Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. И. Похожаев, Гладкие решения уравнений Навье–Стокса, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 2, 131–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8226>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 02:22:35

УДК 517.954

С. И. Похожаев

Гладкие решения уравнений Навье–Стокса

Рассматриваются гладкие периодические по $x \in \mathbb{R}^3$ решения задачи Коши для уравнений Навье–Стокса в шкале гладких функций.

Получены теоремы существования глобальных (по $t > 0$) и локальных решений задачи Коши в зависимости от гладкости и величины нормы начальной вектор-функции. Получены также верхние оценки поведения решений обоих классов в зависимости от t .

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: уравнения Навье–Стокса, гладкие (сильные) решения, оценки решений.

DOI: 10.4213/sm8226

§ 1. Введение

Проблема существования гладких (“сильных”) решений уравнений Навье–Стокса посвящена обширная литература, см., например, книги и статьи [1], [2]–[9] и приведенную там литературу.

Большинство этих теорем носит “качественный” характер, т.е. утверждает существование определяющих границ для величины соответствующих норм данных задачи, в зависимости от которых существует глобальное по $t > 0$ или локальное решение соответствующей задачи (как правило, задачи Коши) для уравнений Навье–Стокса.

Другая особенность этих результатов касается “гладкости” решений. Как правило, обсуждаются решения, обладающие обобщенной гладкостью (в различных смыслах) не выше второго порядка по x .

В настоящей статье рассматриваются решения произвольной гладкости. Для этих решений устанавливаются теоремы существования глобальных по $t > 0$ решений, а также локальных в зависимости от нормы и гладкости начальной функции.

Более того, выводятся оценки времени существования локальных решений, а также оценки сверху на поведение этих локальных решений.

Рассмотрение уравнений Навье–Стокса в шкале гладких функций дает возможность определить зависимость величины соответствующей нормы начальной функции от гладкости, обеспечивающей существование глобального решения этой гладкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 11-01-00348а и 11-01-12018 офи-м 2011) и Министерства образования и науки РФ (соглашение 8215).

С этой целью вводится “барьерная” функция $B(s)$. Вычисление этой функции и ее зависимости от показателя гладкости s и составляет по существу содержание этой статьи. Отметим, что вывод основных оценок существенно основан на работе А. Ильина [10].

Статья организована следующим образом. Параграф 2 содержит постановку задачи и формулировку основных результатов. В § 3 приводятся известные энергетические соотношения высших порядков для рассматриваемых решений уравнений Навье–Стокса. Параграф 4 посвящен представлению трехлинейных форм высших порядков. Параграф 5 является центральным при выводе оценок для соответствующих интегралов от производных высших порядков. Здесь существенно используется прием А. Ильина [10] для оценки констант в неравенствах типа Гальярдо–Ниренберга. В § 6 содержится основная оценка для основного нелинейного интеграла от производных высших порядков. Параграф 7 посвящен априорным оценкам высших порядков. В § 8 рассматриваются галёркинские аппроксимации решений уравнений Навье–Стокса в указанных пространствах и устанавливаются теоремы существования гладких решений и их свойства.

§ 2. Постановка задачи. Основные результаты

Рассматривается классическая система уравнений Навье–Стокса движения вязкой несжимаемой жидкости

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = \nu \Delta u - \nabla p, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{cases} \quad t > 0, \quad x \in T^3, \quad (2.1)$$

с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in T^3, \quad (2.2)$$

$$\text{с } \nabla \cdot u_0 = 0 \text{ и } \int_{T^3} u_0 = 0.$$

Здесь $u = u(t, x)$ есть вектор скорости,

$$u(t, x) = (u_1(t, x), u_2(t, x), u_3(t, x)),$$

$p = p(t, x)$ – давление, $\nu > 0$ – кинематическая вязкость.

Все функции рассматриваются при $x \in T^3 = (0, 2\pi)^3$, т.е. являются периодическими по x с периодом 2π .

Определим теперь пространства вектор-функций, в которых будут рассматриваться решения задачи Коши (2.1)–(2.2).

Прежде всего положим, следуя [5],

$$\mathcal{V} = \{\varphi : \varphi \in \mathcal{D}(T^3)^3, \operatorname{div} \varphi = 0\},$$

где $\mathcal{D}(T^3)$ есть пространство бесконечно дифференцируемых функций, заданных на T^3 . Кроме того, обозначим через H замыкание $\mathcal{V}$ в $L^2(T^3)^3$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пространства $\mathcal{V}$ и H не совпадают с пространствами $\mathcal{V}$ и H из [5].

Наряду с пространством H рассмотрим пространство $H^s(T^3)$ с гильбертовым скалярным произведением

$$(u, v) = \sum_{i=1}^3 (u_i, v_i)_{H^s(T^3)}$$

и пространство

$$V^{2s}(T^3) = \left\{ u \in H^{2s}(T^3) : \int_{T^3} |\Delta^s u(x)|^2 dx < \infty, \nabla \cdot u = 0, \int_{T^3} u(x) dx = 0 \right\}$$

с квазинормой $|u|_{2s}^2 = \int_{T^3} |\Delta^s u(x)|^2 dx$ и нормой $\|u\|_B^2 = \|u\|_0^2 + |u|_{2s}^2$.

Далее положим

$$a(u, v) = \sum_{i,j,k=1}^3 \int_{T^3} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dx, \quad b(u, v, w) = \sum_{i,k=1}^3 \int_{T^3} u_k (D_k v_i) w_i dx.$$

Теперь, следуя Лионсу [5; гл. 1, § 6], введем и определим V^m как замыкание $\mathcal{V}$ в $H^m(T^3)^3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Обобщенным решением u задачи Коши (2.1)–(2.2) называется вектор-функция u такая, что

$$\begin{aligned} u &\in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H), \\ (u_t, v) + \nu a(u, v) + b(u, u, v) &= 0 \quad \forall v \in V \cap L^3(T^3)^3, \\ u(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Здесь пространство $V = V^1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. V^{2s} -гладким решением u задачи Коши (2.1)–(2.2) называется обобщенное решение u такое, что

$$\begin{aligned} u(t) &\in V^{2s}(T^3)^3, \\ u &\in L^2(0, T; V^{2s}) \cap L^\infty(0, T; H^{2s}), \\ (\Delta^s u_t, \Delta^s v) + \nu a(\Delta^s u, \Delta^s v) + b(\Delta^s(u, u), \Delta^s v) &= 0 \quad \forall v \in V^{2s}(T^3)^3, \\ \Delta^s u(0) &= \Delta^s u_0. \end{aligned}$$

Здесь

$$b(\Delta^s(u, v), \Delta^s w) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{T^3} \Delta^s(u_k D_k v_i) \Delta^s w_i dx.$$

Основными результатами настоящей статьи являются следующие две теоремы.

Обозначим $Y_s(t) = \int_{T^3} |\Delta^s u(t, x)|^2 dx$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $s \geq 2$ и $Y_s(0) \leq B_s Y_0(0)$.

Тогда существует глобальное по $t > 0$ $(2s)$ -гладкое решение $u(t)$ задачи Коши (2.1)–(2.2). Более того, это решение удовлетворяет неравенству

$$Y_s^{5/(8s)}(t) \leq \frac{e^{-5\nu t/(4s)}}{1 + A_s(e^{-5\nu t/(4s)} - 1)Y_s^{5/(8s)}(0)} Y_s^{5/(8s)}(0) \quad (2.3)$$

при всех $t > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $s \geq 2$ и $Y_s(0) > B_s Y_0(0)$.

Тогда существует $(2s)$ -гладкое решение $u(t)$ задачи Коши (2.1)–(2.2) при $t \in (0, T_s)$, удовлетворяющее неравенству (2.3) при $0 < t < T_s$ с

$$T_s = -\frac{4s}{5\nu} \ln \left(1 - \frac{1}{A_s} Y_s^{-5/(8s)}(0) \right).$$

Здесь $A_s = \frac{K(s)}{\nu} Y_0^{1/2-5/(8s)}$, $B_s = \left(\frac{\nu}{K(s)} \frac{1}{Y_0^{1/2}} \right)^{8s/5}$ и постоянная $K(s)$ определена ниже формулой (6.3).

§ 3. Энергетические соотношения

Полагая в тождествах определения 2 последовательно $s = 0, 1, \dots$ при $v = u$, получаем следующие соотношения для решения u из соответствующего класса:

– энергетическое соотношение нулевого порядка ($s = 0$)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{T^3} |u|^2 dx + \nu \int_{T^3} |\nabla u|^2 dx = 0; \quad (3.1)$$

– энергетическое соотношение первого порядка ($s = 1$)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{T^3} |\nabla u|^2 dx + \nu \int_{T^3} |\Delta u|^2 dx = - \int_{T^3} ((\nabla \cdot u)u, \Delta u) dx; \quad (3.2)$$

– энергетическое соотношение четного порядка (s четное)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{T^3} |\nabla^s u|^2 dx + \nu \int_{T^3} |\nabla(\nabla^s u)|^2 dx = - \int_{T^3} (\nabla^s(u \cdot \nabla)u, \nabla^s u) dx. \quad (3.3)$$

Здесь $|\nabla^s u|^2 = |\Delta^{s/2} u|^2$.

Как известно [1], проблема равенства в энергетических соотношениях для обобщенных решений уравнений Навье–Стокса является открытой проблемой.

Именно поэтому класс обобщенных решений был сужен до класса “сильных” $(2s)$ -сильных решений. В частности, эти энергетические равенства верны для классических решений $(2s)$ -гладкости уравнений Навье–Стокса.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В случае четного $s = 2m$ соотношению (3.3) можно придать следующий вид:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{T^3} |\Delta^m u|^2 dx + \nu \int_{T^3} |\nabla(\Delta^m u)|^2 dx = - \int_{T^3} (\Delta^m(u \cdot \nabla)u, \Delta^m u) dx. \quad (3.4)$$

В самом деле, для этого достаточно применить к уравнениям Навье–Стокса оператор Δ^m и умножить скалярно на $\Delta^m u$. Тогда после интегрирования получим соотношение (3.4).

Здесь

$$\begin{aligned} |\Delta^m u|^2 &= \sum_{i=1}^3 |\Delta^m u_i|^2, & |\nabla(\Delta^m u)|^2 &= \sum_{i,k=1}^3 \left| \frac{\partial}{\partial x_k} (\Delta^m u_i) \right|^2, \\ (\Delta^m(u \cdot \nabla)u, \Delta^m u) &= \sum_{i,k=1}^3 \Delta^m \left(u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \cdot \Delta^m u_i. \end{aligned}$$

§ 4. Некоторые неравенства

Прежде всего отметим неравенство

$$\int_{T^3} |u(t, x)|^2 dx \leq \int_{T^3} |u(0, x)|^2 dx, \quad (4.1)$$

которое непосредственно следует из (3.1).

Теперь обратимся к правой части соотношения (3.4). Используя формулу Лейбница, имеем

$$\begin{aligned} J(m) &:= \int_{T^3} (\Delta^m(u \cdot \nabla)u, \Delta^m u) dx = \int_{T^3} \sum_{i,k=1}^3 \Delta^m u_i \cdot \Delta^m \left(u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) dx \\ &= \sum_{i,k=1}^3 \int_{T^3} \Delta^m u_i \sum_{|\beta|=m} \sum_{0 \leq \alpha \leq 2\beta} \frac{m!}{\alpha! \beta!} \frac{(2\beta)!}{(2\beta - \alpha)!} \partial^{2\beta - \alpha} u_k \partial^\alpha u_i dx. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Рассмотрим сначала слагаемое с $|\alpha| = 2m$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} J_{2m} &:= \sum_{i,k=1}^3 \int_{T^3} \Delta^m u_i \sum_{|\alpha|=2m} \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\alpha! \beta!} \frac{(2\beta)!}{(2\beta - \alpha)!} \partial^{2\beta - \alpha} u_k \cdot \partial_k \partial^\alpha u_i dx \\ &= \sum_{i,k=1}^3 \int_{T^3} \Delta^m u_i \cdot u_k \cdot \partial_k \Delta^m u_i dx = \sum_{i,k=1}^3 \frac{1}{2} \int_{T^3} \partial_k |\Delta^m u_i|^2 \cdot u_k dx \\ &= - \sum_{i,k=1}^3 \frac{1}{2} \int_{T^3} |\Delta^m u_i|^2 \partial_k u_k dx = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} J(m) &= \sum_{i,k=1}^3 \int_{T^3} \Delta^m u_i \cdot \sum_{\substack{|\alpha| \leq 2m-1 \\ \alpha \leq 2\beta}} \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\alpha! \beta!} \frac{(2\beta)!}{(2\beta - \alpha)!} \partial^{2\beta - \alpha} u_k \cdot \partial_k \partial^\alpha u_i dx \\ &\leq \|\Delta^m u\|_2 \cdot \sum_{i,k=1}^3 \left(\int_{T^3} \left| \sum_{\substack{|\alpha| \leq 2m-1 \\ \alpha \leq 2\beta}} \frac{m!}{\alpha! \beta!} \frac{(2\beta)!}{(2\beta - \alpha)!} \partial^{2\beta - \alpha} u_k \cdot \partial_k \partial^\alpha u_i \right|^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

§ 5. Некоторые оценки

Для оценок интегралов вида

$$\int_{T^3} |\partial^{2\beta-\alpha} u_k \cdot \partial_k \partial^\alpha u_i|^2 dx \leq \left(\int_{T^3} |\partial^{2\beta-\alpha} u_k|^4 dx \right)^{1/2} \left(\int_{T^3} |\partial_k \partial^\alpha u_i|^4 dx \right)^{1/2} \quad (5.1)$$

с $|\beta| = m$ и $|\alpha| < 2m$ воспользуемся сначала неравенством Гальярдо–Ниренберга.

В силу этого неравенства имеем

$$\int_{T^3} |\partial^{2\beta-\alpha} u_k \cdot \partial_k \partial^\alpha u_i|^2 dx \leq c_{\alpha,\beta} \|\Delta^m u\|_2^{2+5/(2m)} \cdot \|u\|_2^{2-5/(2m)}. \quad (5.2)$$

Здесь $\|u\|_2^2 = \sum_{i=1}^3 \|u_i\|_2^2$, $\|\Delta^m u\|_2^2 = \sum_{i=1}^3 \|\Delta^m u_i\|_2^2$, $|\beta| = m$.

Для оценок коэффициентов $c_{\alpha,\beta}$ воспользуемся теоремой А. А. Ильина [10] для периодических функций.

ТЕОРЕМА (А. А. Ильин). Пусть p и l удовлетворяют условию $-\infty < p < n/2 < l < \infty$ и $\theta_1 = (2l - n)/(2(l - p))$, $\theta_2 = (n - 2p)/(2(l - p))$.

Тогда для любой периодической функции $f(x)$, заданной на торе $T^n = (0, 2\pi)^n$, такой, что $\int_{T^n} f(x) dx = 0$ и $f \in H^l(T^n)$, справедливо неравенство

$$\|f\|_\infty \leq C_{T^n}(p, l) \|D^p f\|^{\theta_1} \|D^l f\|^{\theta_2}, \quad (5.3)$$

где $\|D^l f\|^2 = \|D^l f\|_2^2 = \sum_{|\gamma|=l} \|\partial^\gamma f\|_2^2$. При этом

$$C_{T^n}^2(p, l) = (2\pi)^{-n} \lambda_*^{\theta_2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^n} \frac{1}{\theta_1 |k|^{2p} + \lambda_* \theta_2 |k|^{2l}} \quad (5.4)$$

с $\lambda_* = \|D^p f\|^2 / \|D^l f\|^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Неравенство (5.3) содержится в тексте доказательства теоремы 2 статьи [10].

Неравенства для производных. В силу неравенства Гальярдо–Ниренберга имеем

$$\|\partial^\gamma f\|_\infty \leq c(\gamma, m) \|\Delta^m f\|^{\theta_2} \|f\|^{\theta_1} \quad (5.5)$$

для рассматриваемого класса функций $f \in W^{2,2m}(T^3)$ с

$$\theta_2 = \frac{3+2|\gamma|}{4m}, \quad \theta_1 = 1 - \theta_2 = \frac{4m-3-2|\gamma|}{4m} \quad (5.6)$$

при $4m > 3 + 2\gamma$.

Для нахождения коэффициентов $c(\gamma, m)$ воспользуемся рассуждениями из работы [10]. С этой целью рассмотрим

$$f(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^3} c_k e^{ikx} \quad \text{и} \quad \partial^\gamma f(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^3} c_k (ik)^\gamma e^{ikx}.$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned}
 |\partial^\gamma f(x)|^2 &= (2\pi)^{-3} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^3} c_k(ik)^\gamma e^{ikx} \right|^2 \\
 &\leq (2\pi)^{-3} \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^3} \frac{1}{\theta_1 |k|^{2p} + \lambda \theta_2 |k|^{2l}} \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^3} |c_k|^2 (\theta_1 |k|^{2p} + \lambda \theta_2 |k|^{2l}) k^{2\gamma} \\
 &\leq (2\pi)^{-3} \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^3} \frac{1}{\theta_1 |k|^{2p} + \lambda \theta_2 |k|^{2l}} \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^3} |c_k|^2 (\theta_1 |k|^{2(p+|\gamma|)} + \lambda \theta_2 |k|^{2(l+|\gamma|)})
 \end{aligned}$$

с θ_1 и θ_2 из неравенства (5.5), $p = -|\gamma|$, $l = 2m - |\gamma|$ и $\lambda = \|f\|^2 / \|\Delta^m f\|^2$.

В силу указанного выбора параметров получаем

$$\|\partial^\gamma f(x)\|_\infty^2 \leq (2\pi)^{-3} \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^3} \frac{1}{\theta_1 |k|^{2p} + \lambda \theta_2 |k|^{2l}} (\theta_1 \|f\|^2 + \lambda \theta_2 \|\Delta^m f\|^2).$$

Далее имеем

$$\theta_1 \|f\|^2 + \lambda \theta_2 \|\Delta^m f\|^2 = \lambda^{\theta_2} \|\Delta^m f\|^{2\theta_2} \|f\|^{2\theta_1}.$$

Следовательно,

$$\|\partial^\gamma f(x)\|_\infty^2 \leq (2\pi)^{-3} \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^3} \frac{\lambda^{\theta_2}}{\theta_1 |k|^{2p} + \lambda \theta_2 |k|^{2l}} \|\Delta^m f\|^{2\theta_2} \|f\|^{2\theta_1}. \quad (5.7)$$

Таким образом, имеем

$$c^2(\gamma, m) \leq (2\pi)^{-3} \lambda^{\theta_2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_0^3} \frac{1}{\theta_1 |k|^{2p} + \lambda \theta_2 |k|^{2l}} \quad (5.8)$$

с $p = -|\gamma|$, $l = 2m - |\gamma|$ и $\theta_2 = (3 + 2|\gamma|)/(4m)$ при $4m > 3 + 2|\gamma|$.

Для оценки суммы (5.8) рассмотрим ее как интегральную сумму по целочисленной решетке в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ для функции

$$\varphi(r; \gamma, m) = (2\pi)^{-3} \lambda^{\theta_2} \frac{1}{\theta_1 r^{2p} + \lambda \theta_2 r^{2l}} \quad \text{с } r = |x|.$$

Нетрудно показать, что

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(r; \gamma, m) dx = \frac{1}{8\pi m} \frac{1}{\theta_1^{\theta_1} \theta_2^{\theta_2}} \frac{1}{\sin \pi \theta_2}.$$

Отсюда получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(r; \gamma, m) dx \leq \frac{\exp(2e^{-1})}{8\pi m \sin \pi \theta_2}.$$

В силу ограничения $3 + 2|\gamma| < 4m$, где $|\gamma|$ и m – целые числа, т.е. $3 + 2|\gamma| \leq 4m - 1$, имеем

$$\frac{3}{4m} \leq \theta_2 = \frac{3 + 2|\gamma|}{4m} \leq 1 - \frac{1}{4m}.$$

Следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi(r; \gamma, m) dx \leq \frac{\exp(2e^{-1})}{8\pi m \sin \pi/(4m)}.$$

Далее, из-за отсутствия монотонности по $r > 0$ подынтегральной функции $\varphi(r; \gamma, m)$ интеграл при $|\gamma| > 0$ не мажорирует сумму (5.8) в общем случае. Следовательно, необходима дополнительная поправка $\Delta(\gamma, m)$ к этому интегралу.

В качестве такой поправки можно взять

$$\Delta(\gamma, m) = 2F_* \int_{[r_*] \leq |x| \leq [r_*]+1} 1 \cdot dx.$$

Здесь $F_* = \varphi(r_*; \gamma, m)$, где r_* – точка максимума функции φ относительно r и $[r_*]$ – целая часть r_* .

Соответствующие вычисления дают следующую оценку:

$$\Delta(\gamma, m) \leq \frac{8}{3}(16\pi + 13)$$

с $|\gamma| \leq 2m - 2$.

Таким образом, из (5.7) получаем

$$\|\partial^\gamma f\|_\infty^2 \leq d^2(m) \|\Delta^m f\|^{2\theta_2} \|f\|^{2\theta_1} \quad (5.9)$$

с $\theta_2 = (3 + 2|\gamma|)/(4m)$, $\theta_1 = (4m - 3 - 2|\gamma|)/(4m)$ при $3 + 2|\gamma| < 4m$ и

$$d^2(m) = \exp(2e^{-1}) \frac{1}{8\pi m \sin \pi/(4m)} + \frac{8}{3}(16\pi + 13).$$

Для оценки интегралов в (4.3) воспользуемся одним из следующих неравенств в зависимости от $|\alpha|$:

$$\int_{T^3} |\partial^{2\beta-\alpha} u_k \partial_k \partial^\alpha u_i|^2 dx \leq \|\partial^{2\beta-\alpha} u_k\|_\infty^2 \int_{T^3} |\partial_k \partial^\alpha u_i|^2 dx$$

при $2|\alpha| > 3$ и

$$\int_{T^3} |\partial^{2\beta-\alpha} u_k \partial_k \partial^\alpha u_i|^2 dx \leq \|\partial_k \partial^\alpha u_i\|_\infty^2 \int_{T^3} |\partial^{2\beta-\alpha} u_k|^2 dx$$

при $2|\alpha| < 4m - 5$.

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \int_{T^3} |\partial_k \partial^\alpha u_i|^2 dx &\leq \|\Delta^m u_i\|_2^{(|\alpha|+1)/m} \|u_i\|^{2-(|\alpha|+1)/m}, \\ \int_{T^3} |\partial^{2\beta-\alpha} u_k|^2 dx &\leq \|\Delta^m u_k\|_2^{2-|\alpha|/m} \|u_k\|^{|\alpha|/m} \end{aligned}$$

при $|\beta| = m \geq 2$. Эти два неравенства следуют из равенства Парсеваля и стандартных мультипликативных неравенств для рядов с соответствующими коэффициентами Фурье.

Следовательно, в силу предыдущих неравенств получаем

$$\int_{T^3} |\partial^{2\beta-\alpha} u_k \partial_k \partial^\alpha u_i|^2 dx \leq d^2(m) \|\Delta^m u\|_2^{2+5/(2m)} \|u\|_2^{2-5/(2m)} \quad (5.10)$$

при $2m > |\alpha| \geq 2$, $|\beta| = m \geq 2$ и

$$\int_{T^3} |\partial^{2\beta-\alpha} u_k \partial_k \partial^\alpha u_i|^2 dx \leq d^2(m) \|\Delta^m u\|_2^{2+5/(2m)} \|u\|_2^{2-5/(2m)} \quad (5.11)$$

при $|\alpha| \leq 2m - 3$ и $|\beta| = m \geq 2$.

§ 6. Основная оценка

Для оценки интеграла $J(m)$ (4.2) в силу (4.3) достаточно оценить

$$I(m) := \sum_{i,k=1}^3 \left(\int_{T^3} \left| \sum_{\substack{|\alpha| \leq 2m-1 \\ \alpha \leq 2\beta}} \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\alpha! \beta!} \frac{(2\beta)!}{(2\beta-\alpha)!} \partial^{2\beta-\alpha} u_k \partial_k \partial^\alpha u_i \right|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (6.1)$$

Имеем

$$\begin{aligned} I(m) &\leq \sum_{i,k=1}^3 \left\{ \int_{T^3} \left[\sum_{\substack{|\alpha| \leq 2m-1 \\ \alpha \leq 2\beta}} \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\alpha! \beta!} \frac{(2\beta)!}{(2\beta-\alpha)!} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \sum_{\substack{|\alpha| \leq 2m-1 \\ \alpha \leq 2\beta}} \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\alpha! \beta!} \frac{(2\beta)!}{(2\beta-\alpha)!} |\partial^{2\beta-\alpha} u_k \cdot \partial_k \partial^\alpha u_i|^2 \right] dx \Big\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$H(m) := \sum_{\substack{|\alpha| \leq 2m-1 \\ \alpha \leq 2\beta}} \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\alpha! \beta!} \frac{(2\beta)!}{(2\beta-\alpha)!}.$$

Тогда в силу (5.10) и (5.11) находим, что

$$I(m) \leq K(m) \|\Delta^m u\|_2^{1+5/(4m)} \|u\|_2^{1-5/(4m)}, \quad (6.2)$$

$$K(m) = 6H(m)d(m). \quad (6.3)$$

Вычислим теперь коэффициент $H(m)$.

ЛЕММА 1. *Имеет место следующая формула:*

$$H(m) = 12^m - 3^m. \quad (6.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функций $f, g \in C^{2m}(T^3)$ в силу формулы Лейбница имеем

$$\Delta^m(f \cdot g) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq 2m \\ \alpha \leq 2\beta}} \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\alpha! \beta!} \frac{(2\beta)!}{(2\beta - \alpha)!} \partial^{2\beta - \alpha} f \cdot \partial^\alpha g.$$

Полагая здесь $f = e^{(a,x)}$ с $(a, x) = \sum_{i=1}^3 a_i x_i$ и $g = e^{(b,x)}$ с $(b, x) = \sum_{i=1}^3 b_i x_i$, находим, что

$$\Delta^m(f \cdot g) = \left(\sum_{i=1}^3 (a_i + b_i)^2 \right)^m e^{(a+b,x)} = \sum_{\substack{|\alpha| \leq 2m \\ \alpha \leq 2\beta}} \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\alpha! \beta!} \frac{(2\beta)!}{(2\beta - \alpha)!} a^{2\beta - \alpha} b^\alpha e^{(a+b,x)}.$$

Положим теперь $a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = 1$. Тогда отсюда получим

$$H_1(m) := \sum_{\substack{|\alpha| \leq 2m \\ \alpha \leq 2\beta}} \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\alpha! \beta!} \frac{(2\beta)!}{(2\beta - \alpha)!} = 12^m.$$

Для нахождения суммы

$$H_0(m) := \sum_{\substack{|\alpha|=2m \\ \alpha \leq 2\beta}} \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\alpha! \beta!} \frac{(2\beta)!}{(2\beta - \alpha)!}$$

снова воспользуемся формулой Лейбница

$$f \cdot \partial_k \Delta^m g = \sum_{\substack{|\alpha|=2m \\ \alpha \leq 2\beta}} \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\alpha! \beta!} \frac{(2\beta)!}{(2\beta - \alpha)!} \partial^{2\beta - \alpha} f \cdot \partial_k \partial^\alpha g.$$

Полагая здесь, как и выше, $f = e^{(a,x)}$ и $g = e^{(b,x)}$, находим отсюда, что

$$e^{(a,x)} b_k |b|^{2m} e^{(b,x)} = \sum_{\substack{|\alpha|=2m \\ \alpha \leq 2\beta}} \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\alpha! \beta!} \frac{(2\beta)!}{(2\beta - \alpha)!} a^{2\beta - \alpha} e^{(a,x)} \cdot b_k b^\alpha e^{(b,x)}.$$

Отсюда, полагая, как и выше, $a_1 = a_2 = a_3 = b_1 = b_2 = b_3 = 1$, получаем

$$3^m = \sum_{\substack{|\alpha|=2m \\ \alpha \leq 2\beta}} \sum_{|\beta|=m} \frac{m!}{\alpha! \beta!} \frac{(2\beta)!}{(2\beta - \alpha)!} = H_0(m).$$

Таким образом,

$$H(m) = H_1(m) - H_0(m) = 12^m - 3^m.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $m > 1$. Тогда

$$J(m) \leq K(m) \|\Delta^m u\|_2^{2+5/(4m)} \|u\|_2^{1-5/(4m)}, \quad m = 2, 3, \dots \quad (6.5)$$

Доказательство следует непосредственно из неравенств (4.3) и (6.2).

§ 7. Априорные оценки высших порядков

Из энергетического соотношения (3.4) в силу неравенств (4.1) и (6.5) получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{T^3} |\Delta^m u|^2 dx + \nu \int_{T^3} |\nabla(\Delta^m u)|^2 dx \leq K(m) \|u_0\|_2^{1-5/(4m)} \|\Delta^m u\|_2^{2+5/(4m)}. \quad (7.1)$$

Это соотношение на основании неравенства Соболева

$$\int_{T^3} |\Delta^m u|^2 dx \leq \int_{T^3} |\nabla(\Delta^m u)|^2 dx \quad \text{при} \quad \int_{T^3} |\nabla(\Delta^m u)|^2 dx \neq 0$$

перепишем в виде

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} Y_m(t) + \nu Y_m(t) \leq K(m) Y_0^{1/2-5/(8m)}(0) Y_m^{1+5/(8m)}(t). \quad (7.2)$$

Здесь $Y_m(t) = \int_{T^3} |\Delta^m u|^2 dx$.

Для решений $Y_m(t)$ этих дифференциальных неравенств справедливы следующие утверждения.

ЛЕММА 2. Пусть $m \geq 2$ и

$$Y_m(0) \leq B(m) Y_0(0). \quad (7.3)$$

Тогда существует глобальное по $t > 0$ решение $Y_m(t)$ дифференциального неравенства (7.2), удовлетворяющее неравенству

$$Y_m^{5/(8m)}(t) \leq \frac{e^{-5\nu t/(4m)} Y_m^{5/(8m)}(0)}{1 - A_m(1 - e^{-5\nu t/(4m)}) Y_m^{5/(8m)}(0)} \quad (7.4)$$

при всех $t > 0$.

Здесь

$$B(m) = \left(\frac{\nu}{k(m) Y_0^{1/2}(0)} \right)^{8m/5} \quad (7.5)$$

и $A_m = k(m) Y_0^{1/2-5/(8m)}(0)/\nu$.

ЛЕММА 3. Пусть $m \geq 2$ и

$$Y_m(0) > B(m) Y_0(0). \quad (7.6)$$

Тогда существует решение $Y_m(t)$ дифференциального неравенства (7.2), удовлетворяющее неравенству (7.4) при $0 < t < T_m$ с

$$T_m = -\frac{4m}{5\nu} \ln \left(1 - \frac{1}{A_m} Y_m^{-5/(8m)}(0) \right). \quad (7.7)$$

Доказательства обеих лемм являются стандартными в силу дифференциального неравенства (7.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Таким образом, величина $B(m)$ (7.5) является тем “барьером”, который разделяет начальные значения $Y_m(0)$, порождающие глобальные по $t > 0$ решения $Y(t)$, от начальных данных $Y_m(0)$, порождающих, вообще говоря, локальные решения с ограниченным T_m – временем существования.

Отметим, что с увеличением гладкости $m \rightarrow \infty$ величина $B(m) \rightarrow 0$.

§ 8. Галёркинские уравнения

Для случая периодических по $x \in \mathbb{R}^3$ с периодом 2π вектор-функций со средним по x , равным нулю, введем оператор Стокса A , который имеет вид [1]

$$Au = -P_L \Delta u = -\Delta u \quad \text{для } u \in D(A) = \mathring{V}_{\text{per}} \cap H_{\text{per}}^2(T^3)^3.$$

Здесь P_L есть проектор Лере и

$$\mathring{V}_{\text{per}} = \left\{ u \in H^1(T^3)^3, \nabla \cdot u = 0, \int_{T^3} u(x) dx = 0 \right\}.$$

Оператор Стокса A [1] обладает ортонормированным базисом $\{w_k\}$ в H и последовательностью собственных чисел $\{\lambda_k\}$ таких, что

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

с $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$, $\lambda_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$.

Рассмотрим теперь проблему существования s -гладких решений. С этой целью определим “приближенное” решение $u_m(t)$ соответствующим образом:

$$\begin{aligned} u_m(t) &= \sum_{j=1}^m u_{jm}(t) w_j, \\ (u'_m(t), w_k) + \nu a(u_m(t), w_k) + b(u_m(t), u_m(t), w_k) &= 0, \\ u_m(0) = u_{0m} &= \sum_{j=1}^m u_{jm}(0) w_j, \quad 1 \leq k, j \leq m. \end{aligned} \tag{8.1}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Ясно, что здесь $m \in \mathbb{N}$ не имеет отношения к m – порядку производной из предыдущих параграфов.

8.1. Первая априорная оценка. Умножим (8.1) на $u_{jm}(t)$ и просуммируем по j . Так как $b(u_m, u_m, u_m) = 0$, то получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_m(t)|^2 + \nu a(u_m(t), u_m(t)) = 0.$$

Таким образом,

$$|u_m(t)|^2 + 2\nu \int_0^t a(u_m(t), u_m(t)) dt = |u_{0m}|^2. \tag{8.2}$$

Следовательно, u_m ограничены в $L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H)$.

Далее, следуя Лионсу [5; гл. 1, § 6], получаем существование обобщенного решения u задачи Коши (2.1)–(2.2) такого, что

$$u \in L^2(0, T; V) \cap L^\infty(0, T; H).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Как отмечалось выше, пространства V и H не совпадают с пространствами V и H из [5].

Снова используя рассуждения Лионса [5; гл. 1, § 6], окончательно получаем существование обобщенного решения $u(t)$ ($s = 0$), определенного при всех $t > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Этот результат по существу известен, см., например, [5].

8.2. Существование $(2s)$ -гладкого решения. Докажем теперь существование $(2s)$ -гладкого решения $u(t)$ на промежутке $t \in (0, T_s)$.

Умножим k -е уравнение (8.1) на λ_k^s . Тогда получим

$$(u'_m(t), \lambda_k^s w_k) + \nu a(u_m(t), \lambda_k^s w_k) + b(u_m(t), u_m(t), \lambda_k^s w_k) = 0.$$

Замечая, что $\lambda_k^s w_k = \Delta^s w_k$, находим

$$(u'_m(t), \Delta^s w_k) + \nu a(u_m(t), \Delta^s w_k) + b(u_m(t), u_m(t), \Delta^s w_k) = 0,$$

или

$$(\Delta^s u'_m(t), w_k) + \nu a(\Delta^s u_m(t), w_k) + b(\Delta^s(u_m(t), u_m(t)), w_k) = 0.$$

Снова умножая это уравнение на $\lambda_k^s u_{km}(t)$ и суммируя по $k = 1, \dots, m$, получаем

$$(\Delta^s u'_m(t), \Delta^s u_m(t)) + \nu a(\Delta^s u_m(t), \Delta^s u_m(t)) + b(\Delta^s(u_m(t), u_m(t)), \Delta^s u_m(t)) = 0.$$

Тогда

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} |\Delta^s u_m(t)|^2 + \nu a(\Delta^s u_m(t), \Delta^s u_m(t)) + b(\Delta^s(u_m(t), u_m(t)), \Delta^s u_m(t)) = 0$$

и мы получаем дифференциальные соотношения, рассмотренные в § 7.

В силу результатов этого параграфа, используя стандартные аргументы метода Галёркина, на основании лемм 2 и 3 получаем основные теоремы 1 и 2 о существовании $(2s)$ -гладких решений задачи Коши (2.1)–(2.2).

Список литературы

- [1] C. Foias, O. Manley, R. Rosa, R. Temam, *Navier–Stokes equations and turbulence*, Encyclopedia Math. Appl., **83**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001, xiv+347 pp.
- [2] C. Kahane, “On the spatial analyticity of solutions of the Navier–Stokes equations”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **33**:5 (1969), 386–405.
- [3] О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости*, 2-е изд., перераб. и доп., Наука, М., 1970, 288 с.; англ. пер. 1-го изд.: O. A. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach Science Publishers, New York–London, 1963, xiv+184 pp.
- [4] Zhen Lei, Fang-Hua Lin, “Global mild solutions of Navier–Stokes equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **64**:9 (2011), 1297–1304.

- [5] Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972, 588 с.; пер. с фр.: J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris; Gauthier-Villars, Paris, 1969, xx+554 pp.
- [6] K. Masuda, “On the analiticity and the unique continuation theorem for solutions of the Navier–Stokes equations”, *Proc. Japan Acad.*, **43**:9 (1967), 827–832.
- [7] R. Temam, *Navier–Stokes equations and nonlinear functional analysis*, 2nd ed., CBMS-NSF Regional Conf. Ser. in Appl. Math., **66**, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1995, xiv+141 pp.
- [8] J. Serrin, “On the interior regularity of weak solutions of the Navier–Stokes equations”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **9**:1 (1962), 187–195.
- [9] J. G. Heywood, “The Navier–Stokes equations: On the existence, regularity and decay of solutions”, *Indiana Univ. Math. J.*, **29**:5 (1980), 639–681.
- [10] А. А. Ильин, “Об одном классе точных неравенств для периодических функций. Дополнение к статье С.И. Похожаева “Гладкие решения уравнений Навье–Стокса””, *Матем. сб.*, **205**:2 (2014), 71–74.

Станислав Иванович Похожаев
(Stanislav I. Pokhozhaev)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: pokhozhaev@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
25.02.2013 и 13.06.2013