем к неравенству

$$\begin{aligned} ((\bar{u} - \bar{v}))^+_t + \operatorname{div}_x [\operatorname{sign}^+(\bar{u} - \bar{v})(\varphi(\bar{u}) - \varphi(\bar{v}))] \\ - \chi_{\bar{u} \geq \bar{v}}(\tilde{g}(t, x, u) - \tilde{h}(t, x, v))^+ \leq \mu_b(t, x) + \mu'_a(t, x) \end{aligned} \quad (3.7)$$

в $\mathcal{D}'(\Pi_T)$, где $u = u(t, x)$, $v = v(t, x)$.

Для полноты изложения приведем детали вывода соотношения (3.7). Заметим, что при всех $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}^+(p)q \leq [p, q]_\varepsilon^+ \doteq \frac{(p + \varepsilon q)^+ - p^+}{\varepsilon}, \\ [p, q]_\varepsilon^+ \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sign}^+(p)q, & p \neq 0, \\ q^+, & p = 0, \end{cases} \quad \varepsilon \rightarrow 0+. \end{aligned} \quad (3.8)$$

В частности,

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}^+(\bar{u} - \bar{v})(\tilde{g}(t, x, u) - \tilde{h}(\tau, y, v)) \leq Q_\varepsilon(t, x; \tau, y) \\ \doteq [\bar{u}(t, x) - \bar{v}(\tau, y), \tilde{g}(t, x, u(t, x)) - \tilde{h}(\tau, y, v(\tau, y))]_\varepsilon^+ \end{aligned}$$

и из (3.6) следует, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) ((\bar{u} - \bar{v}))^+ + (\operatorname{div}_x + \operatorname{div}_y) [\operatorname{sign}^+(u - v)(\varphi(\bar{u}) - \varphi(\bar{v}))] \\ - Q_\varepsilon(t, x; \tau, y) \leq \mu_b(t, x) + \mu'_a(\tau, y) \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T(t, x) \times \Pi_T(\tau, y)). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Выберем функцию $\rho(s) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ так, что

$$\operatorname{supp} \rho(s) \subset [0, 1], \quad \rho(s) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(s) ds = 1,$$

и положим $\delta_\nu(s) = \nu \rho(\nu s)$, $\nu \in \mathbb{N}$. Ясно, что последовательность $\delta_\nu(s)$ сходится при $\nu \rightarrow \infty$ к δ -мере Дирака в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Пусть $f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $f(t, x) \geq 0$,

$$g_\nu(\tau - t, y - x) = \delta_\nu(\tau - t) \prod_{i=1}^n \delta_\nu(y_i - x_i).$$

Здесь x_i, y_i – координаты точек $x, y \in \mathbb{R}^n, i = 1, \dots, n$. Очевидно, при достаточно больших $\nu \in \mathbb{N}$ функция $h = f(t, x)g_\nu(\tau - t, y - x) \in C_0^\infty(\Pi_T(t, x) \times \Pi_T(\tau, y))$, $h \geq 0$. Применяя (3.9) к пробной функции h и учитывая тождества

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tau} \right) g_\nu(\tau - t, y - x) = 0, \quad (\nabla_x + \nabla_y) g_\nu(\tau - t, y - x) = 0,$$

получим соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T \times \Pi_T} [(\bar{u} - \bar{v})^+ f_t + \text{sign}^+(\bar{u} - \bar{v})(\varphi(\bar{u}) - \varphi(\bar{v})) \cdot \nabla_x f \\ & \quad + Q_\varepsilon(t, x; \tau, y) f] g_\nu(\tau - t, y - x) dt dx d\tau dy \\ & \geq - \int_{\Pi_T \times \Pi_T} f(t, x) g_\nu(\tau - t, y - x) d\mu_b(t, x) d\tau dy \\ & \quad - \int_{\Pi_T \times \Pi_T} f(t, x) g_\nu(\tau - t, y - x) dt dx d\mu'_a(\tau, y). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Пусть D – множество общих точек Лебега функций $\bar{v}(t, x), \tilde{h}(t, x, v(t, x))$ (заметим, что ввиду (1.3) функция $\tilde{h}(t, x, v(t, x)) \in L_{\text{loc}}^1(\Pi_T)$). Тогда $D \subset \Pi_T$ является множеством полной меры. Ввиду ограниченности $\bar{v}(t, x)$ и непрерывности $\varphi(u)$ точки $(t, x) \in D$ будут также точками Лебега вектора $\varphi(\bar{v}(t, x))$. Нетрудно проверить неравенства

$$\begin{aligned} & |(\bar{u}(t, x) - \bar{v}(\tau, y))^+ - (\bar{u}(t, x) - \bar{v}(t, x))^+| \leq |\bar{v}(\tau, y) - \bar{v}(t, x)|, \\ & |\text{sign}^+(\bar{u}(t, x) - \bar{v}(\tau, y))[\varphi(\bar{u}(t, x)) - \varphi(\bar{v}(\tau, y))] \\ & \quad - \text{sign}^+(\bar{u}(t, x) - \bar{v}(t, x))[\varphi(\bar{u}(t, x)) - \varphi(\bar{v}(t, x))]| \leq N |\bar{v}(\tau, y) - \bar{v}(t, x)|, \\ & |Q_\varepsilon(t, x; \tau, y) - Q_\varepsilon(t, x; t, x)| \leq \frac{2}{\varepsilon} |\bar{v}(\tau, y) - \bar{v}(t, x)| \\ & \quad + |\tilde{h}(\tau, y, v(\tau, y)) - \tilde{h}(t, x, v(t, x))|, \end{aligned}$$

где $N = \max_{u \in [a, b]} |\varphi'(u)|$ – константа Липшица вектора $\varphi(u)$ на отрезке $[a, b]$. Из этих неравенств легко следует, что для всех $(t, x) \in D$ справедливы предельные соотношения при $\nu \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T} (\bar{u}(t, x) - \bar{v}(\tau, y))^+ g_\nu(\tau - t, y - x) d\tau dy \rightarrow (\bar{u}(t, x) - \bar{v}(t, x))^+, \\ & \int_{\Pi_T} \text{sign}^+(\bar{u}(t, x) - \bar{v}(\tau, y)) [\varphi(\bar{u}(t, x)) - \varphi(\bar{v}(\tau, y))] g_\nu(\tau - t, y - x) d\tau dy \\ & \rightarrow \text{sign}^+(\bar{u}(t, x) - \bar{v}(t, x)) [\varphi(\bar{u}(t, x)) - \varphi(\bar{v}(t, x))], \\ & \int_{\Pi_T} Q_\varepsilon(t, x; \tau, y) g_\nu(\tau - t, y - x) d\tau dy \rightarrow Q_\varepsilon(t, x; t, x), \end{aligned}$$

из которых после интегрирования по переменным $(t, x) \in \Pi_T$ (с использованием теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла) следует, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T \times \Pi_T} [(\bar{u} - \bar{v})^+ f_t + \text{sign}^+(\bar{u} - \bar{v})(\varphi(\bar{u}) - \varphi(\bar{v})) \cdot \nabla_x f \\ & \quad + Q_\varepsilon(t, x; \tau, y) f] g_\nu(\tau - t, y - x) dt dx d\tau dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow \int_{\Pi_T} [(\bar{u} - \bar{v})^+ f_t + \text{sign}^+(\bar{u} - \bar{v})(\varphi(\bar{u}) - \varphi(\bar{v})) \cdot \nabla_x f \\ & \quad + Q_\varepsilon(t, x; t, x) f] dt dx, \quad \nu \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где в предельном интеграле $\bar{u} = \bar{u}(t, x)$, $\bar{v} = \bar{v}(t, x)$.

Далее, ввиду равенства $\int_{\Pi_T} g_\nu(\tau - t, y - x) d\tau dy = 1$

$$\int_{\Pi_T \times \Pi_T} f(t, x) g_\nu(\tau - t, y - x) d\mu_b(t, x) d\tau dy = \int_{\Pi_T} f(t, x) d\mu_b(t, x). \quad (3.12)$$

Наконец, последний интеграл в правой части (3.10)

$$\int_{\Pi_T \times \Pi_T} f(t, x) g_\nu(\tau - t, y - x) dt dx d\mu'_a(\tau, y) = \int_{\Pi_T} f_\nu(\tau, y) d\mu'_a(\tau, y), \quad (3.13)$$

где

$$f_\nu(\tau, y) = \int_{\Pi_T} f(t, x) g_\nu(\tau - t, y - x) dt dx.$$

Так как последовательность средних функций $f_\nu(\tau, y) \rightarrow f(\tau, y)$ при $\nu \rightarrow \infty$ равномерно на Π_T , из (3.13) следует предельное соотношение

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T \times \Pi_T} f(t, x) g_\nu(\tau - t, y - x) dt dx d\mu'_a(\tau, y) \\ & \rightarrow \int_{\Pi_T} f(\tau, y) d\mu'_a(\tau, y) = \int_{\Pi_T} f(t, x) d\mu'_a(t, x), \quad \nu \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Переходя в (3.10) к пределу при $\nu \rightarrow \infty$ и учитывая соотношения (3.11), (3.12), (3.14), придем к неравенству

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T} [(\bar{u} - \bar{v})^+ f_t + \text{sign}^+(\bar{u} - \bar{v})(\varphi(\bar{u}) - \varphi(\bar{v})) \cdot \nabla_x f + Q_\varepsilon(t, x; t, x) f] dt dx \\ & \geq - \int_{\Pi_T} f(t, x) d\mu_b(t, x) - \int_{\Pi_T} f(t, x) d\mu'_a(t, x), \end{aligned}$$

справедливому при всех $\varepsilon > 0$. Переходя в этом соотношении к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ и учитывая, что ввиду (3.8)

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon(t, x; t, x) & \rightarrow \chi_{\bar{u} > \bar{v}}(\tilde{g}(t, x, u) - \tilde{h}(t, x, v)) \\ & + \chi_{\bar{u} = \bar{v}}(\tilde{g}(t, x, u) - \tilde{h}(t, x, v))^+ \leq \chi_{\bar{u} \geq \bar{v}}(\tilde{g}(t, x, u) - \tilde{h}(t, x, v))^+, \end{aligned}$$

получим неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T} [(\bar{u} - \bar{v})^+ f_t + \text{sign}^+(\bar{u} - \bar{v})(\varphi(\bar{u}) - \varphi(\bar{v})) \cdot \nabla_x f \\ & \quad + \chi_{\bar{u} \geq \bar{v}}(\tilde{g}(t, x, u) - \tilde{h}(t, x, v))^+ f] dt dx \\ & \geq - \int_{\Pi_T} f(t, x) d\mu_b(t, x) - \int_{\Pi_T} f(t, x) d\mu'_a(t, x). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Так как в этом неравенстве $f = f(t, x)$ – произвольная неотрицательная пробная функция из $C_0^\infty(\Pi_T)$, (3.15) означает, что выполнено соотношение (3.7). Заметим далее, что

$$\begin{aligned} \chi_{\bar{u} \geq \bar{v}}(\tilde{g}(t, x, u) - \tilde{h}(t, x, v))^+ &= \chi_{b \geq u \geq v \geq a}(g(t, x, \bar{u}) - h(t, x, \bar{v}))^+ \\ &+ \chi_{u > b \geq v \geq a}(-h(t, x, \bar{v}))^+ + \chi_{b \geq u \geq a > v}(g(t, x, \bar{u}))^+ \\ &+ \chi_{v > u = b}(g(t, x, b))^+ + \chi_{u < v = a}(h(t, x, a))^- \end{aligned} \quad (3.16)$$

Так как

$$\begin{aligned} \chi_{u > b \geq v \geq a}(-h(t, x, \bar{v}))^+ &= \chi_{u > b \geq v \geq a}(g(t, x, b) - h(t, x, \bar{v}) - g(t, x, b))^+ \\ &\leq \chi_{u > b \geq v \geq a}(g(t, x, b) - h(t, x, \bar{v}))^+ + \chi_{u > b}(-g(t, x, b))^+ \\ &\leq \chi_{u > b \geq v \geq a}(g(t, x, \bar{u}) - h(t, x, \bar{v}))^+ + \chi_{u > b}(g(t, x, b))^- , \\ \chi_{b \geq u \geq a > v}(g(t, x, \bar{u}))^+ &= \chi_{b \geq u \geq a > v}(g(t, x, \bar{u}) - h(t, x, a) + h(t, x, a))^+ \\ &\leq \chi_{b \geq u \geq a > v}(g(t, x, \bar{u}) - h(t, x, \bar{v}))^+ + \chi_{v < a}(h(t, x, a))^+ , \end{aligned}$$

из (3.16) следует, что

$$\begin{aligned} \chi_{\bar{u} \geq \bar{v}}(\tilde{g}(t, x, u) - \tilde{h}(t, x, v))^+ &\leq \chi_{\bar{u} \geq \bar{v}}(g(t, x, \bar{u}) - h(t, x, \bar{v}))^+ + \chi_{u > b}(g(t, x, b))^- \\ &+ \chi_{v < a}(h(t, x, a))^+ + \chi_{u = b}(g(t, x, b))^+ + \chi_{v = a}(h(t, x, a))^- \end{aligned} \quad (3.17)$$

Пусть множество P состоит из значений $c \in \mathbb{R}$, для которых множества уровня $u^{-1}(c)$, $v^{-1}(c)$ имеют нулевую меру Лебега в Π_T . Ясно, что $P \subset \mathbb{R}$ – множество полной меры. Если $a, b \in P$, то $\chi_{u(t, x) = b} = \chi_{v(t, x) = a} = 0$ почти всюду на Π_T и из (3.17) вытекает, что для почти всех $(t, x) \in \Pi_T$

$$\begin{aligned} \chi_{\bar{u} \geq \bar{v}}(\tilde{g}(t, x, u) - \tilde{h}(t, x, v))^+ &\leq \chi_{\bar{u} \geq \bar{v}}(g(t, x, \bar{u}) - h(t, x, \bar{v}))^+ \\ &+ \chi_{u > b}(g(t, x, b))^- + \chi_{v < a}(h(t, x, a))^+ \end{aligned} \quad (3.18)$$

Далее, при $\bar{u} \geq \bar{v}$

$$\begin{aligned} (g(t, x, \bar{u}) - h(t, x, \bar{v}))^+ &\leq (g(t, x, \bar{u}) - h(t, x, \bar{u}))^+ + (h(t, x, \bar{u}) - h(t, x, \bar{v}))^+ \\ &\leq (g(t, x, \bar{u}) - h(t, x, \bar{u}))^+ + L(h)(\bar{u} - \bar{v})^+ \leq q(t, x) + L(h)(\bar{u} - \bar{v})^+ , \\ (g(t, x, \bar{u}) - h(t, x, \bar{v}))^+ &\leq (g(t, x, \bar{u}) - g(t, x, \bar{v}))^+ + (g(t, x, \bar{v}) - h(t, x, \bar{v}))^+ \\ &\leq (g(t, x, \bar{v}) - h(t, x, \bar{v}))^+ + L(g)(\bar{u} - \bar{v})^+ \leq q(t, x) + L(g)(\bar{u} - \bar{v})^+ , \end{aligned}$$

где $q(t, x) = \sup_{u \in \mathbb{R}}(g(t, x, u) - h(t, x, u))^+$. Из этих неравенств и (3.18) вытекает оценка

$$\begin{aligned} \chi_{\bar{u} \geq \bar{v}}(\tilde{g}(t, x, u) - \tilde{h}(t, x, v))^+ &\leq q(t, x) + L(\bar{u} - \bar{v})^+ \\ &+ \chi_{u > b}(g(t, x, b))^- + \chi_{v < a}(h(t, x, a))^+ \end{aligned} \quad (3.19)$$

почти всюду на Π_T , где $L = \min(L(g), L(h))$. Из (3.7) и (3.19) следует соотношение

$$\begin{aligned} ((\bar{u} - \bar{v}))^+_t + \operatorname{div}_x [\operatorname{sign}^+(\bar{u} - \bar{v})(\varphi(\bar{u}) - \varphi(\bar{v}))] - L(\bar{u} - \bar{v})^+ - q(t, x) \\ \leq \mu_b(t, x) + \mu'_a(t, x) + \chi_{u > b}(g(t, x, b))^- + \chi_{v < a}(h(t, x, a))^+ \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Положим

$$\theta_\nu(t) = \int_{-\infty}^t \delta_\nu(s) ds = \int_{-\infty}^{\nu t} \rho(s) ds.$$

Ясно, что последовательность $\theta_\nu(t)$ сходится поточечно при $\nu \rightarrow \infty$ к функции Хевисайда $\text{sign}^+(t)$. Пусть $N = \max_{u \in [a, b]} |\varphi'(u)|$ — константа Липшица вектора $\varphi(u)$ на отрезке $[a, b]$, $R > 1$, $\Phi(t, x) = \theta_1(R + N(T - t) - |x|)$. Ясно, что $\Phi(t, x) \in C^\infty(\Pi_T)$ (с учетом того, что $\Phi(t, x) = 1$ в окрестности множества $(0, T) \times \{0\}$), $\Phi(t, x) \geq 0$ и $\Phi_t = -N|\nabla_x \Phi|$.

Определим множество

$$E = \{t \in (0, T) \mid \forall a, b \in \mathbb{R} \ (t, x) - \text{точка Лебега функции} \\ (s_{a,b}(u(t, x)) - s_{a,b}(v(t, x)))^+ \text{ для почти всех } x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Ясно, что $E \subset (0, T)$ является множеством полной меры Лебега (с учетом того, что функция $(a, b) \mapsto (s_{a,b}(u) - s_{a,b}(v))^+$ непрерывна равномерно по u, v). Пусть $t_0, t_1 \in E$, $t_0 < t_1$. Положим при $\nu \in \mathbb{N}$ $\chi_\nu(t) = \theta_\nu(t - t_0) - \theta_\nu(t - t_1)$. Заметим, что при $\nu \rightarrow \infty$ последовательность $\chi_\nu(t)$ поточечно сходится к индикаторной функции $\chi_{(t_0, t_1]}(t)$ интервала $(t_0, t_1]$. При достаточно большом ν (именно, при $\nu > (T - t_1)^{-1}$) функция $f(t, x) = \Phi(t, x)\chi_\nu(t) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $0 \leq f(t, x) \leq 1$. Из (3.20) тогда следует, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T} (\bar{u} - \bar{v})^+ (\delta_\nu(t - t_0) - \delta_\nu(t - t_1)) \Phi dt dx \\ & + \int_{\Pi_T} [(\bar{u} - \bar{v})^+ \Phi_t + \text{sign}^+(\bar{u} - \bar{v})(\varphi(\bar{u}) - \varphi(\bar{v})) \cdot \nabla_x \Phi \\ & + (L(\bar{u} - \bar{v})^+ + q)\Phi] \chi_\nu(t) dt dx \\ & \geq - \int_{\Pi_T} f(t, x) d\mu_b(t, x) - \int_{\Pi_T} f(t, x) d\mu'_a(t, x) \\ & - \int_{u>b} f(t, x)(g(t, x, b))^- dt dx - \int_{v<a} f(t, x)(h(t, x, a))^+ dt dx \\ & \geq -\mu_b(\Pi_T) - \mu'_a(\Pi_T) - \int_{u>b} (g(t, x, b))^- dt dx - \int_{v<a} (h(t, x, a))^+ dt dx \quad (3.21) \end{aligned}$$

(функция $f(t, x)$ в правой части (3.21) заменена на большее значение 1). Так как $\text{sign}^+(\bar{u} - \bar{v})|\varphi(\bar{u}) - \varphi(\bar{v})| \leq N(\bar{u} - \bar{v})^+$ и $\Phi_t = -N|\nabla_x \Phi|$, то

$$\begin{aligned} & (\bar{u} - \bar{v})^+ \Phi_t + \text{sign}^+(\bar{u} - \bar{v})(\varphi(\bar{u}) - \varphi(\bar{v})) \cdot \nabla_x \Phi \\ & \leq (\bar{u} - \bar{v})^+ \Phi_t + \text{sign}^+(\bar{u} - \bar{v})|\varphi(\bar{u}) - \varphi(\bar{v})| |\nabla_x \Phi| \leq (\bar{u} - \bar{v})^+ (\Phi_t + N|\nabla_x \Phi|) = 0. \end{aligned}$$

Поэтому из (3.21) следует, что

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T} (\bar{u} - \bar{v})^+ (\delta_\nu(t - t_0) - \delta_\nu(t - t_1)) \Phi dt dx \\ & + \int_{\Pi_T} [L(\bar{u} - \bar{v})^+ + q]\Phi \chi_\nu(t) dt dx + R_u(b) + R_v(a) \geq 0, \quad (3.22) \end{aligned}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} R_u(b) &= \mu_b(\Pi_T) + \int_{u>b} (g(t, x, b))^- dt dx, \\ R_v(a) &= \mu'_a(\Pi_T) + \int_{v<a} (h(t, x, a))^+ dt dx. \end{aligned}$$

Далее, как нетрудно проверить, из условия $t_0, t_1 \in E$ следует, что t_0, t_1 – точки Лебега функции

$$I(t) = \int_{\mathbb{R}^n} (\bar{u}(t, x) - \bar{v}(t, x))^+ \Phi(t, x) dx.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi_T} (\bar{u} - \bar{v})^+ (\delta_\nu(t - t_0) - \delta_\nu(t - t_1)) \Phi dt dx \\ &= \int_0^T I(t) (\delta_\nu(t - t_0) - \delta_\nu(t - t_1)) dt \rightarrow I(t_0) - I(t_1), \quad \nu \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

и из (3.22) в пределе при $\nu \rightarrow \infty$ следует, что

$$I(t_0) - I(t_1) + \int_{(t_0, t_1) \times \mathbb{R}^n} [L(\bar{u} - \bar{v})^+ + q] \Phi dt dx + R_u(b) + R_v(a) \geq 0$$

(мы учли также, что последовательность $\chi_\nu(t)$ поточечно сходится к характеристической функции промежутка $(t_0, t_1]$). Из этого соотношения и неравенств $0 \leq \Phi \leq 1$, $\Phi(t_0, x) \leq \Phi(0, x)$ получаем, что

$$\begin{aligned} I(t_1) &\leq I(t_0) + L \int_{t_0}^{t_1} I(\tau) d\tau + \int_{(t_0, t_1) \times \mathbb{R}^n} q dt dx + R_u(b) + R_v(a) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (\bar{u}(t_0, x) - \bar{v}(t_0, x))^+ \Phi(0, x) dx + L \int_{t_0}^{t_1} I(\tau) d\tau \\ &\quad + \int_{(t_0, t_1) \times \mathbb{R}^n} q dt dx + R_u(b) + R_v(a) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - v_0(x))^+ \Phi(0, x) dx + L \int_{t_0}^{t_1} I(\tau) d\tau \\ &\quad + \int_{(t_0, t_1) \times \mathbb{R}^n} q dt dx + R_u(b) + R_v(a) \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} ((\bar{u}(t_0, x) - \bar{v}(t_0, x))^+ - (u_0(x) - v_0(x))^+)^+ \Phi(0, x) dx. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Перейдем в этом неравенстве к пределу при $t_0 \rightarrow 0$. Ввиду субаддитивности функции $p(r) = r^+$

$$\begin{aligned} (\bar{u} - \bar{v})^+ &\leq (\bar{u} - s_{a,b}(u_0))^+ + (s_{a,b}(u_0) - s_{a,b}(v_0))^+ + (s_{a,b}(v_0) - \bar{v})^+ \\ &\leq (\bar{u} - s_{a,b}(u_0))^+ + (\bar{v} - s_{a,b}(v_0))^- + (u_0 - v_0)^+, \end{aligned}$$

откуда

$$((\bar{u} - \bar{v})^+ - (u_0 - v_0)^+)^+ \leq (\bar{u} - s_{a,b}(u_0))^+ + (\bar{v} - s_{a,b}(v_0))^- . \quad (3.24)$$

Поскольку $\bar{u} = s_{a,b}(u)$, $\bar{v} = s_{a,b}(v)$, то по начальным условиям определения 4

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} [(\bar{u}(t, \cdot) - s_{a,b}(u_0))^+ + (\bar{v}(t, \cdot) - s_{a,b}(v_0))^-] = 0 \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$$

и из (3.24) следует, что

$$\operatorname{ess\,lim}_{t \rightarrow 0+} ((\bar{u} - \bar{v})^+ - (u_0 - v_0)^+)^+ = 0 \quad \text{в } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n).$$

Переходя в (3.23) к пределу при $E \ni t_0 \rightarrow 0$ и учитывая полученное выше предельное соотношение, придем к неравенству

$$\begin{aligned} I(t) &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - v_0(x))^+ \Phi(0, x) dx \\ &\quad + \int_{(0,t) \times \mathbb{R}^n} q(\tau, x) d\tau dx + R_u(b) + R_v(a) + L \int_0^t I(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.25)$$

справедливому для всех $t = t_1 \in E$. По лемме Гронуолла из (3.25) вытекает, что для всех $t \in E$

$$\begin{aligned} I(t) &\leq e^{Lt} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - v_0(x))^+ \Phi(0, x) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{(0,t) \times \mathbb{R}^n} q(\tau, x) d\tau dx + R_u(b) + R_v(a) \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Так как $\Phi(t, x) = \theta_1(R + N(T - t) - |x|) \rightarrow 1$ при $R \rightarrow +\infty$, из (3.26) в пределе при $R \rightarrow +\infty$ следует, что при $t \in E$ для всех $a, b \in P$

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} (s_{a,b}(u(t, x)) - s_{a,b}(v(t, x)))^+ dx \\ &\leq e^{Lt} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - v_0(x))^+ dx + \int_{(0,t) \times \mathbb{R}^n} q(\tau, x) d\tau dx + R_u(b) + R_v(a) \right). \end{aligned}$$

По лемме Фату из этого неравенства в пределе при $b \rightarrow +\infty$, $a \rightarrow -\infty$ вытекает, что для всех $t \in E$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u(t, x) - v(t, x))^+ dx \leq e^{Lt} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - v_0(x))^+ dx + \int_{(0,t) \times \mathbb{R}^n} q(\tau, x) d\tau dx \right).$$

Здесь мы также использовали условие (3.2), из которого следует, что $R_u(b) \rightarrow 0$, $R_v(a) \rightarrow 0$ соответственно при $b \rightarrow +\infty$, $a \rightarrow -\infty$. Неравенство (3.1) доказано.

Из теоремы 1 вытекает следующий принцип сравнения.

СЛЕДСТВИЕ 2 (принцип сравнения). Пусть функции $u = u(t, x)$, $v = v(t, x)$ являются соответственно р.э.субр. и р.э.суперр. задачи (1.1), (1.4) с начальными данными $u_0(x)$, $v_0(x)$ и функциями-источниками $g(t, x, u)$, $h(t, x, u)$ соответственно. Тогда если $u_0(x) \leq v_0(x)$ почти всюду на $\mathbb{R}^n$, $g(t, x, u) \leq h(t, x, u)$ почти всюду на $\Pi_T \times \mathbb{R}$, то $u(t, x) \leq v(t, x)$ почти всюду на Π_T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из непрерывности функций $g(t, x, u)$, $h(t, x, u)$ по последней переменной следует, что $g(t, x, u) \leq h(t, x, u)$ почти всюду на Π_T при всех $u \in \mathbb{R}$, откуда, в свою очередь, вытекает, что $q(t, x) = 0$ почти всюду на Π_T . Поскольку также $(u_0(x) - v_0(x))^+ = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}^n$, из (3.1) следует, что $(u(t, x) - v(t, x))^+ = 0$, т.е. $u(t, x) \leq v(t, x)$ почти всюду на Π_T . Следствие доказано.

Так как р.э.р. задачи (1.1), (1.4) является р.э.субр. и р.э.суперр. этой задачи, из принципа сравнения следует единственность р.э.р.

СЛЕДСТВИЕ 3 (единственность). *Для любой измеримой начальной функции $u_0(x)$ р.э.р. $u = u(t, x)$ задачи (1.1), (1.4) единственно.*

Более того, верно следующее свойство устойчивости р.э.р. по отношению к возмущениям входных данных.

СЛЕДСТВИЕ 4 (устойчивость). *Пусть $u(t, x)$, $v(t, x)$ – р.э.р. задачи (1.1), (1.4) с начальными данными $u_0(x)$, $v_0(x)$ и функциями-источниками $g(t, x, u)$, $h(t, x, u)$ соответственно. Тогда для почти всех $t \in (0, T)$*

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x) - v(t, x)| dx \\ & \leq e^{Lt} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x) - v_0(x)| dx + \int_{(0, t) \times \mathbb{R}^n} \sup_{u \in \mathbb{R}} |g(\tau, x, u) - h(\tau, x, u)| d\tau dx \right), \end{aligned} \quad (3.27)$$

где $L = \min(L(g), L(h))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функции $u(t, x)$, $v(t, x)$ являются одновременно р.э.субр. и р.э.суперр. задачи (1.1), (1.4) с соответствующими начальными данными $u_0(x)$, $v_0(x)$ и функциями-источниками $g(t, x, u)$, $h(t, x, u)$, справедливы соотношения (3.1). Из этих соотношений следует, что для почти всех $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} (u(t, x) - v(t, x))^+ dx \\ & \leq e^{Lt} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - v_0(x))^+ dx + \int_{(0, t) \times \mathbb{R}^n} \sup_{u \in \mathbb{R}} (g(\tau, x, u) - h(\tau, x, u))^+ d\tau dx \right), \\ & \int_{\mathbb{R}^n} (v(t, x) - u(t, x))^+ dx \\ & \leq e^{Lt} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (v_0(x) - u_0(x))^+ dx + \int_{(0, t) \times \mathbb{R}^n} \sup_{u \in \mathbb{R}} (h(\tau, x, u) - g(\tau, x, u))^+ d\tau dx \right). \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, мы получим (3.27).

В случае ограниченных $u_0(x)$, $g(t, x, 0)$ из принципа сравнения и предложения 1 вытекает следующий принцип максимума.

СЛЕДСТВИЕ 5. Если $|u_0(x)| \leq A$ почти всюду на $\mathbb{R}^n$, $|g(t, x, 0)| \leq B$ почти всюду на Π_T , $u(t, x)$ – р.э.р. задачи (1.1), (1.4), то почти всюду на Π_T

$$|u(t, x)| \leq \Phi(t) \doteq \begin{cases} \left[Ae^{Lt} + \frac{B}{L}(e^{Lt} - 1) \right], & L \neq 0, \\ A + Bt, & L = 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предложениям 1 и 3 функции $-\Phi(t)$, $\Phi(t)$ являются соответственно р.э.субр. и р.э.суперр. задачи (1.1), (1.4) с общими входными данными u_0 , g . Используя принцип сравнения, получаем неравенства $-\Phi(t) \leq u(t, x) \leq \Phi(t)$ почти всюду на Π_T , из которых и следует (3.28).

Заметим, что в неоднородном случае условия

$$\begin{aligned} \int_{u > k} (g(t, x, k))^- dt dx &\rightarrow 0, & k \rightarrow +\infty, \\ \int_{u < k} (g(t, x, k))^+ dt dx &\rightarrow 0, & k \rightarrow -\infty, \end{aligned} \quad (3.29)$$

входящие в определение 4, оказываются необходимыми: как показано в примере 1 ниже, отказ от этих условий приводит к нарушению свойства единственности р.э.р. задачи (1.1), (1.4).

Рис. 1. Решение $u(t, x)$

ПРИМЕР 1. В полуплоскости $\Pi = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу

$$u_t + (u^2)_x = -|x|u, \quad u(0, x) = -\frac{x|x|}{4}. \quad (3.30)$$

Заметим, что функция $g(t, x, u) = -|x|u$ не возрастает по переменной u , и, следовательно, условие (1.2) выполнено с константой $L = 0$. Очевидным решением задачи (3.30) является стационарное решение $u_0 = -x|x|/4$. Ясно, что это решение является о.э.р. задачи (3.30) и при всех $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$,

$$(s_{a,b}(u_0))_t + ((s_{a,b}(u_0))^2)_x + \chi_{(a,b]}(u_0)|x|u_0 = 0 \quad \text{в } \mathscr{D}'(\Pi),$$

а значит, выполнено условие (2.1) с $\mu_k = 0$ для всех $k \in \mathbb{R}$. Покажем, что функция (см. рис. 1)

$$u(t, x) = \begin{cases} u_0(x), & t < c - 2 \operatorname{arctg} |x|, \\ -\frac{\operatorname{sign} x (x^2 + 2)}{4}, & t > c - 2 \operatorname{arctg} |x|, \end{cases} \quad (3.31)$$

является о.э.р. задачи (3.30) для всех $c \geq \pi$. Для этого заметим, что в областях гладкости $u(t, x) = -x|x|/4 + \text{const}$ является классическим решением уравнения (3.30), в то время как на линиях разрыва $t = c - 2 \operatorname{arctg} |x|$ и $x = 0, t > c$ выполнены как условия Ранкина–Гюгонио

$$(u_+ - u_-)n_t + ((u_+)^2 - (u_-)^2)n_x = 0,$$

так и условие допустимости Олейник $u_+ \leq u_-$ (см. [10]). Здесь $n = (n_t, n_x)$ – вектор нормали к линии разрыва, а u_-, u_+ – предельные значения $u(t, x)$ на линии разрыва соответственно снизу и сверху от линии разрыва. Заметим, что на линии $t = t(x) = c - 2 \operatorname{arctg} |x|$ условия Ранкина–Гюгонио сводятся к тождеству $t'(x) = (u_+(x) + u_-(x))^{-1} = -2 \operatorname{sign} x / (1 + x^2)$, которое очевидно выполнено. Справедливость условия Ранкина–Гюгонио на горизонтальном разрыве $x = 0, t > c$ непосредственно вытекает из равенства $(u_+)^2 = (u_-)^2$. Поскольку $u(t, x) \in L_{\text{loc}}^\infty(\Pi)$ – о.э.р. задачи (3.30), то верно представление (2.1) с $\mu_k = -\{((u - k)^+)_t + [\operatorname{sign}^+(u - k)(u^2 - k^2)]_x + \operatorname{sign}^+(u - k)|x|u\}$. Непосредственные вычисления показывают, что при $f(t, x) \in C_0^1(\Pi)$

$$\begin{aligned} \int f(t, x) d\mu_k(t, x) &= \int_{t=t(x)} \{[(u_- - k)^+ - (u_+ - k)^+]n_t \\ &+ [\operatorname{sign}^+(u_- - k)((u_-)^2 - k^2) - \operatorname{sign}^+(u_+ - k)((u_+)^2 - k^2)]n_x\} f(t, x) ds \\ &+ \int_c^{+\infty} \left(\operatorname{sign}^+\left(\frac{1}{2} - k\right) - \operatorname{sign}^+\left(-\frac{1}{2} - k\right) \right) \left(\frac{1}{4} - k^2 \right) f(t, 0) dt. \end{aligned} \quad (3.32)$$

В первом интеграле $n = (n_t, n_x)$ – единичный вектор нормали на кривой $t = t(x)$, направленный от u_- к u_+ , $ds = \sqrt{1 + (t'(x))^2} dx$ – линейная мера Лебега на этой кривой. Ясно, что при $|k| > 1/2$ второй интеграл равен нулю. Кроме того, при $k \notin [u_+, u_-]$ функция

$$\begin{aligned} &[(u_- - k)^- - (u_+ - k)^+]n_t + [\operatorname{sign}^+(u_- - k)((u_-)^2 - k^2) \\ &- \operatorname{sign}^+(u_+ - k)((u_+)^2 - k^2)]n_x = \pm [(u_+ - u_-)n_t + ((u_+)^2 - (u_-)^2)n_x] = 0 \end{aligned}$$

в силу условия Ранкина–Гюгонио. Поэтому, из (3.32) следует, что при $k > 1/2$

$$\begin{aligned} &\int f(t, x) d\mu_k(t, x) \\ &= \int_{-\sqrt{4k}}^{-\sqrt{4k-2}} \left[-\frac{x^2 + 2 - 4k}{4} + \frac{2((x^2 + 2)^2/16 - k^2)}{1 + x^2} \right] f(t(x), x) dx \\ &= \int_{-\sqrt{4k}}^{-\sqrt{4k-2}} \frac{(x^2 + 2 - 4k)(4k - x^2)}{8(1 + x^2)} f(t(x), x) dx, \end{aligned}$$

а при $k < -1/2$

$$\begin{aligned} \int f(t, x) d\mu_k(t, x) &= \int_{\sqrt{4|k|-2}}^{\sqrt{4|k|}} \left[\frac{-x^2 - 4k}{4} + \frac{2(x^4/16 - k^2)}{1 + x^2} \right] f(t(x), x) dx \\ &= \int_{\sqrt{4|k|-2}}^{\sqrt{4|k|}} -\frac{(x^2 + 2 + 4k)(4k + x^2)}{8(1 + x^2)} f(t(x), x) dx \\ &= \int_{\sqrt{4|k|-2}}^{\sqrt{4|k|}} \frac{(x^2 + 2 - 4|k|)(4|k| - x^2)}{8(1 + x^2)} f(t(x), x) dx. \end{aligned}$$

Из этих равенств следует, что при $|k| > 1/2$

$$\mu_k(\Pi) \leq \frac{1}{8} \int_{\sqrt{4|k|-2}}^{\sqrt{4|k|}} dx = \frac{\sqrt{4|k|} - \sqrt{4|k|-2}}{8} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Таким образом, решение $u = u_c(t, x)$ также удовлетворяет условию (2.1) с мерами μ_k такими, что $\mu_k(\Pi) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Ясно, что нарушение свойства единственности здесь связано с тем, что для решений $u = u_0, u_c$ не выполнено требование (3.29).

§ 4. Существование р.э.р.

Как показано в [9], в общем случае ренормализованных энтропийных решений задачи (1.1), (1.4) может не существовать. Например (см. [9; пример 3.1]), задача $u_t + (u^2)_x = 0$, $u_0(x) = x^2$ не имеет р.э.р. Для неоднородных уравнений р.э.р. может не существовать и при ограниченных начальных данных. Подтвердим это следующим примером.

Рис. 2. Решение $u_r(t, x)$

ПРИМЕР 2. Пусть $n = 1$. В полосе $\Pi_T = (0, T) \times \mathbb{R}$ рассмотрим задачу Коши

$$u_t + (u^2)_x = x^2, \quad u(0, x) = 0. \quad (4.1)$$

Здесь функция-источник $g(t, x, u) = g(x) = x^2$ удовлетворяет всем требуемым условиям (в частности, условие (1.2) выполнено с константой $L = 0$). Покажем, что задача (4.1) не имеет р.э.р. Предполагая противное, допустим, что $u = u(t, x)$ – р.э.р. задачи (4.1). При $r > 0$ положим

$$h_r(x) = r^2 \operatorname{sign}^+(-x - r) = \begin{cases} 0, & x \geq -r, \\ r^2, & x < -r. \end{cases}$$

Очевидно, $h_r(x) \leq g(x) = x^2$. Пусть $u = u_r(t, x)$ – ограниченное о.э.р. задачи

$$u_t + (u^2)_x = h_r(x), \quad u(0, x) = 0. \quad (4.2)$$

Так как функция $h_r(x)$ ограничена, это решение существует и единственно. Непосредственно проверяется, что (см. рис. 2)

$$u_r(t, x) = \begin{cases} r^2 t, & x < -r, \\ \frac{r}{2} (rt + \sqrt{r^2 t^2 - 2(x + r)}), & -r \leq x \leq -r + \frac{3}{8} r^2 t^2, \\ 0, & x > -r + \frac{3}{8} r^2 t^2. \end{cases} \quad (4.3)$$

Заметим, что на линии разрыва $x = x(t) = -r + 3r^2 t^2 / 8$ выполнено как условие Ранкина–Гюгонио

$$x'(t) = u_-(t) + u_+(t) = \frac{r}{2} (rt + \sqrt{r^2 t^2 - 2(x(t) + r)}),$$

так и условие допустимости Олейник $u_+(t) < u_-(t)$. Здесь

$$u_-(t) \doteq \lim_{x \rightarrow x(t)-} u(t, x) = \frac{r}{2} (rt + \sqrt{r^2 t^2 - 2(x(t) + r)}) = \frac{3}{4} r^2 t, \\ u_+(t) \doteq \lim_{x \rightarrow x(t)+} u(t, x) = 0$$

– предельные значения $u(t, x)$ на линии разрыва $x = x(t)$.

Решение $u_r(t, x)$ ограничено в $\Pi_T = (0, T) \times \mathbb{R}$ и по предложению 3 является р.э.р. задачи (4.2). Так как $h_r(x) \leq g(x)$, а начальные функции задач (4.1), (4.2) совпадают, то по принципу сравнения (следствие 2) $u(t, x) \geq u_r(t, x)$ почти всюду на Π_T . Так как при $t > 0$ выполнено соотношение $-r + 3r^2 t^2 / 8 \rightarrow +\infty$, $r \rightarrow +\infty$, то ввиду (4.3) для любого $x \in \mathbb{R}$ $-r < x < -r + 3r^2 t^2 / 8$ при всех достаточно больших $r \in \mathbb{N}$, и, значит,

$$u_r(t, x) = \frac{r}{2} (rt + \sqrt{r^2 t^2 - 2(x + r)}) \geq \frac{3}{4} r^2 t \rightarrow +\infty, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Поскольку для почти всех $(t, x) \in \Pi_T$ $u(t, x) \geq u_r(t, x)$ для любого $r \in \mathbb{N}$, получаем, что $u(t, x) = +\infty$ почти всюду на Π_T , а это противоречит начальному условию в смысле определения 4. Полученное противоречие доказывает, что р.э.р. задачи (4.1) не существует.

При $g \equiv 0$ существование р.э.р. задачи (1.1), (1.4) было доказано в [8] в случае $u_0(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ с использованием методов теории сжимающих полугрупп. В [9] результат о существовании р.э.р. был обобщен на случай, когда начальная функция лежит в пространстве $L^\infty(\mathbb{R}^n) + L^1(\mathbb{R}^n)$.

Как следует из примера 2, для существования р.э.р. неоднородной задачи (1.1), (1.4) необходимы ограничения и на функцию-источник. Мы будем предполагать, что $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n) + L^1(\mathbb{R}^n)$, $g(t, x, 0) \in L^\infty(\Pi_T) + L^1(\Pi_T)$.

Напомним, что пространство $L^\infty(\Omega) + L^1(\Omega)$, где Ω – область евклидова пространства, состоит из функций $u(x)$ (как обычно, функции, отличающиеся на множестве нулевой меры Лебега, отождествляются), представимых в виде суммы $u(x) = u_1(x) + u_2(x)$, $u_1(x) \in L^\infty(\Omega)$, $u_2(x) \in L^1(\Omega)$. Пространство $L^\infty(\Omega) + L^1(\Omega)$ полно относительно стандартной нормы суммы банаховых пространств

$$\|u\| = \inf \{ \|u_1\|_\infty + \|u_2\|_1 \mid u = u_1 + u_2, u_1 \in L^\infty(\Omega), u_2 \in L^1(\Omega) \}.$$

Справедлив следующий простой критерий принадлежности функции $u(x)$ пространству $L^\infty(\Omega) + L^1(\Omega)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Измеримая функция $u = u(x) \in L^\infty(\Omega) + L^1(\Omega)$ тогда и только тогда, когда найдется число $r > 0$ такое, что $\int_\Omega (|u(x)| - r)^+ dx < +\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $u = u(x) \in L^\infty(\Omega) + L^1(\Omega)$. Тогда справедливо представление $u = u_1(x) + u_2(x)$, где $u_1(x) \in L^\infty(\Omega)$, $u_2(x) \in L^1(\Omega)$. Выберем $r \geq \|u_1\|_\infty$. Тогда $|u_1(x)| - r \leq 0$ почти всюду на Ω и, значит,

$$(|u(x)| - r)^+ \leq (|u_2(x)| + |u_1(x)| - r)^+ \leq |u_2(x)|$$

почти всюду на Ω . Из этой оценки следует, что

$$\int_\Omega (|u(x)| - r)^+ dx \leq \int_\Omega |u_2(x)| dx < +\infty.$$

Обратно, если при некотором $r > 0$ $(|u(x)| - r)^+ \in L^1(\Omega)$, то верно представление $u = u_1(x) + u_2(x)$, где $u_2(x) = (|u(x)| - r)^+ \operatorname{sign} u(x) \in L^1(\Omega)$, а $u_1(x) = u(x) - (|u(x)| - r)^+ \operatorname{sign} u(x)$. Так как $|u_1(x)| = |u(x)| - (|u(x)| - r)^+ \leq r$, то $u_1(x) \in L^\infty(\Omega)$. Итак, $u = u_1(x) + u_2(x) \in L^\infty(\Omega) + L^1(\Omega)$. Предложение доказано.

Искомое р.э.р. задачи (1.1), (1.4) будет найдено как предел последовательности приближенных о.э.р., которая строится с помощью процедуры аппроксимации начальных данных $u_0(x)$ и функции-источника $g(t, x, u)$ последовательностями функций

$$\begin{aligned} u_{0m}(x) &= s_{-m,m}(u_0(x)), \\ g_m(t, x, u) &= g(t, x, u) + s_{-m,m}(g(t, x, 0)) - g(t, x, 0), \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) = g_m(t, x, u), \quad u(0, x) = u_{0m}(x). \quad (4.4)$$

Пусть $L = L(g) \geq 0$ – константа из условия (1.2) для исходной функции-источника $g(t, x, u)$. Ясно, что функции $g_m(t, x, u)$ удовлетворяют требованию (1.2) с той же константой $L(g_m) = L$ для всех $m \in \mathbb{N}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Существует единственное ограниченное о.э.р. задачи (4.4) $u = u_m(t, x)$. При этом $\|u_m\|_\infty \leq C_m = m(1 + T)e^{LT}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $C = C_m = m(1 + T)e^{LT}$, $\varphi_m(u) = \varphi(s_{-C, C}(u))$. Очевидно, вектор $\varphi_m(u)$ ограничен и удовлетворяет условию Липшица на $\mathbb{R}$. Как установлено, например, в [2; теорема 2] (в общем случае лишь непрерывного вектора потока, удовлетворяющего линейному ограничению на рост), существует о.э.р. $u(t, x)$ задачи

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi_m(u) = g_m(t, x, u), \quad u(0, x) = u_{0m}(x).$$

Это решение удовлетворяет принципу максимума ([2; теорема 10])

$$|u(t, x)| \leq e^{Lt} \left(\|u_{0m}\|_\infty + \int_0^t \|g_m(\tau, \cdot, 0)\|_\infty d\tau \right) \leq m(1 + T)e^{LT} = C$$

(заметим, что $g_m(\tau, \cdot, 0) = s_{-m, m}(g(\tau, x, 0))$). В частности, при $u = u(t, x)$ верно равенство $\varphi_m(u) = \varphi(u)$, откуда легко следует, что $u(t, x)$ является о.э.р. задачи (4.4). По предложению 3 $u(t, x)$ является также р.э.р. задачи (4.4) и по следствию 3 это решение единственно (единственность ограниченного о.э.р. задачи (4.4) также следует из общих результатов работы [2]).

Заметим, что ввиду следствия 5 при $L > 0$ решение $u_m(t, x)$ удовлетворяет более точной оценке $|u(t, x)| \leq m/L [(L + 1)e^{LT} - 1] < C_m$.

Как мы покажем ниже, последовательность $u_m(t, x)$ сходится в $L^1_{\text{loc}}(\Pi_T)$ к искомому р.э.р. задачи (1.1), (1.4). Докажем сначала, что эта последовательность действительно сходится в пространстве $L^1_{\text{loc}}(\Pi_T)$ (и даже в $L^\infty(\Pi_T) + L^1(\Pi_T)$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. 1) *Последовательности $u_{0m}(x) \rightarrow u_0(x)$, $g_m(t, x, 0) \rightarrow g(t, x, 0)$ при $m \rightarrow \infty$ в пространствах $L^\infty(\mathbb{R}^n) + L^1(\mathbb{R}^n)$ и $L^\infty(\Pi_T) + L^1(\Pi_T)$ соответственно;*

2) *найдется функция $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi_T) + L^1(\Pi_T)$ такая, что $u_m(t, x) \rightarrow u(t, x)$ при $m \rightarrow \infty$ в $L^\infty(\Pi_T) + L^1(\Pi_T)$;*

3) *$\operatorname{ess} \lim_{t \rightarrow 0} |u(t, x) - u_0(x)| = 0$ в $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r \in \mathbb{N}$ таково, что в соответствии с предложением 4 $v(x) \doteq (|u_0(x)| - r)^+ \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $h(t, x) \doteq (|g(t, x, 0)| - r)^+ \in L^1(\Pi_T)$. Тогда при $m \geq r$

$$\begin{aligned} |u_0(x) - u_{0m}(x)| &= (|u_0(x)| - m)^+ \\ &\leq (v(x) - (m - r))^+ \rightarrow 0 \quad \text{в } L^1(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty, \\ |g(t, x, 0) - g_m(t, x, 0)| &= (|g(t, x, 0)| - m)^+ \\ &\leq (h(t, x) - (m - r))^+ \rightarrow 0 \quad \text{в } L^1(\Pi_T), \quad m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ввиду непрерывности вложения $L^1(\Omega)$ в $L^\infty(\Omega) + L^1(\Omega)$ из полученных соотношений следует утверждение 1).

Для доказательства второго утверждения заметим, что при $l > m \geq r$

$$\begin{aligned} |u_{0l}(x) - u_{0m}(x)| &\leq (|u_0(x)| - m)^+ \in L^1(\mathbb{R}^n), \\ |g_l(t, x, u) - g_m(t, x, u)| &= |g_l(t, x, 0) - g_m(t, x, 0)| \leq (|g(t, x, 0)| - m)^+ \in L^1(\Pi_T). \end{aligned}$$

По предложению 3 $u_m(t, x)$ являются и р.э.р. задачи (1.1), (1.4) с начальными данными $u_{0m}(x)$ и функцией-источником $g_m(t, x, u)$. Тогда по следствию 4 для почти всех $t \in (0, T)$

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} |u_l(t, x) - u_m(t, x)| dx \\ &\leq e^{LT} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_{0l}(x) - u_{0m}(x)| dx + \int_{\Pi_T} |g_l(t, x, 0) - g_m(t, x, 0)| dt dx \right) \\ &\leq e^{LT} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|u_0(x)| - m)^+ dx + \int_{\Pi_T} (|g(t, x, 0)| - m)^+ dt dx \right) \doteq A_m. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из (4.5) следует, что при $l > m \geq r$

$$\|u_l - u_m\|_{L^\infty(\Pi_T) + L^1(\Pi_T)} \leq \|u_l - u_m\|_{L^1(\Pi_T)} \leq A_m \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty.$$

Это означает, что последовательность u_m , $m \in \mathbb{N}$, является фундаментальной в пространстве $L^\infty(\Pi_T) + L^1(\Pi_T)$ и ввиду полноты этого пространства сходится к некоторой функции $u(t, x)$.

Докажем утверждение 3). Из оценки (4.5) в пределе при $l \rightarrow \infty$ следует, что для почти всех $t \in (0, T)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x) - u_m(t, x)| dx \leq A_m,$$

откуда вытекает оценка

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x) - u_m(t, x)| \rho(x) dx \leq A_m \|\rho\|_\infty, \quad (4.6)$$

справедливая для почти всех $t \in (0, T)$ и любой функции $\rho(x) \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $\rho(x) \geq 0$. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $m \in \mathbb{N}$ так, чтобы $A_m \|\rho\|_\infty < \varepsilon$. Используя неравенство

$$|u(t, x) - u_0(x)| \leq |u(t, x) - u_m(t, x)| + |u_0(x) - u_{0m}(x)| + |u_m(t, x) - u_{0m}(x)|,$$

соотношение (4.6) и оценку

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x) - u_{0m}(x)| \rho(x) dx \leq \|\rho\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} (|u_0(x)| - m)^+ dx \leq A_m \|\rho\|_\infty < \varepsilon,$$

получаем, что

$$\begin{aligned} &\text{ess lim}_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x) - u_0(x)| \rho(x) dx \\ &\leq 2\varepsilon + \text{ess lim}_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |u_m(t, x) - u_{0m}(x)| \rho(x) dx = 2\varepsilon \end{aligned} \quad (4.7)$$

ввиду начального условия б) из определения 1 для о.э.р. $u_m(t, x)$. Из произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что

$$\text{ess lim}_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} |u(t, x) - u_0(x)| \rho(x) dx = 0,$$

и для завершения доказательства остается учесть также произвольность ρ . Предложение доказано.

Установим теперь, что $u(t, x)$ – искомое р.э.р. нашей задачи. Для этого нам понадобится следующая

ЛЕММА 2. Для всех $l \in \mathbb{N}$ и $k \geq 2r(1+T)e^{LT}$, где $r \in \mathbb{N}$ указано в доказательстве предложения 6, справедлива оценка

$$\int_{\Pi_T} \chi_{|u_l(t, x)| \geq k} |u_l(t, x)| dt dx \leq B_k, \quad (4.8)$$

где $B_k = 3TA_m$, $m = m(k) = [ke^{-LT}/(2(1+T))] \geq r$ ($[x]$ обозначает целую часть числа $x \in \mathbb{R}$), а константы A_m определены в (4.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $m = m(k)$, то $k \geq 2m(1+T)e^{LT}$ и по предложению 5 $|u_m(t, x)| \leq k/2$ почти всюду на Π_T . Из (4.5) тогда следует, что при $l > m$

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_T} \left(|u_l| - \frac{k}{2} \right)^+ dt dx &\leq \int_{\Pi_T} (|u_l| - |u_m|)^+ dt dx \\ &\leq \int_{\Pi_T} |u_l - u_m| dt dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |u_l(t, x) - u_m(t, x)| dx dt \leq TA_m. \end{aligned}$$

Если же $l \leq m$, то по предложению 5 $|u_l| \leq l(1+T)e^{LT} \leq k/2$ и

$$\int_{\Pi_T} \left(|u_l| - \frac{k}{2} \right)^+ dt dx = 0 \leq TA_m.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\Pi_T} \chi_{|u_l| \geq k} |u_l| dt dx &= \int_{\Pi_T} \chi_{|u_l| \geq k} (|u_l| - k + k) dt dx \\ &= \int_{\Pi_T} (|u_l| - k)^+ dt dx + 2 \int_{\Pi_T} \chi_{|u_l| \geq k} \frac{k}{2} dt dx \\ &\leq \int_{\Pi_T} (|u_l| - k)^+ dt dx + 2 \int_{\Pi_T} \chi_{|u_l| \geq k} \left(|u_l| - \frac{k}{2} \right) dt dx \\ &\leq \int_{\Pi_T} (|u_l| - k)^+ dt dx + 2 \int_{\Pi_T} \left(|u_l| - \frac{k}{2} \right)^+ dt dx \\ &\leq 3 \int_{\Pi_T} \left(|u_l| - \frac{k}{2} \right)^+ dt dx \leq 3TA_m, \end{aligned}$$

откуда и следует (4.8).

ТЕОРЕМА 2. *Предельная функция $u(t, x)$ является р.э.р. задачи (1.1), (1.4).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при $l \in \mathbb{N}$ функция $u_l(t, x)$ – ограниченное о.э.р. задачи (1.1), (1.4) с начальными данными $u_{0l}(x)$, то по предложению 3 она является и р.э.р. этой задачи. При этом для всех $a, b \in \mathbb{R}$, $b \geq a$,

$$(s_{a,b}(u_l))_t + \operatorname{div}_x \varphi(s_{a,b}(u_l)) - \chi_{(a,b]}(u_l)g_l(t, x, u_l) = \mu_b^l - \mu_a^l, \quad (4.9)$$

где ввиду (2.14) неотрицательные локально конечные меры $\mu_k^l \in M_{\text{loc}}(\Pi_T)$ определены равенствами

$$\begin{aligned} \mu_k^l = & - [((u_l - k)^+)_t + \operatorname{div}_x (\operatorname{sign}^+(u_l - k)(\varphi(u_l) - \varphi(k))) \\ & - \operatorname{sign}^+(u_l - k)g_l(t, x, u_l)] \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Поскольку u_l является и обобщенным решением уравнения (1.1), то

$$(u_l - k)_t + \operatorname{div}_x (\varphi(u_l) - \varphi(k)) - g_l(t, x, u_l) = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T)$$

и с учетом очевидных равенств

$$\begin{aligned} (u_l - k)^+ - (u_l - k)^- &= (u_l - k), \\ (\operatorname{sign}^+(u_l - k) - \operatorname{sign}^-(u_l - k))(\varphi(u_l) - \varphi(k)) &= \varphi(u_l) - \varphi(k), \\ \operatorname{sign}^+(u_l - k) + \chi_{u_l \leq k} &= 1 \end{aligned}$$

справедливо альтернативное представление для мер μ_k^l :

$$\begin{aligned} \mu_k^l = & - [((u_l - k)^-)_t + \operatorname{div}_x (\operatorname{sign}^-(u_l - k)(\varphi(u_l) - \varphi(k))) \\ & + \chi_{u_l \leq k}g_l(t, x, u_l)] \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T). \end{aligned} \quad (4.11)$$

В соответствии с предложением 4 найдется натуральная константа r такая, что $(|u_0(x)| - r)^+ \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $(|g(t, x, 0)| - r)^+ \in L^1(\Pi_T)$. При $k \geq r$ положим

$$D_k = \int_{\mathbb{R}^n} (|u_0(x)| - k)^+ dx + \int_{\Pi_T} (|g(t, x, 0)| - k)^+ dt dx.$$

Ясно, что $D_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Покажем, что при

$$|k| \geq k_r = 2r(1 + T)e^{LT} > r$$

величины $\mu_k^l(\Pi_T) + \int_{k(u-k)>0} (\operatorname{sign} k g(t, x, k))^- dt dx$ конечны.

Рассмотрим сначала случай $k \geq k_r$. Пусть $N = N_{l,k} = \max_{|u| \leq \max(l,k)} |\varphi'(u)|$. Так же, как при доказательстве теоремы 1, выберем функцию $\rho(s) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ такую, что $\operatorname{supp} \rho(s) \subset [0, 1]$, $\rho(s) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(s) ds = 1$, и положим при $\nu \in \mathbb{N}$

$$\delta_\nu(s) = \nu \rho(\nu s), \quad \theta_\nu(t) = \int_{-\infty}^t \delta_\nu(s) ds = \int_{-\infty}^{\nu t} \rho(s) ds.$$

Пусть $R > 1$, $\Phi(t, x) = \theta_1(R + N(T - t) - |x|)$. Ясно (см. доказательство теоремы 1), что $\Phi(t, x) \in C^\infty(\Pi_T)$, $\Phi(t, x) \geq 0$ и $\Phi_t = -N|\nabla_x \Phi|$.

Определим множество

$$E = \{t \in (0, T) \mid \forall l \in \mathbb{N} \ (t, x) - \text{точка Лебега } u_l(t, x) \text{ для почти всех } x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Ясно, что E является множеством полной меры Лебега. Пусть $t_0, t_1 \in E$, $t_0 < t_1$. Положим при $\nu \in \mathbb{N}$ $\chi_\nu(t) = \theta_\nu(t - t_0) - \theta_\nu(t - t_1)$. При достаточно большом ν (именно, при $\nu > (T - t_1)^{-1}$) функция $f(t, x) = \Phi(t, x)\chi_\nu(t) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $0 \leq f(t, x) \leq 1$. Применяя равенство (4.10) к пробной функции $f(t, x)$, получим после элементарных преобразований, что

$$\begin{aligned} \langle \mu_k^l, f \rangle &= \int_{\Pi_T} f(t, x) d\mu_k^l(t, x) \\ &= \int_{\Pi_T} (u_l - k)^+(\delta_\nu(t - t_0) - \delta_\nu(t - t_1))\Phi dt dx \\ &\quad + \int_{\Pi_T} [(u_l - k)^+\Phi_t + \text{sign}^+(u_l - k)(\varphi(u_l) - \varphi(k)) \cdot \nabla_x \Phi \\ &\quad + \text{sign}^+(u_l - k)g_l(t, x, u_l)\Phi]\chi_\nu(t) dt dx. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Поскольку $\Phi_t = -N|\nabla_x \Phi|$, верно неравенство

$$\begin{aligned} (u_l - k)^+\Phi_t + \text{sign}^+(u_l - k)(\varphi(u_l) - \varphi(k)) \cdot \nabla_x \Phi \\ \leq (u_l - k)^+\Phi_t + \text{sign}^+(u_l - k)|\varphi(u_l) - \varphi(k)| \cdot |\nabla_x \Phi| \\ = \text{sign}^+(u_l - k)|\nabla_x \Phi|(|\varphi(u_l) - \varphi(k)| - N|u_l - k|) \leq 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

так как $|u_l| \leq l$, и, значит,

$$|\varphi(u_l) - \varphi(k)| \leq \max_{|u| \leq \max(l, k)} |\varphi'(u)| \cdot |u_l - k| = N|u_l - k|.$$

Из (4.12), (4.13) следует неравенство

$$\begin{aligned} \langle \mu_k^l, f \rangle &\leq \int_{\Pi_T} (u_l - k)^+(\delta_\nu(t - t_0) - \delta_\nu(t - t_1))\Phi(t, x) dt dx \\ &\quad + \int_{\Pi_T} \text{sign}^+(u_l - k)g_l(t, x, u_l)\Phi\chi_\nu(t) dt dx. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Учитывая условие $t_i \in E$, $i = 1, 2$, нетрудно проверить, что при $\nu \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} &\int_{\Pi_T} (u_l - k)^+\delta_\nu(t - t_i)\Phi(t, x) dt dx \\ &= \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} (u_l(t, x) - k)^+\Phi(t, x) dx \right) \delta_\nu(t - t_i) dt \\ &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} (u_l(t_i, x) - k)^+\Phi(t_i, x) dx. \end{aligned}$$

Далее, $f(t, x) = \Phi(t, x)\chi_\nu(t) \rightarrow \Phi(t, x)\chi_{(t_0, t_1]}(t)$ при $\nu \rightarrow \infty$ поточечно на Π_T . Поэтому, из (4.14) в пределе при $\nu \rightarrow \infty$ вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \langle \mu_k^l, \Phi\chi_{(t_0, t_1]}(t) \rangle &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_l(t_0, x) - k)^+ \Phi(t_0, x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} (u_l(t_1, x) - k)^+ \Phi(t_1, x) dx \\ &\quad + \int_{(t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n} \text{sign}^+(u_l - k) g_l(t, x, u_l) \Phi dt dx. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует, что

$$\begin{aligned} \langle \mu_k^l, \Phi\chi_{(t_0, t_1]}(t) \rangle &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_l(t_0, x) - k)^+ \Phi(t_0, x) dx \\ &\quad + \int_{(t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n} \text{sign}^+(u_l - k) g_l(t, x, u_l) \Phi dt dx. \end{aligned}$$

Переходя в этой оценке к пределу при $t_0 \rightarrow 0+$, $t_0 \in E \cap \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ – множество полной меры из определения 1 для о.э.р. $u_l(t, x)$, и используя начальное условие б), получим, что для почти всех $t = t_1 \in E$

$$\begin{aligned} \langle \mu_k^l, \Phi\chi_{(0, t]}(t) \rangle &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_{0l}(x) - k)^+ \Phi(0, x) dx + \int_{\Pi_T} \text{sign}^+(u_l - k) g_l(t, x, u_l) \Phi dt dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (|u_0(x)| - k)^+ dx + \int_{\Pi_T} \text{sign}^+(u_l - k) g_l(t, x, u_l) \Phi dt dx. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ввиду условия (1.2)

$$\begin{aligned} \text{sign}^+(u_l - k) g_l(t, x, u_l) &\leq \text{sign}^+(u_l - k) (g_l(t, x, k) + L(u_l - k)) \\ &\leq -\text{sign}^+(u_l - k) (g_l(t, x, k))^- + \text{sign}^+(u_l - k) ((g_l(t, x, k))^+ + L(u_l - k)) \\ &\leq -\text{sign}^+(u_l - k) (g_l(t, x, k))^- + \text{sign}^+(u_l - k) ((g_l(t, x, 0))^+ + Lk + L(u_l - k)) \\ &\leq -\text{sign}^+(u_l - k) (g_l(t, x, k))^- + \text{sign}^+(u_l - k) (|g_l(t, x, 0)| - k)^+ + k + Lu_l \\ &\leq -\text{sign}^+(u_l - k) (g_l(t, x, k))^- + (|g(t, x, 0)| - k)^+ + (L + 1)\chi_{|u_l| \geq k} |u_l|, \end{aligned}$$

и с учетом произвольности $t \in E$ из (4.15) и леммы 2 следует оценка

$$\begin{aligned} \langle \mu_k^l, \Phi\chi_{(0, T)}(t) \rangle &+ \int_{\Pi_T} \text{sign}^+(u_l - k) (g_l(t, x, k))^- dt dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (|u_0(x)| - k)^+ dx + \int_{\Pi_T} (|g(t, x, 0)| - k)^+ dt dx \\ &\quad + (L + 1) \int_{\Pi_T} \chi_{|u_l| \geq k} |u_l| dt dx \leq D_k + (L + 1)B_k < +\infty. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Поскольку $\Phi(t, x) = \theta_1(R + N(T - t) - |x|) \rightarrow 1$, $R \rightarrow +\infty$, то в пределе при $R \rightarrow +\infty$ из (4.16) следует, что

$$\mu_k^l(\Pi_T) + \int_{\Pi_T} \chi_{u_l > k} (g_l(t, x, k))^- dt dx \leq D_k + (L + 1)B_k. \quad (4.17)$$

В случае $k \leq -k_r$ мы используем представление (4.11) вместо (4.10). Применяя (4.11) к пробной функции $f(t, x)$ и рассуждая так же, как выше, получим неравенство, аналогичное (4.15): для всех $t \in E$

$$\begin{aligned} \langle \mu_k^l, \Phi \chi_{(0, t]}(t) \rangle &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - k)^- \Phi(0, x) dx - \int_{\Pi_T} \chi_{u_l \leq k} g_l(t, x, u_l) \Phi dt dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (|u_0(x)| - |k|)^+ dx - \int_{\Pi_T} \chi_{u_l \leq k} g_l(t, x, u_l) \Phi dt dx. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ввиду (1.2) при $u_l \leq k$

$$g_l(t, x, u_l) \geq g_l(t, x, k) - L(k - u_l) = (g_l(t, x, k))^+ - (g_l(t, x, k))^- - L(k - u_l),$$

и из (4.18) вытекает, что

$$\begin{aligned} \langle \mu_k^l, \Phi \chi_{(0, t]}(t) \rangle &+ \int_{\Pi_T} \chi_{u_l \leq k} (g_l(t, x, k))^+ \Phi dt dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (|u_0(x)| - |k|)^+ dx + \int_{\Pi_T} \chi_{u_l \leq k} ((g_l(t, x, k))^- + L(k - u_l)) \Phi dt dx, \end{aligned} \quad (4.19)$$

а так как

$$\begin{aligned} \chi_{u_l \leq k} ((g_l(t, x, k))^- + L(k - u_l)) &\leq \chi_{u_l \leq k} ((g_l(t, x, 0))^- - Lk + L(k - u_l)) \\ &\leq \chi_{u_l \leq k} ((g_l(t, x, 0) - k)^- - k - Lu_l) \leq (|g_l(t, x, 0)| - |k|)^+ \\ &\quad + (L + 1) \chi_{|u_l| \geq |k|} |u_l| \leq (|g(t, x, 0)| - |k|)^+ + (L + 1) \chi_{|u_l| \geq |k|} |u_l|, \end{aligned}$$

из (4.19) после перехода к пределу при $R \rightarrow +\infty$ следует неравенство, аналогичное (4.17)

$$\begin{aligned} \mu_k^l(\Pi_T) &+ \int_{\Pi_T} \chi_{u_l \leq k} (g_l(t, x, k))^+ dt dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (|u_0(x)| - |k|)^+ dx + \int_{\Pi_T} (|g(t, x, 0)| - |k|)^+ dt dx \\ &\quad + (L + 1) \int_{\Pi_T} \chi_{|u_l| \geq |k|} |u_l| dt dx \leq P_k \doteq D_{|k|} + (L + 1) B_{|k|} < +\infty. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Ввиду (4.17), (4.20) при $|k| \geq k_r$

$$\mu_k^l(\Pi_T) + \int_{k(u_l - k) > 0} (\text{sign } k g_l(t, x, k))^- dt dx \leq P_k. \quad (4.21)$$

Пусть теперь $|k| < k_r$ и $f = f(t, x) \in C_0^1(\Pi_T)$, $f \geq 0$. Тогда ввиду (4.9) и (4.21) при $b = k_r$

$$\begin{aligned} \langle \mu_k^l, f \rangle &= \langle \mu_b^l, f \rangle - \langle \mu_b^l - \mu_k^l, f \rangle \\ &= \langle \mu_b^l, f \rangle + \int_{\Pi_T} [s_{k, b}(u_l) f_t + \varphi(s_{k, b}(u_l)) \cdot \nabla_x f + \chi_{(k, b]}(u_l) g_l(t, x, u_l) f] dt dx \leq C_f \\ &\doteq \|f\|_\infty P_b + \int_{\Pi_T} [b |f_t| + \max_{|u| \leq b} |\varphi(u)| |\nabla_x f| + (\max_{|u| \leq b} |g(t, x, u)| + |g(t, x, 0)|) f] dt dx. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ввиду неотрицательности мер μ_k^l из оценок (4.20), (4.22) следует ограниченность последовательностей μ_k^l , $l \in \mathbb{N}$, в пространстве $M_{\text{loc}}(\Pi_T)$. Пусть $E \subset \mathbb{R}$ – множество, состоящее из значений k таких, что множество уровня $u^{-1}(k)$ имеет нулевую меру Лебега на Π_T . Ясно, что E – множество полной меры в $\mathbb{R}$. Поэтому мы можем выбрать счетное всюду плотное в $\mathbb{R}$ подмножество $S \subset E$. Так как ограниченные множества в $M_{\text{loc}}(\Pi_T)$ слабо предкомпактны, найдется подпоследовательность последовательности μ_k^l (для которой мы сохраняем прежнее обозначение), которая сходится слабо при $l \rightarrow \infty$ к некоторой неотрицательной мере $\tilde{\mu}_k \in M_{\text{loc}}(\Pi_T)$. Ввиду счетности S указанную подпоследовательность можно выбрать общей для всех $k \in S$. Как следует из равномерных по l оценок (4.21), (4.22),

$$\langle \tilde{\mu}_k, f \rangle \leq C_f \quad \forall f \in C_0^1(\Pi_T), \quad f \geq 0, \quad |k| < k_r, \quad (4.23)$$

$$\tilde{\mu}_k(\Pi_T) \leq P_k \leq P_{k_r}, \quad |k| \geq k_r. \quad (4.24)$$

Далее, по предложению 6 при $l \rightarrow \infty$ последовательность $u_l \rightarrow u = u(t, x)$ в $L^\infty(\Pi_T) + L^1(\Pi_T)$, а значит, и в $L_{\text{loc}}^1(\Pi_T)$. Поэтому для всех $a, b \in \mathbb{R}$, $b \geq a$, последовательности

$$s_{a,b}(u_l) \rightarrow s_{a,b}(u), \quad \varphi(s_{a,b}(u_l)) \rightarrow \varphi(s_{a,b}(u))$$

при $l \rightarrow \infty$ в пространствах $L_{\text{loc}}^1(\Pi_T)$, $L_{\text{loc}}^1(\Pi_T, \mathbb{R}^n)$ соответственно. При необходимости переходя к подпоследовательности, мы можем считать, что $u_l(t, x) \rightarrow u(t, x)$ почти всюду на Π_T . Тогда $\chi_{(a,b]}(u_l)g_l(t, x, u_l) \rightarrow \chi_{(a,b]}(u)g(t, x, u)$ почти всюду на Π_T (а значит, и в $L_{\text{loc}}^1(\Pi_T)$) при всех $a, b \in S \subset E$, $a \leq b$ (здесь учитывается, что для почти всех $(t, x) \in \Pi_T$ $u(t, x) \notin \{a, b\}$).

Из этих предельных соотношений следует, что для $a, b \in S$, $a \leq b$,

$$\begin{aligned} \mu_b^l - \mu_a^l &= (s_{a,b}(u_l))_t + \operatorname{div}_x \varphi(s_{a,b}(u_l)) - \chi_{(a,b]}(u_l)g_l(t, x, u_l) \\ &\rightarrow (s_{a,b}(u))_t + \operatorname{div}_x \varphi(s_{a,b}(u)) - \chi_{(a,b]}(u)g(t, x, u), \quad l \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.25)$$

слабо в $\mathcal{D}'(\Pi_T)$. Напомним, что при $a, b \in S$ последовательности μ_b^l , μ_a^l слабо в $M_{\text{loc}}(\Pi_T)$ сходятся к мерам $\tilde{\mu}_b$, $\tilde{\mu}_a$, соответственно. Из (4.25) тогда вытекает представление

$$(s_{a,b}(u))_t + \operatorname{div}_x \varphi(s_{a,b}(u)) - \chi_{(a,b]}(u)g(t, x, u) = \tilde{\mu}_b - \tilde{\mu}_a, \quad (4.26)$$

справедливое для всех $a, b \in S$, $a \leq b$. Пусть теперь значение $k \in \mathbb{R}$ произвольно. Выберем $b \in S$ и последовательность $a_m \in S$, $m \in \mathbb{N}$, так, что $k < a_m < b$ для любого $m \in \mathbb{N}$ и $a_m \rightarrow k$ при $m \rightarrow \infty$. Как следует из (4.26) и поточечных предельных соотношений $s_{a_m,b}(u) \rightarrow s_{k,b}(u)$, $\chi_{(a_m,b]}(u) \rightarrow \chi_{(k,b]}(u)$,

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{a_m} &= \tilde{\mu}_b - [(s_{a_m,b}(u))_t + \operatorname{div}_x \varphi(s_{a_m,b}(u)) - \chi_{(a_m,b]}(u)g(t, x, u)] \\ &\rightarrow \mathcal{L} \doteq \tilde{\mu}_b - [(s_{k,b}(u))_t + \operatorname{div}_x \varphi(s_{k,b}(u)) - \chi_{(k,b]}(u)g(t, x, u)], \quad m \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.27)$$

слабо в $\mathcal{D}'(\Pi_T)$. Ввиду оценок (4.23), (4.24) последовательность неотрицательных мер $\tilde{\mu}_{a_m}$ ограничена, а значит, и предкомпактна в $M_{\text{loc}}(\Pi_T)$. Из (4.27)

тогда следует, что распределение $\mathcal{L} \in M_{\text{loc}}(\Pi_T)$ и не зависит от выбора последовательности a_m , а зависит только от k : $\mathcal{L} = \mu_k \in M_{\text{loc}}(\Pi_T)$. Ясно, что тогда $\tilde{\mu}_{a_m} \rightarrow \mu_k$ слабо в $M_{\text{loc}}(\Pi_T)$ и, в частности, $\mu_k \geq 0$.

Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, то можно выбрать последовательности $a_m, b_m \in S$ так, что $a_m < b_m$, $a_m > a$, $b_m > b$ и $a_m \rightarrow a$, $b_m \rightarrow b$ при $m \rightarrow \infty$. Ввиду (4.26)

$$(s_{a_m, b_m}(u))_t + \operatorname{div}_x \varphi(s_{a_m, b_m}(u)) - \chi_{(a_m, b_m]}(u)g(t, x, u) = \tilde{\mu}_{b_m} - \tilde{\mu}_{a_m}. \quad (4.28)$$

При $m \rightarrow \infty$ справедливы поточечные предельные соотношения

$$s_{a_m, b_m}(u) \rightarrow s_{a, b}(u), \quad \chi_{(a_m, b_m]}(u) \rightarrow \chi_{(a, b]}(u).$$

Кроме того, $\tilde{\mu}_{a_m} \rightarrow \mu_a$, $\tilde{\mu}_{b_m} \rightarrow \mu_b$ слабо в $M_{\text{loc}}(\Pi_T)$. Поэтому из (4.28) в пределе при $m \rightarrow \infty$ следует равенство

$$(s_{a, b}(u))_t + \operatorname{div}_x \varphi(s_{a, b}(u)) - \chi_{(a, b]}(u)g(t, x, u) = \mu_b - \mu_a \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi_T). \quad (4.29)$$

Далее, как следует из (4.24), в пределе при $k = a_m \rightarrow a$ мера $\mu_a(\Pi_T) \leq P_{|a|-1}$, если $|a| > |k_r| + 1$. Очевидно, $P_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Поэтому и $\mu_a(\Pi_T) \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \infty$. Поскольку при $k \in S$ последовательность $\chi_{k(u_l - k) > 0}$ сходится при $l \rightarrow \infty$ к $\chi_{k(u - k) > 0}$ почти всюду на Π_T , а $g_l(t, x, k) \rightarrow g(t, x, k)$, $l \rightarrow \infty$, то из (4.21) следует неравенство (с использованием леммы Фату)

$$\int_{k(u-k) > 0} (\operatorname{sign} k g(t, x, k))^- dt dx \leq P_k. \quad (4.30)$$

Покажем, что это неравенство верно для произвольного значения k такого, что $|k| \geq k_r$. Для этого выберем последовательность $k_m \in S$, $m \in \mathbb{N}$, такую, что $|k_m| > |k|$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} k_m = k$. Ввиду (4.30)

$$\int_{k(u-k_m) > 0} (\operatorname{sign} k g(t, x, k_m))^- dt dx \leq P_{k_m} \leq P_k.$$

По лемме Фату в пределе при $m \rightarrow \infty$ из этого неравенства и следует (4.30). Здесь используется, что последовательность характеристических функций $\chi_{k(u-k_m) > 0}$ поточечно сходится при $m \rightarrow \infty$ к $\chi_{k(u-k) > 0}$. Так как $P_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, мы видим, что справедливо условие (2.2).

Итак, выполнены условия (2.1), (2.2) предложения 2. Справедливость начального условия (2.3) непосредственно следует из утверждения 3) предложения 6. По предложению 2 $u(t, x)$ – р.э.р. задачи (1.1), (1.4). Теорема доказана.

Список литературы

- [1] С. Н. Кružков, “Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными”, *Матем. сб.*, **81(123):2** (1970), 228–255; англ. пер.: S. N. Kružkov, “First order quasilinear equations in several independent variables”, *Math. USSR-Sb.*, **10:2** (1970), 217–243.

- [2] Е. Ю. Панов, “К теории обобщенных энтропийных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка в классе локально суммируемых функций”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:6 (2002), 91–136; англ. пер.: E. Yu. Panov, “On generalized entropy solutions of the Cauchy problem for a first-order quasilinear equation in the class of locally summable functions”, *Izv. Math.*, **66**:6 (2002), 1171–1218.
- [3] Ph. Bénilan, S.N. Kruzhkov, “Conservation laws with continuous flux functions”, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, **3**:4 (1996), 395–419.
- [4] S. N. Kruzhkov, E. Yu. Panov, “Osgood’s type conditions for uniqueness of entropy solutions to Cauchy problem for quasilinear conservation laws of the first order”, *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII (N.S.)*, **40** (1994), 31–54.
- [5] A. Yu. Goritsky, E. Yu. Panov, “Example of nonuniqueness of entropy solutions in the class of locally bounded functions”, *Russ. J. Math. Phys.*, **6**:4 (1999), 492–494.
- [6] А. Ю. Горицкий, Е. Ю. Панов, “О локально ограниченных обобщенных энтропийных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Тр. МИАН, **236**, Наука, М., 2002, 120–133; англ. пер.: A. Yu. Goritsky, E. Yu. Panov, “Locally bounded generalized entropy solutions to the Cauchy problem for a first-order quasilinear equation”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **236** (2002), 110–123.
- [7] Е. Ю. Панов, “О классах корректности локально ограниченных обобщенных энтропийных решений задачи Коши для квазилинейных уравнений первого порядка”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **12**:5 (2006), 175–188; англ. пер.: E. Yu. Panov, “On well-posedness classes of locally bounded generalized entropy solutions of the Cauchy problem for quasilinear first-order equations”, *J. Math. Sci.*, **150**:6 (2008), 2578–2587.
- [8] Ph. Bénilan, J. Carrillo, P. Wittbold, “Renormalized entropy solutions of scalar conservation laws”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **29**:2 (2000), 313–327.
- [9] П. В. Лысухо, Е. Ю. Панов, “Ренормализованные энтропийные решения задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка”, Проб. матем. анализа, **51**, 2010, 3–20.
- [10] О. А. Олейник, “Разрывные решения нелинейных дифференциальных уравнений”, *УМН*, **12**:3(75) (1957), 3–73.

Евгений Юрьевич Панов
(Eugeny Yu. Panov)

Новгородский государственный университет
им. Ярослава Мудрого
E-mail: Eugeny.Panov@novsu.ru

Поступила в редакцию
30.01.2013 и 15.05.2013