Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. С. Гусева, А. В. Царев, Кольца, p -ранги которых не превосходят 1, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 4, 21–32

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8218>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 17:14:07

УДК 512.552.1+512.541

О. С. Гусева, А. В. Царев

Кольца, p -ранги которых не превосходят 1

В работе рассматриваются ассоциативные кольца конечного ранга без кручения, p -ранги которых не превосходят 1. Для этих колец найдены некоторые аналоги теорем Веддерберна о конечномерных алгебрах.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: ассоциативное кольцо, смешанная абелева группа, кольцо полиадических чисел, факторно делимая группа, p -ранг, E -кольцо.

DOI: 10.4213/sm8218

§ 1. Введение

Одну из первых структурных теорий современной алгебры составили теоремы Веддерберна (1907 г.), которые для алгебр над полями характеристики 0 формулируются следующим образом:

Пусть A – конечномерная ассоциативная алгебра над полем F , тогда

- 1) в A существует такая полупростая подалгебра B , что $A = B \oplus N(A)$, где $N(A)$ – нильрадикал алгебры A ;*
- 2) полупростая алгебра B раскладывается в конечную прямую сумму простых алгебр $B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_k$;*
- 3) простая алгебра B_i изоморфна полной матричной алгебре $M_{n_i}(D_i)$, где D_i – некоторая F -алгебра с делением.*

Теоремы Веддерберна имеют содержательную предысторию и важные обобщения. Исторические факты о теоремах Веддерберна заимствованы нами из статьи [1]. Для конечномерных алгебр над полем комплексных чисел аналогичные теоремы были доказаны в 1892 г. российским математиком Ф. Э. Молиным, а в 1898 г. для комплексного и действительного случая они были доказаны Э. Картаном. В 30-е годы XX века 2-я и 3-я теоремы Веддерберна были обобщены группой немецких математиков под руководством Э. Нетер, Э. Артина и Р. Брауэра на случай ассоциативных колец с условием минимальности на (односторонние) идеалы. А в 1942 г. советский математик А. И. Мальцев дополнил 1-ю теорему Веддерберна, доказав единственность (с точностью до внутреннего автоморфизма) полупростой алгебры B .

Интересные аналоги теорем Веддерберна для ассоциативных колец, аддитивные группы которых являются абелевыми группами без кручения конечного ранга, получили в 1961 г. Р. Бьюмонт и Р. Пирс [2]. Используя понятия квазиравенства и квазиизоморфизма (которые мы поясним ниже), главные результаты Бьюмонта–Пирса можно сформулировать следующим образом.

Работа выполнена в рамках ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (контракт № 14.В37.21.0363).

1. Если R – ассоциативное кольцо без кручения конечного ранга, то в R существует такое полупервичное подкольцо S , что $R \doteq S \oplus N(R)$, где $N(R)$ – нильрадикал кольца R , знак $\doteq$ выражает квазиравенство.
2. Полупервичное кольцо S квазиравно конечной прямой сумме первичных колец $S_1 \oplus S_2 \oplus \dots \oplus S_k$.
3. Первичное кольцо S_i квазиизоморфно полной матричной алгебре $M_{n_i}(D_i)$, где D_i – некоторая область.

Продолжение результатов Бьюмонта–Пирса на смешанный случай сталкивается с рядом трудностей технического и принципиального характера. Например, из первичности кольца вытекает его неразложимость в прямую сумму идеалов, следовательно, все p -примарные компоненты первичного кольца должны быть нулевыми, а значит, прямой перенос 2-й и 3-й теорем Бьюмонта–Пирса на смешанный случай невозможен. С 1-й теоремой ситуация тоже не лучше, так как известны примеры существенно неразложимых коммутативных колец с нетривиальными радикалами (примеры таких колец можно найти в [3]).

По-видимому, класс смешанных колец конечного ранга “слишком широк”, чтобы иметь структурные теоремы, аналогичные теоремам Бьюмонта–Пирса. В связи с этим перспективы изучения смешанных колец видятся нам в дополнительных ограничениях на их аддитивные группы и в ослаблении таких условий, как нильпотентность и разложимость до квазинильпотентности и существенной неразложимости соответственно.

Настоящая работа посвящена ассоциативным кольцам, все p -ранги которых не превосходят 1. Кольца из этого класса мало изучены. Исключение составляют факторно делимые кольца ранга 1 (эти кольца и их аддитивные группы детально исследованы в [4]) и так называемые *csp*-кольца, частным случаем которых являются кольца псевдоалгебраических чисел. Последние кольца рассматривались, например, в работах [3] и [5].

В §2 настоящей работы конструируются кольца, играющие фундаментальную роль в дальнейшем изложении, которые мы будем обозначать $L(x)$. Основные результаты этого параграфа приводятся в работе [3], целиком посвященной кольцам $L(x)$. В §3 для рассматриваемых колец доказываются утверждения, аналогичные теоремам Бьюмонта–Пирса. В §4 рассматриваются аддитивные группы данных колец.

Под “группой” в работе подразумевается абелева группа, записанная аддитивно, под “кольцом” – ассоциативное кольцо (не обязательно с единицей); групповая терминология, применяемая в работе к кольцам, относится к их аддитивным группам. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ – обозначения колец целых, рациональных и целых p -адических чисел соответственно или их аддитивных групп, $\mathbb{Z}_m$ – кольцо классов вычетов по модулю m , P – множество всех простых чисел, $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел. Если S – подмножество R -модуля M , то через $\langle S \rangle$ и $\langle S \rangle_R$ будем обозначать соответственно подгруппу и подмодуль, порожденные множеством S , а через $\langle S \rangle_*$ – сервантную оболочку множества S , состоящую из всех таких $r \in M$, что $nr \in \langle S \rangle$ при некотором натуральном n . Заметим, что $\langle S \rangle_*$ содержит все элементы из M , имеющие конечные порядки. Элементы $a_1, a_2, \dots, a_n$ группы A будем называть линейно независимыми (над $\mathbb{Z}$), если равенство $m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n = 0$ влечет $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 0$. Бесконечное множество называется линейно независимым, если линейно независимо любое его конечное подмножество. Рангом группы A называется мощность максимального линейно независимого подмножества в A (обозначается $r(A)$).

p -рангом группы A называется размерность $\mathbb{Z}_p$ -пространства A/pA (обозначается $r_p(A)$). Рангом (p -рангом) кольца или модуля будем называть ранг (p -ранг) его аддитивной группы. Через $t(A)$, $t_p(A)$ и $\text{div } A$ будем обозначать соответственно периодическую, p -примарную и делимую части группы A , а через $K[u]$ – кольцо многочленов от одной переменной над кольцом K . Кольцо и группу эндоморфизмов группы A будем обозначать $E(A)$ и $\text{End } A$ соответственно. Если K – кольцо, то через K^+ будем обозначать его аддитивную группу. Будем говорить, что группы A и B квазиравны (и писать $A \doteq B$), если их пересечение имеет конечный индекс как в A , так и в B . Для групп без кручения квазиизоморфизм представляет собой композицию изоморфизма и квазиравенства.

Основные используемые определения и понятия теории абелевых групп соответствуют монографии [6].

§ 2. Кольца $L(x)$

Пусть $\chi = (m_p)$ – произвольная характеристика (последовательность целых неотрицательных чисел и символов ∞ , занумерованная простыми индексами). Построим кольцо $\mathbb{Z}_\chi = \prod_{p \in P} K_p$, где $K_p = \mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$ при $m_p < \infty$, и $K_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$ – кольцо целых p -адических чисел при $m_p = \infty$. Если $\chi = (\infty)$, то $\mathbb{Z}_\chi = \prod_{p \in P} \widehat{\mathbb{Z}}_p = \widehat{\mathbb{Z}}$ – кольцо *поладических чисел*.

Всюду ниже через ε_p будем обозначать единицу кольца K_p ($K_p = \mathbb{Z}_{p^m}$ или $K_p = \widehat{\mathbb{Z}}_p$) и ее образ при естественном вложении $K_p \rightarrow \mathbb{Z}_\chi$.

Пусть $x = (x_p)$ – произвольный ненулевой элемент кольца $\mathbb{Z}_\chi$. Ему соответствует идемпотент $\xi = (\xi_p) \in \mathbb{Z}_\chi$ такой, что $\xi_p = \varepsilon_p$ при $x_p \neq 0$ и $\xi_p = 0$ при $x_p = 0$. Рассмотрим группу $L(x)$, сервантно порожденную множеством всех натуральных степеней элемента x в идеале $\xi\mathbb{Z}_\chi$,

$$L(x) = \langle x^k \mid k \in \mathbb{N} \rangle_* \subseteq \xi\mathbb{Z}_\chi.$$

Нетрудно видеть, что множество $L(x)$ замкнуто относительно операций $+$ и $\cdot$, определенных в кольце $\mathbb{Z}_\chi$, и удовлетворяет всем условиям кольца.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если x – нильпотентный элемент бесконечного порядка из кольца $\mathbb{Z}_\chi$, то $L(x)$ – кольцо конечного ранга без единицы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x^k = 0$, тогда $L(x) = \langle x, x^2, \dots, x^{k-1} \rangle_*$, следовательно, $r(L(x)) \leq k - 1$. Если же $L(x)$ содержит единичный элемент ξ , то

$$m\xi = m_1x + m_2x^2 + \dots + m_{k-1}x^{k-1}$$

для некоторых $m_1, m_2, \dots, m_{k-1} \in \mathbb{Z}$ и $m \in \mathbb{N}$, откуда $(m\xi)^k = 0$. Из последнего равенства следует, что ξ содержит лишь конечное число ненулевых p -компонент и все они имеют конечный порядок. Тогда ξ – элемент конечного порядка, а значит, и x – элемент конечного порядка. Получили противоречие, следовательно, $L(x)$ не содержит единичного элемента.

ЛЕММА 1. *Если $L(x)$ – кольцо конечного ранга, то существует такой идемпотент $\xi \in \mathbb{Z}_\chi$, что ξx – нильпотентный элемент, а $(1 - \xi)x$ не имеет ненулевых нильпотентных p -компонент.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $L(x)$ – кольцо конечного ранга, то существует равенство с целыми коэффициентами вида

$$a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0. \quad (1)$$

Если (1) содержит лишь одно ненулевое слагаемое, то, очевидно, для кольца $L(x)$ лемма справедлива. Предположим, что (1) содержит по меньшей мере два ненулевых слагаемых. Пусть a_k – отличный от нуля коэффициент с наименьшим индексом, тогда равенство (1) можно переписать в виде

$$x^k(a_k 1_{\mathbb{Z}_X} + a_{k+1}x + \dots + a_nx^{n-k}) = 0. \quad (2)$$

Для каждого простого p равенство (2) индуцирует равенство

$$x_p^k(a_k\varepsilon_p + a_{k+1}x_p + \dots + a_nx_p^{n-k}) = 0, \quad (3)$$

где $x_p = \varepsilon_p x$. Рассмотрим множество

$$P_1 = \{p \in P \mid x_p - \text{нильпотентный элемент}\}.$$

Если $p \in P_1$ (т.е. p делит x) и p не делит a_k , то $a_k\varepsilon_p + a_{k+1}x_p + \dots + a_nx_p^{n-k}$ – обратимый элемент кольца K_p . Тогда из (3) получаем, что $x_p^k = 0$. Так как число a_k имеет конечное число простых делителей, то $x_p^k = 0$ почти для всех $p \in P_1$. Из этого следует, что существует идемпотент $\xi \in \mathbb{Z}_X$ такой, что ξx – nilпотентный элемент, а $(1 - \xi)x$ не имеет ненулевых nilпотентных p -компонент.

ТЕОРЕМА 1. $L(x)$ является кольцом с единицей тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

- 1) $L(x)$ имеет конечный ранг;
- 2) элемент x почти не имеет ненулевых nilпотентных p -компонент.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим необходимость условий 1) и 2).

Если $L(x)$ содержит единичный элемент $1_{L(x)}$, то для некоторых $n, m_0 \in \mathbb{N}$ и $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$ выполняется равенство

$$m_0 \cdot 1_{L(x)} = m_1x + m_2x^2 + \dots + m_nx^n. \quad (4)$$

Следовательно, справедливо равенство $m_0x - m_1x^2 - m_2x^3 - \dots - m_nx^{n+1} = 0$, а значит, кольцо $L(x)$ имеет конечный ранг.

Предположим, что условие 2) не выполняется. По доказанному выше кольцо $L(x)$ имеет конечный ранг, значит, по лемме 1 существует идемпотент $\xi \in \mathbb{Z}_X$ такой, что ξx является nilпотентным элементом бесконечного порядка. Тогда, умножив (4) на ξ , получим равенство

$$m_0\xi = m_1(\xi x) + m_2(\xi x)^2 + \dots + m_n(\xi x)^n,$$

из которого следует, что ξ является единичным элементом кольца $L(\xi x)$, что противоречит предложению 1.

Пусть выполняются условия 1) и 2), покажем, что $L(x)$ – кольцо с единицей.

Если x – элемент конечного порядка, то, очевидно, $L(x)$ содержит единичный элемент. Пусть x имеет бесконечный порядок. Так как $L(x)$ – кольцо конечного ранга, то справедливо равенство с целыми коэффициентами вида

$$a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0, \quad (5)$$

а так как для x выполняется условие 2), то (5) содержит по крайней мере два ненулевых слагаемых. Пусть a_k – отличный от нуля коэффициент с наименьшим индексом, тогда равенство (5) можно переписать в виде

$$x^k(a_k 1_{\mathbb{Z}_X} + a_{k+1}x + \cdots + a_n x^{n-k}) = 0. \quad (6)$$

Для каждого простого p равенство (6) индуцирует равенство

$$x_p^k(a_k \varepsilon_p + a_{k+1}x_p + \cdots + a_n x_p^{n-k}) = 0, \quad (7)$$

где $x_p = \varepsilon_p x$. В соответствии с условием 2) из (7) следует, что

$$a_k \varepsilon_p + a_{k+1}x_p + \cdots + a_n x_p^{n-k} = 0 \quad (8)$$

почти для всех простых p таких, что $x_p \neq 0$.

Учитывая, что (8) справедливо для всех ненулевых $x_p \in \widehat{\mathbb{Z}}_p$, получаем, что для всех простых p таких, что $x_p \neq 0$, имеет место равенство

$$ta_k \varepsilon_p + ta_{k+1}x_p + \cdots + ta_n x_p^{n-k} = 0,$$

где t – некоторое натуральное число.

Пусть $\xi = (\xi_p)$ – такой элемент кольца $\mathbb{Z}_X$, что $\xi_p = 0$ при $x_p = 0$ и $\xi_p = \varepsilon_p$ при $x_p \neq 0$. Тогда верно равенство

$$ta_k \xi + ta_{k+1}x + \cdots + ta_n x^{n-k} = 0. \quad (9)$$

Так как $ta_k \neq 0$, то из (9) следует, что $\xi \in L(x) = \langle x^k \mid k \in \mathbb{N} \rangle_*$. Нетрудно видеть, что именно ξ является единичным элементом кольца $L(x)$.

ЛЕММА 2. Пусть $x, y \in \mathbb{Z}_X$ и $y \in L(x)$, тогда $L(y) \subseteq L(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим идемпотент $\xi = (\xi_p) \in \mathbb{Z}_X$ такой, что $\xi_p = \varepsilon_p$ при $x_p \neq 0$ и $\xi_p = 0$ при $x_p = 0$. Аналогично построим идемпотент ξ_1 , соответствующий элементу y . Так как $y \in L(x) \subseteq \xi \mathbb{Z}_X$, то $\xi_1 \mathbb{Z}_X \subseteq \xi \mathbb{Z}_X$. Пусть $g \in L(y)$, тогда для некоторых $m \in \mathbb{N}$ и $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{Z}$

$$mg = m_1 y + m_2 y^2 + \cdots + m_k y^k \in L(x).$$

Таким образом, $g \in \xi \mathbb{Z}_X$ и $mg \in L(x)$, следовательно, $g \in L(x)$ и $L(y) \subseteq L(x)$.

ТЕОРЕМА 2. Если $L(x)$ – кольцо конечного ранга, то $L(x) = L(x_1) \oplus L(x_2)$, где x_1 – нильпотентный элемент, а $L(x_2)$ – кольцо с единицей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если x – элемент конечного порядка, то $L(x)$ – кольцо с единицей, следовательно, в качестве x_1 можно взять 0, а в качестве x_2 – сам элемент x .

Если же x имеет бесконечный порядок, то по лемме 1 существует идемпотент $\xi \in \mathbb{Z}_X$ такой, что ξx – нильпотентный элемент, а $(1 - \xi)x$ не имеет ненулевых нильпотентных p -компонент. Пусть $(\xi x)^k = 0$, тогда кольцо $L(x^k)$ удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 1, следовательно, $L(x^k)$ является кольцом с единицей. Рассмотрим идемпотент $\xi' = (\xi'_p)$ такой, что $\xi'_p = 0$ при $x_p = 0$ и $\xi'_p = \varepsilon_p$ при $x_p \neq 0$. Нетрудно видеть, что идемпотент $\xi' - \xi$ является единицей кольца $L(x^k)$. Тогда

$$L(x) = \xi L(x) \oplus (\xi' - \xi)L(x) = L(\xi x) \oplus L((\xi' - \xi)x) = L(x_1) \oplus L(x_2).$$

Полученное разложение является искомым, так как $x_1^k = (\xi x)^k = 0$, а $L(x_2)$ удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 1.

§ 3. Сервантные подкольца колец $\mathbb{Z}_\chi$

ЛЕММА 3. Пусть A – группа, все p -ранги которой конечны, тогда ее первая ульмовская подгруппа – делимая группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим первую ульмовскую подгруппу A^1 группы A , $A^1 = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} mA$, и построим ее нулевой ульмовский фактор $A_0 = A/A^1$. Так как все p -ранги группы A конечны, то и все p -ранги группы A_0 конечны. Следовательно, $t_p(A_0)$ – конечная группа для всякого простого p . Пусть p^n – верхняя грань порядков элементов группы $t_p(A_0)$. Элемент $a \in A^1$ имеет бесконечную p -высоту в группе A , следовательно, уравнение $p^{n+1}y = a$ имеет решение $y = y_0$ в группе A . Тогда $p^{n+1}(y_0 + A^1) = a + A^1 = 0$ и $y_0 + A^1 \in t_p(A_0)$, а значит, $p^n y_0 \in A^1$. Таким образом, уравнение $px = a$ имеет решение $x = p^n y_0$ в группе A^1 , т.е. A^1 – p -делимая группа. В силу произвольности выбора простого числа p получаем, что A^1 – делимая группа.

Пусть A – группа p -ранга 1. Рассмотрим обратный спектр

$$\dots \xrightarrow{i_{n+1}} A/p^n A \xrightarrow{i_n} A/p^{n-1} A \xrightarrow{i_{n-1}} \dots \xrightarrow{i_3} A/p^2 A \xrightarrow{i_2} A/pA \xrightarrow{i_1} 0, \quad (10)$$

где $i_n(a + p^n A) = a + p^{n-1} A \in A/p^{n-1} A$. Так как $r_p(A) = 1$, то A/pA – циклическая группа порядка p . Пусть $A/pA = \langle a + pA \rangle$, тогда для любых $b \in A$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} b &= k_1 a + pa_1, & a_1 &= k_2 a + pa_2, & \dots, & & a_{n-1} &= k_n a + pa_n, \\ b &= (k_1 + k_2 p + \dots + k_n p^{n-1})a + p^n a_n, \end{aligned}$$

где $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ и $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$. Следовательно, $A/p^n A$ – циклическая группа при любом $n \in \mathbb{N}$, причем $A/p^n A = \langle a + p^n A \rangle$. Таким образом, в случае стабилизации спектра (10) его обратный предел $\hat{A}_p$ равен $\mathbb{Z}_{p^m}$. В противном случае обратный предел $\hat{A}_p$ равен $\hat{\mathbb{Z}}_p$.

ТЕОРЕМА 3. Класс редуцированных колец, все p -ранги которых не превосходят 1, совпадает с классом сервантных подколец колец $\mathbb{Z}_\chi$ по всем характеристикам χ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R – произвольное редуцированное кольцо, все p -ранги которого не превосходят 1. Его $\mathbb{Z}$ -адическое пополнение $\hat{R}$ находится как обратный предел спектра

$$\pi_n^m: R/mR \rightarrow R/nR, \quad \pi_n^m(a + mR) = a + nR,$$

по всем парам (m, n) натуральных чисел таких, что n делит m .

Рассмотрим естественный гомоморфизм $\mu: R \rightarrow \hat{R}$, действующий по закону $\mu(a) = (a + R, a + 2R, \dots, a + kR, \dots)$. Так как $\ker \mu = \bigcap_{n>0} nR = R^1$ и R – редуцированное кольцо, то по лемме 3 кольцо R вкладывается в свое $\mathbb{Z}$ -адическое пополнение $\hat{R}$. Если для элемента $\hat{a} = (a_1 + R, a_2 + 2R, \dots, a_k + kR, \dots) \in \hat{R}$ выполнено $m\hat{a} = \mu(a)$ при некотором $a \in R$, то $ma_k - a \in kR$ при любом натуральном k , в частности и при $k = m$, откуда $a \in mA$, что дает сервантность $\mu(R)$ в $\hat{R}$.

Хорошо известно, что $\hat{R} \cong \prod_{p \in P} \hat{R}_p$. Учитывая, что $\hat{R}_p \cong \mathbb{Z}_{p^{m_p}}$ или $\hat{R}_p \cong \hat{\mathbb{Z}}_p$, получаем, что $\hat{R} \cong \mathbb{Z}_\chi$ при некоторой характеристике χ . Таким образом, R изоморфно некоторому сервантному подкольцу кольца $\mathbb{Z}_\chi$.

Обратно, пусть R – сервантное подкольцо кольца $\mathbb{Z}_\chi$. Поскольку $r_p(\mathbb{Z}_\chi) \leq 1$ при любом простом p и p -ранг при взятии сервантных подгрупп не возрастает, $r_p(R) \leq 1$ при всех $p \in P$. Наконец, R не содержит делимых подгрупп, так как $\mathbb{Z}_\chi$ не содержит делимых подгрупп.

Пусть R – сервантное подкольцо некоторого кольца $\mathbb{Z}_\chi$. Без потери общности можно считать, что $t(R) = t(\mathbb{Z}_\chi)$. В самом деле, если $t_p(\mathbb{Z}_\chi) \neq 0$, то $t_p(\mathbb{Z}_\chi) = \mathbb{Z}_{p^k}$, но $\mathbb{Z}_{p^k}$ не содержит нетривиальных сервантных подгрупп, следовательно, либо $t_p(R) = t_p(\mathbb{Z}_\chi)$, либо $t_p(R) = 0$. Таким образом, найдется характеристика $\varkappa$, получаемая из характеристики χ обнулением некоторых конечных p -компонент такая, что R – сервантное подкольцо в $\mathbb{Z}_\varkappa$ и $t(R) = t(\mathbb{Z}_\varkappa)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Элемент r кольца R будем называть *квазинильпотентным*, если $mr^n = 0$ для некоторых $m, n \in \mathbb{N}$. Кольцо, все элементы которого квазинильпотентны, будем называть *квазиниль-кольцом*.

Нетрудно видеть, что R является квазиниль-кольцом тогда и только тогда, когда $R/t(R)$ – ниль-кольцо или, что равносильно, когда радикал идеала $t(R)$ совпадает с кольцом R . Кроме того, если квазиниль-кольцо содержит единичный элемент, то оно обязательно периодическое.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Кольцо с единицей R называется *E -кольцом*, если канонический гомоморфизм из кольца R в кольцо эндоморфизмов его аддитивной группы $E(R^+)$, отображающий элемент $r \in R$ в эндоморфизм левого умножения на r , является изоморфизмом.

ЛЕММА 4. Пусть R – сервантное подкольцо конечного ранга кольца $\mathbb{Z}_\chi$, причем $t(R) = t(\mathbb{Z}_\chi)$, и $x \in R$, тогда $L(x) \subseteq R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g \in L(x)$, тогда $kg = k_1x + k_2x^2 + \dots + k_nx^n \in R$ при некоторых $k \in \mathbb{N}$ и $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$. Поскольку R – сервантное подкольцо в $\mathbb{Z}_\chi$ и уравнение $kx = kg$ имеет решение $x = g$ в $\mathbb{Z}_\chi$, это уравнение имеет решение и в кольце R . Но множество решений уравнения $kx = kg$ имеет вид $g + \mathbb{Z}_\chi[k]$, следовательно, $g + t \in R$ при некотором $t \in t(\mathbb{Z}_\chi) = t(R)$, а значит, $g \in R$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть R – сервантное подкольцо конечного ранга кольца $\mathbb{Z}_\chi$, тогда $R = R_0 \oplus R_1$, где R_0 – квазиниль-кольцо, а R_1 – E -кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что в кольце R содержится хотя бы один неквазинильпотентный элемент x_0 бесконечного порядка. Тогда рассмотрим кольцо $L(x_0)$. Так как $L(x_0) \subseteq R$ (в силу леммы 4 и допущений перед определением 1), то $L(x_0)$ – кольцо конечного ранга. Тогда по теореме 2 имеет место разложение

$$L(x_0) = L(x_0^{(1)}) \oplus L(x_0^{(2)}),$$

где $x_0^{(2)}$ – нильпотентный элемент, а $L(x_0^{(1)})$ – кольцо с единицей. Пусть ξ_0 – единица кольца $L(x_0^{(1)})$. Тогда ξ_0 – идемпотент кольца R , следовательно,

$$R = \xi_0 R \oplus (1 - \xi_0)R,$$

причем, очевидно, $\xi_0 R$ – кольцо с единицей.

Если кольцо $R^{(1)} = (1 - \xi_0)R$ содержит неквазинильпотентный элемент x_1 бесконечного порядка, то рассмотрим кольцо $L(x_1)$. Так как $r(L(x_1)) < \infty$, то

$$L(x_1) = L(x_1^{(1)}) \oplus L(x_1^{(2)}),$$

где $x_1^{(2)}$ – нильпотентный элемент, а $L(x_1^{(1)})$ – кольцо с единицей. Пусть ξ_1 – единица кольца $L(x_1^{(1)})$. Тогда ξ_1 – идемпотент кольца $R^{(1)}$, а значит,

$$R^{(1)} = \xi_1 R^{(1)} \oplus (1 - \xi_1)R^{(1)},$$

причем $\xi_1 R^{(1)}$ – кольцо с единицей.

И так далее, на каждом шаге (в случае наличия в кольце $R^{(i)}$ неквазинильпотентного элемента x_i бесконечного порядка) ранг $R^{(i)}$ уменьшается, а так как ранг кольца R конечный, то в итоге мы получим разложение кольца R вида

$$R = \xi_0 R \oplus \xi_1 R^{(1)} \oplus \dots \oplus \xi_k R^{(k)} \oplus (1 - \xi_k)R^{(k)}, \quad (11)$$

где $R_1 = \xi_0 R \oplus \xi_1 R^{(1)} \oplus \dots \oplus \xi_k R^{(k)}$ – кольцо с единицей, а $R_0 = (1 - \xi_k)R^{(k)}$ – квазиниль-кольцо. Наконец, хорошо известно (см., например, [7; § 6]), что всякое кольцо с 1, сервантно вкладывающееся в кольцо $\mathbb{Z}_\chi$, является E -кольцом, следовательно, R_1 – E -кольцо.

Далее подробнее рассмотрим сервантные подкольца конечного ранга колец $\mathbb{Z}_\chi$, не содержащие нильпотентных элементов бесконечного порядка. Из теоремы 4 получаем следующее

СЛЕДСТВИЕ 1. Если R – сервантное подкольцо конечного ранга кольца $\mathbb{Z}_\chi$ без нильпотентных элементов бесконечного порядка, то $R = T \oplus R_1$, где T – периодическое кольцо, а R_1 – E -кольцо.

Кольцо (группу) будем называть *существенно неразложимым* (неразложимой), если во всяком его (ее) разложении в прямую сумму двух слагаемых хотя бы одно слагаемое периодическое.

ЛЕММА 5. Пусть R – существенно неразложимое сервантное подкольцо конечного ранга кольца $\mathbb{Z}_\chi$, не содержащее нильпотентных элементов бесконечного порядка. Тогда $R/t(R)$ – неразложимое кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу следствия 1 достаточно рассмотреть случай, когда R – кольцо с единицей. Пусть $R/t(R) = \bar{R}_1 \oplus \bar{R}_2$. Предположим, что $\bar{R}_1$ содержит элемент бесконечного порядка $x + t(R)$. Рассмотрим произвольный элемент $y + t(R)$ из $\bar{R}_2$. Так как $\bar{R}_1 \bar{R}_2 = 0$, то $xy = t \in t(R)$. Пусть

$$\{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_n}\} = \{p \in P \mid t_p \neq 0\}.$$

Рассмотрим идемпотент $\varepsilon = \varepsilon_{p_{i_1}} + \varepsilon_{p_{i_2}} + \dots + \varepsilon_{p_{i_n}}$, очевидно, принадлежащий кольцу R , и положим $x_1 = (1 - \varepsilon)x$ и $y_1 = (1 - \varepsilon)y$. Заметим, что

$$x_1, y_1 \in R, \quad x_1 + t(R) = x + t(R), \quad y_1 + t(R) = y + t(R), \quad x_1 y_1 = 0.$$

Так как R не содержит нильпотентных элементов бесконечного порядка, то $L(x_1)$ – кольцо с единицей (по теореме 2). Пусть ξ – единица кольца $L(x_1)$, тогда $R = \xi R \oplus (1 - \xi)R$. Но R – существенно неразложимое кольцо, следовательно,

$(1 - \xi) \in t(R)$, а значит, $m1$ принадлежит кольцу $L(x_1)$ при некотором $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, найдутся числа $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$ такие, что

$$nm1 = m_1x_1 + m_2x_1^2 + \dots + m_kx_1^k.$$

Домножим это равенство на y_1 , получим $nty_1 = 0$. Следовательно, $y + t(R) = y_1 + t(R) = 0$ и $\bar{R}_2 = 0$.

ТЕОРЕМА 5. *Если $R \subseteq \mathbb{Z}_\chi$ – существенно неразложимое сервантное подкольцо конечного ранга, не содержащее нильпотентных элементов бесконечного порядка, то $R = L(x) \oplus T$, где $x \in \mathbb{Z}_\chi$ и $T \subseteq t(R)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $R/t(R)$ – кольцо с единицей, все p -ранги которого не превосходят 1, то $R/t(R)$ – E -кольцо без кручения конечного ранга. По лемме 5 кольцо $R/t(R)$ неразложимо. А так как его аддитивная группа является группой Мерли, то в соответствии с [8] кольцо $R/t(R)$ сильно неразложимо. Таким образом, $R/t(R)$ – сильно неразложимое E -кольцо без кручения конечного ранга. Следовательно, $R/t(R)$ – подкольцо некоторого поля алгебраических чисел F , причем $r(R/t(R)) = \dim_{\mathbb{Q}} F$ (подробнее см. [9] или [7; § 6]).

Пусть $F = \mathbb{Q}(\alpha)$, тогда $m\alpha \in R/t(R)$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Если x – прообраз элемента $m\alpha$ при естественном отображении $R \rightarrow R/t(R)$, то элементы $x, x^2, \dots, x^n$, где $n = r(R)$, образуют максимальную линейно независимую систему кольца R . Рассмотрим кольцо $L(x)$, которое по теореме 2 является кольцом с единицей. Пусть ξ – единица кольца $L(x)$. Из леммы 4 следует, что $\xi \in R$, следовательно,

$$R = \xi R \oplus (1 - \xi)R = L(x) \oplus T,$$

где 1 – единица кольца R , $\xi R = L(x)$ и $T = (1 - \xi)R$ содержится в $t(R)$ в силу существенной неразложимости кольца R .

Справедливость следующего утверждения вытекает из теоремы 5 и коммутативности кольца $E(R^+)$.

ТЕОРЕМА 6. *Если $R \subseteq \mathbb{Z}_\chi$ – сервантное подкольцо конечного ранга, не содержащее нильпотентных элементов бесконечного порядка, то*

$$R = L(x_1) \oplus \dots \oplus L(x_n) \oplus T$$

для некоторых $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}_\chi$ и $T \subseteq t(R)$, причем $\text{Hom}(L(x_i)^+, L(x_j)^+) = 0$ при всех $i \neq j$.

Подытожим главную часть работы, собрав основные результаты в виде аналога теорем Бьюмонта–Пирса. Пусть $\mathcal{L}$ – класс редуцированных ассоциативных колец конечного ранга, все p -ранги которых не превосходят 1, тогда

- 1) если $R \in \mathcal{L}$, то $R = R_0 \oplus R_1$, где R_0 – квазиниль-кольцо, а R_1 – E -кольцо;
- 2) если R – кольцо из $\mathcal{L}$, не содержащее нильпотентных элементов бесконечного порядка, то $R \cong L(x_1) \oplus \dots \oplus L(x_n) \oplus T$, где T – периодическое кольцо.

Здесь аналогом полупервичных колец (т.е. колец без нильпотентных элементов) являются кольца без нильпотентных элементов бесконечного порядка. А в качестве аналога первичных колец (неразложимых колец без нильпотентных

элементов) выступают существенно неразложимые кольца без нильпотентных элементов бесконечного порядка.

Если $L(x)$ – кольцо с единицей, то для элемента x определим его *минимальный многочлен* как целочисленный многочлен f наименьшей степени такой, что $f(x) = 0$. Учитывая результаты работы [3], мы можем сформулировать аналог 3-й теоремы Бьюмонта–Пирса следующим образом:

- 3) если R – существенно неразложимое кольцо из $\mathcal{L}$, не содержащее нильпотентных элементов бесконечного порядка, то $R \cong L(x) \oplus T$, где минимальный многочлен элемента x либо неприводим над $\mathbb{Z}$, либо имеет нулевую степень, а T – периодическое кольцо.

Заметим при этом, что если элемент $x \in \mathbb{Z}_\chi$ имеет неприводимый минимальный многочлен, то $L(x)/t(L(x))$ вкладывается в качестве подкольца в некоторое поле алгебраических чисел, а само кольцо $L(x)$ вкладывается в некоторое кольцо псевдоалгебраических чисел (подробнее см. [3; § 5]).

§ 4. Аддитивные группы колец из класса $\mathcal{L}$

В заключение уделим некоторое внимание аддитивным группам рассматриваемых колец.

При работе с аддитивными группами колец важную роль играют факторно делимые группы. В случае групп без кручения факторно делимые группы были введены Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом в упоминавшейся выше работе “Torsion free rings” [2]. Более общее определение (затрагивающее и смешанные группы) было дано А. А. Фоминым и У. Уиклессом в [10].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Группа A называется *факторно делимой*, если она не содержит периодических делимых подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что A/F – периодическая делимая группа.

Пусть A – произвольная группа. Ее $\mathbb{Z}$ -адическое пополнение $\hat{A}$ находится как обратный предел спектра

$$\pi_n^m: A/mA \rightarrow A/nA, \quad \pi_n^m(a + mA) = a + nA$$

по всем парам (m, n) натуральных чисел таких, что n делит m . Так как всякая группа A/mA является $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ -модулем, то группа $\hat{A}$ естественным образом превращается в $\hat{\mathbb{Z}}$ -модуль.

Рассмотрим естественный гомоморфизм $\mu: A \rightarrow \hat{A}$, действующий по закону

$$\mu(a) = (a + 2A, a + 3A, \dots, a + nA, \dots).$$

Для удобства образ $\mu(a)$ элемента a при $\mathbb{Z}$ -адическом пополнении μ будем обозначать через a° .

Следующая теорема принадлежит А. А. Фомину [11; лемма 4].

ТЕОРЕМА 7. Пусть A – группа с конечной максимальной линейно независимой над $\mathbb{Z}$ системой элементов $a_1, a_2, \dots, a_n$, не содержащая ненулевых периодических делимых подгрупп. Группа A является факторно делимой с базисом $a_1, a_2, \dots, a_n$ тогда и только тогда, когда элементы $a_1^\circ, a_2^\circ, \dots, a_n^\circ$ порождают модуль $\hat{A}$ над кольцом $\hat{\mathbb{Z}}$.

ЛЕММА 6. Если B – бесконечное прямое слагаемое факторно делимой группы A , то в B содержится такая конечная подгруппа K , что B/K – факторно делимая группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $A = B \oplus C$ и $a_1, a_2, \dots, a_n$ – базис факторно делимой группы A . Тогда $a_i = b_i + c_i$, где $b_i \in B$, $c_i \in C$ и $i = 1, 2, \dots, n$. Поскольку

$$A/\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle \cong B/\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle \oplus C/\langle c_1, c_2, \dots, c_n \rangle,$$

$B/\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ – делимая периодическая группа как прямое слагаемое делимой периодической группы. Пусть $\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle = F \oplus K$, где F – свободная группа конечного ранга, а K – конечная группа. Тогда

$$[B/K]/[(F \oplus K)/K] \cong B/(F \oplus K)$$

– делимая периодическая группа. Следовательно, B/K – факторно делимая группа.

Для удобства кольца из класса $\mathcal{L}$, как и в § 3, будем представлять сервантными подкольцами конечного ранга колец $\mathbb{Z}_\chi$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть R – сервантное подкольцо в $\mathbb{Z}_\chi$ и $0 < r(R) < \infty$. Кольцо R является кольцом с единицей тогда и только тогда, когда R^+ – факторно делимая группа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть R – бесконечное кольцо с единицей. Выберем в R максимальную линейно независимую над $\mathbb{Z}$ систему элементов, содержащую единицу кольца: $1, x_1, \dots, x_{n-1}$, где $n = r(R)$. Тогда

$$\langle 1, x_1, \dots, x_{n-1} \rangle_{\widehat{\mathbb{Z}}} = \langle 1 \rangle_{\widehat{\mathbb{Z}}} = \mathbb{Z}_\chi = \widehat{R}.$$

Следовательно, по теореме 7 группа R^+ факторно делимая.

Обратно, пусть R^+ – факторно делимая группа. Так как R – сервантное подкольцо конечного ранга кольца $\mathbb{Z}_\chi$, то по теореме 4 имеет место разложение $R = R_0 \oplus R_1$, где R_0 – квазиниль-кольцо, а R_1 – E -кольцо. Предположим, что R_0 – бесконечное кольцо, тогда $t(R_0) = \bigoplus_{p \in P} \mathbb{Z}_{p^{m_p}}$, причем характеристика $\varkappa = (m_p)$ содержит бесконечно много ненулевых компонент.

В силу леммы 6 в R_0^+ найдется конечная подгруппа K такая, что R_0^+/K – факторно делимая группа. Следовательно, группу R_0^+ можно представить в виде $R_0^+ = B \oplus C$, где B – факторно делимая группа, а C – конечная группа. Пусть $b_1, b_2, \dots, b_n$ – базис группы B . Тогда по теореме о вложении

$$\widehat{R_0} = \widehat{B} \oplus \widehat{C} = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle_{\widehat{\mathbb{Z}}} \oplus C = \prod_{p \in P} \mathbb{Z}_{p^{m_p}} = \mathbb{Z}_\varkappa.$$

Поскольку все b_i – квазинильпотентные элементы, $\varepsilon_p b_i$ делятся на p почти при всех простых p . Учитывая конечность группы C , получаем, что почти при всех $p \in P$ справедливо

$$t_p(R_0) = t_p(\widehat{R_0}) = t_p(\langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle_{\widehat{\mathbb{Z}}}) = p^{s_p} \mathbb{Z}_{p^{m_p}},$$

где $s_p \in \mathbb{N}$. Получили противоречие. Следовательно, R_0 – конечное кольцо, а значит, R – кольцо с единицей.

Список литературы

- [1] И. А. Александров, П. А. Крылов, “Ф. Э. Молин – ученый и педагог”, *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.*, 2011, № 3, 6–11.
- [2] R. A. Beaumont, R. S. Pierce, “Torsion free rings”, *Illinois J. Math.*, **5**:1 (1961), 61–98.
- [3] А. В. Царев, “Сервантные подкольца колец $\mathbb{Z}_X$ ”, *Матем. сб.*, **200**:10 (2009), 123–150; англ. пер.: A. V. Tsarev, “Pure subrings of the rings $\mathbb{Z}_X$ ”, *Sb. Math.*, **200**:9-10 (2009), 1537–1563.
- [4] О. И. Давыдова, “Факторно делимые абелевы группы ранга 1”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **13**:3 (2007), 25–33; англ. пер.: O. I. Davydova, “Rank-1 quotient divisible groups”, *J. Math. Sci.*, **154**:3 (2008), 295–300.
- [5] Е. А. Тимошенко, “О базовых полях csp-колец”, *Алгебра и логика*, **49**:4 (2010), 555–565; англ. пер.: E. A. Timoshenko, “Base fields of csp-rings”, *Algebra and Logic*, **49**:4 (2010), 378–385.
- [6] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, т. 1, 2, Мир, М., 1974, 1977, 335 с., 416 с.; пер. с англ.: L. Fuchs, *Infinite abelian groups*, v. I, II, Pure Appl. Math., **36**, Academic Press, New York–London, 1970, 1973, xi+290 pp., ix+363 pp.
- [7] П. А. Крылов, А. В. Михалев, А. А. Туганбаев, *Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов*, Факториал Пресс, М., 2006, 512 с.
- [8] C. E. Murley, “The classification of certain classes of torsion free Abelian groups”, *Pacific J. Math.*, **40**:3 (1972), 647–665.
- [9] R. A. Bowshell, P. Schultz, “Unital rings whose additive endomorphisms commute”, *Math. Ann.*, **228**:3 (1977), 197–214.
- [10] A. A. Fomin, W. Wickless, “Quotient divisible abelian groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **126**:1 (1998), 45–52.
- [11] А. А. Фомин, “Категория матриц, представляющая две категории абелевых групп”, *Фундамент. и прикл. матем.*, **13**:3 (2007), 223–244; англ. пер.: A. A. Fomin, “A category of matrices representing two categories of Abelian groups”, *J. Math. Sci.*, **154**:3 (2008), 430–445.

Ольга Сергеевна Гусева

(Olga S. Guseva)

Московский педагогический государственный
университет

E-mail: Guseva-01ga2007@yandex.ru

Поступила в редакцию

31.01.2013

Андрей Валерьевич Царев

(Andrei V. Tsarev)

Московский педагогический государственный
университет

E-mail: an-tsarev@yandex.ru