Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Иванов, А. Е. Мельникова, А. А. Тужилин, Стабилизация локально минимального леса, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 3, 83–118

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8222>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 11:55:38

УДК 514.774.8+515.124.2+515.124.4+514.177.2

А. О. Иванов, А. Е. Мельникова, А. А. Тужилин

Стабилизация локально минимального леса

Развивается метод частичной стабилизации локально минимальных сетей, созданный А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным для построения примеров кратчайших деревьев заданной топологии, при котором добавления граничных вершин степени 2 производятся не на все ребра исходного локально минимального дерева, а лишь на некоторые. Задача частичной стабилизации локально минимальных деревьев в конечномерном евклидовом пространстве решается в статье полностью, т.е. без ограничения на количество ребер, не подвергающихся подразбиению. Получен критерий того, что такая стабилизация возможна. Кроме того, формализуется общая задача поиска кратчайшего леса, соединяющего конечное семейство граничных компактов в произвольном метрическом пространстве, и доказывается, что такие леса существуют для произвольных наборов компактов, если и только если для любого конечного подмножества объемлющего пространства существует соединяющее его кратчайшее дерево. Построенная теория позволяет проводить дальнейшее обобщение теоремы стабилизации как для произвольных метрических пространств, так и для метрических пространств со специальными свойствами.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: метрические пространства, локально минимальные деревья, минимальные деревья Штейнера, кратчайшие деревья, кратчайшие леса, стабилизация локально минимального дерева.

DOI: 10.4213/sm8222

Введение

Классическая проблема Штейнера состоит в том, чтобы построить минимальный по длине связный граф, соединяющий данный набор точек плоскости, и описать все такие графы. Одной из практических интерпретаций этой проблемы является задача о проектировании системы дорог, соединяющей выбранные города, причем так, чтобы затраты на строительство были наименьшими. В предположении, что затраты пропорциональны суммарной длине всех построенных дорог, получаем задачу, эквивалентную проблеме Штейнера. Графы, являющиеся решениями этой задачи, традиционно называют *минимальными деревьями Штейнера* или *кратчайшими деревьями (сетями)*.

Задачу Штейнера невозможно решить, просто соединяя отрезками заданные точки – города. Оказывается, иногда бывает нужно добавить новые точки –

Работа выполнена при поддержке Правительства РФ по постановлению № 220 (договор № 11.Г34.31.0053), Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00664а) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1410.2012.1).

развилки, называемые точками Штейнера. Чтобы определить количество и расположение точек Штейнера, математики и программисты разрабатывали специальные алгоритмы. Однако даже лучшие из этих алгоритмов, выполняющиеся на самых быстродействующих компьютерах, не в состоянии дать решение для большого множества заданных точек за приемлемое время.

В общей форме задача Штейнера на плоскости была впервые сформулирована в статье В. Ярника и М. Кёсслера [1], опубликованной в 1934 г., однако сама эта проблема не приобрела широкой известности вплоть до 1941 г., когда Р. Курант и Г. Е. Роббинс включили ее в свою книгу “Что такое математика?”. Курант и Роббинс, по-видимому, не знали о работе Ярника и Кёсслера и связали эту задачу с исследованиями Я. Штейнера, швейцарского математика XIX столетия, работавшего долгое время в Берлинском университете. Штейнер занимался близкой, но другой задачей – поиском одной точки, сумма расстояний от которой до всех точек заданного конечного множества была бы минимальной. Отметим, что еще в 1640 г. П. Ферма поставил задачу, которая является частным случаем обеих упомянутых задач: найти точку P , сумма расстояний от которой до трех заданных точек плоскости минимальна. Торричелли и Кавальери, а затем Симпсон получили полное решение задачи Ферма, доказав, что суммарное расстояние минимально, когда все углы между отрезками, соединяющими P с исходными точками, не меньше 120° .

Оказывается, решения задачи Ферма (для трех точек) и общей задачи Штейнера (о кратчайшем дереве для произвольного числа точек) имеют много общих свойств. Их решения представляют собой деревья (связные ациклические графы), ребра которых – прямолинейные отрезки – стыкуются под углами, большими или равными 120° . Отсюда вытекает, что степень каждой вершины минимального дерева Штейнера не превосходит 3.

Плоские деревья, состоящие из прямолинейных отрезков, стыкующихся под углами не меньше чем в 120° , называются *локально минимальными* (для множества своих вершин степеней 1 и 2). Это связано с тем, что достаточно малая окрестность каждой точки такого дерева представляет собой кратчайшее дерево (с соответствующей границей). Однако не всякое локально минимальное дерево является кратчайшим в целом. Так, например, множество вершин прямоугольника, отношение сторон которого близко к единице и не равно ей, соединяется двумя различными локально минимальными деревьями разных длин. Очевидно, лишь одно из них является кратчайшим.

Имеется алгоритм, так называемый алгоритм Мелзака–Венга, позволяющий проверить за линейное время, существует ли на данном множестве точек плоскости локально минимальное дерево заданной структуры, и в случае положительного ответа построить его (см. [2]). Однако задача построения кратчайшего дерева является NP -трудной (см. [3]), что связано прежде всего с экспоненциально большим количеством возможных структур локально минимальных деревьев с данной границей.

Часто возникает вопрос о существовании кратчайших деревьев с теми или иными специальными свойствами. В статье [4] было выяснено, что можно, не меняя локально минимальное дерево как подмножество плоскости, превратить

его в кратчайшее, добавляя новые граничные вершины. Этот процесс, называемый *стабилизацией*, состоит в добавлении на ребра исходного локально минимального дерева новых вершин степени 2. В работе [5] авторами получено обобщение теоремы стабилизации на случай, когда новые граничные вершины можно добавлять на все ребра исходного дерева, за исключением одного выделенного ребра. Такая частичная стабилизация оказалась возможна при условии, что выделенное ребро обладает определенными свойствами (см. [5]). Основная цель настоящей статьи – обобщить теорему о частичной стабилизации на произвольный набор ребер исходного дерева. Попутно ставится и решается задача о существовании кратчайшего леса, соединяющего данное конечное семейство компактов.

Статья состоит из семи параграфов. В § 1 собраны понятия (как хорошо известные, так и новые), необходимые для изложения основного материала. В § 2 приводятся известные теоремы о стабилизации и их обобщение, являющееся основным результатом работы, а § 3 посвящен изучению свойств кратчайших лесов. В § 4 получен критерий существования кратчайшего леса, соединяющего любое конечное множество попарно не пересекающихся компактов в метрическом пространстве. В частности, показано, что любое конечное множество попарно не пересекающихся компактов конечномерного евклидова пространства можно соединить кратчайшим лесом. В § 5 и § 6 доказываются некоторые необходимые технические результаты, в том числе связанные со сходимостью по Хаусдорфу. Наконец, в § 7 на основе ранее установленных результатов доказывается основная теорема.

Авторы пользуются случаем выразить искреннюю признательность академику А. Т. Фоменко за постоянное внимание к работе, Н. П. Стрелковой за ряд полезных замечаний, а также всем участникам семинара “Минимальные сети”, проходящего на механико-математическом факультете МГУ под руководством А. О. Иванова и А. А. Тужилина, за проявленный интерес и многочисленные плодотворные обсуждения.

§ 1. Предварительные сведения

В этом параграфе собраны основные понятия, которые понадобятся нам в дальнейшем.

1.1. Графы. Напомним, что *граф* G – это пара (V, E) , состоящая из конечного непустого множества V , элементы которого называются *вершинами* графа G , и множества E , состоящего из некоторых неупорядоченных пар различных вершин из V , называемых *ребрами* графа G . Если $e = \{v, w\}$ – ребро графа G , то говорят, что v и w – *смежные* вершины, *инцидентные* ребру e , и что ребро e *инцидентно* вершинам v и w ; также говорят, что e *соединяет* вершины v и w или что v и w – *вершины* ребра e . Чтобы подчеркнуть принадлежность вершин и ребер графу G , будем обозначать множества V и E через $V(G)$ и $E(G)$ соответственно. Ребро, соединяющее вершины v и w , для краткости обозначим через vw . Количество ребер графа G , инцидентных вершине

$v \in V(G)$, называется *степенью* этой вершины и обозначается через $\deg_G v$ или, если понятно, о каком графе G идет речь, через $\deg v$.

Граф H называется *подграфом графа G* , если $V(H) \subset V(G)$ и $E(H) \subset E(G)$. Подграф H графа G называется *остовным*, если $V(H) = V(G)$. Подграф H графа G называется *собственным*, если $H \neq G$. Если подграф относится к тому или иному классу, например, если он является деревом или лесом, то к названию его типа добавляют приставку “под” (например, поддерево, подлес). Будем говорить, что подграф H графа G *порожден множеством вершин* $V_1 \subset V(G)$, если $V(H) = V_1$ и для любых вершин $u, v \in V_1$

$$uv \in E(H) \iff uv \in E(G).$$

Пусть G_1 и G_2 – графы. Через $G_1 \cup G_2$ обозначим граф с множеством вершин $V(G_1) \cup V(G_2)$ и множеством ребер $E(G_1) \cup E(G_2)$. Отметим, что если множества вершин графов G_i пересекаются, то в $G_1 \cup G_2$ отождествляются как общие вершины, так и общие ребра. Если $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, то отождествлений не происходит, и, чтобы подчеркнуть это, граф $G_1 \cup G_2$ будем обозначать также через $G_1 \sqcup G_2$.

Мы будем иметь дело с граничными задачами, для чего будем считать, что в каждом графе G фиксировано некоторое подмножество ∂G множества вершин $V(G)$, называемое *границей графа G* . При этом множество $V(G) \setminus \partial G$ будем обозначать через $I(G)$ и называть *множеством внутренних вершин*. Отметим, что ∂G может как быть пустым, так и совпадать со всем $V(G)$. Положим

$$\partial(G_1 \cup G_2) = \partial G_1 \cup \partial G_2.$$

Если H – подграф графа G , то $\partial G \cap V(H)$ будем называть *индуцированной границей подграфа H* или *границей подграфа H , согласованной с ∂G* . Отметим, что далеко не всегда мы будем наделять подграф индуцированной границей, хотя на первый взгляд это и кажется естественным.

Далее, напомним, что *изоморфизмом графов G_1 и G_2* называется биекция $\eta: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$, “уважающая ребра” в следующем смысле: условие $vw \in E(G_1)$ равносильно условию $\eta(v)\eta(w) \in E(G_2)$. Если один из графов G_i имеет непустую границу, то всегда дополнительно будем предполагать, что η отображает ∂G_1 биективно на ∂G_2 (это условие мы называем “*уважением границы*”). Отметим, что в стандартном определении изоморфизма графов условие “уважения границы” не предполагается.

Пусть G – некоторый граф, обладающий внутренней вершиной v степени 2, и пусть vu и vw – ребра из G , инцидентные v . Предположим, что граф G не содержит ребра uw . В этом случае вершину v будем называть *фиктивной*. Рассмотрим новый граф с множеством вершин $V(G) \setminus \{v\}$ и множеством ребер $(E(G) \setminus \{vu, vw\}) \cup \{uw\}$. Будем говорить, что построенный граф *получен из G стиранием фиктивной вершины v* .

Определим теперь специальный класс отображений, заданных на вершинах графов. Пусть G_1 и G_2 – произвольные графы с границами ∂G_1 и ∂G_2 соответственно. Отображение $\pi: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ назовем *проекцией*, если:

- 1) π сюръективно;
- 2) $\pi|_{\partial G_1}$ отображает ∂G_1 биективно на ∂G_2 ;
- 3) для каждого $vw \in E(G_1)$ выполняется или $\pi(v) = \pi(w)$, или $\pi(v)\pi(w) \in E(G_2)$;
- 4) для каждого ребра $v'w' \in E(G_2)$ существует и единственно ребро $vw \in E(G_1)$ такое, что $v'w' = \pi(v)\pi(w)$;
- 5) если $\pi(v) = \pi(w)$, то в G_1 существует путь, соединяющий v и w и такой, что все его вершины отображаются в $\pi(v)$; иными словами, для каждой вершины $v' \in V(G_2)$ подграф в G_1 , порожденный множеством вершин $\pi^{-1}(v')$, является связным.

Будем говорить, что проекция π *вырождает ребро* $vw \in E(G_1)$ или что $vw \in E(G_1)$ – *вырожденное ребро для проекции* π , если $\pi(v) = \pi(w)$. Все оставшиеся ребра из G_1 будем называть *невырожденными для проекции* π . Отметим, что проекция, не вырождающая ребра, является изоморфизмом графов с границей.

1.2. Графы в метрических пространствах. Пусть $\mathcal{X} = (X, \rho)$ – произвольное метрическое пространство. Каждый граф $G = (V, E)$ с множеством вершин $V \subset X$ будем называть *графом в пространстве* $\mathcal{X}$.

Для каждого ребра uv такого графа G его *длина* $\rho(uv)$ естественно определяется как расстояние $\rho(u, v)$ между вершинами u и v . *Длиной* $\rho(G)$ *графа* G назовем сумму длин всех его ребер:

$$\rho(G) = \sum_{e \in E(G)} \rho(e).$$

Если M – конечное подмножество в X , то граф G в $\mathcal{X}$ такой, что $M = \partial G$, будем называть *графом на* M . Если такой граф G связный, то будем говорить, что G *соединяет* M . Если же G соединяет M и $V(G) = \partial G = M$, то говорим, что G *затягивает* M .

Если A и B – произвольные непустые подмножества метрического пространства $\mathcal{X}$, то, напомним, расстоянием между ними называется число

$$\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

Если же одно из этих подмножеств пусто, то полагаем $\rho(A, B) = 0$.

1.3. Сети. Пусть $\mathcal{X} = (X, \rho)$ – метрическое пространство и G – произвольный граф. *Сетью типа* G *в пространстве* $\mathcal{X}$ будем называть отображение Γ из $V(G)$ в X . Образ отображения Γ обозначим через $[\Gamma]$ и назовем *следом сети* Γ . Для удобства изложения мы часто будем приписывать свойства графа G каждой сети этого типа; например, сеть назовем *связной*, если ее тип связный. Также положим $V(\Gamma) = V(G)$, $E(\Gamma) = E(G)$ и будем называть эти множества соответственно множествами *вершин* и *ребер сети* Γ .

Сеть Δ типа D называется *подсетью сети* Γ типа G , если граф D является подграфом в G и отображение Δ равно ограничению отображения Γ на множество $V(D)$. Если D – собственный подграф в G , то сеть Δ называется *собственной подсетью* в Γ .

Если Γ_1 и Γ_2 – сети типов G_1 и G_2 в $\mathcal{X}$, совпадающие на $V(G_1) \cap V(G_2)$, то определена и единственна сеть Γ типа $G_1 \cup G_2$, задаваемая условием $\Gamma|_{V(\Gamma_i)} = \Gamma_i$, $i = 1, 2$. Такую сеть Γ будем обозначать через $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Если при этом $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, то сеть $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ также обозначим через $\Gamma_1 \sqcup \Gamma_2$.

Пусть G и D – графы, Γ – сеть типа G в $\mathcal{X}$ и $\pi: V(D) \rightarrow V(G)$ – проекция. Тогда отображение $\Delta = \Gamma \circ \pi$ – это сеть типа D в $\mathcal{X}$; будем говорить, что сеть Δ *проецируется в Γ* ; также будем говорить, что сеть Δ является *расщеплением* сети Γ .

Пусть Γ – сеть в $\mathcal{X}$. Для каждого ребра $vw \in E(\Gamma)$ положим $\rho_\Gamma(e) = \rho(\Gamma(v), \Gamma(w))$ и полученную величину назовем *длиной ребра $e \in E(\Gamma)$ сети Γ* . Сумму длин всех ребер сети Γ назовем *длиной сети Γ* и обозначим через $\rho(\Gamma)$. Таким образом, $\rho(\Gamma) = \sum_{e \in E(\Gamma)} \rho_\Gamma(e)$. Отметим, что $\rho(\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \leq \rho(\Gamma_1) + \rho(\Gamma_2)$, и если $E(\Gamma_1) \cap E(\Gamma_2) = \emptyset$, то данное неравенство превращается в равенство. Отметим также, что длина сети не меняется при переходе к ее расщеплению.

Напомним, что для каждого графа G мы считаем заданным граничное множество $\partial G \subset V(G)$. Каждое отображение $\varphi: \partial G \rightarrow X$ будем называть *граничным*. Образ отображения φ обозначим через $[\varphi]$. Также про сеть Γ типа G будем говорить, что $\partial \Gamma = \Gamma|_{\partial G}$ является *границей сети Γ* . Если $M \subset X$ и $[\partial \Gamma] = M$, то говорим, что Γ – *сеть на M* .

Сети Γ_1 и Γ_2 типов G_1 и G_2 назовем *изоморфными*, если существует изоморфизм η графов G_1 и G_2 (как графов с границей), *согласованный с отображениями Γ_i* : для любой вершины $v \in V(G_1)$ имеем $\Gamma_1(v) = \Gamma_2(\eta(v))$. Отображение η будем также называть *изоморфизмом сетей Γ_1 и Γ_2* .

Пусть Γ – некоторая сеть типа G и v – фиктивная вершина графа G . Такую v будем также называть *фиктивной вершиной сети Γ* . Пусть G' – граф, полученный из G стиранием фиктивной вершины v . Тогда $V(G') \subset V(G)$, так что определена сеть Γ' , полученная ограничением сети Γ на $V(G')$. Будем говорить, что сеть Γ' получена из сети Γ *стиранием фиктивной вершины v* .

Пусть M – конечное подмножество в X и Γ – некоторая сеть на M , т.е. $M = [\partial \Gamma]$. Будем говорить, что Γ *соединяет множество M* , если сеть Γ связная. Если при этом $\partial G = V(G)$, то говорят также, что сеть Γ *затягивает M* .

Ребро $vw \in E(\Gamma)$ сети Γ назовем *вырожденным*, если $\Gamma(v) = \Gamma(w)$, иначе это ребро будем называть *невырожденным*. Отметим, что вырожденность ребра сети равносильна занулению его длины. Сеть Γ , у которой нет вырожденных ребер, называется *невырожденной*.

Более сильное ограничение на структуру сети дает понятие инъективности: сеть Γ назовем *инъективной*, если отображение Γ инъективно. Ясно, что каждая инъективная сеть не вырождена.

Инъективная сеть Γ в $\mathcal{X}$ естественно отождествляется с графом в метрическом пространстве $\mathcal{X}$, множество вершин которого равно $V(\Gamma)$, а множество ребер равно $E(\Gamma)$. Мы часто будем отождествлять инъективные сети и соответствующие графы.

Фиксируем произвольное конечное подмножество M в X и рассмотрим все сети, соединяющие M . Инфимум чисел $\rho(\Gamma)$ по всем таким сетям Γ называется

наименьшей длиной дерева, соединяющего M . Слово “дерево” в этом термине возникает из-за того, что если рассматриваемый инфимум достигается на некоторой сети, то он достигается также и на некоторой инъективной сети, которая, как легко видеть, обязательно является деревом. Такие инъективные сети будем называть *кратчайшими деревьями, соединяющими M* . Сеть, не обязательно инъективную, соединяющую M и имеющую наименьшую возможную длину, назовем *кратчайшей сетью, соединяющей M* . Отметим, что для кратчайших деревьев в литературе принято также название “минимальное дерево Штейнера” или, по-английски, Steiner Minimal Tree (см. введение). Аббревиатуру этого английского названия мы традиционно используем для обозначения рассматриваемого инфимума, так что наименьшую длину дерева, соединяющего M , обозначим через $\text{smt}(M)$. Множество всех (инъективных) кратчайших деревьев, соединяющих M , обозначим через $\text{SMT}(M)$.

Пусть Γ – произвольная сеть на $M \subset X$. Если v – внутренняя вершина степени 1 сети Γ , то удалим ее из сети (вместе с единственным инцидентным v ребром). Если v – фиктивная вершина сети Γ , то сотрем ее. Полученную сеть обозначим через Γ' . Заметим, что $\rho(\Gamma') \leq \rho(\Gamma)$, но при этом сеть Γ' остается связной сетью, соединяющей M . Поэтому $\text{smt}(M)$ также является точной нижней гранью длин всех деревьев, соединяющих M и таких, что их вершины степеней 1 и 2 граничные. Кроме того, если $\text{SMT}(M) \neq \emptyset$, то среди деревьев, принадлежащих $\text{SMT}(M)$, имеется такое дерево, у которого все вершины степеней 1 и 2 граничные. Это приводит к следующему соглашению: в дальнейшем мы всегда будем считать, что все рассматриваемые сети не содержат внутренних вершин степени 1 и внутренних вершин степени 2, т.е. фиктивных вершин. Таким образом, у всех рассматриваемых сетей вершины степеней 1 и 2 граничные.

Рассмотрим теперь некоторый граф G с границей ∂G , а также некоторое граничное отображение $\varphi: \partial G \rightarrow X$ в метрическое пространство $\mathcal{X}$. Через $[G, \varphi]$ обозначим множество всех сетей типа G с границей φ . Иными словами, элементами множества $[G, \varphi]$ являются всевозможные отображения $\Gamma: V(G) \rightarrow X$, для которых $\partial \Gamma = \varphi$. Отметим, что на $[G, \varphi]$ определена функция $\rho(\Gamma)$ длины сети $\Gamma \in [G, \varphi]$. Точную нижнюю грань значений функции на множестве $[G, \varphi]$ будем обозначать через $[G, \varphi]_{\min}$ и называть *наименьшей длиной параметрической сети типа G с границей φ* , а каждую сеть $\Gamma \in [G, \varphi]$, для которой $\rho(\Gamma) = [G, \varphi]_{\min}$, будем называть *минимальной параметрической сетью типа G с границей φ* . Отметим, что каждая кратчайшая сеть, соединяющая M , является также минимальной параметрической сетью подходящего типа с некоторой границей, причем такое представление неоднозначно. Кроме того, заметим, что в отличие от кратчайших сетей минимальные параметрические сети не обязательно являются связными (структура такой сети определяется ее типом).

Пусть $\mathcal{M} = \{M_i\}$ – конечное семейство попарно не пересекающихся подмножеств в $\mathcal{X}$ и Γ – сеть типа G в $\mathcal{X}$ такая, что $[\partial \Gamma]$ содержится в $\bigcup_i M_i$ и пересекает каждое M_i . Такую Γ будем называть *сетью на $\mathcal{M}$* . Множество всех сетей на $\mathcal{M}$ обозначим через $\mathcal{N}(\mathcal{M})$.

Пусть Γ – такая сеть, что $[\partial\Gamma] \subset \bigcup_i M_i$. Обозначим через $\{\Gamma_j\}$ множество связных компонент сети Γ . Построим по паре $(\mathcal{M}, \Gamma)$ некоторый двудольный граф, который назовем *структурным графом* и обозначим через $[\mathcal{M}, \Gamma]$. Множество вершин структурного графа равно $\{M_i\} \sqcup \{\Gamma_j\}$ и разбито на два непесекающихся подмножества – доли $\{M_i\}$ и $\{\Gamma_j\}$, причем вершины M_i и Γ_j соединены ребром, если и только если $M_i \cap [\partial\Gamma_j] \neq \emptyset$. Будем говорить, что сеть Γ *соединяет* $\mathcal{M}$, если структурный граф $[\mathcal{M}, \Gamma]$ связный. Заметим, что если сеть Γ соединяет $\mathcal{M}$, то структурный граф $[\mathcal{M}, \Gamma]$ не содержит изолированных вершин, поэтому $[\partial\Gamma]$ пересекает каждое M_i и, значит, Γ – сеть на $\mathcal{M}$. *Границу структурного графа* положим равной $\mathcal{M}$.

Фиксируем произвольное конечное семейство $\mathcal{M} = \{M_i\}$ попарно не пересекающихся подмножеств M_i в X и рассмотрим все сети, соединяющие $\mathcal{M}$. Инфимум чисел $\rho(\Gamma)$ по всем таким сетям Γ называется *наименьшей длиной леса, соединяющего $\mathcal{M}$* . Слово “лес” в этом термине возникает из-за того, что если рассматриваемый инфимум достигается на некоторой сети, то он также достигается и на инъективной сети, которая, как легко видеть, обязательно является лесом. Такие инъективные сети будем называть *кратчайшими лесами, соединяющими $\mathcal{M}$* . Сеть, не обязательно инъективную, соединяющую $\mathcal{M}$ и имеющую наименьшую возможную длину, назовем *кратчайшей сетью, соединяющей $\mathcal{M}$* . По аналогии с кратчайшими деревьями кратчайший лес можно было бы назвать “минимальным лесом Штейнера”, или, по-английски, Steiner Minimal Forest, что приводит к нашему обозначению smf для наименьшей длины леса, соединяющего $\mathcal{M}$. Множество всех (инъективных) кратчайших лесов, соединяющих $\mathcal{M}$, обозначим через $\text{SMF}(\mathcal{M})$.

Отметим, что если все составляющие $\mathcal{M}$ множества M_i одноточечные и $M = \bigcup_i M_i$, то каждое дерево Γ , соединяющее множество M , соединяет также и $\mathcal{M}$ (структурный граф в этом случае представляет собой звезду, вершина Γ которой соединена с вершинами M_i степени 1). Поэтому в этом случае $\text{SMT}(M) \subset \text{SMF}(\mathcal{M})$. Кроме того, если соединяющая $\mathcal{M}$ сеть состоит из нескольких компонент $\{\Gamma_j\}$, то объединение $\bigcup_j \Gamma_j$ представляет собой дерево, соединяющее M . Поэтому $\text{smf}(\mathcal{M}) = \text{smt}(M)$. В этом смысле задача о поимке кратчайших лесов является обобщением классической проблемы Штейнера.

Рассмотрим тривиальный случай, когда $\mathcal{M} = \{M_1\}$ состоит ровно из одного элемента. Тогда каждый кратчайший лес не содержит ребер, представляет собой конечный набор вершин, отображающихся в точки из M_1 , и его длина равна нулю. Тем самым, этот случай полностью разобран. Описанную только что ситуацию назовем *тривиальной* и исключим из дальнейшего анализа. Итак, ниже мы всегда будем предполагать, что рассматриваемые семейства $\mathcal{M}$ содержат не менее двух элементов.

Пусть Γ – сеть, соединяющая $\mathcal{M}$, и Γ_i – связные компоненты сети Γ . Компоненту Γ_i назовем *фиктивной*, если Γ_i состоит из одной вершины. Ясно, что если Γ – кратчайший лес на семействе $\mathcal{M}$, то выкидывание или добавление фиктивных компонент не меняет свойство леса быть кратчайшим (ср. с фиктивными вершинами). Поэтому в дальнейшем мы всегда будем предполагать, что все рассматриваемые леса не имеют фиктивных компонент.

Обобщим понятия граничного отображения и минимальной параметрической сети. Пусть $\mathcal{P}^*(X)$ обозначает множество всех непустых подмножеств в X . Каждое отображение $\Psi: \partial G \rightarrow \mathcal{P}^*(X)$ будем называть *частично свободной границей*. Образ отображения Ψ обозначим через $[\Psi]$. Отметим, что $[\Psi]$ – конечное семейство подмножеств в X . Пусть теперь Γ – сеть типа G . Будем говорить, что *сеть Γ согласована с Ψ* , а также что *граничное отображение $\partial\Gamma$ согласовано с Ψ* , если для каждой вершины $v \in \partial G$ выполняется $\partial\Gamma(v) \in \Psi(v)$.

Рассмотрим некоторый граф G с границей ∂G , а также некоторую частично свободную границу $\Psi: \partial G \rightarrow \mathcal{P}^*(X)$. Через $[G, \Psi]$ обозначим множество всех сетей типа G , согласованных с Ψ . Иными словами, элементами множества $[G, \Psi]$ являются всевозможные отображения $\Gamma: V(G) \rightarrow X$, для которых выполняется $\partial\Gamma(v) \in \Psi(v)$ для всех $v \in \partial G$. Отметим, что на $[G, \Psi]$ определена функция $\rho(\Gamma)$ длины сети. Точную нижнюю грань значений этой функции на множестве $[G, \Psi]$ будем обозначать через $[G, \Psi]_{\min}$ и называть *наименьшей длиной параметрической сети типа G с частично свободной границей Ψ* , а каждую сеть $\Gamma \in [G, \Psi]$, для которой $\rho(\Gamma) = [G, \Psi]_{\min}$, будем называть *минимальной параметрической сетью типа G с частично свободной границей Ψ* . Отметим, что каждая кратчайшая сеть, соединяющая семейство $\mathcal{M}$, состоящее из попарно не пересекающихся подмножеств, является также минимальной параметрической сетью с частично свободной границей, соединяющей $\mathcal{M}$ (при подходящем выборе типа и частично свободной границы), причем такое представление неоднозначно. Кроме того, заметим, что в отличие от кратчайших лесов минимальные параметрические сети с частично свободной границей не обязательно имеют связанные структурные графы, а также что семейство $[\Psi]$ может содержать пересекающиеся множества.

Пусть $\mathcal{M} = \{M_i\}$ – семейство попарно не пересекающихся подмножеств из X , а Γ_1 и Γ_2 – сети на $\mathcal{M}$ типов G_1 и G_2 соответственно. Сети Γ_1 и Γ_2 назовем *$\mathcal{M}$ -изоморфными*, если существует изоморфизм $\eta: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ графов G_1 и G_2 , *согласованный с $\mathcal{M}$* в следующем смысле: для любой $v \in \partial G_1$ условие $\Gamma_1(v) \in M_i$ равносильно условию $\Gamma_2(\eta(v)) \in M_i$ (напомним, что по определению изоморфизм η биективен на границе). Ясно, что $\mathcal{M}$ -изоморфность является отношением эквивалентности на множестве всех сетей на $\mathcal{M}$, так что множество $\mathcal{N}(\mathcal{M})$ всех таких сетей разбивается на *классы $\mathcal{M}$ -изоморфности*, которые мы будем обозначать через $\mathcal{N}_\alpha(\mathcal{M})$. Отметим также, что если Γ – сеть типа G на $\mathcal{M}$, то множество $[G, \partial\Gamma]$ содержится в некотором классе $\mathcal{M}$ -изоморфности. Более того, если $\Psi: \partial G \rightarrow \mathcal{P}^*(X)$ – частично свободная граница, для которой $[\Psi] = \mathcal{M}$, то семейство сетей $[G, \Psi]$ также содержится в одном классе $\mathcal{M}$ -изоморфности.

Пусть $\mathcal{M}^1 = \{M_i^1\}$ и $\mathcal{M}^2 = \{M_j^2\}$ – два конечных семейства, каждое из которых состоит из попарно не пересекающихся подмножеств в X . Предположим, что задана некоторая биекция $\nu: \mathcal{M}^1 \rightarrow \mathcal{M}^2$. Построим по ν биекцию $\nu_*: \{\mathcal{N}_\alpha(\mathcal{M}^1)\} \rightarrow \{\mathcal{N}_\beta(\mathcal{M}^2)\}$ следующим образом. Возьмем произвольный класс $\mathcal{M}^1$ -изоморфности $\mathcal{N}_\alpha(\mathcal{M}^1)$ и выберем в нем произвольного представителя Γ , который по определению представляет собой сеть некоторого типа G на $\mathcal{M}^1$. Так как множества из семейства $\mathcal{M}^1$ попарно не пересекаются, для

каждой вершины $v \in \partial G$ существует единственное M_i^1 , для которого $v \in M_i^1$. Выберем произвольную точку $x_v \in \nu(M_i^1) \in \mathcal{M}^2$ и рассмотрим новую сеть Γ' типа G , переводящую каждую вершину $v \in \partial G$ в точку x_v и совпадающую с Γ на $I(G)$. Ясно, что Γ' является сетью на $\mathcal{M}^2$. Положим $\nu_*(\mathcal{N}_\alpha(\mathcal{M}^1))$ равным тому классу $\mathcal{M}^2$ -изоморфности из $\mathcal{N}(\mathcal{M}^2)$, который содержит сеть Γ' . Легко проверяется, что построенное отображение ν_* не зависит от выбора точек x_v и от выбора представителей класса $\mathcal{N}_\alpha(\mathcal{M}^1)$, а также что ν_* является биекцией. Отображение ν_* будем называть биекцией, *индуцированной ν* .

1.4. Геометрическая реализация сети. Напомним, что кривая наименьшей длины среди всех кривых, соединяющих данные точки метрического пространства, называется *кратчайшей*. Метрика ρ на X называется *внутренней*, если для любых двух точек x и y из X точная нижняя грань длин $\ell(\gamma)$ всех непрерывных кривых γ , соединяющих x и y , равна $\rho(x, y)$. Внутренняя метрика ρ на X называется *строго внутренней*, если для любых точек x и y из X существует соединяющая их кратчайшая кривая.

В настоящем пункте метрика пространства $\mathcal{X}$ всегда предполагается строго внутренней.

Пусть Γ – сеть в пространстве $\mathcal{X} = (X, \rho)$. *Геометрической реализацией* сети Γ в пространстве $\mathcal{X}$ будем называть такое отображение g из множества $E(\Gamma)$ ребер сети Γ в множество кратчайших кривых на $\mathcal{X}$, что для каждого ребра $vw \in E(\Gamma)$ кратчайшая $g(vw)$ соединяет точки $\Gamma(v)$ и $\Gamma(w)$. Так как метрика пространства $\mathcal{X}$ строго внутренняя, геометрическая реализация существует у любой сети. В дальнейшем для удобства изложения пару (Γ, g) будем называть *геометрической сетью*. Для любой геометрической сети (Γ, g) полагаем

$$\rho(\Gamma) = \ell(g(\Gamma)) = \sum_{e \in E(\Gamma)} \ell(g(e)),$$

где $\ell(\gamma)$ обозначает длину кривой γ в пространстве $\mathcal{X} = (X, \rho)$. Объединение $\bigcup_{e \in E(\Gamma)} g(e)$ всех кратчайших $g(e)$ (рассматриваемых как подмножества в X) назовем *следом геометрической реализации g* и будем обозначать через $[g]$. Отметим, что если в объемлющем пространстве $\mathcal{X}$ каждая пара точек соединяется ровно одной кратчайшей, то геометрическая реализация g произвольной сети Γ и ее след определены однозначно.

Геометрическая сеть (Δ, d) называется *подсетью геометрической сети Γ* , если сеть Δ является подсетью в Γ и отображение d равно ограничению отображения g на $E(D)$.

Пусть (Γ_1, g_1) и (Γ_2, g_2) – геометрические сети в $\mathcal{X}$. Если g_1 и g_2 совпадают на $E(\Gamma_1) \cap E(\Gamma_2)$, то определена и единственна *геометрическая реализация $g_1 \cup g_2$ сети $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$* как такое отображение из $E(\Gamma_1) \cup E(\Gamma_2)$ в множество кратчайших на $\mathcal{X}$, что его ограничение на каждое $E(\Gamma_i)$ совпадает с g_i .

Геометрические сети (Γ_1, g_1) и (Γ_2, g_2) назовем *изоморфными*, если существует изоморфизм η сетей Γ_1 и Γ_2 , *согласованный с геометрическими реализациями*, т.е. для любого ребра $vw \in E(\Gamma_1)$ имеем

$$g_1(vw) = g_2(\eta(v)\eta(w)).$$

Пусть (Γ, g) – некоторая геометрическая сеть, v – фиктивная вершина сети Γ , а u и w – вершины сети Γ , смежные с v . Вершину v назовем *фиктивной вершиной геометрической сети* (Γ, g) , если объединение γ кратчайших $g(uv)$ и $g(vw)$ является некоторой кратчайшей, соединяющей u и w . Пусть Γ' – сеть, полученная из Γ стиранием фиктивной вершины v . Определим геометрическую реализацию g' сети Γ' совпадающей с g на всех ребрах сети Γ' , кроме uw , а на этом ребре положим g' равным кратчайшей γ . Будем говорить, что геометрическая сеть (Γ', g') получена из сети Γ *стиранием фиктивной вершины v* . Напомним, что в силу сделанного выше соглашения геометрические реализации кратчайших лесов не имеют фиктивных вершин.

Если Γ – кратчайшее дерево, соединяющее конечное множество $M \subset X$, и g – некоторая его геометрическая реализация, то геометрическое дерево (Γ, g) также назовем *кратчайшим деревом, соединяющим M* , а множество всех таких геометрических деревьев будем обозначать через $\text{SMT}_g(M)$. Аналогично, если Γ – кратчайший лес, соединяющий конечное семейство $\mathcal{M}$ попарно не пересекающихся подмножеств пространства $\mathcal{X}$, и g – его геометрическая реализация, то геометрический лес (Γ, g) также будем называть *кратчайшим лесом, соединяющим $\mathcal{M}$* , а множество всех таких геометрических лесов будем обозначать через $\text{SMF}_g(\mathcal{M})$.

Пусть v – произвольная вершина геометрической сети (Γ, g) и $vw_1, \dots, vw_k$ – все инцидентные v ребра. Выберем внутри каждой кратчайшей $g(vw_i)$ точку u_i ; через G_v обозначим граф с множеством вершин $\{v, u_1, \dots, u_k\}$ и множеством ребер $\{vu_1, \dots, vu_k\}$; положим ∂G_v равным $\{u_1, \dots, u_k\}$, если v – внутренняя вершина, и равным $\{v, u_1, \dots, u_k\}$, если вершина v граничная; через Γ_v обозначим сеть типа G_v , переводящую каждую вершину u_i в себя, а вершину v – в $\Gamma(v)$; через g_v обозначим геометрическую реализацию, сопоставляющую каждому ребру vu_i часть кратчайшей $g(vw_i)$, заключенную между $\Gamma(v)$ и u_i . Так полученную геометрическую сеть (Γ_v, g_v) назовем *локальной сетью с центром в v* . Отметим, что локальная сеть с центром в данной вершине определена неоднозначно, так как зависит от положения точек u_i . Геометрическая сеть называется *локально минимальной*, если для каждой ее вершины существует локальная сеть с центром в этой вершине, являющаяся кратчайшей сетью.

Пусть теперь Δ – сеть типа D в $\mathcal{X}$, являющаяся расщеплением сети Γ типа G , и g – геометрическая реализация сети Γ . Тогда существует и единственная геометрическая реализация сети Δ , удовлетворяющая следующему условию: если $\pi: V(D) \rightarrow V(G)$ – соответствующая проекция и $vw \in E(D)$, то при $\pi(v) = \pi(w)$ кратчайшая $d(vw)$ вырождена и совпадает с точкой $\Gamma(\pi(v))$, а при $\pi(v) \neq \pi(w)$ кратчайшая $d(vw)$ равна $g(\pi(v)\pi(w))$. Будем говорить, что такая геометрическая реализация d *проецируется* на геометрическую реализацию g , а также что геометрическая сеть (Δ, d) *проецируется* на геометрическую сеть (Γ, g) или что геометрическая сеть (Δ, d) является *расщеплением* геометрической сети (Γ, g) .

Пусть A – произвольное подмножество в X и $\varepsilon > 0$. Через $U_\varepsilon(A)$ будем обозначать ε -окрестность множества A , т.е. объединение всех открытых шаров радиуса ε с центрами в точках из A . Пусть теперь (Γ, g) – геометрическая сеть

в $\mathcal{X}$ и $\varepsilon > 0$. Положим $U_\varepsilon(g) = U_\varepsilon([g])$. Отметим, что все шары в $\mathcal{X}$ являются линейно связными, поэтому для связной сети Γ множество $U_\varepsilon(g)$ также линейно связно. Таким образом, для связной сети Γ на множестве $U_\varepsilon(g)$ определена внутренняя метрика ρ_ε^g , порожденная метрикой ρ .

Пусть (Γ, g) – геометрическая сеть типа G на $\mathcal{X}$, соединяющая множество $M \subset X$. Для $\varepsilon > 0$ через $\mathcal{U}_\varepsilon(g)$ обозначим множество всех таких геометрических сетей типа G с границей $\partial\Gamma$, что их следы содержатся в множестве $U_\varepsilon(g)$. Так как по определению сеть Γ связна, то, как было отмечено выше, множество $U_\varepsilon(g)$ линейно связно, для него определена порожденная ρ внутренняя метрика ρ_ε^g и, значит, на $\mathcal{U}_\varepsilon(g)$ определена функция ℓ_ε^g длины сети в метрике ρ_ε^g .

Предположим дополнительно, что сеть Γ инъективная. Такую геометрическую сеть (Γ, g) назовем *устойчивой сетью, соединяющей M* , если существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого расщепления (Δ, d) геометрической сети (Γ, g) выполняется следующее условие: геометрическая сеть Δ , рассматриваемая как элемент из $\mathcal{U}_\varepsilon(d)$, является минимумом функции ℓ_ε^d . Так как все ребра каждой геометрической сети из $\mathcal{U}_\varepsilon(d)$ лежат в $U_\varepsilon(d) = U_\varepsilon(g)$, то длина этой сети в метрике ρ совпадает с ее длиной в метрике $\rho_\varepsilon^d = \rho_\varepsilon^g$ и поэтому не меньше длины сети Γ (длины сети Γ во всех трех метриках одинаковы). Как показала Н. П. Стрелкова в [6], в пространстве $\mathbb{R}^N$ устойчивость сети эквивалентна ее локальной минимальности, а последнее свойство определяется только тем, как геометрические реализации ребер сети, являющиеся в этом случае прямолинейными отрезками, стыкуются в образах вершин сети.

Если геометрические реализации ребер невырожденной геометрической сети пересекаются только по образам общих вершин, то такая геометрическая реализация и соответствующая геометрическая сеть называются *вложенными*. Заметим, что если g – вложенная геометрическая реализация сети Γ , то сама сеть Γ необходимо является инъективной. Действительно, пусть Γ – сеть типа G в метрическом пространстве X ; тогда $\Gamma: V(G) \rightarrow X$. Допустим, что $\Gamma(v_1) = \Gamma(v_2)$ и $v_1 \neq v_2$. Тогда, так как по предположению Γ не содержит одноточечных компонент, существуют $u_1, u_2 \in V(G)$ такие, что $v_1 u_1, v_2 u_2 \in E(G)$; следовательно, кратчайшие $g(v_1 u_1)$ и $g(v_2 u_2)$ пересекаются в точке $\Gamma(v_1) = \Gamma(v_2)$, не являющейся образом общей вершины ребер $v_1 u_1$ и $v_2 u_2$, что противоречит условию. Таким образом, Γ – инъекция и сеть Γ инъективная.

Нетрудно заметить, что если образ геометрической сети является минимальным деревом Штейнера в $\mathcal{X}$, то эта геометрическая сеть является вложенной.

Определим теперь операцию *подразбиения невырожденного ребра vw* геометрической сети (Γ, g) . Рассмотрим внутри кратчайшей $g(vw)$ различные точки $u_1, \dots, u_k$, занумерованные так, что $\Gamma(v), u_1, \dots, u_k, \Gamma(w)$ – последовательные точки на кривой $g(vw)$. Добавим в $V(\Gamma)$ все точки u_i к множеству граничных вершин, а в $E(\Gamma)$ заменим ребро vw на ребра $u_{i-1} u_i$, а также vu_1 и $u_k w$; продолжим отображение Γ на все u_i , положив $\Gamma(u_i) = u_i$; геометрическую реализацию полученной сети определим совпадающей с g на $E(\Gamma) \setminus \{vw\}$ и переводящей каждое добавленное ребро в соответствующий ему фрагмент кратчайшей $g(vw)$. Полученную в результате геометрическую сеть будем называть *результатом*

подразбиения ребра $vw \in E(\Gamma)$ точками $u_1, \dots, u_k$ его геометрической реализации $g(vw)$. Если $k = 1$, то такое подразбиение называется также добавлением вершины u_1 на ребро vw .

Пусть (Γ, g) – геометрическая сеть. Добавим на каждое ребро $e \in E(\Gamma)$ середину кратчайшей $g(e)$. Полученную таким образом новую геометрическую сеть обозначим через (Γ^1, g^1) . Если для натурального p уже определена геометрическая сеть (Γ^p, g^p) , то через (Γ^{p+1}, g^{p+1}) обозначим геометрическую сеть $((\Gamma^p)^1, (g^p)^1)$, т.е. геометрическую сеть, полученную из (Γ^p, g^p) добавлением на каждое ребро $e \in E(\Gamma^p)$ середины кратчайшей $g(e)$. Геометрическую сеть (Γ^p, g^p) назовем p -подразбиением геометрической сети (Γ, g) . Отметим, что если в объемлющем пространстве $\mathcal{X}$ кратчайшие определяются однозначно своими концевыми точками, то p -подразбиение Γ^p однозначно определяется сетью Γ . Простейшим примером тому является случай, когда в качестве метрического пространства, в котором реализуется геометрическая сеть, рассматривается конечномерное евклидово пространство, в котором единственной кратчайшей, соединяющей две точки, является прямолинейный отрезок с концами в этих точках.

Пусть $\{(\Gamma_i, g_i)\}$ – конечное семейство геометрических сетей в $\mathcal{X}$ с попарно не пересекающимися множествами ребер. Подразобьем каждое ребро e каждой сети Γ_i всеми теми вершинами всех остальных сетей Γ_j , образы которых попали внутрь кратчайшей $g_i(e)$, и через (Γ'_i, g'_i) обозначим так подразбитую геометрическую сеть (Γ_i, g_i) . Тогда геометрическую сеть $(\bigcup_i \Gamma'_i, \bigcup_i g'_i)$ с границей $\partial(\bigcup_i \Gamma_i)$, из которой удалены все вершины, участвовавшие в подразбиении ребер, будем обозначать через

$$\left(\bigoplus_i \Gamma_i, \bigoplus_i g_i \right) = \bigoplus_i (\Gamma_i, g_i)$$

и называть *суммой геометрических сетей* (Γ_i, g_i) . Обратим внимание на то, что все вершины, добавленные в результате подразбиения, мы отнесли к внутренним вершинам сети $\bigoplus_i \Gamma_i$, даже если они были граничными в одной из сетей Γ_i . Если кратчайшие в $\mathcal{X}$ определены однозначно, то будем везде опускать однозначно определенные геометрические реализации g_i и писать $\bigoplus_i \Gamma_i$ вместо $(\bigoplus_i \Gamma_i, \bigoplus_i g_i)$.

1.5. Линейные графы в $\mathbb{R}^N$. В дальнейшем мы в основном будем заниматься графами в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$. Каждому такому графу (V, E) соответствует подмножество пространства $\mathbb{R}^N$, равное объединению прямолинейных отрезков $[a, b]$ по всем ребрам $ab \in E$ этого графа. При этом мы отождествляем ребро $ab \in E$ с отрезком $[a, b]$ и исключаем (так как вершины графа предполагаются попарно различными) случай $b = a$, т.е. все ребра невырождены. Фактически граф в $\mathbb{R}^N$ естественным образом отождествляется с соответствующей инъективной сетью, заданной включением $V \subset \mathbb{R}^N$, которая в свою очередь отождествляется со своей единственной геометрической реализацией и ее следом. Этот объект мы в дальнейшем будем называть *линейным графом* или *линейной сетью*. Линейный граф можно задать как объединение конечного числа отрезков $I_k \subset \mathbb{R}^N$ вместе со следующей структурой графа: *вершинами*

линейного графа будут точки пространства $\mathbb{R}^N$, являющиеся концами отрезков I_k , а ребрами – пары вершин, представляющие собой концы одного и того же отрезка I_k . В дальнейшем, говоря о графах в евклидовом пространстве, мы будем иметь в виду именно соответствующие им линейные сети.

Для линейного графа G запись $x \in G$ читается “ x является точкой графа G ” и означает, что точка x либо является вершиной графа G , либо принадлежит одному из его ребер. Поэтому:

- 1) имеет смысл выражение “точка x лежит на ребре ab ”, что означает $x \in [a, b]$;
- 2) для смежных ребер определен образованный ими угол в их общей вершине;
- 3) определено подразбиение ребра ab , состоящее в замене отрезка $[a, b]$ на несколько отрезков, полученных разбиением $[a, b]$ конечным числом точек $a < a_1 < \dots < a_k < b$, в частности так определяется операция добавления вершины на ребро ab ;
- 4) если угол между ребрами ab и ac равен 180° , то определена операция исключения вершины a , состоящая в замене двух отрезков $[a, b]$ и $[a, c]$ на один отрезок $[b, c]$.

Множества вершин и ребер линейного графа G будем по-прежнему обозначать через $V(G)$ и $E(G)$ соответственно.

Линейную сеть будем называть *вложенной*, если ее ребра пересекаются только по общим вершинам. Заметим, что каждое минимальное остовное дерево (*остовное дерево* – это остовный подграф, являющийся деревом) и каждое минимальное дерево Штейнера в $\mathbb{R}^N$ являются вложенными линейными сетями. В дальнейшем, если не оговорено противное, все рассматриваемые линейные сети в $\mathbb{R}^N$ будем считать вложенными.

Хорошо известна теорема, описывающая локальную структуру минимальных деревьев Штейнера на римановых многообразиях; см., например, [7]. В соответствии с ней степени вершин минимального дерева Штейнера в евклидовом пространстве не превосходят 3. При этом все вершины степени 1 являются граничными; в вершинах степени 3, как граничных, так и внутренних, ребра стыкуются под углами в 120° ; в граничных вершинах степени 2 углы между выходящими из них ребрами не меньше 120° , а во внутренних вершинах степени 2 ребра стыкуются под углами в 180° . Отметим, что исключение или добавление таких внутренних вершин степени 2 не меняет свойство дерева быть кратчайшим. Исходя из этого в дальнейшем будем предполагать, что все рассматриваемые линейные деревья внутренних вершин степени 2 не содержат. С учетом сделанного соглашения граница кратчайшего дерева содержит все его вершины степеней 1 и 2. Отметим, что перечисленные выше локальные свойства кратчайших деревьев не являются достаточными для того, чтобы линейное дерево было кратчайшим. Однако такие линейные деревья являются локально минимальными деревьями в $\mathbb{R}^N$ в указанном выше смысле. Очевидно, верно и обратное: каждое локально минимальное дерево имеет такую же локальную структуру, как и кратчайшее. Таким образом, в $\mathbb{R}^n$ перечисленные свойства можно взять за определение локально минимального дерева.

§ 2. Формулировка основной теоремы

Мы рассматриваем случай, когда объемлющее пространство – это евклидово пространство $\mathbb{R}^N$. Поэтому геометрическая реализация, след и p -подразбиение Γ^p каждой линейной сети Γ определены однозначно.

В работах [4] и [5] получены следующие теоремы стабилизации.

ТЕОРЕМА 2.1 (см. [4]). *Пусть G – вложенное локально минимальное дерево в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$. Тогда существует такое $p_0 \geq 0$, что для любого целого $p \geq p_0$ подразбитое дерево G^p является кратчайшим деревом с границей ∂G^p , т.е.*

$$G^p \in \text{SMT}_g(\partial G^p).$$

Отметим, что здесь локально минимальное дерево в евклидовом пространстве рассматривается как линейная сеть; см. п. 1.5.

ТЕОРЕМА 2.2 (см. [5]). *Пусть Δ_1, Δ_2 – непересекающиеся вложенные локально минимальные деревья на евклидовой плоскости, и пусть $d > 0$ – расстояние между ними как между подмножествами плоскости. Положим $\Delta = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$. Предположим, что для каждой пары $(v_1, v_2) \in \Delta_1 \times \Delta_2$ такой, что $\rho(v_1, v_2) = d$, геометрическое дерево $\Delta \oplus v_1 v_2$ является локально минимальным (здесь $v_1 v_2$ обозначает линейный граф, состоящий из одного ребра $v_1 v_2$). Тогда d достигается только на парах $\{v_1, v_2\}$ граничных вершин деревьев Δ_i , в частности, таких пар – конечное число. Более того, существует такое $p_0 \geq 0$, что для любого целого $p \geq p_0$ и каждой пары вершин $\{v_1, v_2\}$, для которых $\rho(v_1, v_2) = d$, дерево $\Delta^p \oplus v_1 v_2$ является кратчайшим деревом с границей $\partial \Delta^p$, т.е.*

$$(\Delta^p \oplus v_1 v_2) \in \text{SMT}_g(\Delta^p).$$

Основной результат настоящей работы обобщает теорему 2.2 и состоит в следующем.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Пусть $\{\Delta_i\}$ – произвольное конечное семейство попарно не пересекающихся вложенных локально минимальных деревьев в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$. Пусть $\mathcal{M} = \{\Delta_i\}$ – конечное семейство подмножеств в $\mathbb{R}^N$ и $\Delta = \bigsqcup_i \Delta_i$ – линейная сеть в $\mathbb{R}^N$. Предположим, что для каждого кратчайшего леса $\Gamma \in \text{SMF}_g(\mathcal{M})$ линейное дерево $\Gamma \oplus \Delta$ является локально минимальным. Тогда существует такое $p_0 \geq 0$, что для любого целого $p \geq p_0$ и любого $\Gamma \in \text{SMF}_g(\mathcal{M})$ линейное дерево $\Gamma \oplus \Delta^p$ лежит в $\text{SMT}_g(\partial \Delta^p)$. Иными словами, начиная с некоторого p , сумма p -подразбитого леса Δ^p и любого кратчайшего леса, соединяющего $\mathcal{M} = \{\Delta_i\}$, является кратчайшим деревом для подразбитой границы $\partial \Delta^p$.*

Поясним утверждение теоремы на примере. На рис. 1, слева изображены три локально минимальных дерева Γ_i , которые соединяются кратчайшим лесом, отмеченным штриховыми линиями (рис. 1, в центре). Объединение кратчайшего леса с исходными деревьями является локально минимальным деревом. После проведения частичной стабилизации, т.е. добавления граничных вершин

Рис. 1. Частичная стабилизация локально минимального леса

степени 2 на ребра исходных деревьев Γ_i , это локально минимальное дерево становится кратчайшим для границы с добавленными на ребра вершинами (рис. 1, справа).

§ 3. Кратчайшие леса в метрическом пространстве

Этот и следующий параграфы посвящены изучению кратчайших лесов в метрических пространствах общего вида.

3.1. Некоторые свойства кратчайших. Хорошо известно следующее утверждение (см., например, [9]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. Пусть $\mathcal{X}$ – метрическое пространство с внутренней метрикой, а γ_i – последовательность кратчайших, поточечно сходящихся к некоторой кривой γ . Тогда γ кратчайшая.

Заметим, что требование того, что метрика на пространстве $\mathcal{X}$ внутренняя, существенно (см. [9]).

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. Пусть $\mathcal{X} = (X, \rho)$ – произвольное метрическое пространство и Γ_i – последовательность минимальных параметрических сетей в X одного и того же типа G , поточечно сходящаяся к сети Γ типа G . Тогда Γ – минимальная параметрическая сеть.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. что существует сеть $\Gamma' \in [G, \partial G]$ такая, что $\rho(\Gamma') < \rho(\Gamma)$. Тогда $\varepsilon = \rho(\Gamma) - \rho(\Gamma') > 0$. Пусть n – количество ребер графа G . Так как $\Gamma_i \rightarrow \Gamma$, то, начиная с некоторого i , имеем $\rho(\Gamma_i(v), \Gamma(v)) < \varepsilon/(4n)$ при каждом $v \in V(G)$. Перестроим сети Γ_i , заменив образы отображения Γ_i в вершинах $v \in I(G)$ на $\Gamma'(v)$. Полученные сети обозначим через Γ'_i . Отметим, что, как и Γ_i , сети Γ'_i лежат в $[G, \partial G]$. Тогда при описанных выше i имеем $|\rho(\Gamma'_i) - \rho(\Gamma')| < \varepsilon/2$, так как длины каждого из n ребер сетей Γ'_i и Γ' отличаются друг от друга меньше чем на $\varepsilon/(2n)$. С другой стороны, начиная с некоторого i , имеем $|\rho(\Gamma_i) - \rho(\Gamma)| < \varepsilon/2$, откуда

$$\rho(\Gamma'_i) < \rho(\Gamma') + \frac{\varepsilon}{2} = \rho(\Gamma) - \varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} = \rho(\Gamma) - \frac{\varepsilon}{2} < \rho(\Gamma_i) + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = \rho(\Gamma_i),$$

что противоречит минимальности Γ_i .

Заметим, что в утверждении 3.2 рассматриваются сети, а не их геометрические реализации.

Выше было отмечено, что для каждого конечного подмножества M метрического пространства $\mathcal{X} = (X, \rho)$ число $\text{smt}(M)$ является также точной нижней гранью длин соединяющих M вложенных деревьев. Это приводит к следующему результату.

СЛЕДСТВИЕ 3.1. *Для каждого конечного подмножества M метрического пространства $\mathcal{X} = (X, \rho)$ с точностью до изоморфизма сетей существует лишь конечное число классов сетей $[G, \varphi]$ таких, что G – дерево (граница которого содержит все вершины степеней 1 и 2), а φ – некоторая биекция между ∂G и M . Поэтому если каждое $[G, \varphi]$ содержит минимальное параметрическое дерево, то любое конечное подмножество соединяется некоторым кратчайшим деревом.*

Для пространства $\mathbb{R}^N$ с евклидовой метрикой известна следующая теорема (см. [10]), которая понадобится нам в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 3.1. *Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^N$ с евклидовой метрикой. Тогда:*

- 1) *для любой последовательности $M_i = \{x_i, y_i\} \subset \mathbb{R}^N$ такой, что $x_i \rightarrow x$ и $y_i \rightarrow y$, последовательность отрезков $[x_i, y_i]$ равномерно сходится к отрезку $[x, y]$;*
- 2) *для каждого дерева G и граничного отображения $\varphi: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^N$ существует минимальное параметрическое дерево типа G с границей φ ;*
- 3) *для любого дерева G и последовательности $\varphi_i: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^N$ граничных отображений, сходящейся к граничному отображению $\varphi: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^N$ (т.е. при каждом $v \in \partial G$ имеем $\varphi_i(v) \rightarrow \varphi(v)$), существует подпоследовательность $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots$, для которой имеется последовательность минимальных параметрических деревьев $\Gamma_{i_k} \in [G, \varphi_{i_k}]$, сходящаяся к некоторому $\Gamma \in [G, \varphi]$ (т.е. для любого $v \in V(G)$ последовательность $\Gamma_{i_k}(v)$ сходится к $\Gamma(v)$).*

3.2. Несократимые сети и кратчайшие леса. В этом пункте мы покажем, что изучение кратчайших сетей, соединяющих конечное семейство подмножеств метрического пространства, можно свести к исследованию сетей, на структуру которых наложены существенные ограничения, приводящие к конечности числа таких структур.

Пусть $\mathcal{M} = \{M_i\}$ – конечное семейство попарно не пересекающихся подмножеств произвольного метрического пространства $\mathcal{X} = (X, \rho)$ и Γ – сеть на $\mathcal{M}$. Обозначим через Γ_j связные компоненты сети Γ , и пусть G_j – тип сети Γ_j . Каждому ребру $M_i \Gamma_j$ структурного графа $[\mathcal{M}, \Gamma]$ припишем *вес*, равный количеству точек в $M_i \cap [\Gamma_j]$. Кроме того, *границей* графа $[\mathcal{M}, \Gamma]$ назовем множество $\mathcal{M}$.

Вложенную сеть Γ , соединяющую $\mathcal{M}$, назовем *сократимой*, если в Γ существует собственная подсеть Γ' , также соединяющая $\mathcal{M}$. В противном случае вложенную сеть Γ , соединяющую $\mathcal{M}$, назовем *несократимой*. Напомним, что вложенные сети мы договорились отождествлять с соответствующими графами в объемлющем метрическом пространстве.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.3. Пусть Γ – несократимая сеть, соединяющая конечное семейство $\mathcal{M} = \{M_i\}$ попарно не пересекающихся подмножеств из $\mathcal{X}$, и $\{\Gamma_j\}$ – связные компоненты сети Γ . Тогда:

- 1) сеть Γ является лесом;
- 2) все вершины структурного графа $[\mathcal{M}, \Gamma]$ степени 1 принадлежат его границе $\mathcal{M}$, иными словами, граница $\partial\Gamma_j$ каждой связной компоненты Γ_j сети Γ пересекает по крайней мере два различных M_i ;
- 3) веса всех ребер структурного графа $[\mathcal{M}, \Gamma]$ равны 1, иными словами, для каждого i и j множество $M_i \cap V(\Gamma_j)$ состоит не более чем из одной точки, причем эта точка – граничная вершина сети Γ_j ;
- 4) структурный граф $[\mathcal{M}, \Gamma]$ является деревом, в котором число внутренних вершин Γ_j меньше числа граничных вершин M_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если сеть Γ не является лесом, то она содержит цикл, и если из этого цикла выбросить произвольное ребро, то получим собственную подсеть, также соединяющую $\mathcal{M}$, что противоречит несократимости сети Γ .

2) Если внутренняя вершина Γ_j графа $[\mathcal{M}, \Gamma]$ имеет степень 1, то компоненту Γ_j можно исключить из сети Γ , и у полученной собственной подсети Γ' структурный граф $[\mathcal{M}, \Gamma']$ будет связным; поэтому Γ' является сетью, соединяющей $\mathcal{M}$, что противоречит несократимости сети Γ .

3) Предположим, что для некоторых i и j множество $M_i \cap V(\Gamma_j)$ содержит по крайней мере две разные вершины v и w . Обозначим через γ единственный путь в дереве Γ_j , соединяющий v и w . Выкинем из Γ_j ребро пути γ , инцидентное v . Дерево Γ_j распадется на два дерева Γ'_j и Γ''_j , причем в одном из этих деревьев содержится вершина v , а в другом – вершина w . Заменяем теперь в лесу Γ дерево Γ_j на деревья Γ'_j и Γ''_j , добавив в границы этих деревьев вершины v и w соответственно. Тогда для полученного леса Γ' структурный граф $[\Gamma', \mathcal{M}]$ будет связным; тем самым, Γ' является собственной подсетью в Γ , соединяющей $\mathcal{M}$, что противоречит несократимости сети Γ . Так как по определению структурного графа вершины M_i и Γ_j соединены ребром тогда и только тогда, когда $M_i \cap [\partial\Gamma_j] \neq \emptyset$, то единственная точка пересечения $M_i \cap V(\Gamma_j)$ является граничной вершиной.

4) Предположим, что структурный граф $[\mathcal{M}, \Gamma]$ не является деревом. Тогда этот граф содержит некоторый цикл C . Пусть M_i, Γ_j, M_k – последовательные вершины этого цикла. Тогда по п. 3) $M_i \cap V(\Gamma_j) = \{v\}$ и $M_k \cap V(\Gamma_j) = \{w\}$ для некоторых $v, w \in V(\Gamma_j)$. Рассмотрим единственный путь в Γ_j , соединяющий v и w , и пусть e – некоторое ребро этого пути. Выкинем из Γ_j ребро e ; тогда Γ_j распадется на два дерева Γ'_j и Γ''_j . Пусть Γ' – лес, полученный из Γ заменой дерева Γ_j на деревья Γ'_j и Γ''_j . Структурный граф $[\mathcal{M}, \Gamma']$ получается из графа $[\mathcal{M}, \Gamma]$ заменой вершины Γ_j на две вершины Γ'_j и Γ''_j и заменой каждого ребра вида $M_l \Gamma_j$ на одно из двух ребер $M_l \Gamma'_j$ или $M_l \Gamma''_j$ в соответствии с тем, какой из двух компонент Γ'_j или Γ''_j принадлежит единственная вершина из пересечения $M_l \cap \Gamma_j$. В результате этой операции цикл C превращается в путь, соединяющий Γ'_j и Γ''_j . Легко проверить, что структурный граф $[\mathcal{M}, \Gamma']$ остается связным, так как пути, проходившие через вершину Γ_j , заменяются

на пути, проходящие через вершины Γ'_j и Γ''_j . Таким образом, Γ' – собственная подсеть в Γ , соединяющая $\mathcal{M}$, что противоречит несократимости сети Γ .

Соотношение между количествами граничных и внутренних вершин в структурном графе $[\mathcal{M}, \Gamma]$ вытекает из того, что $[\mathcal{M}, \Gamma]$ – дерево, все его вершины степени 1 граничные, т.е. лежат в $\mathcal{M}$, и в нем нет смежных внутренних вершин. Поэтому, выбрав вершину степени 1 из $\mathcal{M}$ в качестве корневой и ориентируя все ребра от корня, мы заметим, что за каждой вершиной из Γ следует граничная вершина из $\mathcal{M}$, что и требовалось.

Утверждение полностью доказано.

Для конечного семейства $\mathcal{M} = \{M_i\}$ попарно не пересекающихся подмножеств в метрическом пространстве $\mathcal{X} = (X, \rho)$ обозначим через $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ множество всех лесов Γ , соединяющих $\mathcal{M} = \{M_i\}$ и таких, что:

- 1) структурный граф $[\mathcal{M}, \Gamma]$ – дерево;
- 2) каждое дерево Γ_j , являющееся связной компонентой леса Γ , пересекает не менее двух разных M_i ;
- 3) каждое дерево Γ_j пересекает каждое M_i не более чем по одной вершине, причем в случае, когда $M_i \cap [\Gamma_j] \neq \emptyset$, эта вершина является граничной.

Отметим также, что в силу сделанного выше соглашения все вершины из Γ степеней 1 и 2 являются граничными. Положим $\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{M}) = \mathcal{F}(\mathcal{M}) \cap \mathcal{N}_\alpha(\mathcal{M})$. Тем самым, $\{\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{M})\}$ – это семейство всех классов $\mathcal{M}$ -изоморфности сетей из $\mathcal{F}(\mathcal{M})$. Из утверждения 3.3 легко получается следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4. Пусть $\mathcal{X} = (X, \rho)$ – произвольное метрическое пространство, а $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ – конечные семейства попарно не пересекающихся компактов в X . Тогда:

- 1) имеет место равенство $\text{smf}(\mathcal{M}) = \inf\{\rho(\Gamma) \mid \Gamma \in \mathcal{F}(\mathcal{M})\}$;
- 2) если существует кратчайшая сеть, соединяющая $\mathcal{M}$, то существует кратчайший лес, лежащий в $\mathcal{F}(\mathcal{M})$;
- 3) множество $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ состоит из конечного числа классов $\mathcal{M}$ -изоморфности сетей;
- 4) если множества $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$ равномощны и $\nu: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ – некоторая биекция, то ограничение на $\{\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{M})\}$ биекции $\nu_*: \{\mathcal{N}_\alpha(\mathcal{M})\} \rightarrow \{\mathcal{N}_\alpha(\mathcal{M}')\}$, индуцированной ν , порождает биекцию между $\{\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{M})\}$ и $\{\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{M}')\}$, которую мы также будем обозначать через ν_* .

3.3. Свойства кратчайшего леса. В этом пункте мы опишем ряд общих свойств, которыми обладает кратчайший лес, соединяющий заданные подмножества произвольного метрического пространства $\mathcal{X} = (X, \rho)$. Напомним, что каждый кратчайший лес является инъективной сетью, которую мы отождествляем с графом в объемлющем метрическом пространстве.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.5. Пусть Γ – кратчайший лес, соединяющий конечное семейство $\mathcal{M} = \{M_i\}$ попарно не пересекающихся подмножеств из $\mathcal{X}$, и $\{\Gamma_j\}$ – деревья, составляющие лес Γ . Тогда:

- 1) сеть Γ несократима;
- 2) все Γ_j являются кратчайшими деревьями (у которых все вершины степеней 1 и 2 граничные).

В случае, когда метрика пространства $\mathcal{X}$ строго внутренняя, предыдущие свойства можно усилить. Выберем для сетей Γ_i произвольные геометрические реализации g_i , так что $g = \bigcup g_i$ – соответствующая геометрическая реализация всей сети Γ . Тогда:

- 1') для любых i и j пересечение $M_i \cap [g_j]$ состоит не более чем из одной точки, причем эта точка является граничной вершиной дерева Γ_j ;
- 2') если (Δ_i, d_i) – вложенные геометрические деревья с попарно не пересекающимися следами, $(\Delta, d) = \bigsqcup_i (\Delta_i, d_i)$ и $M_i = [d_i]$, то $(\Delta, d) \oplus (\Gamma, g)$ – вложенное геометрическое дерево.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $\mathcal{X}$ – произвольное метрическое пространство.

1) Если сеть Γ сократима, то по определению в ней существует собственная подсеть Γ' , соединяющая $\mathcal{M}$. Эта подсеть не может быть короче чем Γ в силу минимальности последней, поэтому она содержит все ребра из Γ , и так как Γ по сделанному выше соглашению не содержит изолированных вершин, подсеть Γ' совпадает с Γ ; противоречие.

2) Если какое-то Γ_j не является кратчайшим деревом на $\partial\Gamma_j$, то, заменив в Γ дерево Γ_j более коротким деревом на той же границе $\partial\Gamma_j$, получим новый лес, соединяющий $\mathcal{M}$, длина которого меньше длины леса Γ , что противоречит минимальности леса Γ . Остальное следует из сделанных выше замечаний и соглашений.

Пусть теперь $\mathcal{X}$ – пространство со строго внутренней метрикой.

1') Предположим сначала, что некоторое $M_i \cap [g_j]$ состоит более чем из одной точки. Тогда в соответствии с доказанным выше среди точек этого пересечения есть точка x , являющаяся внутренней точкой геометрической реализации $g_j(e)$ некоторого ребра e дерева Γ_j . Добавим x к множеству граничных вершин леса Γ , подразбив ребро e точкой x . Полученный лес имеет ту же длину и связный структурный граф, поэтому также является кратчайшим лесом на $\mathcal{M}$, что противоречит доказанному выше, так как M_i и подразбитое Γ_j пересекаются более чем по одной вершине.

Предположим теперь, что $\{x\} = M_i \cap [g_j]$ не является граничной вершиной. Значит, в соответствии с доказанным выше x – внутренняя точка некоторого ребра геометрического дерева $[g_j]$, которое мы обозначим через e . Подразобьем ребро e , добавив точку x к множеству граничных вершин леса Γ . Полученный таким образом лес Γ' имеет ту же длину, что и Γ , и по-прежнему соединяет $\mathcal{M}$, значит, является кратчайшим. Однако структурный граф $[\mathcal{M}, \Gamma']$ получен из дерева $[\mathcal{M}, \Gamma]$ добавлением ребра $M_i \Gamma_j$, значит, содержит цикл, что противоречит несократимости кратчайшего леса.

2') Как мы уже показали, каждое Γ_j представляет собой кратчайшее дерево и, значит, является вложенным. Покажем, что $[g_i]$ не может пересекать $[g_j]$, $i \neq j$, не по общей граничной вершине. Предположим противное, и пусть x – точка пересечения. Если x не является граничной вершиной ни для Γ_i , ни для Γ_j , то x не принадлежит $\bigcup M_k$. Добавим одноточечное множество $\{x\}$ к семейству $\mathcal{M}$ и перестроим оба дерева Γ_i и Γ_j , добавив x к множествам их

граничных вершин (подразбив, если нужно, соответствующие ребра). Так перестроенные семейство $\mathcal{M}$ и лес Γ обозначим через $\mathcal{M}'$ и Γ' соответственно. Заметим, что структурный граф $[\mathcal{M}', \Gamma']$ получается из структурного графа $[\mathcal{M}, \Gamma]$ добавлением вершины $\{x\}$ и двух ребер $\{x\}\Gamma_i$ и $\{x\}\Gamma_j$, поэтому содержит цикл. Поэтому Γ' не может быть кратчайшим лесом, соединяющим $\mathcal{M}'$. С другой стороны, кратчайший лес, соединяющий $\mathcal{M}'$, очевидно, соединяет и $\mathcal{M}$, поэтому, укоротив Γ' , мы получим соединяющий $\mathcal{M}$ лес, длина которого меньше чем длина Γ . Противоречие. Случай, когда x является граничной вершиной одного из деревьев Γ_i или Γ_j , разбирается аналогично (в этом случае множество $\mathcal{M}$ перестраивать не нужно, нужно добавить x к множеству граничных вершин соответствующего дерева; тогда к структурному графу добавится ребро, и в нем снова возникнет цикл).

Итак, геометрические деревья $[g_i]$ вложены и могут пересекаться только по общим граничным вершинам. Так как все M_i – вложенные деревья с попарно не пересекающимися следами и каждое пересечение $M_i \cap [g_j]$ состоит не более чем из одной точки, причем эта точка – граничная вершина дерева Γ_j , то геометрическая сеть $(\Delta, d) \oplus (\Gamma, g)$ является вложенной. Наконец, если $(\Delta, d) \oplus (\Gamma, g)$ содержит цикл, то этот цикл порождает цикл в структурном графе $[\mathcal{M}, \Gamma]$, что противоречит доказанному выше.

Утверждение полностью доказано.

В качестве следствия получаем следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.6. Пусть $\mathcal{X} = (X, \rho)$ – произвольное метрическое пространство, а $\mathcal{M}$ – конечное семейство попарно не пересекающихся компактов в X . Тогда с учетом сделанных соглашений каждый кратчайший лес на $\mathcal{M}$ лежит в $\mathcal{F}(\mathcal{M})$.

§ 4. Существование кратчайшего леса

В этом параграфе мы докажем теорему существования кратчайшего леса в метрическом пространстве в следующем естественном предположении: каждое конечное подмножество этого пространства соединяется кратчайшим деревом. Нам понадобится следующий факт из математического анализа.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. Пусть (Y, ρ) и (Z, μ) – произвольные метрические пространства и $f: Y \times Z \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция, ограниченная снизу по второй переменной, т.е. $\inf_{z \in Z} f(y, z) \in \mathbb{R}$ для любого $y \in Y$, и равномерно непрерывная по первой переменной, т.е. для любого $y_0 \in Y$ и любого положительного ε найдется такое $\delta > 0$, что

$$|f(y, z) - f(y_0, z)| < \varepsilon \quad \text{при всех } z \in Z \text{ и всех } y \in Y, \text{ для которых } \rho(y, y_0) < \delta.$$

Положим $g(y) = \inf_{z \in Z} f(y, z)$. Тогда функция $g(y)$ непрерывна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т.е. существует точка $y_0 \in Y$, в которой g разрывна. Это означает, что существуют $\varepsilon > 0$ и сходящаяся к y_0 последовательность $\{y_n\} \subset Y$, для которой $|g(y_0) - g(y_n)| > \varepsilon$.

Предположим сначала, что в последовательности y_n существует подпоследовательность y_{n_k} , для которой $g(y_{n_k}) > g(y_0) + \varepsilon$. Без ограничения общности будем считать, что эта подпоследовательность совпадает с y_n . По определению функции g существует такое z_0 , что $f(y_0, z_0) < g(y_0) + \varepsilon/2$. Так как f непрерывна, существуют такие окрестности U и V точек y_0 и z_0 , что для любой $(y, z) \in U \times V$ имеем $|f(y_0, z_0) - f(y, z)| < \varepsilon/2$. Так как y_n сходится к y_0 , существует такое n , что $y_n \in U$, поэтому при каждом $z \in V$ имеем

$$g(y_0) + \frac{\varepsilon}{2} > f(y_0, z_0) > f(y_n, z) - \frac{\varepsilon}{2} \geq g(y_n) - \frac{\varepsilon}{2} > g(y_0) + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = g(y_0) + \frac{\varepsilon}{2};$$

противоречие.

Таким образом, без ограничения общности можно считать, что $g(y_n) < g(y_0) - \varepsilon$. Так как функция f равномерно непрерывна по первой переменной, то существует такое $\delta > 0$, что при любом $y \in Y$, для которого $\rho(y, y_0) < \delta$, и любом $z \in Z$ выполняется неравенство $|f(y_0, z) - f(y, z)| < \varepsilon$. Отсюда вытекает, что для таких y имеем $f(y, z) > f(y_0, z) - \varepsilon$ при всех $z \in Z$ и, значит,

$$g(y) = \inf_{z \in Z} f(y, z) \geq \inf_{z \in Z} f(y_0, z) - \varepsilon = g(y_0) - \varepsilon.$$

Так как y_n сходится к y_0 , то существует такое n , что $\rho(y_n, y_0) < \delta$, и, значит, $g(y_n) \geq g(y_0) - \varepsilon$; противоречие. Утверждение доказано.

Отметим, что равномерно непрерывная ограниченная снизу функция $f: Y \times Z \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям утверждения 4.1, поэтому для таких функций утверждение 4.1 имеет место.

Пусть $G = (V, E)$ – граф с границей ∂G и множеством внутренних вершин $I(G)$, и пусть (X, ρ) – метрическое пространство. Пусть $\Gamma: V \rightarrow X$ – произвольная сеть типа G . Упорядочим вершины из ∂G и $I(G)$, и пусть $\partial G = (b_1, \dots, b_n)$ и $I(G) = (i_1, \dots, i_m)$. Тогда каждая сеть Γ естественным образом отождествляется с точкой $(\Gamma(b_1), \dots, \Gamma(b_n), \Gamma(i_1), \dots, \Gamma(i_m))$ конфигурационного пространства $W = \underbrace{X \times \dots \times X}_{n+m \text{ раз}}$, наделенного метрикой, в которой расстояние между

$(u_1, \dots, u_{n+m})$ и $(v_1, \dots, v_{n+m})$ равно $\max\{\rho(u_i, v_i) \mid i = 1, \dots, n+m\}$. Положим

$$Y = \underbrace{X \times \dots \times X}_{n \text{ раз}}, \quad Z = \underbrace{X \times \dots \times X}_{m \text{ раз}}, \quad W = Y \times Z.$$

Пусть $\varphi: \partial G \rightarrow X$ – произвольное граничное отображение. Положим $y_\varphi = (\varphi(b_1), \dots, \varphi(b_n))$. Тогда семейство $[G, \varphi]$ естественным образом отождествляется с подпространством $\{y_\varphi\} \times Z$. Если же $\Psi: \partial G \rightarrow \mathcal{P}^*(X)$ – частично свободная граница, $M_i = \Psi(b_i)$ и $M = M_1 \times \dots \times M_n$, то множество $[G, \Psi]$ естественным образом отождествляется с подпространством $M \times Z$.

Рассмотрим функцию

$$f(\Gamma) = \rho(\Gamma) = \sum_{vw \in E} \rho(\Gamma(v), \Gamma(w)).$$

В силу сделанного отождествления f можно рассматривать как функцию на W . Так как ρ , будучи метрикой, является равномерно непрерывной функцией своих аргументов (в силу неравенства треугольника), то функция $f: W \rightarrow \mathbb{R}$ также

равномерно непрерывна. Кроме того, равномерно непрерывными являются и ограничения функции f на каждое подпространство $[G, \varphi]$ и $[G, \Psi]$. Наконец, функция f неотрицательна, т.е. ограничена снизу нулем.

По утверждению 4.1 функция $g(y) = \inf_{z \in Z} f(y, z)$ непрерывна, тем самым, функция $g(y_\varphi) = [G, \varphi]_{\min}$ непрерывно зависит от φ , т.е. от y_φ . Итак, мы доказали следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. *В произвольном метрическом пространстве наименьшая длина параметрической сети является непрерывной функцией положения граничных точек сети.*

Пусть $\Psi: \partial G \rightarrow \mathcal{P}^*(X)$ – некоторая свободная граница, причем $M_i = \Psi(b_i)$ – компактное подмножество в X для каждой вершины $b_i \in \partial G$. В этом случае будем называть частично свободную границу Ψ *компактной*. По утверждению 4.1 наименьшая длина $g(y_\varphi) = [G, \varphi]_{\min}$ параметрической сети типа G с границей φ , согласованной с Ψ , является непрерывной функцией на компакте $M = M_1 \times \dots \times M_n$, поэтому существует φ_0 , для которого

$$g(y_{\varphi_0}) = \inf_{y_\varphi \in M} [G, \varphi]_{\min} = [G, \Psi]_{\min}.$$

Тем самым, получен следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. *Пусть (X, ρ) – произвольное метрическое пространство. Тогда для каждого класса $[G, \Psi]$ сетей типа G с частично свободной компактной границей $\Psi: \partial G \rightarrow \mathcal{P}^*(X)$ существует граничное отображение $\varphi: \partial G \rightarrow X$, согласованное с Ψ , для которого $[G, \Psi]_{\min} = [G, \varphi]_{\min}$.*

Напомним, что через $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ мы обозначили множество всех лесов Γ , соединяющих $\mathcal{M} = \{M_i\}$; каждое дерево, составляющее лес Γ , пересекает каждое M_i не более чем по одной вершине; структурный граф $[\mathcal{M}, \Gamma]$ – дерево.

Теперь мы можем доказать следующую теорему о существовании кратчайшего леса.

ТЕОРЕМА 4.1. *Если в метрическом пространстве (X, ρ) любой конечный набор точек соединяется кратчайшим деревом, то для любого конечного набора $\mathcal{M} = \{M_i\}$ попарно не пересекающихся компактов из X существует соединяющий их кратчайший лес. Иными словами, в сделанных предположениях имеем $\text{SMF}(\mathcal{M}) \neq \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу утверждения 3.6 кратчайший лес можно искать в множестве $\mathcal{F}(\mathcal{M})$. В силу утверждения 3.4 в $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ имеется конечное число классов $\mathcal{M}$ -изоморфности сетей. Отметим, что каждый такой класс имеет вид $[F_i, \Psi_i]$, где F_i – тип сетей этого класса, а Ψ_i – компактная частично свободная граница, переводящая каждую граничную вершину леса F_i в то множество $M_j \in \mathcal{M}$, в котором лежат образы этой вершины при действии всевозможных сетей этого класса. Таким образом, $\text{smf}(\mathcal{M}) = \min_i [F_i, \Psi_i]_{\min}$, где минимум берется по конечному множеству классов, поэтому для некоторого k имеем $\text{smf}(\mathcal{M}) = [F_k, \Psi_k]_{\min}$.

По следствию 4.2 существует граничное отображение $\varphi: \partial F_k \rightarrow X$, для которого $[F_k, \Psi_k]_{\min} = [F_k, \varphi]_{\min}$. Обозначим через F_k^i связные компоненты леса F_k и положим $\partial F_k^i = V(F_k^i) \cap \partial F_k$. Пусть φ_i обозначает ограничение отображения φ на ∂F_k^i . По предположению каждое множество $[\varphi_i]$ соединяется некоторым кратчайшим деревом Γ_i . Положим $\Gamma = \bigcup \Gamma_i$. Тогда, как легко видеть, лес Γ соединяет $\mathcal{M}$ и его длина не превосходит $[F_k, \varphi]_{\min} = \text{smf}(\mathcal{M})$, поэтому Γ – кратчайший лес, т.е. $\Gamma \in \text{SMF}(\mathcal{M})$. Доказательство закончено.

Учитывая, что в $\mathbb{R}^N$ любой конечный набор точек можно соединить кратчайшим деревом (см., например, [10] или [9]), получаем, следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. *Любое конечное семейство попарно не пересекающихся компактов в $\mathbb{R}^N$ соединяет некоторый кратчайший лес.*

§ 5. Некоторые технические результаты

Пусть (Γ, g) – связная геометрическая сеть в $\mathcal{X}$. Напомним, что через $U_\varepsilon(g)$ мы обозначили ε -окрестность следа $[g]$ этой геометрической сети, а через ρ_ε^g – внутреннюю метрику на $U_\varepsilon(g)$, порожденную метрикой ρ . Как и выше, через $\mathcal{U}_\varepsilon(g)$ обозначим множество всех геометрических сетей в $\mathcal{X}$ с границей $\partial\Gamma$, лежащих в $U_\varepsilon(g)$.

Всюду далее, где не оговорено иное, считаем, что $\mathcal{X}$ – это конечномерное пространство $\mathbb{R}^N$ с евклидовой метрикой ρ .

ТЕОРЕМА 5.1 (см. [6]). *Пусть G – вложенное локально минимальное дерево в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$. Тогда при некотором $\varepsilon > 0$ длина дерева G является наименьшей среди длин сетей из $\mathcal{U}_\varepsilon(G)$.*

Пусть G – произвольный граф и $M \subset V(G)$. Путь γ в G назовем M -путем, если концы пути γ лежат в M .

Пусть G – произвольное дерево с границей ∂G , содержащей все вершины степени 1 и разбитой на непересекающиеся подмножества M_i . Положим $\mathcal{M} = \{M_i\}$. Ребро $e \in E(G)$ назовем *особым по отношению к $\mathcal{M}$* , если в G не существует M_i -пути, содержащего e . В противном случае, т.е. когда существует M_i -путь, содержащий e , ребро e назовем *неособым*.

Через $F_{\mathcal{M}}(G)$ обозначим лес, множество вершин которого $V(F_{\mathcal{M}}(G))$ содержит ∂G и концы всех неособых ребер, а $E(F_{\mathcal{M}}(G))$ совпадает с множеством всех ребер из G , неособых по отношению к $\mathcal{M}$. Пусть $\{G_i\}$ – множество всех деревьев, составляющих лес $F_{\mathcal{M}}(G)$. Положим $\partial G_i = V(G_i) \cap \partial G$; тогда, так как $F_{\mathcal{M}}(G) = \bigsqcup_i G_i$ и $\partial G \subset V(F_{\mathcal{M}}(G))$, имеем $\partial G = \bigsqcup_i \partial G_i$. Лес, состоящий из особых ребер дерева G по отношению к $\mathcal{M}$, вершины которого являются концами особых ребер, будем обозначать $S_{\mathcal{M}}(G)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. *В сделанных выше предположениях пусть про дерево G дополнительно известно, что при $i \neq j$ каждый путь, соединяющий вершину из M_i с вершиной из M_j , содержит особое ребро. Тогда граница ∂G_i дерева G_i включает все $v \in V(G_i)$, для которых $\deg_{G_i} v = 1$, и совпадает с одним из M_j , т.е. G_i соединяет M_j . Таким образом, так как разные G_i*

не пересекаются и $\bigsqcup_i \partial G_i = \bigsqcup_j M_j$, каждое M_j соединяется одним и только одним G_i . Тем самым, имеется естественное взаимно однозначное соответствие между $\{G_i\}$ и $\{M_j\}$, сопоставляющее каждому G_i то единственное M_j , которое оно соединяет.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сделаем сначала несколько полезных для дальнейшего замечаний.

1) Так как G_i – связные компоненты леса $F_{\mathcal{M}}(G)$, порожденного всеми неособыми ребрами, к которому добавлены все граничные вершины дерева G , то каждая вершина $v \in V(G_i)$ такая, что $\deg_{G_i} v < \deg_G v$, инцидентна $\deg_G v - \deg_{G_i} v > 0$ особым ребрам.

2) Все ребра каждого M_j -пути являются неособыми.

Покажем, что ∂G_i содержит все вершины $v \in V(G_i)$, для которых $\deg_{G_i} v = 1$. Предположим противное, т.е. существует вершина $v \in V(G_i)$, для которой $\deg_{G_i} v = 1$, но $v \notin \partial G_i$. По определению ∂G_i последнее означает, что $v \notin \partial G$ и, значит, v не принадлежит ни одному M_j . Так как ∂G по предположению содержит все вершины степени 1 дерева G , имеем также $\deg_G v > 1$. В силу замечания 1) вершина v инцидентна некоторым особым ребрам. Обозначим через e единственное ребро из G_i , инцидентное v , являющееся по определению G_i неособым, а через $e_1, \dots, e_k$ – все остальные ребра из G , инцидентные v , представляющие собой особые ребра. Так как e – неособое ребро, существует M_j -путь γ , содержащий e . Но так как v не принадлежит M_j , путь γ проходит через одно из особых ребер e_p , что противоречит замечанию 2).

Покажем теперь, что все вершины из ∂G_i лежат в одном и том же M_j . Предположим противное, т.е. существуют по крайней мере два разных M_j и M_k таких, что одна из граничных вершин дерева G_i , скажем v , лежит в M_j , а другая, скажем w , – в M_k . Пусть γ – путь в G_i , соединяющий v и w . По условию утверждения путь γ содержит особое ребро, однако в дереве G_i нет особых ребер; противоречие.

Докажем, что в каждом M_j лежат граничные вершины только одного G_i . Предположим противное, т.е. для некоторых j, p и q выполняется $\partial G_p \subset M_j$ и $\partial G_q \subset M_j$. Выберем произвольные $v \in \partial G_p$, $w \in \partial G_q$, и пусть γ – путь в G , соединяющий v и w . В силу замечания 2) путь γ состоит из неособых ребер, поэтому G_p и G_q лежат в одной и той же связной компоненте леса $F_{\mathcal{M}}(G)$, что противоречит их определению.

Итак, мы показали, что каждое M_j содержит ровно одно ∂G_i и не пересекается с остальными ∂G_k . Так как $\partial G = \bigsqcup_j M_j = \bigsqcup_i \partial G_i$, заключаем, что каждое множество ∂G_i совпадает с некоторым M_j и каждое множество M_j совпадает с некоторым ∂G_i . Доказательство закончено.

В дальнейшем мы будем предполагать, что нумерация деревьев G_i и множеств M_i согласована так, чтобы дерево G_i соединяло M_i . Построенное соответствие будем называть *каноническим*.

Пусть G – произвольное дерево с границей ∂G , содержащей все вершины степеней 1 и 2, и e – произвольное ребро дерева G . Обозначим через G_1 и G_2 деревья, на которые распадется G после выбрасывания ребра e , и пусть

$P_i = \partial G \cap V(G_i)$. Полученное разбиение $\{P_1, P_2\}$ граничного множества ∂G обозначим через $\mathcal{P}_G(e)$. Имеет место следующий несложный результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.2 (см. [5]). *В сделанных предположениях если $e_1 \neq e_2$ – ребра дерева G , то*

$$\mathcal{P}_G(e_1) \neq \mathcal{P}_G(e_2).$$

СЛЕДСТВИЕ 5.1. *Пусть G – произвольное дерево с границей ∂G , содержащей все вершины степеней 1 и 2. Предположим, что задано разбиение $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i=1}^n$ множества ∂G . Тогда дерево G содержит не более $2^{n-1} - 1$ ребер, особых для этого разбиения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разбиение $\mathcal{P}_G(e)$, соответствующее произвольному особому ребру, состоит из двух множеств $P_j \subset \partial G$, каждое из которых представляет собой объединение некоторых M_i . По утверждению 5.2 такие $\mathcal{P}_G(e)$, соответствующие разным особым ребрам, различны, поэтому особых ребер не больше чем разбиений множества $\mathcal{M}$, состоящего из n элементов, на два непустых подмножества, т.е. не больше чем $2^{n-1} - 1$, что и требовалось.

Если $M \subset \mathbb{R}^N$, то величину

$$s(M) = \sup\{\rho(P_1, P_2) \mid M = P_1 \sqcup P_2, P_i \neq \emptyset\}$$

будем называть *разреженностью множества M* (см. также [4]), считая, что если M одноточечно или пусто, то $s(M) = 0$. Если $\mathcal{M} = \{M_i\}$ – конечное семейство подмножеств в $\mathbb{R}^N$, то *разреженностью $s(\mathcal{M})$ семейства $\mathcal{M}$* назовем максимум из чисел $s(M_i)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.3. *Пусть M – конечное подмножество, представленное в виде $\bigsqcup_i M_i$, и пусть Γ – кратчайшее дерево, соединяющее M . Положим $\mathcal{M} = \{M_i\}$. Тогда для любого ребра $e \in E(\Gamma)$, неособого по отношению к семейству $\mathcal{M}$, имеем $\rho(e) \leq s(\mathcal{M})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть e – ребро дерева Γ , неособое по отношению к семейству $\mathcal{M}$. Обозначим через Γ_i деревья, на которые распадается Γ после выбрасывания e . Положим $\mathcal{P}_\Gamma(e) = \{P_1, P_2\}$.

Так как e неособое, в Γ имеется M_i -путь, содержащий e . Концы этого пути лежат в разных P_j , поэтому $P_1 \cap M_i \neq \emptyset$ и $P_2 \cap M_i \neq \emptyset$. Обозначим через p_j точки из $P_j \cap M_i$, $j = 1, 2$, на которых достигается величина $\rho(P_1 \cap M_i, P_2 \cap M_i)$. Так как $\{P_1 \cap M_i, P_2 \cap M_i\}$ – разбиение множества M_i на непустые подмножества, то $\rho(p_1, p_2) \leq s(M_i) \leq s(\mathcal{M})$. Кроме того, вершины p_1 и p_2 не являются смежными в Γ , так как лежат в разных компонентах разбиения $\mathcal{P}_\Gamma(e)$. Рассмотрим путь γ в Γ , соединяющий p_1 и p_2 . Тогда γ проходит через e , и так как дерево Γ кратчайшее, имеем $\rho(e) \leq \rho(p_1, p_2) \leq s(\mathcal{M})$, что и требовалось.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.4. *Каждое дерево G , у которого все вершины степеней 1 и 2 граничные, а граница состоит из n вершин, содержит не более $2n - 2$ вершин и не более чем $2n - 3$ ребер, причем равенства достигаются только на бинарных деревьях, т.е. деревьях, степени вершин которых равны 1 или 3.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если k_i – количество вершин дерева G степени i , а v и e – соответственно количества вершин и ребер в этом дереве, то $e = v - 1$, $v = \sum_i k_i$, откуда

$$2e = \sum_i i \cdot k_i = k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots = 2\left(\sum_i k_i - 1\right).$$

Таким образом, $k_3 + 2k_4 + 3k_5 + \dots = k_1 - 2$, откуда

$$v = \sum_i k_i \leq k_1 + k_2 + (k_3 + 2k_4 + 3k_5 + \dots) = k_1 + k_2 + k_1 - 2 \leq 2k_1 + 2k_2 - 2 \leq 2n - 2,$$

причем равенство достигается, если и только если $k_2 = k_i = 0$ при $i \geq 4$, т.е. на бинарных деревьях. Наконец, $e = v - 1 \leq 2n - 3$. Доказательство закончено.

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть F – лес, у которого все вершины степеней 1 и 2 граничные, а граница состоит из n вершин. Обозначим через k число деревьев, составляющих лес F , т.е. число его компонент связности. Тогда F содержит не более чем $2n - 2k \leq 2n - 2$ вершин и не более чем $2n - 3k \leq 2n - 3$ ребер.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $G_1, \dots, G_k$ – деревья, составляющие лес F , границы которых индуцированы из F . Обозначим через n_i количество граничных вершин в дереве G_i , и пусть v_i и e_i обозначают соответственно количества вершин и ребер в этом дереве. По утверждению 5.4 имеем $v_i \leq 2n_i - 2$ и $e_i \leq 2n_i - 2$, откуда количества вершин и ребер леса F оцениваются как $2 \sum_i n_i - 2k = 2n - 2k$ и $2 \sum_i n_i - 3k = n - 3k$ соответственно.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.5. Пусть (Δ, d) – некоторое вложенное геометрическое дерево в $\mathbb{R}^N$, граница которого состоит из n вершин. Пусть (Δ^p, d^p) обозначает p -подразбиение геометрического дерева (Δ, d) . Тогда граница $\partial\Delta^p$ дерева Δ^p состоит не более чем из $n + (2n - 3)(2^p - 1)$ вершин.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В p -подразбитом дереве Δ^p граница $\partial\Delta^p$ получается из границы $\partial\Delta$ добавлением на каждое ребро $2^p - 1$ граничной вершины, а в силу утверждения 5.4 в дереве Δ имеется не более $2n - 3$ ребер, откуда и получается доказываемое неравенство.

СЛЕДСТВИЕ 5.3. Пусть (Δ, d) – некоторый вложенный геометрический лес в $\mathbb{R}^N$, граница которого состоит из n вершин. Пусть (Δ^p, d^p) обозначает p -подразбиение геометрического леса (Δ, d) . Тогда граница $\partial\Delta^p$ леса Δ^p состоит не более чем из $n + (2n - 3)(2^p - 1)$ вершин.

Если Δ – произвольная сеть в $\mathbb{R}^N$, то через $\sigma(\Delta)$ будем обозначать максимальную длину ее ребра.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.6. Пусть (Δ, d) – некоторое вложенное геометрическое дерево в $\mathbb{R}^N$ и (Δ^p, d^p) обозначает p -подразбиение геометрического дерева (Δ, d) . Положим $M^p = \partial\Delta^p$. Тогда $s(M^p) \leq \sigma(\Delta)/2^{p-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что дерево (Δ^p, d^p) получается из дерева (Δ, d) равномерным разбиением каждого ребра из Δ с помощью $2^p - 1$ граничных

вершин. Легко видеть, что для любого разбиения $\{P_1, P_2\}$ множества M^p существуют такие точки $p_i \in P_i$, $i = 1, 2$, которые или являются смежными вершинами в (Δ^p, d^p) , или обе смежны с одной и той же подвижной вершиной дерева (Δ^p, d^p) . Отсюда вытекает, что $\rho(p_1, p_2)$ не больше суммы длин двух ребер дерева Δ^p , а длины ребер дерева Δ^p не превосходят $\sigma(\Delta)/2^p$. Тем самым, $\rho(P_1, P_2) \leq \sigma(\Delta)/2^{p-1}$, откуда и вытекает требуемое.

СЛЕДСТВИЕ 5.4. Пусть $\{(\Delta_i, d_i)\}$ – некоторое конечное семейство вложенных попарно не пересекающихся геометрических деревьев в $\mathbb{R}^N$. Положим $\Delta = \bigsqcup_i \Delta_i$. Пусть (Δ_i^p, d_i^p) обозначает p -подразбиение геометрического дерева (Δ_i, d_i) . Положим $M_i^p = \partial\Delta_i^p$ и $\mathcal{M}^p = \{M_i^p\}$. Тогда $s(\mathcal{M}^p) \leq \sigma(\Delta)/2^{p-1}$.

СЛЕДСТВИЕ 5.5. Пусть $\{(\Delta_i, d_i)\}$ – некоторое конечное семейство вложенных попарно не пересекающихся геометрических деревьев в $\mathbb{R}^N$. Положим $(\Delta, d) = \bigsqcup_i (\Delta_i, d_i)$, и пусть (Δ^p, d^p) обозначает p -подразбиение геометрического леса (Δ, d) . Положим $M_i^p = \partial\Delta_i^p$ и $\mathcal{M}^p = \{M_i^p\}$. Тогда для любого кратчайшего дерева, соединяющего $\partial\Delta^p$, и любого его ребра e , неособого по отношению к $\mathcal{M}^p$, выполняется $\rho(e) \leq \sigma(\Delta)/2^{p-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По утверждению 5.3 имеем $\rho(e) \leq s(\mathcal{M}^p)$, а по следствию 5.4 выполняется $s(\mathcal{M}^p) \leq \sigma(\Delta)/2^{p-1}$, что и требовалось.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.7 (см. [4]). Пусть G – произвольное дерево с границей, состоящей из $n > 1$ вершин и включающей все вершины степеней 1 и 2. Тогда для каждой вершины $v \in V(G)$ кратчайший по числу ребер путь, соединяющий v с $\partial G \setminus \{v\}$, состоит не более чем из $\log_2(2n)$ ребер.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.8. Пусть $\{(\Delta_i, d_i)\}_{i=1}^n$ – некоторое семейство вложенных попарно не пересекающихся геометрических деревьев в $\mathbb{R}^N$. Рассмотрим вложенный геометрический лес $(\Delta, d) = \bigsqcup_i (\Delta_i, d_i)$ и обозначим его p -подразбиение через $(\Delta^p, d^p) = \bigsqcup_i (\Delta_i^p, d_i^p)$. Положим $M_i^p = \partial\Delta_i^p$ и $\mathcal{M}^p = \{M_i^p\}$, так что $\partial\Delta^p = \bigsqcup_i M_i^p$. Тогда найдется такое положительное ε , что для любого положительного $\delta < \varepsilon$ существует такое $p_0 \geq 0$, зависящее от δ , что для любого целого $p \geq p_0$ и любого $\Gamma^p \in \text{SMT}(\partial\Delta^p)$ выполняются следующие условия:

- 1) для каждого ребра vw дерева Γ^p , неособого по отношению к разбиению $\mathcal{M}^p$, точки v и w принадлежат $U_\delta(d)$;
- 2) каждый путь в Γ^p , соединяющий точки из разных M_i^p и M_j^p , содержит особое ребро.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть vw – ребро дерева Γ^p , неособое по отношению к $\mathcal{M}^p$. Тогда по определению для некоторого i существует M_i^p -путь в Γ^p , содержащий vw . Обозначим через $\Gamma^p[vw]$ объединение всех путей в Γ^p , начинающихся на vw и заканчивающихся на вершинах из M_i^p . Ясно, что $\Gamma^p[vw]$ – дерево, причем все вершины этого дерева степени 1 лежат в M_i^p . Выберем в качестве границы дерева $\Gamma^p[vw]$ границу, индуцированную из Γ^p . Таким образом, все вершины степени 1 дерева $\Gamma^p[vw]$ граничные.

Заметим, что все ребра дерева $\Gamma^p[vw]$ являются неособыми по отношению к $\mathcal{M}^p$, поэтому в силу следствия 5.5 длина каждого ребра из $E(\Gamma^p[vw])$ не превосходит $\sigma(\Delta)/2^{p-1}$.

Далее, так как $\Gamma^p[vw]$ – дерево, оно целиком содержится в дереве Δ_i^p . Поэтому если некоторое ребро e дерева Γ^p смежно некоторой вершине u дерева $\Gamma^p[vw]$, но не входит в него, то ребро e особое по отношению к $\mathcal{M}^p$. Действительно, ясно, что $e \in \Delta_i^p$, поэтому если e неособое, то оно лежит на некотором M_i^p -пути, поэтому e также лежит на некотором пути, начинающемся на ребре vw и заканчивающемся в вершине из M_i^p . Но тогда e входит в дерево $\Gamma^p[vw]$; противоречие. Так как в дереве Γ^p нет внутренних вершин степени 2, отсюда вытекает, что каждая внутренняя вершина дерева $\Gamma^p[vw]$, имеющая в $\Gamma^p[vw]$ степень 2, смежна с некоторым особым ребром дерева Γ^p . Тогда по следствию 5.1 дерево $\Gamma^p[vw]$ может содержать не более чем $2^{n-1} - 1$ внутренних вершин u степени 2.

Рассмотрим в $\Gamma^p[vw]$ все максимальные пути, последовательные ребра которых стыкуются во внутренних вершинах степени 2, и заменим каждый такой путь на ребро, соединяющее концы этого пути. Так перестроенное дерево $\Gamma^p[vw]$ обозначим через $\Gamma_{\text{mod}}^p[vw]$. Отметим, что в дереве $\Gamma_{\text{mod}}^p[vw]$ все вершины степеней 1 и 2 принадлежат границе, а длины ребер не превосходят

$$\frac{(2^{n-1} - 1)\sigma(\Delta)}{2^{p-1}} = \frac{a}{2^p},$$

где величина a вычисляется по исходному лесу Δ и не зависит от p .

Пусть m обозначает число граничных вершин леса Δ . По следствию 5.3 граница $\partial\Delta^p$ леса Δ^p содержит не более чем $m + (2m - 3)(2^p - 1)$ вершин, поэтому и граница дерева $\Gamma_{\text{mod}}^p[vw]$ содержит не более чем $m + (2m - 3)(2^p - 1) = b + 2^p c$ вершин, где величины b и c вычисляются по исходному лесу Δ и не зависят от p .

По утверждению 5.7 кратчайший по числу ребер путь в дереве $\Gamma_{\text{mod}}^p[vw]$ от любой вершины u до границы этого дерева содержит не более чем $\log_2(2b + 2^{p+1}c)$ ребер, поэтому в силу полученной выше оценки на длины ребер леса $\Gamma_{\text{mod}}^p[vw]$ заключаем, что расстояние от u до ближайшей граничной точки не больше чем

$$\frac{a \log_2(2b + 2^{p+1}c)}{2^p}.$$

Заметим, что величина $a \log_2(2b + 2^{p+1}c)/2^p$ стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$. Таким образом, для некоторого p_0 при всех $p \geq p_0$ все вершины дерева $\Gamma_{\text{mod}}^p[vw]$ лежат в $U_{\delta/2}(d)$.

Рассмотрим теперь произвольную вершину v' дерева $\Gamma^p[vw]$, и пусть $u(v')$ – вершина дерева $\Gamma_{\text{mod}}^p[vw]$, для которой путь в дереве $\Gamma^p[vw]$ от v' до $u(v')$ состоит из наименьшего числа ребер. Тогда количество ребер этого пути не превосходит 2^{n-1} и, значит, $\rho(v', u(v')) \leq 2^{n-1}a/2^p$; поэтому, увеличив, если необходимо, p_0 , можно добиться того, чтобы для каждого $p \geq p_0$ и всех таких вершин v' по всем возможным деревьям $\Gamma^p(vw)$ выполнялось $\rho(v', u(v')) < \delta/2$. Последнее гарантирует, что вершины, инцидентные неособым ребрам, лежат в $U_\delta(d)$.

2) Пусть ℓ – наименьшее из чисел $\rho([d_i], [d_j])$, $i \neq j$. Выберем теперь $\varepsilon > 0$ таким, чтобы оно было меньше $\ell/3$. Тогда для любых $i \neq j$ имеем

$$\rho(U_\delta(d_i), U_\delta(d_j)) > \frac{\ell}{3} > \varepsilon > \delta,$$

в частности, δ -окрестности множеств $[d_i]$ не пересекаются. С другой стороны, в соответствии с п. 1) мы можем выбрать p_0 так, чтобы для всех $p \geq p_0$ все вершины из Γ^p , инцидентные неособым ребрам, лежали в $U_\delta(d)$ и длины всех ребер сети Γ^p были меньше δ .

Пусть γ – путь в Γ^p , соединяющий разные M_i^p и M_j^p . Мы должны показать, что путь γ содержит особое ребро. Предположим противное, т.е. все ребра пути γ неособые. Тогда все вершины этого пути лежат в $U_\delta(d)$. С другой стороны, так как начальная вершина пути γ лежит в окрестности $U_\delta(d_i)$, а конечная – в окрестности $U_\delta(d_j)$ и эти окрестности не пересекаются, существует такое k и такие последовательные вершины x и y пути γ , что $x \in U_\delta(d_i)$, а $y \in U_\delta(d_j)$; но тогда длина ребра xy пути γ больше δ . Противоречие.

Из утверждений 5.8 и 5.1 вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 5.6. Пусть $\{(\Delta_i, d_i)\}_{i=1}^n$ – некоторое семейство вложенных попарно не пересекающихся геометрических деревьев в $\mathbb{R}^N$. Положим $(\Delta, d) = \bigsqcup_i (\Delta_i, d_i)$, и пусть $(\Delta^p, d^p) = \bigsqcup_i (\Delta_i^p, d_i^p)$ обозначает p -подразбиение геометрического леса (Δ, d) . Положим $M_i^p = \partial\Delta_i^p$ и $\mathcal{M}^p = \{M_i^p\}$, так что $\partial\Delta^p = \bigsqcup_i M_i^p$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого положительного $\delta < \varepsilon$ найдется такое $p_0 \geq 0$, зависящее от δ , что для каждого целого $p \geq p_0$ и любого $\Gamma^p \in \text{SMT}(\partial\Delta^p)$ выполняется следующее условие. Пусть Γ_i^p – деревья, составляющие лес $F_{\mathcal{M}^p}(\Gamma^p)$, полученный выкидыванием из Γ^p всех ребер, особых по отношению к разбиению $\mathcal{M}^p$. Тогда после подходящей перенумерации деревьев Γ_i^p граница $\partial\Gamma_i^p$ дерева Γ_i^p включает все $v \in V(\Gamma_i^p)$, для которых $\deg_{\Gamma_i^p} v = 1$, и совпадает с M_i^p , т.е. Γ_i^p соединяет M_i^p ; тем самым, каждое M_i^p соединяется одним и только одним Γ_j^p , а именно Γ_i^p . При этом $V(\Gamma_i^p) \subset U_\delta(d_i)$.

Число p_0 из следствия 5.6 назовем *стабильным*, дерево Γ_i^p – *неособым поддеревом* кратчайшего дерева Γ^p , соответствующим M_i^p , а лес $F_{\mathcal{M}^p}(\Gamma^p)$ – *неособым подлесом* в Γ^p . Соответственно лес, состоящий из ребер Γ^p , особых по отношению к разбиению $\mathcal{M}^p$, назовем *особым подлесом* в Γ^p и будем обозначать $S_{\mathcal{M}^p}(\Gamma^p)$.

§ 6. Сходимость по Хаусдорфу

Пусть $\mathcal{X} = (X, \rho)$ – произвольное метрическое пространство. Напомним, что для любых подмножеств A и B в X *расстоянием Хаусдорфа* между этими подмножествами называется число

$$\rho_H(A, B) = \max \left\{ \sup_{a \in A} \rho(a, B), \sup_{b \in B} \rho(b, A) \right\}, \quad \text{где } \rho(x, A) = \inf_{a \in A} \rho(x, a).$$

Хорошо известно (см., например, [9]), что $\rho_H(A, B)$ равно точной нижней грани тех $\varepsilon > 0$, для которых одновременно $A \subset U_\varepsilon(B)$ и $B \subset U_\varepsilon(A)$, и что

функция ρ_H является метрикой на множестве $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ всех непустых компактных подмножеств из $\mathcal{X}$. Сходимость в метрическом пространстве $(\mathcal{K}(\mathcal{X}), \rho_H)$ называется *сходимостью по Хаусдорфу*.

Пусть $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ в задана последовательность $\{\mathcal{M}^k\}$, состоящая из n -элементных семейств $\mathcal{M}^k$ компактных подмножеств M_i^k в $\mathcal{X}$, т.е. $\mathcal{M}^k = \{M_1^k, \dots, M_n^k\}$, $k = 1, 2, \dots$. Будем говорить, что эта последовательность *сходится по Хаусдорфу* к семейству компактов $\mathcal{M} = \{M_1, \dots, M_n\}$, если при каждом i последовательность $M_i^1, M_i^2, \dots$ сходится по Хаусдорфу к компакту $M_i \subset X$. Отметим, что при этом последовательность компактов $M^k = \bigcup_i M_i^k$ также сходится по Хаусдорфу к компакту $\bigcup_i M_i$.

СЛЕДСТВИЕ 6.1. Пусть $\{(\Delta_i, d_i)\}_{i=1}^n$ – некоторое семейство вложенных попарно не пересекающихся геометрических деревьев в $\mathbb{R}^N$. Положим $(\Delta, d) = \bigsqcup_i (\Delta_i, d_i)$, и пусть $(\Delta^p, d^p) = \bigsqcup_i (\Delta_i^p, d_i^p)$ обозначает p -подразбиение геометрического леса (Δ, d) . Положим $M_i^p = \partial\Delta_i^p$ и $\mathcal{M}^p = \{M_i^p\}$, так что $\partial\Delta^p = \bigsqcup_i M_i^p$. Тогда, начиная с некоторого p , не меньшего стабильного p_0 , следы $[g_i^p]$ произвольных геометрических реализаций g_i^p неособых поддеревьев Γ_i^p кратчайших деревьев $\Gamma^p \in \text{SMT}(\partial\Delta^p)$ сходятся по Хаусдорфу к следам $[d_i]$ геометрических реализаций d_i деревьев Δ_i . Таким образом, $\{[g_i^p]\} \rightarrow \{[d_i]\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствие 5.6 гарантирует, что для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого p , имеем $V(\Gamma_i^p) \subset U_{\varepsilon/2}(d_i)$. Следствие 5.5 утверждает, что, начиная с некоторого p , длины всех неособых ребер дерева Γ^p , в частности длины всех ребер каждого дерева Γ_i^p , будут меньше чем $\varepsilon/2$. Для любой точки произвольного ребра дерева Γ_i^p расстояние от нее до концевой точки этого ребра будет также меньше $\varepsilon/2$. Поэтому при достаточно больших p следы любых геометрических реализаций ребер сети Γ_i^p (а точнее, сами ребра) будут лежать в $U_\varepsilon(d_i)$.

С другой стороны, выберем p настолько большим, чтобы все ребра сети Δ^p были меньше чем ε . Поскольку каждое ребро сети Δ^p инцидентно граничной вершине, след $[d_i]$ геометрической реализации d_i содержится в $U_\varepsilon(\partial\Delta_i^p) \subset U_\varepsilon([g_i^p])$. Доказательство закончено.

Ниже нам понадобится следующая техническая лемма.

ЛЕММА 6.1. Пусть $\mathcal{X} = (X, \rho)$ – произвольное метрическое пространство. Предположим, что в $\mathcal{K}(\mathcal{X})$ задана последовательность $\{M^k\}$, сходящаяся к некоторому пределу M , т.е. компакты $M^k \subset X$ сходятся по Хаусдорфу к компакту $M \subset X$. Выберем в каждом M^k произвольную точку x^k . Тогда в последовательности $\{x^k\}$ существует подпоследовательность, сходящаяся в $\mathcal{X}$ к некоторой точке множества M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждой точки x^k рассмотрим функцию $\rho^k: M \rightarrow \mathbb{R}$, заданную так: $\rho^k(x) = \rho(x, x^k)$. Эта функция определена на компакте и непрерывна, поэтому достигает своего наименьшего значения в некоторой точке $y^k \in M$. Положим $r^k = \rho(x^k, y^k)$. Так как последовательность M^k сходится по Хаусдорфу к M , то для любого $\varepsilon > 0$ $M^k \subset U_\varepsilon(M)$, начиная с некоторого k ; поэтому последовательность r^k стремится к 0.

Далее, поскольку M – компакт, в последовательности y^k существует сходящаяся подпоследовательность. Без ограничения общности будем считать, что вся последовательность y^k сходится к некоторой точке $y \in M$. Покажем, что последовательность x^k также сходится к y . Так как r^k стремится к 0, то существует K_1 такое, что для любого натурального $k > K_1$ выполняется $r^k = \rho(x^k, y^k) < \varepsilon/2$. Далее, так как y^k сходится к y , то существует K_2 такое, что для любого натурального $k > K_2$ выполняется $y^k \in U_{\varepsilon/2}(y)$. Но тогда при каждом натуральном $k > \max(K_1, K_2)$ имеем

$$\rho(x^k, y) \leq \rho(x^k, y^k) + \rho(y^k, y) < \varepsilon,$$

что и требовалось.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.1. *Предположим, что последовательность $\mathcal{M}^k = \{M_i^k\}$, $k = 1, 2, \dots$, конечных семейств попарно не пересекающихся компактов в метрическом пространстве $\mathcal{X} = (X, \rho)$ сходится по Хаусдорфу к семейству $\mathcal{M} = \{M_i\}$ попарно не пересекающихся компактов, и пусть Γ^k – последовательность кратчайших лесов, соединяющих $\mathcal{M}^k$, имеющих один и тот же тип $G = (V, E)$ и сходящихся поточечно как последовательность отображений $\Gamma^k: V \rightarrow X$ к некоторому лесу Γ , соединяющему $\mathcal{M}$. Тогда $\Gamma \in \text{SMF}(\mathcal{M})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что предельное отображение $\Gamma: V \rightarrow X$ задает некоторый лес того же типа G , соединяющий $\mathcal{M}$. Предположим противное, т.е. лес Γ не является кратчайшим; тогда существует лес Γ' , соединяющий $\mathcal{M}$ и такой, что $\rho(\Gamma') < \rho(\Gamma)$. Тогда $\varepsilon = \rho(\Gamma) - \rho(\Gamma') > 0$. Так как последовательность Γ^k сходится к Γ , то существует K_1 такое, что при каждом $k > K_1$ выполняется $|\rho(\Gamma^k) - \rho(\Gamma)| < \varepsilon/2$, откуда

$$\rho(\Gamma^k) - \rho(\Gamma') = (\rho(\Gamma^k) - \rho(\Gamma)) + (\rho(\Gamma) - \rho(\Gamma')) > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Пусть m обозначает количество ребер леса Γ' . Так как последовательности $\{M_i^k\}$ сходятся к M_i , $i = 1, \dots, n$, существует K_2 такое, что при всех $k > K_2$ выполняются неравенства $\rho_H(M_i^k, M_i) < \varepsilon/(2m)$, $i = 1, \dots, n$. Последнее означает, что при всех таких k множество M_i , $i = 1, \dots, n$, содержится в $\varepsilon/(2m)$ -окрестности множества M_i^k , поэтому для любой точки $x \in M_i$ существует точка $y \in M_i^k$ такая, что $\rho(x, y) < \varepsilon/(2m)$.

Выберем произвольное $k > \max(K_1, K_2)$. Пусть G' – тип леса Γ' , а $\partial G' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$. Если $\Gamma'(v'_i) \in M_j$, то выберем в M_j^k произвольную точку y_i , для которой $\rho(\Gamma'(v'_i), y_i) < \varepsilon/(2m)$, существующую в силу сказанного выше. Пусть Δ – сеть типа G' , отличающаяся от Γ' только на граничных вершинах, причем $\Delta(v'_i) = y_i$. Тогда, как легко видеть, сеть Δ соединяет $\mathcal{M}^k$. Кроме того, длина каждого ребра леса Δ отличается от длины соответствующего ребра леса Γ' не больше чем на $\varepsilon/(2m)$; поэтому $|\rho(\Delta) - \rho(\Gamma')| < \varepsilon/2$, откуда

$$\rho(\Delta) - \rho(\Gamma^k) = \rho(\Delta) - \rho(\Gamma') + \rho(\Gamma') - \rho(\Gamma^k) < \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $\rho(\Delta) < \rho(\Gamma^k)$, что противоречит условию $\Gamma^k \in \text{SMF}(\mathcal{M}^k)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.2. Пусть задана последовательность $\{\mathcal{M}^k\}$, $k = 1, 2, \dots$, где каждое $\mathcal{M}^k = \{M_1^k, \dots, M_m^k\}$ – семейство попарно не пересекающихся компактов M_i^k в пространстве $\mathbb{R}^N$. Предположим, что последовательность $\{\mathcal{M}^k\}$ сходится по Хаусдорфу к семейству $\mathcal{M} = \{M_i\}_{i=1}^m$, также состоящему из попарно не пересекающихся компактов в $\mathbb{R}^N$. Тогда существует такая подпоследовательность $\mathcal{M}^{k_1}, \mathcal{M}^{k_2}, \dots$, для которой при всех k_j существуют кратчайшие леса Γ^{k_j} одного и того же типа G , соединяющие $\mathcal{M}^{k_j}$, и такие их геометрические реализации g^{k_j} , что последовательность следов $[g^{k_j}]$ сходится по Хаусдорфу к следу $[g]$ одной из геометрических реализаций g некоторого кратчайшего леса Γ типа G , соединяющего $\mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим сначала, что в силу следствия 3.1 и теоремы 4.1 каждое $\mathcal{M}^k$ соединяется некоторым кратчайшим лесом, причем число типов таких лесов конечно (и зависит от m). Из утверждения 3.6 вытекает, что $\mathcal{M}^k$ также соединяется кратчайшим лесом Γ^k , лежащим в $\mathcal{F}(\mathcal{M}^k)$. В соответствии с утверждением 3.4 каждое $\mathcal{F}(\mathcal{M}^k)$ разбито на одно и то же конечное число классов $\mathcal{M}^k$ -изоморфности, а биекции $\nu^{p,q}: \mathcal{M}^p \rightarrow \mathcal{M}^q$, однозначно определенные при всех p и q требованием $\nu^{p,q}(M_i^p) = M_i^q$, индуцируют биекции $\nu_*^{p,q}$ между множествами $\{\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{M}^p)\}$ и $\{\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{M}^q)\}$. Тем самым, каждый класс $\mathcal{M}^1$ -изоморфности $\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{M}^1)$ порождает цепочку классов изоморфности

$$\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{M}^1), \nu^{1,2}(\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{M}^1)), \dots, \nu^{1,p}(\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{M}^1)), \dots,$$

и таких цепочек конечное число, так как конечно число классов $\mathcal{F}_\alpha(\mathcal{M}^1)$. Отсюда вытекает, что для некоторой последовательности индексов $k_1, k_2, \dots$ все леса Γ^{k_i} принадлежат одной цепочке. Без ограничения общности будем считать, что это свойство выполняется для всех лесов Γ^k . По определению индуцированной биекции сети, принадлежащие одной цепочке, имеют один и тот же тип. Обозначим общий тип сетей Γ^k через G .

Пусть $\partial G = \{v_1, \dots, v_m\}$. Так как все сети Γ^k по предположению имеют один и тот же тип, то для каждого фиксированного i точки $\Gamma^k(v_i)$ принадлежат множествам M_j^k с одним и тем же номером j . Обозначим через S_0 последовательность $1, 2, \dots$ всех натуральных чисел. Рассмотрим последовательность $\{\Gamma^k(v_1) \mid k \in S_0\} \subset M_i^k$. По лемме 6.1 в последовательности S_0 существует подпоследовательность S_1 , для которой последовательность $\{\Gamma^k(v_1) \mid k \in S_1\}$ сходится к некоторой точке $x_1 \in M_i$. Рассмотрим затем последовательность $\{\Gamma^k(v_2) \mid k \in S_1\} \subset M_j^k$. По той же лемме 6.1 в последовательности S_1 существует подпоследовательность S_2 , для которой последовательность $\{\Gamma^k(v_2) \mid k \in S_2\}$ сходится к некоторой точке $x_2 \in M_j$. Продолжая описанный процесс до тех пор, пока не будет исчерпано множество ∂G , получим подпоследовательность S в S_0 , для которой все последовательности $\{\Gamma^k(v_p) \mid k \in S\}$, $p = 1, \dots, m$, сходятся к соответствующим точкам x_p компактов предельного семейства $\mathcal{M}$. Без ограничения общности будем считать, что $S = S_0$, т.е. что все последовательности $\{\Gamma^k(v_p) \mid k = 1, 2, \dots\}$, $p = 1, \dots, m$, сходятся к соответствующим точкам x_p .

Определим отображение φ условием $\varphi(v_p) = x_p$. Если G_i обозначают деревья, составляющие лес G , а $\partial G_i = V(G_i) \cap \partial G$, то положим $\varphi_i = \varphi|_{\partial G_i}$

и $\partial\Gamma_i^k = \partial\Gamma^k|_{\partial G_i}$. Тогда последовательность граничных отображений $\{\partial\Gamma_i^k\}$ сходится к граничному отображению φ_i , и по теореме 3.1 существует подпоследовательность $\partial\Gamma_i^{k_p}$, для которой в каждом $[G_i, \partial\Gamma_i^{k_p}]$ можно выбрать минимальное параметрическое дерево $\Delta_i^{k_p}$ так, что последовательность выбранных деревьев сходится к некоторому минимальному параметрическому дереву $\Delta_i \in [G_i, \varphi_i]$. Без ограничения общности будем считать, что это свойство выполнено для всех k , т.е. последовательность $\{\Delta_i^k\}$ минимальных параметрических деревьев типа G_i сходится к минимальному параметрическому дереву Δ_i при $k \rightarrow \infty$.

Положим $\Gamma_i^k = \Gamma^k|_{V(G_i)}$, т.е. Γ_i^k – деревья, составляющие кратчайший лес Γ^k . По утверждению 3.5 все деревья Γ_i^k являются кратчайшими. С другой стороны, имеем $\Gamma_i^k \in [G_i, \partial\Gamma_i^k]$, поэтому Γ_i^k – минимальное параметрическое дерево типа G_i с границей $\partial\Gamma_i^k$ и, значит, $\rho(\Gamma_i^k) = \rho(\Delta_i^k)$. Последнее означает, что $\Delta_i^k \in \text{SMT}([\partial\Gamma_i^k])$, и поэтому $\Delta^k = \bigcup_i \Delta_i^k$ – кратчайший лес, соединяющий $\mathcal{M}^k$. Положим $\Delta = \bigcup_i \Delta_i$; тогда по построению последовательность кратчайших лесов $\{\Delta^k\}$ сходится к лесу Δ и в силу утверждения 6.1 Δ – кратчайший лес, соединяющий $\mathcal{M}$.

Используя утверждение 3.1, запустим такой же “диагональный процесс”, как мы сделали выше для поиска сходящейся подпоследовательности границ, что позволит нам построить геометрические реализации d_k найденных выше кратчайших лесов Δ^k и геометрическую реализацию d предельного кратчайшего леса Δ , для которых $[d_k]$ сходится по Хаусдорфу к $[d]$. Доказательство закончено.

ЗАМЕЧАНИЕ. В качестве типа предельного кратчайшего леса G можно выбрать любой встречающийся в качестве типа леса из $\text{SMF}(\mathcal{M}^k)$ бесконечное число раз.

Комбинируя следствие 6.1 и утверждение 6.2, получаем следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 6.2. Пусть $\{(\Delta_i, d_i)\}_{i=1}^n$ – некоторое семейство вложенных попарно не пересекающихся геометрических деревьев в $\mathbb{R}^N$, $(\Delta, d) = \bigsqcup_i (\Delta_i, d_i)$, и пусть $(\Delta^p, d^p) = \bigsqcup_i (\Delta_i^p, d_i^p)$ обозначает p -подразбиение геометрического леса (Δ, d) . Положим $M_i^p = \partial\Delta_i^p$ и $\mathcal{M}^p = \{M_i^p\}$, так что $\partial\Delta^p = \bigsqcup_i M_i^p$. Тогда для некоторой возрастающей подпоследовательности $p_1, p_2, \dots$ натуральных чисел, не меньших стабильного значения p_0 , можно выбрать такие кратчайшие деревья $\Gamma^{p_j} \in \text{SMT}(\partial\Delta^{p_j})$, что:

- 1) их особые подлеса $S_{\mathcal{M}^{p_j}}(\Gamma^{p_j})$ имеют один и тот же тип F ;
- 2) у лесов $S_{\mathcal{M}^{p_j}}(\Gamma^{p_j})$ можно выбрать такие геометрические реализации, что следы этих геометрических реализаций сходятся по Хаусдорфу к следу одной из геометрических реализаций некоторого кратчайшего леса типа F , соединяющего $\{[d_i]\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следствие 6.1 гарантирует, что семейства следов $[g_i^p]$ произвольных геометрических реализаций g_i^p неособых деревьев Γ_i^p в любой последовательности кратчайших деревьев $\Gamma^p \in \text{SMT}(\partial\Delta^p)$, $p \geq p_0$, сходятся по

Хаусдорфу к семейству $\{[d_i]\}$. Заметим, что каждый особый лес $S_{\mathcal{M}^p}$ является кратчайшим лесом, соединяющим $\{[g_i^p]\}$. Осталось применить утверждение 6.2. Доказательство закончено.

§ 7. Доказательство основной теоремы

Из следствия 6.2 вытекает, что для некоторой возрастающей последовательности $p_1, p_2, \dots$ натуральных чисел существует такая последовательность кратчайших деревьев $G^{p_k} \in \text{SMT}(\partial\Delta^{p_i})$, что подходящие геометрические реализации g^{p_k} их особых лесов сходятся по Хаусдорфу к геометрическому кратчайшему лесу (F, f) , соединяющему исходное конечное семейство попарно не пересекающихся компактов $\mathcal{M} = \{\Delta_i\}$. При этом из следствия 6.1 вытекает, что неособые подлеса геометрических кратчайших деревьев (G^{p_k}, g^{p_k}) сходятся к исходному лесу $\Delta = \bigcup \Delta_i$. Таким образом, геометрические деревья (G^{p_k}, g^{p_k}) сходятся по Хаусдорфу к $[f] \cup \Delta$.

По условию теоремы $(\Gamma', g') = (F, f) \oplus (\Delta, d)$ – локально минимальное дерево, следом которого является $[f] \cup \Delta$, поэтому в силу теоремы 5.1 существует такая окрестность U этого следа, что каждое дерево с границей $\partial\Delta$, след геометрической реализации которого лежит в U , имеет длину, не меньшую, чем дерево Γ' , длина которого равна длине каждого дерева $F \oplus \Delta^p$. Так как кратчайшие геометрические деревья (G^{p_k}, g^{p_k}) сходятся по Хаусдорфу к $[g']$ при $k \rightarrow \infty$, то, начиная с некоторого k , их следы $[g^{p_k}]$ лежат в окрестности U . Так как геометрические деревья (G^{p_k}, g^{p_k}) соединяют границу $\partial\Delta$, их длина не меньше чем длина дерева Γ' . С другой стороны, дерево Γ' соединяет $\partial\Delta^p$ для любого p , поэтому длина кратчайшего дерева G^{p_k} не больше чем длина Γ' . Таким образом, для достаточно больших k длины деревьев Γ' и Γ^{p_k} совпадают, поэтому дерево Γ' является кратчайшим для $\partial\Delta^{p_k}$ при достаточно больших k , а значит, и для $\partial\Delta^p$ при всех достаточно больших p , поскольку подразбиение кратчайшего дерева, очевидно, является кратчайшим для подразбитой границы.

Остается заметить, что замена кратчайшего леса F , соединяющего семейство $\mathcal{M}$, на любой другой кратчайший лес из $\text{SMF}(\mathcal{M})$ порождает локально минимальное дерево, которое соединяет $\partial\Delta^p$ и имеет ту же длину, что и кратчайшее дерево Γ' , и поэтому само является кратчайшим. Доказательство основной теоремы закончено.

Список литературы

- [1] V. Jarník, M. Kössler, “O minimalnich grafeth obeahujicich n danijch bodu”, *Časopis Pěst. Mat.*, **63** (1934), 223–235.
- [2] F. K. Hwang, “A linear time algorithm for full Steiner trees”, *Oper. Res. Lett.*, **4**:5 (1986), 235–237.
- [3] M. R. Garey, R. L. Graham, D. S. Johnson, “Some NP-complete geometric problems”, *Proceedings of the eighth annual ACM symposium on Theory of computing* (Hershey, Pa., 1976), ACM, New York, NY, 1976, 10–22.

- [4] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, “Стабилизация локально минимальных деревьев”, *Матем. заметки*, **86**:4 (2009), 512–524; англ. пер.: А. О. Ivanov, А. А. Tuzhilin, “Stabilization of locally minimal trees”, *Math. Notes*, **86**:3-4 (2009), 483–492.
- [5] А. О. Иванов, О. А. Съедина, А. А. Тужилин, “Структура минимальных деревьев Штейнера в окрестностях лунок их ребер”, *Матем. заметки*, **91**:3 (2012), 353–370; англ. пер.: А. О. Ivanov, О. А. S’edina, А. А. Tuzhilin, “The structure of minimal Steiner trees in the neighborhoods of the lunes of their edges”, *Math. Notes*, **91**:3-4 (2012), 339–353.
- [6] Н. П. Стрелкова, “Устойчивость локально минимальных сетей”, *Тр. сем. по вект. и тенз. анализу*, **29** (2013), 148–170.
- [7] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей*, Институт компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2003, 424 с.
- [8] Д. Ю. Бураго, Ю. Д. Бураго, С. В. Иванов, *Курс метрической геометрии*, Институт компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2004, 512 с.
- [9] А. О. Ivanov, А. А. Tuzhilin, *Minimal networks. The Steiner problem and its generalizations*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1994, xviii+414 pp.
- [10] Б. Б. Беднов, Н. П. Стрелкова, “О существовании кратчайших сетей в банаховых пространствах”, *Матем. заметки*, **94**:1 (2013), 46–54; англ. пер.: В. В. Bednov, N. P. Strelkova, “On the existence of shortest networks in Banach spaces”, *Math. Notes*, **94**:1 (2013), 41–48.

Александр Олегович Иванов
(Alexandr O. Ivanov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова;
Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана
E-mail: aoiva@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
14.02.2013

Анна Евгеньевна Мельникова
(Anna E. Melnikova)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: melnikova10@yandex.ru

Алексей Августинovich Тужилин
(Alexey A. Tuzhilin)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: tuz@mech.math.msu.su