Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Карпухин, Немаксимальность экстремальных метрик на торе и бутылке Клейна, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 12, 31–48

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8227>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 06:04:03

УДК 514.764.21

М. А. Карпухин

Немаксимальность экстремальных метрик на торе и бутылке Клейна

Теорема Эль Суфи и Илиаса устанавливает соответствие между минимальными подмногообразиями в сферах и метриками, экстремальными для собственных значений оператора Лапласа–Бельтрами. В недавних работах с помощью этого соответствия были построены новые явные примеры экстремальных метрик. В настоящей работе изучаются свойства этих метрик и доказывается, что ни одна из них не является максимальной.

Библиография: 24 названия.

Ключевые слова: экстремальные метрики, биполярная поверхность, торы Оцуки, тау-поверхности Лоусона.

DOI: 10.4213/sm8227

§ 1. Введение

Пусть M – гладкое многообразие, а g – риманова метрика на нем. Тогда оператор Лапласа–Бельтрами Δ действует на пространстве гладких функций на M по формуле

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right).$$

Как известно, спектр Δ дискретен и состоит только из собственных значений. Более того, кратность каждого собственного значения конечна и последовательность собственных чисел возрастает к бесконечности. Обозначим эту последовательность через

$$0 = \lambda_0(M, g) < \lambda_1(M, g) \leq \lambda_2(M, g) \leq \lambda_3(M, g) \leq \dots,$$

где собственные значения занумерованы с учетом кратности.

Для фиксированной поверхности M следующие величины можно рассматривать как функционалы на пространстве римановых метрик:

$$\Lambda_i(M, g) = \lambda_i(M, g) \operatorname{Area}(M, g).$$

В нескольких недавних работах [1]–[10] изучался супремум этих функционалов на пространстве всех римановых метрик на M .

Верхняя оценка через род M для функционала $\Lambda_1(M, g)$ была доказана в статье [10], а существование такой оценки для $\Lambda_i(M, g)$ было получено в статье [6].

Работа выполнена при поддержке Фонда Добрушина и Фонда Саймонса.

Точная величина $\sup \Lambda_i(M, g)$ известна лишь для небольшого набора поверхностей M и номеров i : $\Lambda_1(\mathbb{S}^2, g)$ (см. [4]), $\Lambda_1(\mathbb{RP}^2, g)$ (см. [7]), $\Lambda_1(\mathbb{T}^2, g)$ (см. [8]), $\Lambda_1(\mathbb{Kl}, g)$ (см. [1], [5]), $\Lambda_2(\mathbb{S}^2, g)$ (см. [9]). Заинтересовавшемуся читателю мы рекомендуем введение к статье [11], где эти результаты описаны более подробно.

Функционалы $\Lambda_i(M, g)$ зависят от метрики непрерывно, но не дифференцируемо. Впрочем, известно, что для аналитических деформаций g_t исходной метрики g существуют левые и правые производные по t , см. [3], [12], [13]. Этот факт является мотивацией для следующего определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (см. [2], [8]). Риманова метрика g на замкнутой поверхности M называется *экстремальной* для функционала $\Lambda_i(M, g)$, если для любой аналитической деформации g_t такой, что $g_0 = g$, имеют место неравенства

$$\left. \frac{d}{dt} \Lambda_i(M, g_t) \right|_{t=0+} \leq 0 \leq \left. \frac{d}{dt} \Lambda_i(M, g_t) \right|_{t=0-}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Метрика g называется *максимальной* для функционала $\Lambda_i(M, g)$, если для любой метрики h на M выполнено неравенство

$$\Lambda_i(M, g) \geq \Lambda_i(M, h).$$

Вопрос о существовании гладких максимальных метрик сам по себе нетривиален. Например, не существует гладкой максимальной метрики для функционала $\Lambda_2(\mathbb{S}^2, g)$ (см. [9]).

Список известных экстремальных метрик длиннее, чем список известных точных значений супремума функционалов $\Lambda_i(M, g)$, однако до сих пор максимальность этих экстремальных метрик не была изучена. В настоящей работе мы заполняем этот пробел и проверяем максимальность всех известных экстремальных метрик, а известны следующие:

- (А) метрики на торах Оцуки $O_{p/q}$, которые были изучены в работе [11];
- (Б) метрики на лоусоновых торах и бутылках Клейна $\tau_{m,k}$, которые были изучены в работе [14];
- (В) метрики на биполярных лоусоновых поверхностях $\tilde{\tau}_{m,k}$, которые были изучены в работе [15];
- (Г) метрики на биполярных поверхностях $\tilde{O}_{p/q}$, которые были изучены в работе [16].

На протяжении настоящей работы мы обозначаем через $\mathbb{K}$ бутылку Клейна.

Определения этих поверхностей приведены в следующих параграфах. Главный результат настоящей работы заключен в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. Среди метрик (А)–(Г) нет максимальных, кроме $\tilde{\tau}_{3,1}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Метрика на $\tilde{\tau}_{3,1}$ максимальна для функционала $\Lambda_1(\mathbb{Kl}, g)$, см. [1], [5].

Мы также докажем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Метрика на торе Клиффорда экстремальна для бесконечного множества функционалов $\Lambda_i(M, g)$, но не максимальна ни для одного из них.

Экстремальность метрики на торе Клиффорда для бесконечного множества функционалов $\Lambda_i(M, g)$ уже известна, но, насколько известно автору, нигде не опубликована. В настоящей работе мы восполняем этот недостаток.

В последующем мы используем обозначения $K(k)$, $E(k)$ и $\Pi(n, k)$ для полных эллиптических интегралов первого, второго и третьего рода соответственно, см. [17],

$$K(k) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} dx, \quad E(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx, \\ \Pi(n, k) = \int_0^1 \frac{1}{(1-nx^2)\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}} dx.$$

Изложение организовано следующим образом. В § 2 мы доказываем нижние оценки для $\sup \Lambda_n(\mathbb{T}^2, g)$ и $\sup \Lambda_n(\mathbb{K}, g)$. Эти оценки используются на протяжении работы для доказательства немаксимальности метрик (А)–(Г). В п. 3.2 мы напоминаем связь между экстремальными метриками и минимальными подмногообразиями в сферах. Описанию торов Оцуки как $SO(2)$ -инвариантных минимальных подмногообразий координатности 1 в $\mathbb{S}^3$ посвящен п. 3.3. В п. 3.4, §§ 4–6 доказываются оценки для экстремальных метрик (А)–(Г) соответственно, и это завершает доказательство теоремы 1. Наконец, § 7 содержит доказательство предложения 1.

§ 2. Нижние оценки для $\sup \Lambda_n$

В этом параграфе мы докажем следующее предложение (ср. со следствием 4 в работе [18]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Имеют место следующие неравенства:*

$$\sup \Lambda_n(\mathbb{T}^2, g) \geq 8\pi \left(n - 1 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right), \\ \sup \Lambda_n(\mathbb{K}, g) \geq 8\pi(n - 1) + 12\pi E \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right),$$

где $E(k)$ обозначает полный эллиптический интеграл второго рода.

2.1. Приклеивание ручек по Шавелу–Фельдману. Пусть M – компактное риманово многообразие размерности $n \geq 2$. Выберем две различные точки $p_1, p_2 \in M$ и для достаточно малого ε определим

$$B_\varepsilon \text{ – объединение открытых геодезических шаров радиуса } \varepsilon \text{ вокруг } p_1 \text{ и } p_2, \\ \Omega_\varepsilon := M \setminus B_\varepsilon, \\ \Gamma_\varepsilon := \partial B_\varepsilon = \partial \Omega_\varepsilon.$$

Если p_1 и p_2 лежат в одной компоненте связности M , то ε выбирается меньше четверти радиуса инъективности M и меньше четверти расстояния между p_1 и p_2 . Мы говорим, что многообразие M_ε получено из M добавлением ручки вдоль Γ_ε , если

- 1) Ω_ε изометрично вложено в M_ε ,

2) существует такой диффеоморфизм $\Psi_\varepsilon: M_\varepsilon \setminus \Omega_{2\varepsilon} \rightarrow [-1, 1] \times \mathbb{S}^{n-1}$, что

$$M_\varepsilon \setminus \Omega_\varepsilon = \Psi_\varepsilon^{-1} \left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \times \mathbb{S}^{n-1} \right).$$

Обозначим спектр оператора Лапласа–Бельтрами на M и M_ε через λ_j и $\lambda_j(\varepsilon)$ соответственно. Шавел и Фельдман в работе [19] получили достаточное условие сходимости $\lambda_j(\varepsilon) \rightarrow \lambda_j$ при ε , стремящемся к нулю. Перед тем как перейти к формулировке этого условия, необходимо дать следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Для любого компактного риманова многообразия X размерности $n \geq 2$ *изопериметрическая константа* $c_1(X)$ определяется выражением

$$c_1(X) = \inf_Y \frac{(\text{vol}_{n-1}(Y))^n}{(\min(\text{vol}_n(X_1), \text{vol}_n(X_2)))^{n-1}},$$

где vol_k – это k -мерный риманов объем, а Y пробегает все компактные $(n-1)$ -мерные подмногообразия в X , разделяющие X на 2 открытых подмногообразия X_1, X_2 с общей границей Y .

ТЕОРЕМА 2 (Шавел, Фельдман; см. [19]). Пусть M_ε связно для всех ε и существует такая константа $c > 0$, что $c_1(M_\varepsilon) \geq c$ для всех $\varepsilon > 0$.

Тогда $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_j(\varepsilon) = \lambda_j$ для $j = 1, 2, \dots$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В предположениях теоремы $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{vol}_n(M_\varepsilon) = \text{vol}_n(M)$. Действительно, достаточно выбрать $Y = \Gamma_\varepsilon$ в определении 3.

В той же самой статье Шавел и Фельдман предъявляют конструкцию многообразий M_ε для любой поверхности M и почти любой пары точек $p_1, p_2 \in M$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть M – компактное двумерное риманово многообразие гауссовой кривизны K и $\widetilde{M} = (M \setminus K^{-1}(0)) \cup \text{int } K^{-1}(0)$ – плотное открытое подмножество M . Пусть также $p_1, p_2 \in \widetilde{M}$ и имеет место один из следующих случаев:

- M связно;
- M имеет две связные компоненты, и p_i лежат в разных компонентах.

Тогда существуют многообразия M_ε такие, что предположения теоремы 2 выполнены. В частности, $\text{Area}(M_\varepsilon) \rightarrow \text{Area}(M)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Следует отметить, что в работе [19] был рассмотрен только случай связного многообразия M . Однако приведенные там аргументы почти без изменений переносятся на случай несвязного многообразия в форме, указанной выше.

2.2. Доказательство предложения 2. Рассмотрим плоский тор τ_{eq} с решеткой из равносторонних треугольников. Для подходящего растяжения решетки мы имеем $\text{Area}(\tau_{\text{eq}}) = 4\pi^2/\sqrt{3}$, а также $\lambda_1(\tau_{\text{eq}}) = 2$. Для стандартной сферы $\mathbb{S}^2$ площади 4π также имеет место $\lambda_1(\mathbb{S}^2) = 2$. Возьмем $n-1$ экземпляров $\mathbb{S}^2$ и обозначим их S_i , $i = 1, 2, \dots, n-1$. Таким образом, для $T_n = \tau_{\text{eq}} \prod_{i=1}^{n-1} S_i$ мы имеем $\lambda_n(T_n) = 2$, а следовательно, $\Lambda_n(T_n) = 8\pi(n-1 + \pi/\sqrt{3})$.

Последовательное применение теоремы 3 дает существование последовательности многообразий M_ε , диффеоморфных тору, таких, что $\Lambda_n(M_\varepsilon) \rightarrow \Lambda_n(T_n)$ при ε , стремящемся к нулю. Это завершает доказательство первого неравенства.

Второе неравенство доказывается схожим образом, только вместо τ_{eq} нужно использовать биполярную поверхность Лоусона $\tilde{\tau}_{3,1}$ (см. определение в § 5). В работе [5] было доказано, что $\Lambda_1(\tilde{\tau}_{3,1}) = 12\pi E(2\sqrt{2}/3)$. Подходящим масштабированием метрики на $\tilde{\tau}_{3,1}$ можно добиться того, что $\lambda_1(\tilde{\tau}_{3,1}) = 2$, и применить конструкцию из предыдущего абзаца.

§ 3. Торы Оцуки

3.1. Связь с минимальными подмногообразиями в сферах. Пусть $\psi: M \looparrowright \mathbb{S}^n$ – минимальное погружение в единичную сферу с канонической метрикой g_{can} . Обозначим через Δ оператор Лапласа–Бельтрами на M с метрикой ψ^*g_{can} . Рассмотрим функцию Вейля

$$N(\lambda) = \#\{i \mid \lambda_i(M, g) < \lambda\}.$$

Следующая теорема позволяет строить явные примеры экстремальных метрик.

ТЕОРЕМА 4 (Эль Суфи, Илиас; см. [3]). Пусть $\psi: M \looparrowright \mathbb{S}^n$ – минимальное погружение в единичную сферу $\mathbb{S}^n$ с канонической метрикой g_{can} .

Тогда метрика ψ^*g_{can} на M экстремальна для функционала $\Lambda_{N(2)}(M, g)$.

Таким образом, можно начать с минимально погруженного подмногообразия N в единичной сфере, вычислить $N(2)$, и тогда метрика, индуцированная на N погружением, экстремальна для функционала $\Lambda_{N(2)}(N, g)$. Впрочем, для данного минимального подмногообразия не существует алгоритма для подсчета точного значения $N(2)$. Тем не менее этот подход был успешно применен Пенским в работах [11], [14] для метрик (А) и (Б) соответственно, а также автором в работе [16] для метрик (Г). Также некоторые идеи этого подхода были использованы Ляпуантом в статье [15] для метрик (В).

3.2. Теорема о редукции для минимальных подмногообразий. Рассмотрим риманово многообразие M с метрикой g' и компактную группу G , действующую на M изометриями. Для каждой точки $x \in M$ обозначим через G_x стабилизатор точки x при этом действии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Для двух точек $x, y \in M$ мы говорим, что $x \preceq y$, если $G_x \subset gG_yg^{-1}$ для некоторого $g \in G$. Орбита Gx – орбита главного типа, если для любой точки $y \in M$ верно, что $x \preceq y$.

Обозначим через M^* объединение всех орбит главного типа, тогда M^* является открытым плотным подмногообразием M (см. [20]). Более того, M^*/G наследует естественную риманову структуру g с помощью проекции $\pi: M^* \rightarrow M^*/G$. Метрика g определяется формулой $g(X, Y) = g'(X', Y')$, где X, Y – касательные векторы в точке $x \in M^*/G$, а X', Y' – касательные векторы в точке

$x' \in \pi^{-1}(x) \subset M^*$ такие, что X' и Y' ортогональны орбите $\pi^{-1}(x)$ и $d\pi(X') = X$, $d\pi(Y') = Y$.

Пусть $f: N \looparrowright M$ является G -инвариантным погруженным подмногообразием, т.е. многообразием с таким действием G изометриями, что $g \cdot f(x) = f(g \cdot x)$ для любого $x \in N$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Кооднородностью G -инвариантного погруженного многообразия N называется число $\dim N - \nu$, где ν обозначает размерность орбит главного типа.*

Определим на M^*/G функцию объема $V(x)$ формулой $V(x) = \text{Vol}(\pi^{-1}(x))$. Также для каждого целого $k \geq 1$ определим метрику $g_k = V^{2/k}g$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (Сян, Лоусон; см. [21]). *Предположим, что $f: N \looparrowright M^*$ является G -инвариантным погруженным подмногообразием кооднородности k , и пусть на M/G^* задана метрика g_k .*

Тогда погружение $f: N \looparrowright M^$ минимально тогда и только тогда, когда $\bar{f}: N/G \looparrowright M^*/G$ минимально.*

3.3. Торы Оцуки. Торы Оцуки впервые увидели свет в работе Оцуки [22]. Мы приведем краткое определение торов Оцуки из работы Пенского [11]. Более детальное изложение содержится в п. 1.2 работы [11]. Рассмотрим действие $\text{SO}(2)$ на трехмерной единичной сфере $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, заданное формулой

$$\alpha \cdot (x, y, z, t) = (\cos \alpha x + \sin \alpha y, -\sin \alpha x + \cos \alpha y, z, t),$$

где $\alpha \in [0, 2\pi)$ – координата на $\text{SO}(2)$. Пространством орбит $\mathbb{S}^3/\text{SO}(2)$ является полусфера $\mathbb{S}_+^2$

$$q^2 + z^2 + t^2 = 1, \quad q \geq 0,$$

где точке (q, z, t) соответствует орбита $(q \cos \alpha, q \sin \alpha, z, t) \in \mathbb{S}^3$. Пространство орбит главного типа $(\mathbb{S}^3)^*/\text{SO}(2)$ – это открытая полусфера

$$\mathbb{S}_{>0}^2 = \{(q, z, t) \in \mathbb{S}^2 | q > 0\}.$$

Введем сферические координаты на пространстве орбит

$$\begin{cases} t = \cos \varphi \sin \theta, \\ z = \cos \varphi \cos \theta, \\ q = \sin \varphi. \end{cases}$$

Мы ищем минимальные подмногообразия кооднородности 1, поэтому метрика Сяна–Лоусона задается формулой

$$V^2(d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\theta^2) = 4\pi^2 \sin^2 \varphi (d\varphi^2 + \cos^2 \varphi d\theta^2). \quad (3.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Минимально погруженный $\text{SO}(2)$ -инвариантный двумерный тор в $\mathbb{S}^3$ такой, что его образ при проекции $\pi: \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^3/\text{SO}(2)$ – замкнутая геодезическая в $(\mathbb{S}^3)^*/\text{SO}(2)$ с метрикой (3.1), называется *тором Оцуки*.

Следующее предложение было доказано в работе [11].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Кроме одного случая, заданного уравнением $\psi = \pi/4$, тороны Оцуки находятся во взаимно однозначном соответствии с рациональными числами p/q такими, что*

$$\frac{1}{2} < \frac{p}{q} < \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad p, q > 0, \quad (p, q) = 1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Через $O_{p/q}$ мы обозначаем тор Оцуки, соответствующий числу p/q . Следуя работе [11], мы применяем термин “тор Оцуки” только к торомам $O_{p/q}$.

Для того, чтобы зафиксировать обозначения, мы дадим набросок доказательства предложения 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем стандартные обозначения для коэффициентов метрики (3.1)

$$E = 4\pi^2 \sin^2 \varphi, \quad G = 4\pi^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi.$$

Как известно, длина вектора скорости геодезической постоянна. Предположим, что она равна 1. Это предположение, а также уравнение геодезической для $\ddot{\theta}$ приводят к следующим двум уравнениям:

$$\dot{\theta} = \frac{\sin a \cos a}{2\pi \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}, \quad (3.2)$$

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \sin^2 a \cos^2 a}{4\pi^2 \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi}, \quad (3.3)$$

где a – это минимальное значение φ на геодезической. Тогда ясно, что геодезическая лежит в кольце $a \leq \varphi \leq \pi/2 - a$. Выберем натуральный параметр t так, что $\varphi(0) = a$.

Обозначим через $\Omega(a)$ разность между значением θ , соответствующим $\varphi = a$, и ближайшим значением θ , соответствующим $\varphi = \pi/2 - a$. Легко видеть, что

$$\Omega(a) = \sin a \cos a \int_a^{\pi/2-a} \frac{d\varphi}{\cos \varphi \sqrt{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \sin^2 a \cos^2 a}}.$$

Геодезическая замкнута тогда и только тогда, когда $\Omega(a) = p\pi/q$. Оставшаяся часть доказательства вытекает из следующих свойств функции $\Omega(a)$, см. работу [22]:

- 1) $\Omega(a)$ непрерывна и монотонна на $(0, \pi/4]$,
- 2) $\lim_{a \rightarrow 0+} \Omega(a) = \pi/2$ и $\Omega(\pi/4) = \pi/\sqrt{2}$.

3.4. Оценки для $\Lambda_{2p-1}(O_{p/q})$. Согласно работе [11] метрика на торе Оцуки $O_{p/q}$ экстремальна для функционала $\Lambda_{2p-1}(\mathbb{T}^2, g)$. В этом параграфе мы докажем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для всех пар p, q таких, что $(p, q) = 1$ и $1/2 < p/q < \sqrt{2}/2$, имеет место неравенство

$$8\pi \left(2p - 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) > \Lambda_{2p-1}(O_{p/q}).$$

Для доказательства предложения 5 необходимо сначала доказать несколько вспомогательных результатов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Для $a \in (0, \pi/4)$ такого, что $\Omega(a) = p\pi/q$, имеет место следующая формула:

$$\Lambda_{2p-1}(O_{p/q}) = 8\pi q \cos a E\left(\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 a}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем обозначения предложения 4. Как мы знаем,

$$\dot{\varphi} = \pm \frac{\sqrt{G - c^2}}{\sqrt{EG}},$$

где $c = 2\pi \sin a \cos a$. Таким образом, длина отрезка геодезической $\pi(O_{p/q})$ между ближайшими точками с $\varphi = a$ и $\varphi = \pi/2 - a$ равна $2\pi I$, где

$$I = \int_a^{\pi/2-a} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 a \cos^2 a / (\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi)}} d\varphi.$$

Выразим I в терминах эллиптических интегралов,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\sin a}^{\cos a} \frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x^2(1-x^2) - \cos^2 a \sin^2 a}} dx = \frac{1}{2} \int_{\sin^2 a}^{\cos^2 a} \frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{u(1-u) - \cos^2 a \sin^2 a}} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sqrt{(1-\sin^2 a) - (\cos^2 a - \sin^2 a)t}}{\sqrt{t(1-t)}} dt = \frac{1}{2} \cos a \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - (1 - \operatorname{tg}^2 a)t}}{\sqrt{t(1-t)}} dt \\ &= \cos a \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - (1 - \operatorname{tg}^2 a)y^2}}{\sqrt{1-y^2}} dy = \cos a E\left(\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 a}\right). \end{aligned}$$

Здесь были использованы следующие замены переменных:

$$\cos \varphi = x, \quad x^2 = u, \quad u = (\cos^2 a - \sin^2 a)t + \sin^2 a, \quad t = y^2.$$

Так как отображения $\theta \mapsto \theta + \theta_0$ и $\theta \mapsto \theta_0 - \theta$ являются изометриями, то длина геодезической $\pi(O_{p/q})$ равна $4\pi q \cos a E(\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 a})$. По предложению 13 из работы [11] $\Lambda_{2p-1}(O_{p/q})$ равно удвоенному значению длины $\pi(O_{p/q})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Для всех $k \in [0, 1]$ имеет место следующее неравенство:

$$K(k) - \frac{2}{2-k^2} E(k) \geq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Распишем левую часть неравенства, учитывая определения E и K ,

$$\begin{aligned} K(k) - \frac{2}{2-k^2}E(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} - \frac{2}{2-k^2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta} d\theta \\ &= \frac{k^2}{2-k^2} \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin^2\theta-1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} d\theta. \end{aligned}$$

Так как подынтегральное выражение неположительно на $(0, \pi/4)$ и неотрицательно на $(\pi/4, \pi/2)$, то

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{2\sin^2\theta-1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} d\theta &= \int_0^{\pi/4} \frac{2\sin^2\theta-1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{2\sin^2\theta-1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} d\theta \\ &\geq \int_0^{\pi/4} \frac{2\sin^2\theta-1}{\sqrt{1-k^2/2}} d\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{2\sin^2\theta-1}{\sqrt{1-k^2/2}} d\theta \\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-k^2/2}} \int_0^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta = 0. \end{aligned}$$

Введем обозначение

$$\Phi(a) = \cos a E\left(\sqrt{1-\operatorname{tg}^2 a}\right).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Функция $\Phi(a)$ не убывает, и $\Phi'(a) < 1/2$ для всех $a \in (0, \pi/4)$. В частности, $1 = \Phi(0) \leq \Phi(a) \leq \Phi(\pi/4) = \pi/(2\sqrt{2})$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Имеет место неравенство

$$4\sqrt{2}\pi^2 q \geq \Lambda_{2p-1}(O_{p/q}) \geq 8\pi q. \quad (3.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Отметим, что во время написания настоящей работы неравенство (3.4) появилось в статье [23].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 8. Напомним следующие формулы для производных эллиптических интегралов:

$$\frac{dE(k)}{dk} = \frac{E(k) - K(k)}{k}, \quad \frac{dK(k)}{dk} = \frac{E(k)}{k(1-k^2)} - \frac{K(k)}{k}, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi(n, k)}{\partial n} &= \frac{1}{2(k^2 - n)(n - 1)} \left(E(k) + \frac{(k^2 - n)}{n} K(k) + \frac{(n^2 - k^2)}{n} \Pi(n, k) \right), \\ \frac{\partial \Pi(n, k)}{\partial k} &= \frac{k}{n - k^2} \left(\frac{E(k)}{k^2 - 1} + \Pi(n, k) \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Введем обозначение $\beta = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 a}$. Тогда

$$\begin{aligned} \Phi'(a) &= \cos a \left(-2 \operatorname{tg} a \frac{E(\beta) - K(\beta)}{2 \cos^2 a (1 - \operatorname{tg}^2 a)} \right) - \sin a E(\beta) \\ &= -\sin a \left(E(\beta) + \frac{E(\beta) - K(\beta)}{\cos^2 a - \sin^2 a} \right) \\ &= \frac{\sqrt{(1 - \beta^2)(2 - \beta^2)}}{\beta^2} \left(K(\beta) - \frac{2}{2 - \beta^2} E(\beta) \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Теперь монотонность функции $\Phi(a)$ следует из предложения 7.

Для доказательства второй части предложения вернемся к формуле (3.7). Мы имеем

$$\begin{aligned}
 \Phi'(a) &= -\sin a \left(\frac{2 \cos^2 a E(\beta) - K(\beta)}{\cos^2 a - \sin^2 a} \right) \\
 &= -\frac{\sin a}{\cos^2 a - \sin^2 a} \int_0^{\pi/2} \frac{2 \cos^2 a (1 - \beta^2 \sin^2 \theta) - 1}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta}} d\theta \\
 &= \sin a \int_0^{\pi/2} \frac{2 \sin^2 \theta - 1}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta}} d\theta \leq \sin a \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{2 \sin^2 \theta - 1}{\sqrt{1 - \beta^2}} d\theta \\
 &= -\cos a \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos 2\theta d\theta = \cos a \frac{\sin 2\theta}{2} \Big|_{\pi/2}^{\pi/4} \leq \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Это завершает доказательство предложения 8.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Функция $(2/\pi)\Omega(a) - \Phi(a)$ возрастает на интервале $(0, \pi/4)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В работе [23] была доказана следующая формула:

$$\Omega(a) = \frac{1}{\sin a} \Pi\left(-\frac{\cos 2a}{\sin^2 a}, \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 a}\right).$$

Используя формулу (3.6), получаем следующее выражение:

$$\frac{d\Omega(a)}{da} = \frac{1}{\cos a \cos 2a} K\left(\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 a}\right) - \frac{2 \cos a}{\cos 2a} E\left(\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 a}\right).$$

Вспомним обозначение $\beta(a) = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 a}$. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned}
 \Omega'(a) &= \frac{(2 - \beta^2)^{3/2}}{\beta^2} \left(K(\beta) - \frac{2}{2 - \beta^2} E(\beta) \right), \\
 \Omega(a) &= \sqrt{\frac{2 - \beta^2}{1 - \beta^2}} \Pi\left(-\frac{\beta^2}{1 - \beta^2}, \beta\right).
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Более того, по формуле (3.7) мы имеем

$$\Phi'(a) = \frac{\sqrt{(1 - \beta^2)(2 - \beta^2)}}{\beta^2} \left(K(\beta) - \frac{2}{2 - \beta^2} E(\beta) \right).$$

Из неравенства $2/\pi(2 - \beta^2) - \sqrt{1 - \beta^2} > 0$ и предложения 7 следует неравенство

$$\frac{2}{\pi} \Omega'(a) - \Phi'(a) = \frac{\sqrt{2 - \beta^2}}{k^2} \left(K(\beta) - \frac{2}{2 - \beta^2} E(\beta) \right) \left(\frac{2}{\pi} (2 - \beta^2) - \sqrt{1 - \beta^2} \right) > 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Для $a \in [1/5, \pi/4]$ имеет место неравенство

$$\frac{2}{\pi} \Omega(a) - \Phi(a) > \frac{2\sqrt{3} - \pi}{3\sqrt{3}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя таблицы эллиптических интегралов, например, из книги [17], получаем неравенство

$$\frac{2}{\pi}\Omega\left(\frac{1}{5}\right) - \Phi\left(\frac{1}{5}\right) > \frac{2\sqrt{3} - \pi}{3\sqrt{3}}.$$

Оставшаяся часть доказательства следует из монотонности функции, стоящей в левой части.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 10. Для $\xi \in [0, 1/5]$ мы имеем

$$\Omega'(\xi) > \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1 \right)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По формуле (3.8) для $\xi \in [0, 1/5]$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \Omega'(\xi) &= \frac{(2 - \beta(\xi)^2)^{3/2}}{\beta(\xi)^2} \left(K(\beta(\xi)) - \frac{2}{2 - \beta(\xi)^2} E(\beta(\xi)) \right) \\ &\geq K\left(\beta\left(\frac{1}{5}\right)\right) - 2 \frac{2 - \beta^2(1/5)}{\beta^2(1/5)} E\left(\beta\left(\frac{1}{5}\right)\right). \end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы использовали то, что $K(k)$ – возрастающая функция, а $E(k)$ и $\beta(a)$ – убывающие функции. Из таблиц эллиптических интегралов в книге [17] известно, что

$$K\left(\beta\left(\frac{1}{5}\right)\right) - 2 \frac{2 - \beta^2(1/5)}{\beta^2(1/5)} E\left(\beta\left(\frac{1}{5}\right)\right) > \frac{\pi}{4} \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1 \right)^{-1}.$$

Это завершает доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5. Напомним, что нашей целью является доказательство неравенства

$$8\pi \left(2p - 2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) > 8\pi q \Phi(a),$$

где $\Omega(a) = p\pi/q$. Это неравенство равносильно следующему:

$$2\frac{p}{q} - \frac{2\sqrt{3} - \pi}{q\sqrt{3}} > \Phi(a).$$

Так как $\Omega(a) = p\pi/q$, достаточно доказать, что

$$\frac{2}{\pi}\Omega(a) - \Phi(a) > \frac{2\sqrt{3} - \pi}{q\sqrt{3}}. \quad (3.9)$$

Очевидно, что $q \geq 3$, поэтому применение следствия 2 обеспечивает выполнение неравенства (3.9) на интервале $a \in [1/5, \pi/4]$. Для того чтобы доказать это неравенство в интервале $a \in [0, 1/5]$, заметим, что по предположению 8

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi}\Omega(a) - \Phi(a) &= \frac{2}{\pi}(\Omega(a) - \Omega(0)) - (\Phi(a) - \Phi(0)) \\ &= a \left(\frac{2}{\pi}\Omega'(\xi) - \Phi'(\eta) \right) \geq a \left(\frac{2}{\pi}\Omega'(\xi) - \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

для некоторого $\xi, \eta \in (0, a)$. Более того,

$$\frac{1}{2q}\pi \leq \frac{2p-q}{2q}\pi = \frac{p}{q}\pi - \frac{1}{2}\pi = \Omega(a) - \Omega(0) = a\Omega'(\xi),$$

или

$$\frac{1}{q} < \frac{2a}{\pi}\Omega'(\xi).$$

Следовательно, неравенство (3.9) следует из неравенства

$$\frac{2}{\pi}\Omega'(\xi) - \frac{1}{2} > \frac{2}{\pi}\left(2 - \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\Omega'(\xi),$$

или неравенства

$$\Omega'(\xi) > \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 1\right)^{-1}.$$

Последнее неравенство легко следует из предложения 10.

§ 4. Поверхности Лоусона

Тау-поверхность Лоусона $\tau_{m,k}$ – это погруженная поверхность в $\mathbb{S}^3$, заданная двоякопериодическим погружением $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^4$ по формуле

$$(\cos mx \cos y, \sin mx \cos y, \cos kx \sin y, \sin kx \sin y).$$

Эти поверхности были введены Лоусоном в работе [24]. Он также показал, что для различных пар $\{m, k\}$ таких, что $m \geq k \geq 1$ и $(m, k) = 1$, поверхности $\tau_{m,k}$ являются различными компактно погруженными поверхностями в $\mathbb{S}^3$. Предположим, что $(m, k) = 1$, тогда если m и k нечетны, то $\tau_{m,k}$ – тор, который мы называем лоусоновым тором. В противном случае $\tau_{m,k}$ является бутылкой Клейна, которую мы называем лоусоновой бутылкой Клейна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11 (Пенской; см. [14]). Пусть $\tau_{m,k}$ – поверхность Лоусона. Тогда метрика на $\tau_{m,k}$ экстремальна для функционала $\Lambda_j(M, g)$, где

$$j = 2\left[\frac{\sqrt{m^2 + k^2}}{2}\right] + m + k - 1, \quad (4.1)$$

$M = \mathbb{T}^2$, если m, k нечетны, и $M = \mathbb{K}$ иначе.

Значение соответствующего функционала

$$\Lambda_j(\tau_{m,k}) = 8\pi m E\left(\frac{\sqrt{m^2 - k^2}}{m}\right).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 12. Пусть j задается формулой (4.1).

Если $\tau_{m,k}$ – тор Лоусона, то

$$\Lambda_j(\tau_{m,k}) < 8\pi\left(j - 1 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).$$

Если $\tau_{m,k}$ – бутылка Клейна, то

$$\Lambda_j(\tau_{m,k}) < 8\pi(j-1) + 12\pi E\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать следующее неравенство:

$$j \geq mE\left(\frac{\sqrt{m^2 - k^2}}{m}\right). \quad (4.2)$$

Отметим, что функция

$$\varphi(x) = 1 + x - E\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$$

положительна на отрезке $[0, 1]$. Действительно,

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - x^2 \sin^2 \psi} \, d\psi \leq \int_0^{\pi/2} \left(\sqrt{1 - \sin^2 \psi} + \sqrt{(1 - x^2) \sin^2 \psi} \right) d\psi \\ &= 1 + \sqrt{1 - x^2}. \end{aligned}$$

Теперь разделим обе части неравенства (4.2) на m и обозначим через x отношение $k/m \in [0, 1]$. Так как

$$\left\lceil \sqrt{\frac{m^2 + k^2}{2}} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{m + k}{2} \right\rceil \geq \left\lceil \frac{m + 1}{2} \right\rceil > \frac{m}{2},$$

то неравенство (4.2) следует из положительности $\varphi(x)$.

§ 5. Биполярные поверхности к поверхностям Лоусона

Пусть $I: N \hookrightarrow \mathbb{S}^3$ – минимальное погружение поверхности N . Отображение Гаусса $I^*: N \rightarrow \mathbb{S}^3$ определяется поточечно как образ единичной нормали к N в $\mathbb{S}^3$ при параллельном переносе в начало координат в $\mathbb{R}^4$. Тогда внешнее произведение $\tilde{I} = I \wedge I^*$ является погружением поверхности N в $\mathbb{S}^5 \subset \mathbb{R}^6$. В работе [24] Лоусон показал, что это погружение минимально. Образ этого погружения $\tilde{I}(N)$ называется поверхностью, биполярной к N .

Обозначим через $\tilde{\tau}_{m,k}$ поверхность, биполярную к $\tau_{m,k}$. В работе [15] Ляпу-ант доказал, что:

- если $mk \equiv 0 \pmod{2}$, то $\tilde{\tau}_{m,k}$ – тор, метрика на котором экстремальна для функционала $\Lambda_{4m-2}(\mathbb{T}^2, g)$, и

$$\Lambda_{4m-2}(\tilde{\tau}_{m,k}) = 16\pi m E\left(\frac{\sqrt{m^2 - k^2}}{m}\right);$$

- если $mk \equiv 1 \pmod{4}$, то $\tilde{\tau}_{m,k}$ – тор, метрика на котором экстремальна для функционала $\Lambda_{2m-2}(\mathbb{T}^2, g)$, и

$$\Lambda_{2m-2}(\tilde{\tau}_{m,k}) = 8\pi m E\left(\frac{\sqrt{m^2 - k^2}}{m}\right);$$

– если $mk \equiv 3 \pmod{4}$, то $\tilde{\tau}_{m,k}$ – бутылка Клейна, метрика на которой экстремальна для $\Lambda_{m-2}(\mathbb{K}1, g)$, и

$$\Lambda_{m-2}(\tilde{\tau}_{m,k}) = 4\pi m E\left(\frac{\sqrt{m^2 - k^2}}{m}\right).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 13. Если $mk \equiv 1 \pmod{4}$, то имеет место неравенство

$$\Lambda_{2m-2}(\tilde{\tau}_{m,k}) < 8\pi\left(2m - 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).$$

Если $mk \equiv 0 \pmod{2}$, то имеет место неравенство

$$\Lambda_{4m-2}(\tilde{\tau}_{m,k}) < 8\pi\left(4m - 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right).$$

Если $mk \equiv 3 \pmod{4}$ и $\{m, k\} \neq \{3, 1\}$, то имеет место неравенство

$$8\pi(m - 3) + 12\pi E\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) > \Lambda_{m-2}(\tilde{\tau}_{m,k}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства первого неравенства достаточно проверить, что

$$mE\left(\frac{\sqrt{m^2 - k^2}}{m}\right) \leq (2m - 2). \quad (5.1)$$

Известно, что $E(\tilde{k}) \leq \pi/2$ для $\tilde{k} \in [0, 1]$. Поэтому достаточно доказать, что

$$\pi m \leq 4m - 4.$$

Это неравенство верно для $m \geq 5$. Утверждение предложения для $\tilde{\tau}_{1,1}$ следует из того, что $\tilde{\tau}_{1,1}$ – тор Клиффорда и $\Lambda_1(\tau_{1,1}) = 4\pi^2$.

Подобным образом для доказательства второго неравенства достаточно доказать, что

$$\pi m \leq 4m - 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Это неравенство верно для $m \geq 2$.

Третье неравенство эквивалентно следующему:

$$2(m - 3) + 3E\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) > mE\left(\frac{\sqrt{m^2 - k^2}}{m}\right).$$

Так как $E(\tilde{k}) < \pi/2$, то достаточно доказать, что

$$\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)m > 6 - 3E\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right).$$

Это неравенство верно для $m \geq 7$. Для особого случая $\{m, k\} = \{5, 3\}$ третье неравенство из предложения 13 проверяется с помощью таблицы эллиптических интегралов из книги [17].

§ 6. Биполярные поверхности к торах Оцуки

В работе [16] было доказано следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14. *Биполярная поверхность $\tilde{O}_{p/q}$ к тору Оцуки $O_{p/q}$ является тором.*

Если q нечетно, то метрика на биполярном торе Оцуки $\tilde{O}_{p/q}$ экстремальна для функционала $\Lambda_{2q+4p-2}(\mathbb{T}^2, g)$ и $\Lambda_{2q+4p-2}(\tilde{O}_{p/q}) < 4\sqrt{2}q\pi^2$.

Если q четно, то метрика на биполярном торе Оцуки $\tilde{O}_{p/q}$ экстремальна для функционала $\Lambda_{q+2p-2}(\mathbb{T}^2, g)$ и $\Lambda_{q+2p-2}(\tilde{O}_{p/q}) < 2\sqrt{2}q\pi^2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 15. *Если q четно, то имеет место неравенство*

$$\Lambda_{q+2p-2}(\tilde{O}_{p/q}) < 8\pi \left(q + 2p - 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right).$$

Если q нечетно, то имеет место неравенство

$$\Lambda_{2q+4p-2}(\tilde{O}_{p/q}) < 8\pi \left(2q + 4p - 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для четного q имеем

$$8\pi \left(q + 2p - 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) > 8\pi(q + 2p - 2) > 12\pi q > 2\sqrt{2}\pi^2 q.$$

В последнем неравенстве мы использовали то, что $2p > q$ и $p > 1$. Аналогично, если q нечетно, то

$$8\pi \left(2q + 4p - 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \right) > 8\pi(2q + 4p - 2) > 24\pi q > 4\sqrt{2}\pi^2 q.$$

Легко видеть, что предложения 5, 12, 13, 15 вместе с предложением 2 влекут теорему 1.

§ 7. Тор Клиффорда

Представим тор Клиффорда как плоский тор с квадратной решеткой с ребром 2π . В этом случае оператор Лапласа–Бельтрами совпадает с точностью до знака с классическим двумерным оператором Лапласа. Следовательно, стандартная техника разделения переменных влечет следующий вид базиса в пространстве собственных функций:

$$\sin nx \sin my, \quad \sin nx \cos ly, \quad \cos kx \sin my, \quad \cos kx \cos ly,$$

где $n, m \in \mathbb{N}$ и $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Соответствующие собственные значения равны $n^2 + m^2$, $n^2 + l^2$, $k^2 + m^2$, $k^2 + l^2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 16. *Функция Вейля $N(\lambda)$ тора Клиффорда равна числу целых точек в открытом круге радиуса $\sqrt{\lambda}$ с центром в начале координат.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем взаимно однозначное соответствие ν между собственными функциями и целыми точками в $\mathbb{R}^2$. Положим

$$\begin{cases} \nu(\sin nx \sin my) = (n, m), \\ \nu(\sin nx \cos ly) = (n, -l), \\ \nu(\cos kx \sin my) = (-k, m), \\ \nu(\cos kx \cos ly) = (-k, -l). \end{cases}$$

Отметим также, что собственное значение f равно квадрату расстояния от $(0, 0)$ до $\nu(f)$. Это наблюдение завершает доказательство.

7.1. Доказательство предложения 1. Легко проверить, что набор функций

$$(\sin kx, \cos kx, \sin ky, \cos ky)$$

задает изометричное погружение тора Клиффорда в сферу. Аналогичное утверждение верно для набора

$$(\sin kx \sin ky, \sin kx \cos ky, \cos kx \sin ky, \cos kx \cos ky)$$

и набора

$$\begin{aligned} &(\sin kx \sin ly, \sin kx \cos ly, \cos kx \sin ly, \cos kx \cos ly, \\ &\sin lx \sin ky, \sin lx \cos ky, \cos lx \sin ky, \cos lx \cos ky), \end{aligned}$$

где $k \neq l$. Следовательно, по теореме 4 метрика на торе Клиффорда экстремальна для функционалов $\Lambda_{N(r^2)}(\mathbb{T}^2, g)$, где $r^2 = n^2 + m^2$ с $n, m \in \mathbb{Z}$, и $\Lambda_{N(r^2)}(\mathbb{T}^{Cl}) = 4\pi^2 r^2$.

Обозначим через B_r диск радиуса r . Тогда имеется простая оценка

$$N(r^2) \geq \text{Area}(B_{r-\sqrt{2}/2}) = \pi \left(r - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2.$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$2 \left(r - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 > r^2,$$

а это неравенство верно для $r^2 \geq 6$. Для $r^2 < 6$ неравенство $8\pi N(r^2) > 4\pi r^2$ легко проверяется полным перебором возможных значений r^2 . Это завершает доказательство предложения 1.

Автор выражает благодарность А. В. Пенскому за постановку задачи, плодотворные обсуждения и неоценимую помощь в подготовке настоящего текста.

Список литературы

- [1] A. El Soufi, H. Giacomini, M. Jazar, “A unique extremal metric for the least eigenvalue of the Laplacian on the Klein bottle”, *Duke Math. J.*, **135**:1 (2006), 181–202.
- [2] A. El Soufi, S. Ilias, “Riemannian manifolds admitting isometric immersions by their first eigenfunctions”, *Pacific. J. Math.*, **195**:1 (2000), 91–99.
- [3] A. El Soufi, S. Ilias, “Laplacian eigenvalue functionals and metric deformations on compact manifolds”, *J. Geom. Phys.*, **58**:1 (2008), 89–104.
- [4] J. Hersch, “Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér A-B*, **270** (1970), A1645–A1648.
- [5] D. Jakobson, N. Nadirashvili, I. Polterovich, “Extremal metric for the first eigenvalue on a Klein bottle”, *Canad. J. Math.*, **58**:2 (2006), 381–400.
- [6] N. Korevaar, “Upper bounds for eigenvalues of conformal metrics”, *J. Differential Geom.*, **37**:1 (1993), 73–93.
- [7] P. Li, S.-T. Yau, “A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces”, *Invent. Math.*, **69**:2 (1982), 269–291.
- [8] N. Nadirashvili, “Berger’s isoperimetric problem and minimal immersions of surfaces”, *Geom. Funct. Anal.*, **6**:5 (1996), 877–897.
- [9] N. Nadirashvili, “Isoperimetric inequality for the second eigenvalue of a sphere”, *J. Differential Geom.*, **61**:2 (2002), 335–340.
- [10] P. C. Yang, S.-T. Yau, “Eigenvalues of the Laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, **7**:1 (1980), 55–63.
- [11] A. V. Penskoï, “Extremal spectral properties of Otsuki tori”, *Math. Nachr.*, **286**:4 (2013), 379–391.
- [12] S. Bando, H. Urakawa, “Generic properties of the eigenvalue of the Laplacian for compact Riemannian manifolds”, *Tôhoku Math. J. (2)*, **35**:2 (1983), 155–172.
- [13] M. Berger, “Sur les premières valeurs propres des variétés riemanniennes”, *Compositio Math.*, **26**:2 (1973), 129–149.
- [14] A. V. Penskoï, “Extremal spectral properties of Lawson tau-surfaces and the Lamé equation”, *Mosc. Math. J.*, **12**:1 (2012), 173–192.
- [15] H. Lapointe, “Spectral properties of bipolar minimal surfaces in $\mathbb{S}^4$ ”, *Differential Geom. Appl.*, **26**:1 (2008), 9–22.
- [16] M. A. Karpukhin, “Spectral properties of bipolar surfaces to Otsuki tori”, *J. Spectr. Theory* (to appear); arXiv: abs/1205.6316.
- [17] P. F. Byrd, M. D. Friedman, *Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists*, Springer-Verlag, New York–Heidelberg, 1971.
- [18] B. Colbois, A. El Soufi, “Extremal eigenvalues of the Laplacian in a conformal class of metrics: the «Conformal Spectrum»”, *Ann. Global Anal. Geom.*, **24**:4 (2003), 337–349.
- [19] I. Chavel, E. A. Feldman, “Spectra of manifolds with small handles”, *Comment. Math. Helv.*, **56**:1 (1981), 83–102.
- [20] D. Montgomery, H. Samelson, C. T. Yang, “Exceptional orbits of highest dimension”, *Ann. of Math. (2)*, **64**:1 (1956), 131–141.
- [21] W.-Y. Hsiang, H. B. Lawson, “Minimal submanifolds of low cohomogeneity”, *J. Differential Geometry*, **5**:1 (1971), 1–38.
- [22] T. Otsuki, “Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of constant curvature”, *Amer. J. Math.*, **92**:1 (1970), 145–173.
- [23] Z. Hu, H. Song, “On Otsuki tori and their Willmore energy”, *J. Math. Anal. Appl.*, **395**:2 (2012), 465–472.

- [24] Н. В. Lawson, “Complete minimal surfaces in $\mathbb{S}^3$ ”, *Ann. of Math. (2)*, **92**:3 (1970), 335–374.

Михаил Александрович Карпухин
(Mikhail A. Karpukhin)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,

Независимый московский университет

E-mail: karpukhin@mccme.ru

Поступила в редакцию
27.02.2013 и 10.06.2013