Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Галаев, Конформно плоские лоренцевы многообразия со специальными группами голономии, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 9, 29–50

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8219>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 17:21:51

УДК 514.764.214+514.764.223

А. С. Галаев

Конформно плоские лоренцевы многообразия со специальными группами голономии

Получена локальная классификация конформно плоских лоренцевых многообразий со специальными группами голономии. Соответствующие локальные метрики представляют собой некоторые расширения римановых метрик постоянной секционной кривизны до метрик Волкера.

Библиография: 28 названий.

Ключевые слова: лоренцево многообразие, специальная группа голономии, многообразие Волкера, конформно плоское многообразие, теория гравитации Нордстрёма.

DOI: 10.4213/sm8219

§ 1. Введение и основные результаты

Известно (см. [1]), что либо конформно плоское риманово многообразие является произведением двух пространств постоянной секционной кривизны или произведением пространства постоянной секционной кривизны и интервала, либо ограниченная группа голономии этого многообразия совпадает с компонентой связности единицы ортогональной группы. Последнее условие представляет собой наиболее общую ситуацию; среди разнообразных многообразий, удовлетворяющих этому условию, можно выделить только пространства постоянной секционной кривизны.

Говорят, что связная группа голономии неразложимого псевдориманова многообразия является *специальной*, если она отлична от связной компоненты единицы псевдоортогональной группы (см. [2]). В этом случае группа голономии определяет специальную геометрию на многообразии. Например, псевдориманово многообразие сигнатуры (r, s) является псевдокэлеровым тогда и только тогда, когда его группа голономии содержится в $U(r/2, s/2)$. Ясно, что не существует конформно плоских римановых многообразий со специальными группами голономии.

В случае псевдоримановых многообразий группа голономии может быть слабо неприводимой (это означает, что она не сохраняет никакое невырожденное собственное векторное подпространство касательного пространства) и в то же время не являющейся неприводимой, т.е. она может сохранять вырожденное векторное подпространство касательного пространства.

Работа выполнена при поддержке гранта CZ.1.07/2.3.00/20.0003.

Главным результатом настоящей статьи является полное локальное описание конформно плоских лоренцевых многообразий (M, g) со слабо неприводимыми, не являющимися неприводимыми группами голономии; такие группы являются единственными специальными группами голономии лоренцевых многообразий. Пусть $\dim M = n + 2 \geq 4$. Алгебра голономии, т.е. алгебра Ли группы голономии, $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, n + 1)$ такого многообразия сохраняет изотропную прямую касательного пространства, которое отождествляется с пространством Минковского $\mathbb{R}^{1, n+1}$. Следовательно, $\mathfrak{g}$ содержится в максимальной подалгебре алгебры $\mathfrak{so}(1, n + 1)$, сохраняющей изотропную прямую. Эта алгебра обозначается через $\mathfrak{sim}(n)$, и она допускает следующее разложение:

$$\mathfrak{sim}(n) = (\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(n)) \ltimes \mathbb{R}^n.$$

Классификация алгебр голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$ лоренцевых многообразий изложена в [3]. Всякое многообразие (M, g) с такой алгеброй голономии (локально) допускает распределение ℓ изотропных прямых. Эти многообразия называются *многообразиями Волкера* (см. [4]). На всяком таком многообразии (M, g) существуют локальные координаты $v, x^1, \dots, x^n, u$ такие, что метрика g имеет вид

$$g = 2 dv du + h + 2A du + H(du)^2, \quad (1.1)$$

где $h = h_{ij}(x^1, \dots, x^n, u) dx^i dx^j$ – семейство римановых метрик, зависящих от параметра u , $A = A_i(x^1, \dots, x^n, u) dx^i$ – семейство 1-форм, зависящих от u , а H – локальная функция на M . Векторное поле ∂_v определяет параллельное распределение изотропных прямых. Важный класс многообразий Волкера представляют плоские гравитационные волны, которые локально определяются с помощью (1.1) при $A = 0$, $h = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2$ и $\partial_v H = 0$ (см. [5]). Плоские гравитационные волны – это в точности многообразия Волкера с коммутативными алгебрами голономии $\mathfrak{g} \subset \mathbb{R}^n \subset \mathfrak{sim}(n)$.

Мы используем правило суммирования Эйнштейна для индексов $i, j, k = 1, \dots, n$. Введем обозначение $\dot{f} = \partial_u f$ для функций f .

На многообразии Волкера (M, g) определим каноническую функцию λ исходя из равенства

$$\text{Ric } p = \lambda p,$$

где p – произвольное локальное векторное поле, касательное к распределению ℓ , а Ric – оператор Риччи. Если метрика g записана в виде (1.1), то $\lambda = (1/2)\partial_v^2 H$ и скалярная кривизна метрики g удовлетворяет равенству

$$s = 2\lambda + s_0,$$

где s_0 – скалярная кривизна метрики h . Вид конформно плоской метрики Волкера будет зависеть от обращения в нуль функции λ . В общем случае получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть (M, g) – конформно плоское многообразие Волкера (т.е. с нулевым тензором кривизны Вейля) размерности $n + 2 \geq 4$.

Тогда в некоторой окрестности каждой точки M существуют координаты $v, x^1, \dots, x^n$, и такие, что

$$g = 2 dv du + \Psi \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + 2A du + (\lambda(u)v^2 + vH_1 + H_0)(du)^2,$$

где

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{4}{(1 - \lambda(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2)^2}, \\ A &= A_i dx^i, \quad A_i = \Psi \left(-4C_k(u)x^k x^i + 2C_i(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2 \right), \\ H_1 &= -4C_k(u)x^k \sqrt{\Psi} - \partial_u \ln \Psi + K(u), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &H_0(x^1, \dots, x^n, u) \\ &= \begin{cases} \frac{4}{\lambda^2(u)} \Psi \sum_{k=1}^n C_k^2(u) + \sqrt{\Psi} \left(a(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2 + D_k(u)x^k + D(u) \right), & \text{если } \lambda(u) \neq 0, \\ 16 \left(\sum_{k=1}^n (x^k)^2 \right)^2 \sum_{k=1}^n C_k^2(u) + \tilde{a}(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2 + \tilde{D}_k(u)x^k + \tilde{D}(u), & \text{если } \lambda(u) = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

для некоторых функций $\lambda(u)$, $a(u)$, $\tilde{a}(u)$, $C_i(u)$, $D_i(u)$, $D(u)$, $\tilde{D}_i(u)$, $\tilde{D}(u)$.

Скалярная кривизна метрики g равна $-(n-2)(n+1)\lambda(u)$.

Если функция λ равна нулю на некотором открытом множестве или не обращается в нуль, то метрика, полученная выше, может быть упрощена.

ТЕОРЕМА 2. Пусть (M, g) – конформно плоское многообразие Волкера размерности $n+2 \geq 4$.

1) Если функция λ не равна нулю в некоторой точке многообразия, то в некоторой окрестности этой точки существуют координаты $v, x^1, \dots, x^n$, и такие, что

$$g = 2 dv du + \Psi \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + (\lambda(u)v^2 + vH_1 + H_0)(du)^2,$$

где

$$\begin{aligned} \Psi &= \frac{4}{(1 - \lambda(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2)^2}, \\ H_1 &= -\partial_u \ln \Psi, \quad H_0 = \sqrt{\Psi} \left(a(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2 + D_k(u)x^k + D(u) \right). \end{aligned}$$

2) Если $\lambda \equiv 0$ в некоторой окрестности некоторой точки многообразия, то в окрестности этой точки существуют координаты $v, x^1, \dots, x^n$, и такие, что

$$g = 2 dv du + \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + 2A du + (vH_1 + H_0)(du)^2,$$

где

$$\begin{aligned} A &= A_i dx^i, & A_i &= C_i(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2, & H_1 &= -2C_k(u)x^k, \\ H_0 &= \sum_{k=1}^n (x^k)^2 \left(\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n (x^k)^2 \sum_{k=1}^n C_k^2(u) - (C_k(u)x^k)^2 + \dot{C}_k(u)x^k + a(u) \right) \\ &\quad + D_k(u)x^k + D(u). \end{aligned}$$

В частности, если все C_i тождественно равны нулю, то метрика может быть записана в виде

$$g = 2 dv du + \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + a(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2 (du)^2. \quad (1.2)$$

Таким образом, теорема 2 дает локальный вид конформно плоской метрики Волкера в окрестностях точек, где функция λ не обращается в нуль или тождественно равна нулю. Такие точки представляют собой всюду плотное подмножество многообразия. Теорема 1 описывает также метрику в окрестностях тех точек, где функция λ обращается в нуль, но не является локально нулевой, например, в окрестностях изолированных нулевых точек функции λ .

Далее мы находим алгебры голономии полученных метрик и проверяем, какие из метрик разложимы.

ТЕОРЕМА 3. Пусть (M, g) – многообразие из теоремы 1.

1) Многообразие (M, g) локально неразложимо тогда и только тогда, когда существует система координат, удовлетворяющая одному из следующих условий:

- (i) $\dot{\lambda} \neq 0$;
- (ii) $\dot{\lambda} \equiv 0$, $\lambda \neq 0$, т.е. g может быть записана, как в части 1) теоремы 2, и $\sum_{k=1}^n D_k^2 + (a + \lambda D)^2 \neq 0$;
- (iii) $\lambda \equiv 0$, т.е. g может быть записана, как в части 2) теоремы 2, и $\sum_{k=1}^n C_k^2 + a^2 \neq 0$.

В противном случае метрика может быть записана в виде

$$g = \Psi \sum_{k=1}^n (dx^k)^2 + 2 dv du + \lambda v^2 (du)^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Алгебра голономии этой метрики тривиальна тогда и только тогда, когда $\lambda = 0$. Если $\lambda \neq 0$, то алгебра голономии изоморфна $\mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{so}(1, 1)$.

2) Предположим, что многообразие (M, g) локально неразложимо.

Тогда его алгебра изоморфна $\mathbb{R}^n \subset \mathfrak{sim}(n)$ тогда и только тогда, когда $\lambda^2 + \sum_{k=1}^n C_k^2 \equiv 0$ для каждой системы координат; в этом случае (M, g) – плоская

гравитационная волна, а g дана формулой (1.2). Если для некоторой системы координат $\Lambda^2 + \sum_{k=1}^n C_k^2 \neq 0$, то алгебра голономии изоморфна $\mathfrak{sim}(n)$.

Статья построена следующим образом. В § 2 мы распространяем результат Куриты (см. [1]) на случай псевдоримановых многообразий. В § 3 приводятся выражения для тензора кривизны и конформного тензора кривизны Вейля W метрики Волкера. По нашему мнению, подобные выражения получены впервые. Доказательствам основных теорем посвящены §§ 4–6. Мы записываем уравнение $W = 0$ в виде системы дифференциальных уравнений с частными производными и находим подходящие системы координат, так что возможно получить полное решение этой системы. В § 7 найден оператор Риччи полученных метрик.

В § 8 рассмотрен случай многообразий размерности 4. Возможные алгебры голономии конформно плоских лоренцевых многообразий размерности 4 найдены в [6]. Метрика (1.2) размерности 4 получена в [7]. В статье [6] была сформулирована проблема построения примера конформно плоской метрики с алгеброй голономии $\mathfrak{sim}(2)$ (эта алгебра в [6] обозначена через R_{14}). Попытка построить такую метрику была сделана в [8]. Мы показываем, что метрика, построенная там, в действительности является разложимой, а ее алгебра голономии совпадает с $\mathfrak{so}(1, 1) \oplus \mathfrak{so}(2)$. Таким образом, в настоящей статье мы впервые получаем конформно плоскую метрику с алгеброй голономии $\mathfrak{sim}(n)$ и, более того, находим все такие метрики.

Полевое уравнение теории гравитации Нордстрёма, которая была создана до теории Эйнштейна, имеет вид

$$W = 0, \quad s = 0$$

(см. [9]–[11]). Все метрики из теоремы 1 размерности 4 и метрики из части 2) теоремы 2 для больших размерностей дают примеры решения этих уравнений. Таким образом, мы нашли все решения теории гравитации Нордстрёма с алгебрами голономии, содержащимися в $\mathfrak{sim}(n)$. Аналогично, уравнение Эйнштейна на лоренцевых многообразиях с такими алгебрами голономии изучалось в [12]. В этом случае невозможно получить полное решение, однако примеры решений имеют интересные физические интерпретации (см. [12]).

Важно отметить, что односвязные конформно плоские лоренцевы спинорные многообразия допускают пространства конформных спиноров Киллинга максимально возможной размерности (см. [13]).

Было бы интересно получить примеры конформно плоских лоренцевых многообразий, имеющих какие-либо глобальные геометрические свойства, например, важными являются конструкции глобально гиперболических лоренцевых многообразий со специальными группами голономии (см. [14]).

Проективная эквивалентность четырехмерных конформно плоских лоренцевых метрик со специальными алгебрами голономии изучалась недавно в [15]. Имеется много интересных работ о конформно плоских (псевдо)римановых, в частности лоренцевых, многообразиях. Отметим лишь некоторые из них: [16]–[22].

Результаты настоящей статьи были использованы в [23] для классификации лоренцевых многообразий, удовлетворяющих условию $\nabla^2 R = 0$.

§ 2. Разложимость конформно плоских псевдоримановых многообразий

Курита в [1] доказал следующую теорему для случая римановых многообразий.

ТЕОРЕМА 4. Пусть (M, g) – n -мерное конформно плоское риманово многообразие. Тогда его локальная ограниченная группа голономии H_x ($x \in M$) в общем случае совпадает с $SO(n)$.

Если $H_x \neq SO(n)$, то для некоторой координатной окрестности U точки x имеет место одно из следующих утверждений:

- 1) H_x тривиально, а метрика плоская в U ;
- 2) $H_x = SO(k) \times SO(n - k)$ и U – прямое произведение некоторого k -мерного многообразия постоянной секционной кривизны K и некоторого $(n - k)$ -мерного многообразия постоянной секционной кривизны $-K$ ($K \neq 0$);
- 3) $H_x = SO(n - 1)$ и U – прямое произведение прямой (или интервала) и некоторого $(n - 1)$ -мерного многообразия постоянной секционной кривизны.

Мы обобщаем эту теорему для случая псевдоримановых многообразий и также даем более точную ее формулировку.

ТЕОРЕМА 5. Пусть (M, g) – конформно плоское псевдориманово многообразие сигнатуры (r, s) с ограниченной группой голономии $\text{Hol}^0(M, g)$.

Если (M, g) не является плоским, то имеет место одно из следующих утверждений:

- 1) $\text{Hol}^0(M, g) = SO(r, s)$;
- 2) $\text{Hol}^0(M, g)$ является слабо неприводимой и не является неприводимой (в частности, она сохраняет некоторое вырожденное подпространство касательного пространства);
- 3) $\text{Hol}^0(M, g) = SO(r_1, s_1) \times SO(r - r_1, s - s_1)$ и каждая точка $x \in M$ имеет окрестность, которая либо плоская, либо представляет собой произведение некоторого псевдориманова многообразия постоянной секционной кривизны K и сигнатуры (r_1, s_1) и некоторого псевдориманова многообразия постоянной секционной кривизны $-K$ ($K \neq 0$) и сигнатуры $(r - r_1, s - s_1)$;
- 4) $\text{Hol}^0(M, g) = SO(r - 1, s)$ (соответственно $\text{Hol}^0(M, g) = SO(r, s - 1)$) и каждая точка $x \in M$ имеет окрестность, которая либо является плоской, либо представляет собой произведение псевдориманова многообразия постоянной секционной кривизны и сигнатуры $(r - 1, s)$ (соответственно $(r, s - 1)$) и пространства $(L, -(dt)^2)$ (соответственно $(L, (dt)^2)$), где L – прямая или интервал.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть (M, g) – псевдориманово многообразие сигнатуры (r, s) и размерности $d = r + s$. Векторное расслоение $\mathfrak{so}(TM)$ кососимметрических эндоморфизмов касательного расслоения TM можно отождествить с пространством бивекторов $\wedge^2 TM$ таким образом, что

$$(X \wedge Y)Z = g(X, Z)Y - g(Y, Z)X$$

для всех векторных полей X, Y, Z на M . Тензор Вейля W псевдориманова многообразия (M, g) определяется равенством

$$W = R + R_L, \quad (2.1)$$

где тензор R_L имеет вид

$$\begin{aligned} R_L(X, Y) &= LX \wedge Y + X \wedge LY, \\ L &= \frac{1}{d-2} \left(\text{Ric} - \frac{s}{2(d-1)} \text{id} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

– тензор Скоутена, а s – скалярная кривизна.

Предположим, что ограниченная группа голономии $\text{Hol}^0(M, g)$ не является слабо неприводимой. Теорема Ву о разложении (см. [24]) утверждает, что каждая точка многообразия M имеет окрестность U такую, что $(U, g|_U)$ является произведением

$$(M_1 \times M_2, g_1 + g_2)$$

двух псевдоримановых многообразий (M_1, g_1) и (M_2, g_2) . Пусть d_1 и d_2 – размерности этих многообразий. Для тензоров кривизны, операторов Риччи и скалярных кривизн имеем

$$R = R_1 + R_2, \quad \text{Ric} = \text{Ric}_1 + \text{Ric}_2, \quad s = s_1 + s_2.$$

Сначала предположим, что $d \geq 4$. В этом случае $W = 0$ и

$$R_1 + R_2 = -R_L. \quad (2.3)$$

Предположим, что $d_1 \geq d_2$ и $d_1 \geq 2$. Тензор кривизны R_1 может быть записан в виде $R_1 = W_1 - R_{L_1}$. Рассматривая равенство (2.3), ограниченное на TM_1 , мы получаем $W_1 = 0$ и

$$\frac{1}{d_1-2} \left(\text{Ric}_1 - \frac{s_1}{2(d_1-1)} \text{id} \right) = \frac{1}{d-2} \left(\text{Ric}_1 - \frac{s_1+s_2}{2(d-1)} \text{id} \right). \quad (2.4)$$

Если $d_2 \geq 2$, то, взяв след в (2.4), получим

$$\frac{s_1}{d_1(d_1-1)} = -\frac{s_2}{d_2(d_2-1)}.$$

Поскольку s_1 – функция на M_1 , а s_2 – функция на M_2 , то обе функции должны быть постоянными. Подставляя последнее равенство в (2.4), получаем

$$\text{Ric}_1 = \frac{s_1}{d_1} \text{id}. \quad (2.5)$$

Далее,

$$R_1(X, Y) = \frac{s_1}{d_1(d_1-1)} X \wedge Y. \quad (2.6)$$

То же самое верно для второго многообразия. Для секционных кривизн получаем

$$k_1 = \frac{s_1}{d_1(d_1-1)} = -\frac{s_2}{d_2(d_2-1)} = -k_2.$$

Если $d_2 = 1$, то (2.4) эквивалентно (2.5), и это влечет (2.6). Из теоремы Шура следует, что k_1 – постоянная. Если $d_1 = 2$, то тензор кривизны R_1 удовлетворяет $R_1(X, Y) = fX \wedge Y$ для некоторой функции f на M_1 . Доказательство в этом случае такое же, как и выше.

Если $d = 3$, то $d_1 = 2$ и $d_2 = 1$. Имеем $R = R_1$ и $R_1(X, Y) = fX \wedge Y$ для некоторой функции f и M_1 . В этом случае (M, g) конформно плоское тогда и только тогда, когда тензор Коттона C , определяемый равенством

$$C(X, Y, Z) = g((\nabla_Z L)X, Y) - g((\nabla_Y L)X, Z),$$

равен нулю. Это влечет, что функция f постоянна, т.е. (M_1, g_1) – многообразие постоянной секционной кривизны.

Остается доказать, что если $\text{Hol}^0(M, g)$ неприводима, то она совпадает с $\text{SO}(r, s)$. Предположим, что $\text{Hol}^0(M, g)$ неприводима и отлична от $\text{SO}(r, s)$ и $\text{U}(r/2, s/2)$. Тогда рассматриваемое многообразие является многообразием Эйнштейна (см. [2]). Поскольку (M, g) является также конформно плоским, то (M, g) – многообразие постоянной секционной кривизны, и его связанная группа голономии либо тривиальна, либо совпадает с $\text{SO}(r, s)$, т.е. мы получаем противоречие. Известно, что если псевдокэлерово многообразие является конформно плоским, то оно является плоским (см. [25]), следовательно, $\text{Hol}^0(M, g) \neq \text{U}(r/2, s/2)$. Это доказывает теорему 5.

§ 3. Тензор кривизны и тензор конформной кривизны Вейля метрик Волкера

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется некоторая информация о тензоре кривизны метрики Волкера (1.1). Для фиксированных координат $v, x^1, \dots, x^n$, и рассмотрим поле реперов

$$p = \partial_v, \quad X_i = \partial_i - A_i \partial_v, \quad q = \partial_u - \frac{1}{2}H \partial_v.$$

Рассмотрим распределение E , порожденное векторными полями $X_1, \dots, X_n$. Слои этого распределения можно отождествить с касательными пространствами римановых многообразий с римановыми метриками $h(u)$. Пусть R_0 – тензор, соответствующий семейству тензоров кривизны метрик $h(u)$ при этом отождествлении. Аналогично, обозначим через $\text{Ric}(h)$ соответствующий эндоморфизм Риччи, действующий на сечениях распределения E .

Из результатов работы [26] следует, что тензор кривизны R метрики g может быть записан в виде

$$R(p, q) = -\lambda p \wedge q - p \wedge \vec{v}, \quad (3.1)$$

$$R(X, Y) = R_0(X, Y) - p \wedge (P(Y)X - P(X)Y), \quad (3.2)$$

$$R(X, q) = -g(\vec{v}, X)p \wedge q + P(X) - p \wedge T(X), \quad R(p, X) = 0 \quad (3.3)$$

для всех $X, Y \in \Gamma(E)$. Здесь λ – функция, $\vec{v} \in \Gamma(E)$, $T \in \Gamma(\text{End}(E))$ – симметрическое поле эндоморфизмов, $T^* = T$, $R_0 = R(h)$, а тензор $P \in \Gamma(E^* \otimes \mathfrak{so}(E))$ удовлетворяет условию

$$g(P(X)Y, Z) + g(P(Y)Z, X) + g(P(Z)X, Y) = 0 \quad \text{для всех } X, Y, Z \in \Gamma(E).$$

Эти тензоры могут быть выражены в терминах коэффициентов метрики (1.1). Пусть $P(X_k)X_j = P_{jk}^i X_i$ и $T(X_j) = \sum_i T_{ij} X_j$. Тогда

$$h_{il} P_{jk}^l = g(R(X_k, q)X_j, X_i), \quad T_{ij} = -g(R(X_i, q)q, X_j).$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\lambda = \frac{1}{2} \partial_v^2 H, \quad \vec{v} = \frac{1}{2} (\partial_i \partial_v H - A_i \partial_v^2 H) h^{ij} X_j, \quad (3.4)$$

$$h_{il} P_{jk}^l = -\frac{1}{2} \nabla_k F_{ij} + \frac{1}{2} \nabla_k \dot{h}_{ij} - \dot{\Gamma}_{kj}^l h_{li}, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \frac{1}{2} \nabla_i \nabla_j H - \frac{1}{4} (F_{ik} + \dot{h}_{ik})(F_{jl} + \dot{h}_{jl}) h^{kl} - \frac{1}{4} (\partial_v H)(\nabla_i A_j + \nabla_j A_i) \\ &\quad - \frac{1}{2} (A_i \partial_j \partial_v H + A_j \partial_i \partial_v H) - \frac{1}{2} (\nabla_i \dot{A}_j + \nabla_j \dot{A}_i) \\ &\quad + \frac{1}{2} A_i A_j \partial_v^2 H + \frac{1}{2} \ddot{h}_{ij} + \frac{1}{4} \dot{h}_{ij} \partial_v^2 H, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$F = dA, \quad F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i,$$

– дифференциал 1-формы A , а ковариантные производные берутся относительно метрики h . В случае, когда h , A и H не зависят от u , тензор кривизны метрики (1.1) найден в [12].

Оператор Риччи имеет следующий вид:

$$\text{Ric}(p) = \lambda p, \quad \text{Ric}(X) = -g(X, \widetilde{\text{Ric}}P - \vec{v})p + \text{Ric}(h)(X), \quad (3.7)$$

$$\text{Ric}(q) = -(\text{tr } T)p - \widetilde{\text{Ric}}(P) + \vec{v} + \lambda q, \quad (3.8)$$

где $\widetilde{\text{Ric}}P = h^{ij} P(X_i)X_j$ (см. [27]). Для скалярной кривизны имеем $s = 2\lambda + s_0$, где s_0 – скалярная кривизна метрики h . Теперь можно вычислить тензор R_L :

$$R_L(p, X) = \frac{1}{n} p \wedge \left(\text{Ric}(h) + \frac{(n-1)\lambda - s_0}{n+1} \text{id} \right) X, \quad (3.9)$$

$$R_L(p, q) = \frac{1}{n} \left(\frac{2n\lambda - s_0}{n+1} p \wedge q + p \wedge (\vec{v} - \widetilde{\text{Ric}}P) \right), \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} R_L(X, Y) &= \frac{1}{n} \left(p \wedge (g(X, \vec{v} - \widetilde{\text{Ric}}P)Y - g(Y, \vec{v} - \widetilde{\text{Ric}}P)X) \right. \\ &\quad \left. + \left(\text{Ric}(h) - \frac{s}{2(n+1)} \right) X \wedge Y + X \wedge \left(\text{Ric}(h) - \frac{s}{2(n+1)} \right) Y \right), \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} R_L(X, q) &= \frac{1}{n} \left((\text{tr } T)p \wedge X + g(X, \vec{v} - \widetilde{\text{Ric}}P)p \wedge q + X \wedge (\vec{v} - \widetilde{\text{Ric}}P) \right. \\ &\quad \left. + \left(\text{Ric}(h) + \frac{(n-1)\lambda - s_0}{n+1} \text{id} \right) X \wedge q \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Тензор Вейля W можно вычислить, используя это и (2.1).

§ 4. Доказательство теоремы 1

Предположим, что (M, g) – многообразие Волкера, т.е. его алгебра голономии содержится в $\mathfrak{sim}(n)$. Локальный вид метрики g дан формулой (1.1). Предположим, что метрика g конформно плоская, т.е. $W = 0$.

ЛЕММА 1. Уравнение $W = 0$ эквивалентно следующей системе уравнений:

$$s_0 = -n(n-1)\lambda, \quad R_0 = -\frac{1}{2}\lambda R_{\text{id}}, \quad P(X) = \vec{v} \wedge X, \quad T = f \text{id}_E, \quad (4.1)$$

где X – произвольное сечение E , а f – некоторая функция. В частности, условие $W = 0$ влечет $\widetilde{\text{Ric}}P = -(n-1)\vec{v}$ и равенство нулю тензора Вейля W_0 метрики h .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $W = 0$. Тогда $R = -R_L$. Из (3.3) и (3.9) следует равенство $\text{Ric}(h) = -(((n-1)\lambda - s_0)/(n+1)) \text{id}$. Вычислив след, получим $s_0 = -n(n-1)\lambda$. Следовательно, $\text{Ric}(h) = (s_0/n) \text{id}$, т.е. метрики h эйнштейновы, и имеем

$$R_0 = W_0 - \frac{s_0}{2n(n-1)} R_{\text{id}}.$$

Из (3.1) и (3.11) следует

$$R_0 + \frac{s_0}{2n(n-1)} R_{\text{id}} = 0.$$

Закljučаем, что $W_0 = 0$. Используя (3.3) и (3.12), получим

$$P(X) = -\frac{1}{n} X \wedge (\vec{v} - \widetilde{\text{Ric}}P).$$

Применяя $\widetilde{\text{Ric}}$, получаем $\widetilde{\text{Ric}}P = -(n-1)\vec{v}$. Следовательно, $P(X) = \vec{v} \wedge X$. Равенства (3.3) и (3.12) влекут

$$T(X) = \frac{1}{n} (\text{tr } T) X,$$

т.е. $T = f \text{id}$ для некоторой функции f . Обратно, (4.1) влечет равенство $W = 0$.

Поскольку h не зависит от v , имеем $\partial_v \lambda = 0$. Из (3.4) следует, что

$$H = \lambda v^2 + H_1 v + H_0, \quad \partial_v H_1 = \partial_v H_0 = 0.$$

Из (3.5) вытекает, что компоненты тензора P не зависят от координаты v . Отсюда с учетом уравнения $P(X) = \vec{v} \wedge X$ и (3.4) получаем $\partial_i \partial_v^2 H = 0$, т.е. $\partial_i \lambda = 0$; следовательно, s_0 и λ – функции, зависящие только от u . Заметим, что для $n \geq 3$ это утверждение следует также из равенства $\text{Ric}(h) = (s_0/2) \text{id}$. Итак, каждая метрика в семействе $h(u)$ имеет постоянную секционную кривизну. Существует преобразование $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^k, u)$ координат $x^1, \dots, x^n$, зависящее от параметра u , такое, что относительно новых координат метрика h имеет вид

$$h = \Psi \sum_{k=1}^n (dx^k)^2, \quad \Psi = \frac{4}{(1 - \lambda(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2)^2}.$$

Преобразование $\tilde{v} = v$, $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^k, u)$, $\tilde{u} = u$ позволяет в дальнейшем предполагать, что h в (1.1) имеет только что полученный вид.

Рассмотрим уравнение $T_{ij} = f\delta_{ij}$. Равенство (3.6) влечет $f = vf_1 + f_0$, $\partial_v f_1 = \partial_v f = 0$. Применяя ∂_v к $T_{ij} = f\delta_{ij}$, получим уравнения

$$f_1\delta_{ij} = \frac{1}{2}\nabla_i\nabla_j H_1 - \lambda(u)\frac{1}{2}(\nabla_i A_j + \nabla_j A_i).$$

Эти уравнения можно записать в виде

$$\nabla_i Z_i = \nabla_j Z_j, \quad \nabla_i Z_j + \nabla_j Z_i = 0, \quad i \neq j, \quad (4.2)$$

где

$$Z_i = \lambda A_i - \frac{1}{2}\partial_i H_1. \quad (4.3)$$

Заметим, что $\vec{v} = -Z_i h^{ij} X_j$. Символы Кристоффеля метрики h имеют следующий вид:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2\Psi}(\delta_{kj}\partial_i\Psi + \delta_{ki}\partial_j\Psi - \delta_{ij}\partial_k\Psi).$$

Используя это, полученные выше уравнения можно записать в виде

$$\partial_i\left(\frac{Z_i}{\Psi}\right) = \partial_j\left(\frac{Z_j}{\Psi}\right), \quad \partial_i\left(\frac{Z_j}{\Psi}\right) + \partial_j\left(\frac{Z_i}{\Psi}\right) = 0, \quad i \neq j. \quad (4.4)$$

Рассмотрим отдельно случаи $n = 2$ и $n \geq 3$.

Случай $n \geq 3$.

ЛЕММА 2. Если $n \geq 3$, то общее решение системы

$$\partial_i f_i = \partial_j f_j, \quad \partial_i f_j + \partial_j f_i = 0, \quad i \neq j,$$

имеет вид

$$f_i = x^i B_k x^k - \frac{1}{2} B_i \sum_{k=1}^n (x^k)^2 + d_{ik} x^k + c x^i + c_i,$$

где $B_i, c_i, c, d_{ik} \in \mathbb{R}$, $d_{ki} = -d_{ik}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть индексы i, j, k попарно различны; тогда

$$\partial_i \partial_j f_k = -\partial_i \partial_k f_j = \partial_k \partial_j f_i = -\partial_i \partial_j f_k,$$

т.е. $\partial_i \partial_j f_k = 0$. Это показывает, что $f_k = \sum_{i \neq k} C_{ki}(x^i, x^k)$. Теперь эти функции нетрудно найти.

Из леммы следует, что

$$Z_i = \Psi \left(x^i B_k(u) x^k - \frac{1}{2} B_i(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2 + d_{ik}(u) x^k + c(u) x^i + c_i(u) \right), \quad (4.5)$$

где $B_i(u), c_i(u), c(u), d_{ik}(u)$ — функции переменной u и $d_{ki}(u) = -d_{ik}(u)$.

Система уравнений из леммы 2 похожа на систему уравнений Киллинга для 1-форм

$$\nabla_i Z_j + \nabla_j Z_i = 0.$$

Докажем следующую лемму.

ЛЕММА 3. Каждое киллингово векторное поле в пространстве с метрикой $\Psi \sum_{k=1}^n (dx^k)^2$ имеет вид

$$X = X^i \partial_i, \quad X^i = f_{ik} x^k - 2\lambda x^i c_k x^k + \lambda c_i \sum_{k=1}^n (x^k)^2 + c_i,$$

где $b_i, f_{ik} \in \mathbb{R}$, $f_{ki} = -f_{ik}$.

В зависимости от значения λ упомянутая выше метрика является метрикой одного из следующих пространств: сферы, пространства Лобачевского, евклидова пространства. Соответственно алгебры Ли $\mathfrak{k}$ киллинговых векторных полей этих пространств изоморфны $\mathfrak{so}(n+1)$, $\mathfrak{so}(1, n)$, $\mathfrak{iso}(\mathbb{R}^n)$. Симметрическое разложение каждой алгебры Ли $\mathfrak{k}$ имеет вид $\mathfrak{k} = \mathfrak{so}(n) + \mathbb{R}^n$. Векторные поля, определяемые числами f_{ik} , соответствуют элементам $\mathfrak{so}(n)$, векторные поля, определяемые числами c_i , соответствуют элементам $\mathbb{R}^n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Рассмотрим киллингову 1-форму $Z_i = h_{ij} X^j$. Кроме уравнений (4.2) она удовлетворяет уравнениям $\nabla_i Z_i = 0$. Эти уравнения имеют вид

$$\partial_i \left(\frac{Z_i}{\Psi} \right) = -\frac{1}{2\Psi^2} \sum_{k=1}^n Z_k \partial_k \Psi.$$

Это влечет $Z_i = \Psi f_i$, где функции f_i такие, как в лемме 2, с $c = 0$ и $B_k = -2\lambda c_k$. Лемма верна.

Из (4.3) следует

$$\begin{aligned} \lambda F_{ij} &= \partial_i Z_j - \partial_j Z_i \\ &= \Psi^{3/2} ((B_i - 2\lambda C_i) x^j - (B_j - 2\lambda C_j) x^i + 2\lambda x^k (d_{jk} x^i - d_{ik} x^j)) - 2\Psi d_{ij}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Это влечет равенство $B_i(u) = \lambda(u) \tilde{B}_i(u)$ для некоторой функции $\tilde{B}_i(u)$.

Из (3.5) и (3.4) следует, что уравнение $P(X) = \vec{v} \wedge X$ имеет вид

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \nabla_k F_{ij} - \delta_{ik} \frac{\Psi}{2} \partial_u \partial_j \ln \Psi + \delta_{jk} \frac{\Psi}{2} \partial_u \partial_i \ln \Psi \\ & = \Psi \left(\frac{1}{2} \partial_j H_1 - \lambda A_j \right) \delta_{ki} - \Psi \left(\frac{1}{2} \partial_i H_1 - \lambda A_i \right) \delta_{kj}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Если i, j, k попарно различны, то

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_k F_{ij} = \partial_k F_{ij} - \frac{1}{\Psi} F_{ij} \partial_k \Psi - \frac{1}{2\Psi} F_{kj} \partial_i \Psi - \frac{1}{2\Psi} F_{ik} \partial_j \Psi \\ &= \Psi \partial_k \left(\frac{F_{ij}}{\Psi} \right) - \lambda F_{kj} x^i \sqrt{\Psi} - \lambda F_{ik} x^j \sqrt{\Psi}. \end{aligned}$$

Отсюда и из уравнения (4.6) получаем

$$\begin{aligned} -\partial_k \left(\frac{F_{ij}}{\Psi} \right) &= \lambda x^k \Psi ((\tilde{B}_j - 2C_j) x^i - (\tilde{B}_i - 2C_i) x^j) \\ &\quad + 2\sqrt{\Psi} (x^i d_{kj} - x^j d_{ki}) + 2\lambda \Psi x^k (x^j d_{il} - x^i d_{jl}) x^l. \end{aligned}$$

Интегрируя по переменной x^k , находим

$$F_{ij} = \Psi^{3/2}((\tilde{B}_i - 2C_i)x^j - (\tilde{B}_j - 2C_j)x^i + 2(d_{li}x^j - d_{lj}x^i)x^l) - \Psi C_{ij}(x^i, x^j, u) \quad (4.8)$$

для некоторых функций $C_{ij}(x^i, x^j, u)$. Сравнивая это выражение с (4.6), получаем $d_{ij} = (\lambda/2)C_{ij}$. Уравнения (4.7) для $k = i \neq j$ имеют вид

$$\nabla_i F_{ij} = -\Psi \partial_u \partial_j \ln \Psi + 2\Psi Z_j.$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\nabla_i F_{ij} = \Psi^{3/2} \partial_i \left(\frac{F_{ij}}{\Psi^{3/2}} \right) + \lambda F_{lj} x^l \sqrt{\Psi}.$$

Отсюда с учетом (4.3), (4.6) и (4.8) получаем

$$\begin{aligned} & \Psi^{3/2} \left(-2d_{ij} - \partial_i \frac{C_{ij}}{\sqrt{\Psi}} \right) + \Psi \partial_u \partial_j \ln \Psi \\ & - \Psi^2 \left(\lambda D_k x^k x^j - \frac{1}{2} D_j \sum_{k=1}^n (x^k)^2 + 2c(u)x^j + \frac{1}{2} D_j \right) = 0, \end{aligned}$$

где $D_k = \tilde{B}_k + 2C_k$. Используя уравнения

$$\partial_j \partial_u \ln \Psi = \dot{\lambda} x^j \Psi, \quad \partial_i \frac{C_{ij}}{\sqrt{\Psi}} = -\lambda x_i C_{ij} + \frac{\partial_i C_{ij}}{\sqrt{\Psi}}, \quad d_{ij} = \frac{\lambda}{2} C_{ij},$$

находим

$$-\partial_i C_{ij} - \Psi \left(\lambda D_k x^k x^j - \frac{1}{2} D_j \sum_{k=1}^n (x^k)^2 + (2c(u) - \dot{\lambda})x^j + \frac{1}{2} D_j \right) = 0.$$

Если $\lambda(u) \neq 0$, то уравнение $d_{ij} = (\lambda/2)C_{ij}$ влечет $\partial_i C_{ij} = 0$. Следовательно, $D_k = 0$ и $c = \dot{\lambda}/2$. Если $\lambda(u) = 0$, то

$$\partial_j \partial_i C_{ij} + 4(D_j x_j - (2c - \dot{\lambda})) = 0.$$

Здесь мы пишем x_j вместо x^j , чтобы избежать суммирования по j . Поскольку $C_{ij} = -C_{ji}$, имеем $D_j = 0$, $c = \dot{\lambda}/2$ и $\partial_i C_{ij} = 0$. Таким образом, $D_k = 0$, $\tilde{B}_k = -2C_k$, $c = \dot{\lambda}/2$ и $d_{ij} = (\lambda/2)C_{ij}$, где C_{ij} — функции переменной u . Итак,

$$F_{ij} = \Psi^{3/2}(4C_j(u)x^i - 4C_i(u)x^j + \lambda(u)(C_{li}(u)x^j - C_{lj}(u)x^i)x^l) - \Psi C_{ij}(u). \quad (4.9)$$

Напомним, что $F = dA$. В статье [12] показано, что преобразование $v \mapsto v - \phi(x^1, \dots, x^m, u)$ меняет A_i на $A_i + \partial_i \phi$. Такое преобразование оставляет F без изменений. Это позволяет нам выбрать произвольную форму A такую, что $dA = F$. Мы выбираем

$$A_i = \Psi \left(-4C_k(u)x^k x^i + 2C_i(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2 + \frac{1}{2} C_{ik}(u)x^k \right).$$

Рассмотрим преобразование координат с обратным преобразованием

$$v = \tilde{v}, \quad x^i = A_j^i(\tilde{u})\tilde{x}^j, \quad u = \tilde{u}, \quad (4.10)$$

где $A_j^i(u)$ – некоторое семейство ортогональных матриц. Легко проверить, что

$$\tilde{A}_i = \sum_{k=1}^n A_i^k(u)(\partial_u A_l^k(u))\tilde{x}^l + A_i^k(u)A_l^k(u).$$

Полученная в результате преобразования метрика имеет ту же форму, при этом

$$\tilde{C}_i(u) = C_j(u)A_i^j(u), \quad \tilde{C}_{ij}(u) = \sum_{k=1}^n A_i^k(u) \partial_u A_j^k(u) + \frac{1}{2} A_i^r(u) C_{rk}(u) A_j^k(u).$$

Рассмотрим уравнение $\tilde{C}_{ij}(u) = 0$. Поскольку $\sum_{k=1}^n A_k^i(u) A_k^j(u) = \delta^{ij}$, то это уравнение принимает вид

$$\partial_u A_i^k(u) = A_i^j(u) \frac{1}{2} C_{jk}(u).$$

Поскольку матрица $C_{jk}(u)$ кососимметрична, $(1/2)C_{jk}(u)$ представляет собой кривую в алгебре Ли $\mathfrak{so}(n)$. Поэтому семейство $A_i^k(u)$, удовлетворяющее рассматриваемому уравнению, не что иное, как развертка кривой $(1/2)C_{jk}(u)$ в группе Ли $SO(n)$. Таким образом, применяя такое преобразование, можем полагать, что $C_{ij}(u) = 0$. Далее,

$$\partial_i H_1 = 2\lambda A_i - 2Z_i = -2\Psi \left(2\lambda C_k(u) x^k x^i - \lambda C_i(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2 + \frac{1}{2} \dot{\lambda} x^i + C_i(u) \right).$$

Получаем, что

$$H_1 = -4C_k(u)x^k\sqrt{\Psi} - \partial_u \ln \Psi + K(u)$$

для некоторой функции $K(u)$.

Остается только одна неизвестная функция H_0 . Рассмотрим уравнения $T_{ij} = f\delta_{ij}$. Если $i \neq j$, то $\nabla_i \nabla_j H_0 = \sqrt{\Psi} \partial_i \partial_j (H_0/\sqrt{\Psi})$, и, используя (3.6), получим

$$\partial_i \partial_j \frac{H_0}{\sqrt{\Psi}} = 2\Psi^{3/2} x^i x^j \sum_{k=1}^n C_k^2(u).$$

Если $\lambda(u) \neq 0$, то функция $(4/\lambda^2(u))\Psi \sum_{k=1}^n C_k^2(u)$ представляет собой частное решение этой системы. Общее решение системы имеет вид

$$H_0 = \frac{4}{\lambda^2(u)} \Psi \sum_{k=1}^n C_k^2(u) + \sqrt{\Psi} \sum_{k=1}^n f_k(x^k, u).$$

Условие $\nabla_i \nabla_i H_0 = \nabla_j \nabla_j H_0$ влечет $\partial_i^2 f_i = \partial_j^2 f_j$, следовательно,

$$f_i(x^i, u) = a(u)(x^i)^2 + D_i(u)x_i + d_i(u)$$

для некоторых функций $a(u)$, $D_i(u)$, $d_i(u)$. Полученная функция H_0 такая же, как в утверждении теоремы для случая $\lambda(u) \neq 0$. Случай $\lambda(u) = 0$ рассматривается аналогично.

Случай $n = 2$. Система уравнений (4.4) имеет вид

$$\partial_1 \left(\frac{Z_1}{\Psi} \right) = \partial_2 \left(\frac{Z_2}{\Psi} \right), \quad \partial_1 \left(\frac{Z_2}{\Psi} \right) + \partial_2 \left(\frac{Z_1}{\Psi} \right) = 0. \quad (4.11)$$

Отсюда следует, что Z_1/Ψ и Z_2/Ψ – вещественная и мнимая части некоторой комплексной голоморфной функции переменной $x^1 + ix^2$. Заметим, что

$$\nabla_1 F_{12} = \Psi \partial_1 \frac{F_{12}}{\Psi}, \quad \nabla_2 F_{12} = \Psi \partial_2 \frac{F_{12}}{\Psi}.$$

Используя (4.7), получим

$$Z_1 = -\frac{1}{2} \partial_2 \frac{F_{12}}{\Psi} + \frac{1}{2} \partial_u \partial_1 \ln \Psi, \quad Z_2 = \frac{1}{2} \partial_1 \frac{F_{12}}{\Psi} + \frac{1}{2} \partial_u \partial_2 \ln \Psi.$$

Подставляя это и равенство $\partial_u \partial_i \ln \Psi = \dot{\lambda} x^i \Psi$ в первое уравнение из (4.11), получаем

$$\partial_1 \partial_2 \frac{F_{12}}{\Psi^{3/2}} = 0.$$

Это показывает, что

$$F_{12} = \Psi^{3/2} (f_1(x^1, u) + f_2(x^2, u)).$$

Подставляя полученное выражение в (4.11), имеем $\partial_1^2 f_1 = \partial_2^2 f_2$, т.е.

$$f_1 = t(u)(x^1)^2 + a^1(u)x^1 + b_1(u), \quad f_2 = t(u)(x^2)^2 + a^2(u)x^2 + b_2(u).$$

Далее,

$$\partial_1 H_1 = 2Z_1 + 2\lambda A_1, \quad \partial_2 H_1 = 2Z_2 + 2\lambda A_2.$$

Следовательно,

$$0 = \partial_2 \partial_1 H_1 - \partial_1 \partial_2 H_1 = -2\lambda F_{12} + 2 \partial_2 Z_1 - 2 \partial_1 Z_2.$$

Прямые вычисления показывают, что это влечет $t = \lambda b$, где $b = b_1 + b_2$. Итак,

$$F_{12} = \Psi^{3/2} (\lambda(u)b(u)((x^1)^2 + (x^2)^2) + a_i(u)x^i(u) + b(u)).$$

Равенство (4.9) для $n = 2$ имеет вид

$$F_{12} = \Psi^{3/2} \left(-\frac{1}{2} \lambda(u) C_{12}(u) ((x^1)^2 + (x^2)^2) - \frac{1}{2} C_{12}(u) + 4C_2(u)x^1 - 4C_1(u)x^2 \right).$$

Это показывает, что форма F_{ij} такая же, как в случае $n \geq 3$, и окончание доказательства для случая $n = 2$ такое же, как для $n \geq 3$.

Теорема 1 доказана.

§ 5. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим координаты $v, x^1, \dots, x^n, u$ и метрику g , как в теореме 1.

1) Предположим, что функция $\lambda(u)$ нигде не обращается в нуль. Рассмотрим преобразование

$$v \mapsto v - \phi, \quad \phi = \frac{2}{\lambda(u)} C_k(u) x^k \sqrt{\Psi}.$$

Форма A_i меняется на

$$A_i + \partial_i \phi = \Psi \left(-2C_k(u) x^k x^i + C_i(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2 + \frac{C_i(u)}{\lambda(u)} \right).$$

Согласно лемме 3 при каждом u $h^{ik} A_k$ – киллингово векторное поле римановой метрики $h(u)$.

Следуя идеям из [28], найдем преобразование координат, в результате которого функции A_i становятся нулевыми. Рассмотрим преобразование координат, заданное обратным преобразованием

$$v = \tilde{v}, \quad x^k = x^k(\tilde{x}^i, u), \quad u = \tilde{u}.$$

Имеет место равенство

$$\tilde{A}_k = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^k} \left(A_i + h_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial u} \right).$$

Уравнение $\tilde{A}_k = 0$ имеет вид

$$\frac{\partial x^j(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, u)}{\partial u} = V^j(x^1(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, u), \dots, x^n(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, u), u),$$

где $V^j = -h^{jk} A_k$. Рассматривая $\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^k$ как параметры и налагая начальные условия

$$x^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, u_0) = \tilde{x}^i,$$

получаем, что рассматриваемая система уравнений представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящую от начальных условий как от параметров. Эта система имеет единственное решение, дающее нужное преобразование. Так как для каждого u $h^{ik} A_k$ – киллингово векторное поле римановой метрики $h(u)$, то преобразование $x^k = x^k(\tilde{x}^i, u)$ – изометрия; следовательно, h не меняется. Таким образом, получаем метрику теоремы 1 с $C_i = 0$. Применяя преобразование $v \mapsto v + (1/(2\lambda(u)))K(u)$, получаем $H_1 = -\partial_u \ln \Psi$.

2) Предположим, что функция λ нулевая. Форма F принимает вид

$$F_{ij} = 32(C_j(u)x^i - C_i(u)x^j).$$

Как было показано в теореме 1, можем выбрать $A_i = 16C_i(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2$. Применяв преобразование $x^i \mapsto x^i/2$ и заменив $2C_i(u)$ на $C_i(u)$, получим $A = C_i(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2 dx^i du$, т.е. $A_i = C_i(u) \sum_{k=1}^n (x^k)^2$. Более того, $h = \sum_{k=1}^n (dx^k)^2$. Из уравнения $P(X) = \tilde{v} \wedge X$ следует, что

$$\partial_j H_1 = -\nabla_i F_{ij} = -2C_j.$$

Поэтому $H_1 = -2C_k x^k + K(u)$ для некоторой функции $K(u)$.

Предположим, что $\sum_{k=1}^n C_k^2 \neq 0$. Рассмотрим преобразование координат, заданное обратным преобразованием

$$v = \tilde{v}, \quad x^i = \tilde{x}^i + b^i(\tilde{u}), \quad u = \tilde{u}$$

таким, что $2C_i(u)b^i(u) = K(u)$. Тогда получаем $H_1 = -2C_i(u)x^i$, т.е. можем предположить, что $K(u) = 0$. Уравнение $T_{ij} = f\delta_{ij}$ для $i \neq j$ имеет вид

$$\frac{1}{2}\partial_i\partial_j H_0 = x^i x^j \sum_{k=1}^n C_k - 2C_k x^k (C_j x^i + C_i x^j) - C_i C_j \sum_{k=1}^n (x^k)^2 + (\dot{C}_j x^i + \dot{C}_i x^j).$$

Общее решение этой системы при условии $T_{ii} = T_{jj}$ дано в утверждении теоремы.

Предположим, что $\sum_{k=1}^n C_k^2 \equiv 0$. Легко проверить, что ненулевыми могут быть только следующие компоненты тензора кривизны: R_{iuju} , R_{uiuj} , R_{iuuj} , R_{uiju} . Поэтому метрика представляет собой плоскую гравитационную волну (см. [3]), т.е. $h = \sum_{k=1}^n (dx^k)^2$, $A = 0$ и $H = H_0$. Более того,

$$H_0 = a(u) \sum_{i=1}^n (x^i)^2 + D_i(u)x^i + D(u).$$

Рассмотрим новые координаты

$$\tilde{v} = v - \sum_j \frac{db^j(u)}{du} x^j + d(u), \quad \tilde{x}^i = x^i + b^i(u), \quad \tilde{u} = u.$$

Получим метрику того же вида с

$$\tilde{H}_0 = a(u) \sum_{i=1}^n (x^i)^2 + \tilde{D}_i(u)x^i + \tilde{D}(u),$$

где

$$\tilde{D}_j = -2\frac{d^2 b^j}{(du)^2} + 2ab^j + D_j, \quad (5.1)$$

$$\tilde{D} = 2\frac{dd(u)}{du} + \sum_j \left(\frac{db^j}{du}\right)^2 + a \sum_j (b^j)^2 + D_i b^i + D. \quad (5.2)$$

Уравнение (5.1) влечет существование функций $b^j(u)$ таких, что $\tilde{D}_k = 0$. Используя последнее равенство, можно выбрать функцию $d(u)$ таким образом, что $\tilde{D} = 0$. Итак,

$$H_0 = a(u) \sum_{i=1}^n (x^i)^2.$$

Теорема 2 доказана.

§ 6. Доказательство теоремы 3

Рассмотрим метрику g из теоремы 1. Пусть $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(n)$ – алгебра голономии многообразия (M, g) .

Предположим, что $\lambda \equiv 0$ на M . Пусть $\sum_{k=1}^n C_k^2 \neq 0$. Тогда существует точка $x \in M$ такая, что $\vec{v}_x \neq 0$. Условие на тензор кривизны влечет

$$R_x(p_x, q_x) = -p_x \wedge \vec{v}_x, \quad R_x(X, Y) = p_x \wedge ((X \wedge Y)\vec{v}_x).$$

Это показывает, что $p_x \wedge E_x \subset \mathfrak{g}$. Далее,

$$R_x(\vec{v}_x, q_x) = -g(\vec{v}_x, \vec{v}_x)p_x \wedge q_x - p_x \wedge T_x(\vec{v}_x),$$

что влечет $\mathbb{R}p_x \wedge q_x \subset \mathfrak{g}$. Наконец,

$$R_x(X, q_x) = -g(\vec{v}_x, X)p_x \wedge q_x + \vec{v}_x \wedge X - p_x \wedge T_x(X).$$

Так как бивекторы вида $\vec{v}_x \wedge X$ порождают алгебру Ли $\mathfrak{so}(E_x)$, то заключаем, что

$$\mathfrak{g} = \mathbb{R}p_x \wedge q_x + \mathfrak{so}(E_x) + p_x \wedge E_x \simeq \mathfrak{sim}(n).$$

Если $\sum_{k=1}^n C_k^2 \equiv 0$ и $a^2 \neq 0$, то метрика дана формулой (1.2), а алгебра голономии этой метрики совпадает с $\mathbb{R}^n$. Если $\sum_{k=1}^n C_k^2(u) \equiv 0$ и $a^2(u) \equiv 0$, то метрика плоская.

Предположим, что λ – ненулевая постоянная. Тогда метрика может быть записана, как первая метрика в теореме 2. Имеем

$$R(p, q) = -\lambda p \wedge q, \quad R(X, Y) = -\frac{1}{2}\lambda X \wedge Y, \quad X, Y \in \Gamma(E).$$

Это показывает, что $\mathfrak{g}$ содержит подалгебру $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(n) \subset \mathfrak{sim}(n)$. Далее,

$$T_{ii} = \lambda \Psi^{3/2} D_k x^k + \Psi(\sqrt{\Psi} - 1)(a + \lambda D).$$

Если $\sum_{k=1}^n D_k^2 + (a + \lambda D)^2 \neq 0$, то тензор T не равен нулю тождественно, а равенство $R(X, q) = -n \operatorname{tr} T p \wedge X$ показывает, что $\mathfrak{g}$ содержит $\mathbb{R}^n \subset \mathfrak{sim}(n)$, т.е. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sim}(n)$. В противном случае

$$g = \Psi \sum_{k=1}^n (dx^k)^n + 2 dv du + (\lambda v^2 + 2D(u))(du)^2.$$

Ясно, что такая метрика g разложима. Метрика $2 dv du + (\lambda v^2 + 2D(u))(du)^2$ имеет постоянную секционную кривизну $\lambda/2$, следовательно, она изоморфна метрике $2 dv du + \lambda v^2 (du)^2$.

Предположим, что для некоторой системы координат $\dot{\lambda} \neq 0$. Тогда $\lambda \neq 0$ на некотором открытом подмножестве области определения этой системы координат, и метрика может быть записана, как первая метрика из теоремы 2. Имеем $\vec{v} = -(1/2)\dot{\lambda} x^i \partial_i$. Пусть x – произвольная точка такая, что $\vec{v}_x \neq 0$. Имеем

$$R_x(p_x, q_x) = -\lambda_x p_x \wedge q_x - p_x \wedge \vec{v}_x \in \mathfrak{g},$$

$$R_x(X, Y) = -\frac{\lambda}{2} X \wedge Y + p_x \wedge ((Y \wedge X)\vec{v}_x) \in \mathfrak{g}, \quad X, Y \in T_x M.$$

Рассматривая скобку Ли последних двух элементов алгебры $\mathfrak{g}$, получаем

$$p_x \wedge ((Y \wedge X)\vec{v}_x) \in \mathfrak{g}.$$

Это показывает, что $\mathfrak{g}$ содержит подалгебру, изоморфную $\mathbb{R}^n \subset \mathfrak{g}$. Два равенства, записанные выше, указывают на то, что $\mathfrak{g}$ содержит подалгебру $\mathbb{R} \oplus \mathfrak{so}(n) \subset \mathfrak{sim}(n)$. Таким образом, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sim}(n)$.

Теорема 3 доказана.

§ 7. Оператор Риччи полученных метрик

Оператор Риччи метрики (1.2) имеет вид

$$\text{Ric} = na(u) \partial_v \otimes du,$$

в частности $\text{Ric}^2 = 0$.

В работе [19] изучались конформно плоские лоренцевы многообразия (M, g) , удовлетворяющие условию

$$[R(X, Y), \text{Ric}] = 0. \quad (7.1)$$

Было показано, что эти многообразия исчерпываются пространствами постоянной секционной кривизны, произведениями двух пространств постоянной секционной кривизны и произведениями пространств постоянной секционной кривизны и интервалов. Оператор Риччи метрики (1.2) удовлетворяет условию (7.1). Более того, такая метрика является полной, например, для $a(u) = 1$, т.е. в случае пространств Казна–Валлаха. Таким образом, некоторые метрики в [19] были пропущены. В работе [20] изучались псевдоримановы конформно плоские многообразия (M, g) , удовлетворяющие (7.1). Было показано, что (помимо очевидных случаев) (M, g) может представлять собой комплексную сферу или пространство, удовлетворяющее $\text{Ric}^2 = 0$. Различные примеры конформно плоских многообразий со свойством $\text{Ric}^2 = 0$ построены в [21].

Оператор Риччи второй метрики из теоремы 2 имеет следующий вид:

$$\text{Ric}(p) = 0, \quad \text{Ric}(X) = ng(X, \vec{v})p, \quad \text{Ric}(q) = nT_{11}p + n\vec{v}, \quad X \in \Gamma(E);$$

здесь $\vec{v} = -\sum_{k=1}^n C_k(u)X_k$. Функцию T_{11} можно найти, используя равенство (3.6). Имеем $\text{Ric}^2 \neq 0$ и $\text{Ric}^3 = 0$. Условие (7.1) не имеет места. Скалярная кривизна этой метрики равна нулю.

Для первой метрики из теоремы 2 имеем

$$\text{Ric}(p) = \lambda p, \quad \text{Ric}(X) = ng(X, \vec{v})p - (n-1)\lambda X, \quad \text{Ric}(q) = nT_{11}p + n\vec{v} + \lambda q,$$

где $\vec{v} = -(\dot{\lambda}/2)\Psi x^k X_k$. Оператор Риччи не является нильпотентным. Скалярная кривизна этой метрики равна $2\lambda + s_0 = -(n-2)(n+1)\lambda$, и она равна нулю только в случае размерности 4.

§ 8. Случай размерности 4

Применяя теорему 5 к конформно плоскому, не являющемуся плоским лоренцеву многообразию (M, g) размерности 4 с алгеброй голономии $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{so}(1, 3)$, получим, что (M, g) должно удовлетворять одному из следующих условий:

- 1) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, 3)$;
- 2) $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{sim}(2)$, т.е. (M, g) – многообразие из теоремы 1 для $n = 2$;
- 3) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, 1) \oplus \mathfrak{so}(2)$ и (M, g) локально изометрично либо произведению (dS_2, cg_{dS_2}) и (L^2, cg_{L^2}) , либо произведению (AdS_2, cg_{AdS_2}) и (S^2, cg_{S^2}) ;
- 4) $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(1, 2)$ и (M, g) локально изометрично произведению многообразия $(\mathbb{R}, (dt)^2)$ и одного из многообразий (dS_3, cg_{dS_3}) , (AdS_3, cg_{AdS_3}) ; или $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(3)$ и (M, g) локально изометрично произведению многообразия $(\mathbb{R}, -(dt)^2)$ и одного из многообразий (S^3, cg_{S^3}) , (L^3, cg_{L^3}) .

Здесь $c > 0$ – константа, а S^n , L^n , dS_n , AdS_n – соответственно сфера, пространство Лобачевского, пространства де Ситтера и анти-де Ситтера. Стандартное пространство-время Фридмана–Робертсона–Волкера является конформно плоским и имеет алгебру голономии $\mathfrak{so}(1, 3)$ (см. [6]).

Возможные алгебры голономии конформно плоских лоренцевых многообразий размерности 4 найдены в [6]. Метрика 1 размерности 4 получена в [7]. В статье [6] была обозначена проблема построения примера конформно плоской метрики с алгеброй голономии $\mathfrak{sim}(2)$ (эта алгебра в [6] обозначена через R_{14}). Попытка построить такую метрику была сделана в [8], где была построена следующая метрика:

$$g = 2 dx dt + 4y dt dy - 4z dt dz + \frac{(dy)^2}{2y^2} + \frac{(dz)^2}{2y^2} + 2(x + y^2 - z^2)(dt)^2. \quad (8.1)$$

Эта метрика является конформно плоской. Применяя преобразование

$$x \mapsto x - y^2 + z^2, \quad y \mapsto y, \quad z \mapsto z, \quad t \mapsto t,$$

получим

$$g = 2 dx dt + 2x^2(dt)^2 + \frac{(dy)^2}{2y^2} + \frac{(dz)^2}{2y^2}. \quad (8.2)$$

Итак, метрика (8.1) является разложимой, а ее алгебра голономии совпадает с $\mathfrak{so}(1, 1) \oplus \mathfrak{so}(2)$. Таким образом, в настоящей статье мы впервые получили конформно плоскую метрику с алгеброй голономии $\mathfrak{sim}(2)$ и, более того, нашли все такие метрики.

Список литературы

- [1] M. Kurita, “On the holonomy groups of the conformally flat Riemannian manifold”, *Nagoya Math. J.*, **9** (1955), 161–171.
- [2] R. Bryant, “Classical, exceptional, and exotic holonomies: a status report”, *Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle* (Luminy, 1992), Semin. Congr., **1**, Soc. Math. France, Paris, 1996, 93–165.
- [3] A. Galaev, Th. Leistner, “Holonomy groups of Lorentzian manifolds: classification, examples, and applications”, *Recent developments in pseudo-Riemannian geometry*, ESI Lect. Math. Phys., Eur. Math. Soc., Zürich, 2008, 53–96.

- [4] M. Brozos-Vázquez, E. Garcia-Rio, P. Gilkey, S. Nikčević, R. Vázquez-Lorenzo, *The geometry of Walker manifolds* (San Rafael, CA), Synth. Lect. Math. Stat., **5**, Morgan & Claypool Publ., Williston, VT, 2009.
- [5] Th. Leistner, P. Nurowski, “Ambient metrics for n -dimensional pp -waves”, *Comm. Math. Phys.*, **296**:3 (2010), 881–898.
- [6] G. S. Hall, D. P. Lonie, “Holonomy groups and spacetimes”, *Classical Quantum Gravity*, **17**:6 (2000), 1369–1382.
- [7] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, E. Herlt, *Exact solutions of Einstein’s field equations*, Cambridge Monogr. Math. Phys., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [8] R. Ghanam, G. Thompson, “Two special metrics with R_{14} -type holonomy”, *Classical Quantum Gravity*, **18**:11 (2001), 2007–2014.
- [9] J. D. Norton, “Einstein, Nordström and the early demise of scalar, Lorentz-covariant theories of gravitation”, *Arch. Hist. Exact Sci.*, **45**:1 (1992), 17–94.
- [10] N. Ravndal, “Scalar gravitation and extra dimensions”, *Proceedings of the Gunnar Nordström Symposium on Theoretical Physics*, Comment. Phys.-Math., **166**, Finn. Soc. Sci. Lett., Helsinki, 2004, 151–164.
- [11] В. П. Визгин, *Релятивистская теория тяготения (истоки и формирование, 1900–1915)*, Наука, М., 1981.
- [12] G. W. Gibbons, C. N. Pope, “Time-dependent multi-centre solutions from new metrics with holonomy $\text{Sim}(n-2)$ ”, *Classical Quantum Gravity*, **25**:12 (2008), ID 125015.
- [13] H. Baum, “Conformal Killing spinors and the holonomy problem in Lorentzian geometry – a survey of new results”, *Symmetries and overdetermined systems of partial differential equations*, IMA Vol. Math. Appl., **144**, Springer, New York, 2008, 251–264.
- [14] Я. В. Базайкин, “Глобально гиперболические лоренцевы пространства со специальными группами голономии”, *Сиб. матем. журн.*, **50**:4 (2009), 721–736; англ. пер.: Ya. V. Bazaikin, “Globally hyperbolic Lorentzian spaces with special holonomy groups”, *Siberian Math. J.*, **50**:4 (2009), 567–579.
- [15] G. Hall, “Projective relatedness and conformal flatness”, *Cent. Eur. J. Math.*, **10**:5 (2012), 1763–1770.
- [16] Д. В. Алексеевский, Б. Н. Кимельфельд, “Классификация однородных конформно плоских римановых многообразий”, *Матем. заметки*, **24**:1 (1978), 103–110; англ. пер.: D. V. Alekseevskii, B. N. Kimel’fel’d, “Classification of homogeneous conformally flat Riemannian manifolds”, *Math. Notes*, **24**:1 (1978), 559–562.
- [17] В. Ф. Кириченко, “Конформно-плоские локально конформно-келеровы многообразия”, *Матем. заметки*, **51**:5 (1992), 57–66; англ. пер.: V. F. Kirichenko, “Conformally flat and locally conformal Kähler manifolds”, *Math. Notes*, **51**:5 (1992), 462–468.
- [18] В. В. Славский, “Конформно-плоские метрики и псевдоевклидова геометрия”, *Сиб. матем. журн.*, **35**:3 (1994), 674–682; англ. пер.: V. V. Slavskii, “Conformally-flat metrics and pseudo-Euclidean geometry”, *Siberian Math. J.*, **35**:3 (1994), 605–613.
- [19] M. Erdogan, T. Ikawa, “On conformally flat Lorentzian spaces satisfying a certain condition on the Ricci tensor”, *Indian J. Pure Appl. Math.*, **26**:5 (1995), 417–424.
- [20] K. Honda, “Conformally flat semi-riemannian manifolds with commuting curvature and Ricci operators”, *Tokyo J. Math.*, **26**:1 (2003), 241–260.
- [21] K. Honda, K. Tsukada, “Conformally flat semi-Riemannian manifolds with nilpotent Ricci operators and affine differential geometry”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **25**:3 (2004), 253–275.
- [22] K. Honda, K. Tsukada, “Three-dimensional conformally flat homogeneous Lorentzian manifolds”, *J. Phys. A*, **40**:4 (2007), 831–851.

- [23] D. V. Alekseevsky, A. S. Galaev, “Two-symmetric Lorentzian manifolds”, *J. Geom. Phys.*, **61**:12 (2011), 2331–2340.
- [24] H. Wu, “On the de Rham decomposition theorem”, *Illinois J. Math.*, **8** (1964), 291–311.
- [25] K. Yano, “On pseudo-Hermitian and pseudo-Kählerian manifolds”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, v. III (Amsterdam, 1954), North-Holland, Amsterdam, 1954, 190–197.
- [26] A. S. Galaev, “The spaces of curvature tensors for holonomy algebras of Lorentzian manifolds”, *Differential Geom. Appl.*, **22**:1 (2005), 1–18.
- [27] A. S. Galaev, “One component of the curvature tensor of a Lorentzian manifold”, *J. Geom. Phys.*, **60**:6–8 (2010), 962–971.
- [28] A. S. Galaev, T. Leistner, “On the local structure of Lorentzian Einstein manifolds with parallel distribution of null lines”, *Classical Quantum Gravity*, **27** (2010), ID 225003.

А. С. Галаев (A. S. Galaev)

Университет Масарика,
г. Брно, Чешская Республика
E-mail: galaev@math.muni.cz

Поступила в редакцию
04.02.2013