Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. М. Тригуб, Точный порядок приближения периодических функций полиномами Бернштейна–Стечкина, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 12, 127–146

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8228>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 15:18:52

УДК 517.51

Р. М. Тригуб

Точный порядок приближения периодических функций полиномами Бернштейна–Стечкина

Изучены аппроксимативные свойства метода Бернштейна–Стечкина суммирования тригонометрических рядов Фурье. Получено усиление теоремы Джексона–Стечкина, кроме того, для каждой непрерывной периодической функции найдена не только точная оценка приближения сверху, но и такая же по порядку оценка приближения снизу. Для этого введены специальные модули гладкости и K -функционал.

Библиография: 16 названий.

Ключевые слова: B -сплайн, модуль гладкости, K -функционал, преобразование Фурье меры, мультипликатор Фурье.

DOI: 10.4213/sm8228

§ 1. Введение

Порядок приближения непрерывных 2π -периодических функций ($f \in C(\mathbb{T})$, $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$) тригонометрическими полиномами порядка n при росте n часто выражается через модуль гладкости $\omega_s(f; h_n)$ (порядка s и шага h_n), который определяется следующим образом ($\|\cdot\|$ – норма в $C(\mathbb{T})$):

$$\omega_s(f; h) = \sup_{0 < \delta \leq h} \|\Delta_\delta^s f(\cdot)\|, \quad \Delta_\delta^1 f(x) = \Delta_\delta f(x) = f(x) - f(x + \delta).$$

А в качестве полиномов часто используют интегралы вида

$$\tau_{r,n}(f) = \tau_{r,n}(f; x) = \frac{1}{2\pi\alpha_{r,n}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n^r(t) dt,$$

где

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2}, \quad \alpha_{r,n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n^r(t) dt$$

($r \in \mathbb{N}$, порядок полинома $\tau_{r,n}$ равен rn).

При $r = 1$ это частные суммы $S_n(f)$ ряда Фурье, при $r = 2$ – полиномы $\sigma_n(f)$ Фейера, а при $r = 4$ – полиномы Джексона. При четном r эти операторы положительные.

Хорошо известно, что (через C обозначаем разные абсолютные положительные константы, $\omega = \omega_1$ – модуль непрерывности)

$$\begin{aligned} \|f - S_n(f)\| &\leq C\omega\left(f; \frac{1}{n}\right)(1 + \ln n), \\ \|f - \sigma_n(f)\| &\leq C\omega\left(f; \frac{\ln(n+1)}{n}\right), \end{aligned}$$

а при $r \geq 4$ в силу четности ядра Дирихле

$$\begin{aligned} \|f - \tau_{r,n}\| &= \sup_x \left| \frac{1}{2\pi\alpha_{r,n}} \int_0^\pi [f(x+t) - 2f(x) + f(x+t)] D_n^r(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi|\alpha_{r,n}|} \int_0^\pi \omega_2(f; t) |D_n(t)|^r dt \leq C(r) \omega_2\left(f; \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

(детали см., например, в [1]).

Последнее неравенство получил при $\omega_2(f, h) = O(h)$ А. Зигмунд, а в общем случае – Н. И. Ахиезер (см. [1]).

При $r = 3$ таким образом можно получить оценку порядка $\omega(f; 1/n)$ и только порядка $\omega_2(f; \sqrt{\ln(n+1)}/n)$. На самом деле, как доказано в [2], при $r \geq 3$

$$\|f - \tau_{r,n}\| \asymp \omega_2\left(f; \frac{1}{n}\right)$$

(двойное неравенство с положительными константами, зависящими лишь от r).

Такие порядковые равенства с правой частью вида $\omega(f; 1/n)$ или $\omega_2(f; 1/n)$ доказаны в [2] для сверток функций с ядром довольно общего вида.

Оценки приближения сверху называют прямыми теоремами теории приближения, а такие же оценки приближения снизу, которые появились в работах автора (см., например, [3]), в настоящее время называют “strong converse theorem” (см., например, [4] и приведенную там литературу).

Общую прямую теорему с модулем гладкости ω_s любого порядка $s \geq 3$ доказал С. Б. Стечкин [5] (см. также, например, [1; п. 5.1.3])

$$\|f - \tau_{s,r,n}(f)\| \leq C(s, r) \omega_s\left(f; \frac{1}{n}\right),$$

где при $r \geq s + 2$ полином

$$\tau_{s,r,n}(f) = \tau_{s,r,n}(f; x) = \frac{1}{2\pi\alpha_{r,n}} \int_{-\pi}^\pi [f(x) - \Delta_t^s f(x)] D_n^r(t) dt. \quad (1.1)$$

Эти же полиномы ранее использовал С. Н. Бернштейн для доказательства такого же неравенства в частном случае $\omega_s(f; h) = O(h^\alpha)$, $\alpha > 0$ (см. [6]).

Двойные (порядковые) неравенства с $\omega_s(f; 1/n)$ получены автором при $s \in \mathbb{N}$ и нецелом s , как и точные порядки приближения классическими методами суммирования рядов Фурье. При этом иногда пришлось вводить специальные модули гладкости и K -функционалы (особенно в кратном случае [7]); см. гл. VIII монографии [8].

В 2010 г. на Международной конференции в Москве, посвященной 90-летию со дня рождения С. Б. Стечкина, В. И. Иванов поставил вопрос о точном порядке приближения полиномами $\tau_{s,r,n}$ (см. его доклад в разделе “Видеотека” портала Math-Net.Ru, а также [9]).

Ответу на этот вопрос и посвящена настоящая статья.

Как видно из доказательства в § 3, при нечетном s в приведенном выше неравенстве Джексона–Стечкина $\omega_s(f; 1/n)$ можно заменить на $\omega_{s+1}(f; 1/n)$.

Метод другой: учитываются коэффициенты ядра сверточного оператора, т.е. спектр оператора.

В случае классических полиномов, когда множество неподвижных точек оператора τ_n одномерно (константы), последовательность норм $\|f - \tau_n(f)\|$ с ростом n почти убывает. Например, для сумм Фейера при $m > n$

$$\|f - \sigma_m(f)\| \leq 4\|f - \sigma_n(f)\|.$$

Для $\tau_{s,r,n}$ не может быть верным при натуральном $q \geq 2$ даже следующее неравенство:

$$\|f - \tau_{s,r,qn}(f)\| \leq C(q)\|f - \tau_{s,r,n}(f)\|.$$

Дело в том, что $(\varphi_n = \varphi_{s,r,n})$

$$\begin{aligned} \tau_{s,r,n}(f) &= \sum_{|k| \leq rn} \varphi_n\left(\frac{k}{2n+1}\right) \widehat{f}_k e_k, \\ \widehat{f}_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt, \quad e_k = e_k(x) = e^{ikx}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $\varphi_n(x) = 1$ не только в нуле, но в некоторой окрестности нуля нет таких точек. Если x_n – ближайшая к нулю такая, что $\varphi_n(x_n) = 1$, и при $p_n \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| x_n - \frac{p_n}{2n+1} \right| = 0,$$

то, учитывая еще, что $|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \leq C(s, r)|x - y|$, было бы

$$\|e_{p_n} - \tau_{s,r,qn}(e_{p_n})\| = \left| 1 - \varphi_{qn}\left(\frac{p_n}{2qn+1}\right) \right| \leq C(q) \left| 1 - \varphi_n\left(\frac{p_n}{2n+1}\right) \right|,$$

где правая часть при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю, а левая нет.

Кроме того, не может быть верным при $m \in \mathbb{N}$ для $f = e_{p_n}$ и следующее неравенство:

$$\omega_m\left(f; \frac{1}{n}\right) \leq C(m)\|f - \tau_{s,r,n}(f)\|,$$

так как при $\varepsilon > 0$ и $n \geq k\varepsilon$

$$2^m \left(\frac{k\varepsilon}{n}\right)^m \leq \sup_{0 < \delta \leq \pi\varepsilon/n} 2^m \left| \sin \frac{k\delta}{2} \right|^m = \omega_m\left(e_k; \frac{\pi\varepsilon}{n}\right) \leq (\pi\varepsilon + 1)^m \omega_m\left(e_k; \frac{1}{n}\right)$$

и, как и ранее, при $n \rightarrow \infty$ правая часть стремится к нулю, а левая нет.

Ранее автором доказано, что

$$C(s)\omega_s(f; h) \leq \left\| \int_0^1 \Delta_{ht}^s f(\cdot) dt \right\| \leq \omega_s(f; h).$$

Правое неравенство очевидно, а для доказательства левого неравенства при $s \in \mathbb{N}$ используется метод мультипликаторов и классическая теорема Линдемана о трансцендентности значений показательной функции (см. [8; теорема 8.2.5]).

Положим при $t = 0$ $\tilde{\Delta}_{h,0}^0 f = f$, а при $k \in \mathbb{N}$

$$\tilde{\Delta}_{h,0}^k f(x) = \int_0^1 \Delta_{hu}^k f(x) du.$$

При $t \neq 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, полагаем

$$\tilde{\Delta}_{h,t} f(x) = \int_0^1 [\Delta_{hu} f(x) - \lambda \Delta_{hu}^2 f(x)] du \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi^t(kh) \hat{f}_k e_k(x),$$

где

$$\lambda = \lambda(t) = \frac{2(it + 1 - e^{it})}{2it + 3 - 4e^{it} + e^{2it}} \quad (1.3)$$

(вещественная часть знаменателя $2(1 - \cos t) > 0$), а

$$\psi^t(x) = 1 - \lambda + (2\lambda - 1) \frac{e^{ix} - 1}{ix} - \lambda \frac{e^{2ix} - 1}{2ix}, \quad \psi^t(0) = \psi^t(t) = 0.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $r \geq 6$, $2 \leq s \leq r - 2$ и $s_1 = 2[(s + 1)/2]$. Существует число $C(r)$ такое, что при $n \geq C(r)$ и $h_n = 2\pi/(r(2n + 1))$ для $f \in C(\mathbb{T})$

$$\|f - \tau_{s,r,n}\| \asymp \left\| \tilde{\Delta}_{h_n,0}^{s_1-2p} \prod_{j=1}^p \tilde{\Delta}_{h_n,x_{j,n}} \tilde{\Delta}_{h_n,-x_{j,n}} f(\cdot) \right\|$$

(двойное неравенство с положительными константами, не зависящими от f и n), где $\{x_{j,n}\}_1^p$ – положительные корни уравнения $\varphi_n(x) = 1$ при $n \geq C_0(r)$, их число p постоянно и не больше $[s/2]$.

Свойства функции φ_n изучены в леммах 2.5, 2.7 и 2.8.

Возможен ответ на этот же вопрос и в другой форме. Положим при $t \neq 2m\pi$, $|m| \in \mathbb{N}$,

$$\delta_{h,t} f(x) = \int_0^1 \left[f(x) - \frac{it}{e^{it} - 1} f(x + hu) \right] du.$$

Тогда

$$\delta_{h,t} f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_1^t(kh) \hat{f}_k e_k(x), \quad \psi_1^t(x) = 1 - \frac{t}{e^{it} - 1} \frac{e^{ix} - 1}{x}. \quad (1.4)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $r \geq 6$, $2 \leq s \leq r - 2$ и $s_1 = 2[(s + 1)/2]$. Существует число $C(r)$ такое, что при $n \geq C(r)$ и $f \in C(\mathbb{T})$

$$\|f - \tau_{s,r,n}\| \asymp \left\| \delta_{1/n,0}^{s_1} \prod_{j=1}^p \delta_{1/n,x_{j,n}} \delta_{1/n,-x_{j,n}} f(\cdot) \right\|$$

(двойное неравенство с положительными константами, не зависящими от f и n), где $\{x_{j,n}\}_1^p$ – положительные корни уравнения $\varphi_n(x) = 1$.

Для $g \in C^q(\mathbb{T})$ положим при $q = s_1 + 2p$

$$d_n^q g(x) = \frac{1}{(2n+1)^{s_1}} \frac{d^{s_1}}{dx^{s_1}} \prod_{j=1}^p \left(\frac{1}{2n+1} \frac{d}{dx} - ix_{j,n} \right) \left(\frac{1}{2n+1} \frac{d}{dx} + ix_{j,n} \right) g(x).$$

ТЕОРЕМА 3. В обозначениях теорем 1 и 2 при $n \geq C(r)$

$$\|f - \tau_{s,r,n}\| \asymp \inf_{g \in C^q(\mathbb{T})} (\|f - g\| + \|d_n^q g\|)$$

(двойное неравенство с положительными константами, не зависящими от f и n).

Для доказательства приведенных теорем используется, как и ранее, метод мультипликаторов Фурье, основанный в случае пространства C на представлении некоторых “переходных” функций g_n в виде

$$g_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} d\mu_n(y),$$

где μ_n – конечная на $\mathbb{R}$ комплекснозначная борелевская мера при ограниченности по n полных вариаций μ_n (см. [10]).

В случае теоремы 2, например,

$$g_n(x) = \frac{1 - \varphi_n(x)}{(\psi_1^0(x))^{s_1} \prod_{j=1}^p \psi_1^{x_{j,n}}(x) \psi_1^{-x_{j,n}}(x)}$$

и нужно проверить представление g_n и $1/g_n$ в указанном виде.

Отметим, что для определения точного порядка приближения полиномами (1.1) с функцией φ_n с известными свойствами и не зависящей от n специальные разностные операторы $\tilde{\Delta}_{h,t} f$ при $t \neq 0$, как и специальный K -функционал (см. теорему 3), введены в статье [11].

Частный случай теоремы 1 при $s = 2$, $r = 4$ доказан в [12] при всех $n \in \mathbb{N}$. В этом случае $p = 1 = s/2$ при всех n .

Теоремы 1–3 справедливы и в метрике $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$ (см. лемму 3.1).

§ 2. Вспомогательные предложения

Начнем с функций ψ^t и ψ_1^t .

ЛЕММА 2.1. При $0 < |t| \leq \pi$ функция ψ^t (см. (1.3)) имеет только два вещественных нуля $x = 0$ и $x = t$, и оба – нули простые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как доказано в [11] (см. также [12]), все нули ψ^t простые, а для того чтобы их было два, а не три, необходимо и достаточно, чтобы

$$e^{(a-\bar{a})/2} \neq \frac{\bar{\lambda}(\lambda-1)}{\lambda(\bar{\lambda}-1)} e^{-it},$$

где

$$a = a(t) = \frac{2\bar{\lambda}(\lambda-1)e^{-it} + 3\lambda + \bar{\lambda}}{2|\lambda-1|^2}.$$

Покажем, что при $0 < |t| \leq \pi$

$$H(t) = \operatorname{Im} \left[\frac{\bar{\lambda}(\lambda - 1)}{\lambda(\bar{\lambda} - 1)} e^{-it} - e^{(a - \bar{a})/2} \right] \neq 0.$$

После простых преобразований $H(t) = h_1(t) - \sin h_2(t)$, где

$$h_1(t) = \frac{2t - 2t \cos t - t^2 \sin t}{2 - 2 \cos t + t^2 - 2t \sin t} = \frac{t \sin t (2 \operatorname{tg} t/2 - t)}{(1 - \cos t)^2 + (t - \sin t)^2},$$

$$h_2(t) = \frac{2 \sin t - t - t \cos t}{1 - \cos t} = \frac{2(\cos^2 t/2)(2 \operatorname{tg} t/2 - t)}{1 - \cos t}.$$

Функции h_1 и h_2 , а значит, и H — функции нечетные. А так как $\operatorname{tg} u > u$ при $u \in (0, \pi/2)$, то при $t \in (0, \pi)$ $h_2(t) > 0$ и, значит, $\sin h_2(t) < h_2(t)$, а

$$H(t) > h_1(t) - h_2(t) = \left(2 \operatorname{tg} \frac{t}{2} - t \right) \sin t \frac{t(1 - \cos t)^2 - \sin t(1 - \cos t)^2 - \sin t(t - \sin t)^2}{(1 - \cos t)^2[(1 - \cos t)^2 + (t - \sin t)^2]}.$$

Числитель дроби равен

$$(t - \sin t)[(1 - \cos t)^2 - \sin t(t - \sin t)] = (t - \sin t)(2 - 2 \cos t - t \sin t) = (t - \sin t) \sin t \left(2 \operatorname{tg} \frac{t}{2} - t \right).$$

Так что при $t \in (0, \pi)$ $H(t) > 0$.

А так как еще

$$H(\pi) > h_1(\pi) - h_2(\pi) = \frac{6\pi}{4 + \pi^2} > 0,$$

то лемма доказана.

ЛЕММА 2.2. Функция ψ_1^t приведена в (1.4). Считаем $t \neq 2m\pi$, $|m| \in \mathbb{N}$. При всех $x \in \mathbb{R}$ и $\nu \in \mathbb{Z}_+$

$$\left| \left(\frac{\psi_1^t(x)}{x - t} \right)^{(\nu)} \right| \leq 1 + \frac{|t|}{2|\sin t/2|}, \quad (2.1)$$

а при $|x| \leq a < \infty$, если еще $|t - 2m\pi| \geq \delta_1 > 0$ для всех $m \in \mathbb{N}$, то

$$\min_{x, t} \left| \frac{\psi_1^t(x)}{x - t} \right| = C_1(a, \delta_1) > 0. \quad (2.2)$$

Кроме того,

$$|1 - \psi_1^t(x)| \leq \frac{|t|}{2|\sin t/2|} \min \left\{ 1, \frac{2}{|x|} \right\}, \quad (2.3)$$

а при $|t| \leq a$ и $|x| \geq a + \delta_2$ ($\delta_2 > 0$)

$$\min_{x, t} |\psi_1^t(x)| = C_2(a, \delta_2) > 0. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $t = 0$

$$\psi_1^0(x) = 1 - \frac{e^{ix} - 1}{ix} = \frac{1 + ix - e^{ix}}{ix},$$

и очевидно, что $x = 0$ – простой корень уравнения $\psi_1^0(x) = 0$. И корень единственный, что видно после отделения вещественной и мнимой частей в уравнении $\psi_1^0(x) = 0$:

$$1 - \cos x = 0, \quad x - \sin x = 0.$$

Если $\psi_1^t(x) = 0$ при $t \neq 0$, то

$$\frac{e^{ix} - 1}{x} = \frac{e^{it} - 1}{t}, \quad (2.5)$$

или

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1 - \cos t}{t}, \quad \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin t}{t}.$$

После деления одного равенства на другое и перехода к половинному аргументу

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{1 - \cos t}{\sin t}, \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \operatorname{tg} \frac{t}{2}.$$

Следовательно, $x = t + 2k\pi$ при некотором $k \in \mathbb{Z}$.

Но при $k \neq 0$ числители в (2.5) совпадают, а знаменатели нет. Так что корень $x = t$ единственный.

Если при $x \neq 0$

$$\left(\frac{e^{ix} - 1}{x} \right)' = \frac{ixe^{ix} - e^{ix} + 1}{x^2} = 0,$$

то

$$1 - \cos x - x \sin x = 0, \quad x \cos x - \sin x = 0,$$

или

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = x, \quad \operatorname{tg} x = x.$$

Но

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} x/2}{1 - \operatorname{tg}^2 x/2}, \quad \text{а при } x \neq 0 \quad x \neq \frac{2x}{1 - x^2}.$$

Так что корень $x = t$ простой.

ψ_1^t – целая функция степени 1, ограниченная на $\mathbb{R}$:

$$|\psi_1^t(x)| \leq 1 + \frac{|t|}{2|\sin t/2|} \left| \int_0^1 e^{iux} du \right| \leq 1 + \frac{|t|}{2|\sin t/2|}.$$

По неравенству Бернштейна и любая производная ψ_1^t по модулю ограничена той же величиной. Поэтому

$$\left| \frac{\psi_1^t(x)}{x - t} \right| = \left| \frac{1}{x - t} \int_t^x (\psi_1^t)'(u) du \right| \leq 1 + \frac{|t|}{2|\sin t/2|},$$

и неравенство (2.1) доказано.

Неравенства (2.2) и (2.4) следуют теперь из свойств непрерывных функций, не равных нулю на компакте. При этом используется и неравенство (2.3), которое очевидно. Лемма доказана.

Переходим к информации о нулях функций $1 - \varphi_n$ (см. (1.1) и (1.2)).

$$\tau_{s,r,n}(f; x) = \frac{1}{2\pi\alpha_{r,n}} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - \Delta_t^s f(x)] D_n^r(t) dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_{k,n} \hat{f}_k e_k(x).$$

Очевидно, что $\lambda_{k,n} = 0$ при $|k| \geq rn + 1$, а при $|k| \leq rn$

$$\lambda_{k,n} = e_{-k} \tau_{s,r,n}(e_k) = \frac{1}{2\pi\alpha_{r,n}} \int_{-\pi}^{\pi} [1 - (1 - e^{ikt})^s] D_n^r(t) dt.$$

Введем при $|x| \leq rn/(2n+1)$ функцию $\varphi_n = \varphi_{s,r,n}$ следующим образом:

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi\alpha_{r,n}} \int_{-\pi}^{\pi} [1 - (1 - e^{i(2n+1)xt})^s] D_n^r(t) dt, \quad (2.6)$$

считая, что $\varphi_n(x) = 0$ при $|x| \geq (rn+1)/(2n+1)$.

Тогда $\lambda_{k,n} = \varphi_n(k/(2n+1))$. φ_n — функция гладкая и четная (в силу четности D_n). Из (2.6) видно, что $(1 - \varphi_n(x))_{x=0}^{(\nu)} = 0$ при $0 \leq \nu \leq s_1 - 1 = 2[(s+1)/2] - 1$.

Но φ_n пока не определена при $rn/(2n+1) < |x| < (rn+1)/(2n+1)$.

Для дальнейшего нам достаточно считать $\varphi_n \in C^1(\mathbb{R})$. Поэтому определим ее на $[rn/(2n+1), (rn+1)/(2n+1)]$ многочленом третьей степени. А такой многочлен, определяемый условиями

$$q(0) = a_0, \quad q'(0) = a_1, \quad q(\lambda) = q'(\lambda) = 0 \quad (\lambda > 0),$$

имеет вид

$$q(x) = \left(\frac{x}{\lambda} - 1\right)^2 \left[a_0 + \left(a_1 + \frac{2a_0}{\lambda} \right) x \right].$$

При этом

$$q'''(x) = \frac{6}{\lambda^2} \left(a_1 + \frac{2a_0}{\lambda} \right),$$

а при $k \in [0, 2]$

$$q^{(k)}(x) = \frac{1}{(2-k)!} \int_{\lambda}^x (x-t)^{2-k} q'''(t) dt$$

и, значит, при $x \in [0, \lambda]$

$$|q^{(k)}(x)| \leq \frac{6\lambda^{1-k}}{(3-k)!} \left| a_1 + \frac{2a_0}{\lambda} \right|.$$

Поэтому при $q(x) = \varphi_n(x + rn/(2n+1))$, $\lambda = 1/(2n+1)$, $a_0 = \varphi_n(rn/(2n+1))$, $a_1 = \varphi'_n(rn/(2n+1))$ и $x \in [0, 1/(2n+1)]$

$$\begin{aligned} & \left| \varphi_n \left(x + \frac{rn}{2n+1} \right) \right| + \frac{1}{n} \left| \varphi'_n \left(x + \frac{rn}{2n+1} \right) \right| + \frac{1}{n^2} \left| \varphi''_n \left(x + \frac{rn}{2n+1} \right) \right| \\ &= O \left(\left| \varphi_n \left(\frac{rn}{2n+1} \right) \right| + \frac{1}{n} \left| \varphi'_n \left(\frac{rn}{2n+1} \right) \right| \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Найдем теперь предельную функцию φ для последовательности $\{\varphi_n\}$ (см. ниже лемму 2.5).

ЛЕММА 2.3. Если при $x \in \mathbb{R}$ и $t \geq 0$ $|g(x, t)| \leq 1$, то при $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha \in (-3, r-1)$

$$\left| \frac{1}{(2n+1)^{r-1-\alpha}} \int_0^\pi g(x, (2n+1)t) t^\alpha D_n^r(t) dt - \int_0^\infty g(x, t) t^\alpha \left(\frac{2 \sin t/2}{t} \right)^r dt \right| \leq C(r, \alpha) \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\ln n}{n^{r-\alpha-1}} \right).$$

При $\alpha \neq r-3$ можно $\ln n$ заменить единицей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $t \in (0, \pi]$

$$\frac{1}{\pi} t \leq \sin \frac{t}{2} < \frac{t}{2}, \quad 0 < \frac{1}{\sin t/2} - \frac{2}{t} \leq Ct,$$

$$0 < \left(\frac{1}{\sin t/2} \right)^r - \left(\frac{2}{t} \right)^r \leq \left(\frac{1}{\sin t/2} - \frac{2}{t} \right) r \left(\frac{1}{\sin t/2} \right)^{r-1} \leq Crt \left(\frac{\pi}{t} \right)^{r-1} = \frac{C_1(r)}{t^{r-2}}.$$

Поэтому при $D_n(t) = (\sin(n+1/2)t)/(\sin t/2)$

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\pi g(x, (2n+1)t) t^\alpha D_n^r(t) dt - \int_0^\pi g(x, (2n+1)t) t^\alpha \left(\frac{2 \sin t/2}{t} \right)^r dt \right| \\ & \leq C_1(r) \int_0^\pi t^\alpha \frac{|\sin(n+1/2)t|}{t^{r-2}} dt = C_1(r) \left(n + \frac{1}{2} \right)^{r-\alpha-3} \int_0^{\pi(n+1/2)} \frac{|\sin u|^r}{u^{r-\alpha-2}} du \\ & \leq C_1(r) \left(n + \frac{1}{2} \right)^{r-\alpha-3} \left(\int_0^1 u^{\alpha+2} du + \int_1^{\pi(n+1/2)} \frac{du}{u^{r-\alpha-1}} \right) \\ & \leq C_2(r, \alpha) (n^{r-\alpha-3} + \ln n), \end{aligned}$$

где $\ln n$ появляется лишь при $\alpha = r-3$.

Второй интеграл с функцией g по $[0, \pi]$ после замены $t = (2n+1)u$ равен

$$(2n+1)^{r-\alpha-1} \int_0^{\pi(2n+1)} g(x, u) u^\alpha \left(\frac{2 \sin u/2}{u} \right)^r du.$$

Если еще учесть, что при $\alpha < r-1$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\pi(2n+1)}^\infty g(x, u) u^\alpha \left(\frac{2 \sin u/2}{u} \right)^r du \right| (2n+1)^{r-\alpha-1} \\ & \leq (2n+1)^{r-\alpha-1} 2^r \int_{\pi(2n+1)}^\infty \frac{du}{u^{r-\alpha}} \leq C_3(r, \alpha), \end{aligned}$$

то получим

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{(2n+1)^{r-1-\alpha}} \int_0^\pi g(x, (2n+1)t) t^\alpha D_n^r(t) dt \right. \\ & \quad \left. - \int_0^\infty g(x, u) u^\alpha \left(\frac{2 \sin u/2}{u} \right)^r du \right| \leq C_4(r, \alpha) \left(\frac{1}{n^2} + \frac{\ln n}{n^{r-\alpha-1}} \right), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 2.4. При $n \geq 0$

$$\frac{\alpha_{r,n}}{(2n+1)^{r-1}} = \frac{1}{2\pi(2n+1)^{r-1}} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2} \right)^r dt \in \left[\frac{1}{r}, 1 \right],$$

а при $r \geq 4$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{\alpha_{r,n}}{(2n+1)^{r-1}} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t} \right)^r dt \right| \leq C(r) \frac{1}{n^2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое соотношение доказано в [2; лемма 1], а второе следует из леммы 2.3 при $g(x, t) \equiv 1$ и $\alpha = 0$.

ЛЕММА 2.5. Если при $1 \leq s \leq r-2$

$$\varphi(x) = \beta_r \sum_{\nu=1}^s (-1)^{\nu+1} \binom{s}{\nu} \int_0^\infty \cos \nu x t \left(\frac{2 \sin t/2}{t} \right)^r dt, \quad \frac{1}{\beta_r} = 2 \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t} \right)^r dt,$$

то при $r \geq 6$ при всех $x \in \mathbb{R}$

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| + |\varphi'(x) - \varphi'_n(x)| \frac{1}{n} \leq \frac{C(r)}{n^2}$$

и $|\varphi''_n(x)| \leq C(r)$, кроме, может быть, точек $\pm rn/(2n+1)$ и $\pm(rn+1)/(2n+1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $\varphi \in C^{r-2}(\mathbb{R})$, а в силу теоремы Винера–Пэли $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geq r/2$. В силу (2.6) при $|x| \leq rn/(2n+1)$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\pi \alpha_{r,n}} \sum_{\nu=1}^s (-1)^{\nu+1} \binom{s}{\nu} \int_0^\pi \cos(2n+1)t \nu x D_n^r(t) dt.$$

Применяя лемму 2.3 при $g(x, t) = \cos(\nu x t + \delta)$, $\delta \in \mathbb{R}$, и $\alpha = k \leq r-4$

$$\left| \frac{1}{(2n+1)^{r-k-1}} \int_0^\pi \cos((2n+1)t x \nu + \delta) t^k D_n^r(t) dt - \int_0^\infty \cos(\nu x t + \delta) t^k \left(\frac{2 \sin t/2}{t} \right)^r dt \right| \leq C(r, k) \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^{r-k-1}} \right),$$

получаем при $|x| \leq rn/(2n+1)$

$$\begin{aligned} & |\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)| \\ &= \left| \frac{1}{\pi \alpha_{r,n}} \sum_{\nu=1}^s (-1)^{\nu+1} \binom{s}{\nu} [(2n+1)\nu]^k \int_0^\pi t^k \cos \left[(2n+1)t x \nu + \frac{k\pi}{2} \right] D_n^r(t) dt \right. \\ &\quad \left. - \beta_r \sum_{\nu=1}^s (-1)^{\nu+1} \binom{s}{\nu} \nu^k \int_0^\infty t^k \cos \left(\nu x t + \frac{k\pi}{2} \right) \left(\frac{2 \sin t/2}{t} \right)^r dt \right| \\ &\leq \sum_{\nu=1}^s \binom{s}{\nu} \nu^k \left| (2n+1)^k \frac{1}{\pi \alpha_{r,n}} \int_0^\pi t^k \cos \left[(2n+1)t x \nu + \frac{k\pi}{2} \right] D_n^r(t) dt \right. \\ &\quad \left. - \beta_r \int_0^\infty t^k \cos \left(\nu x t + \frac{k\pi}{2} \right) \left(\frac{2 \sin t/2}{t} \right)^r dt \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{\nu=1}^s \binom{s}{\nu} \nu^k \left| \frac{(2n+1)^k}{\pi \alpha_{r,n}} \int_0^\pi t^k \cos \left[(2n+1)tx\nu + \frac{k\pi}{2} \right] D_n^r(t) dt \right. \\
&\quad \left. - \frac{(2n+1)^{r-1}}{\pi \alpha_{r,n}} \int_0^\pi t^k \cos \left(\nu xt + \frac{k\pi}{2} \right) \left(\frac{2 \sin t/2}{t} \right)^r dt \right| \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^s \binom{s}{\nu} \nu^k \left| \left(\beta_r - \frac{(2n+1)^{r-1}}{\pi \alpha_{r,n}} \right) \int_0^\infty t^k \cos \left(\nu xt + \frac{k\pi}{2} \right) \left(\frac{2 \sin t/2}{t} \right)^r dt \right| \\
&\leq \sum_{\nu=1}^s \binom{s}{\nu} \nu^k \frac{(2n+1)^{r-1}}{\pi \alpha_{r,n}} C(r, k) \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^{r-k-1}} \right) \\
&\quad + \sum_{\nu=1}^s \binom{s}{\nu} \nu^k \int_0^\infty u^k \frac{|2 \sin u/2|^r}{u^r} du \cdot \left| \beta_r - \frac{(2n+1)^{r-1}}{\pi \alpha_{r,n}} \right|.
\end{aligned}$$

В первой сумме применяем первое неравенство леммы 2.4, а во второй сумме – второе:

$$\left| \beta_r - \frac{(2n+1)^{r-1}}{\pi \alpha_{r,n}} \right| = \frac{\beta_r (2n+1)^{r-1}}{\pi \alpha_{r,n}} \left| \frac{\alpha_{r,n}}{(2n+1)^{r-1}} - \frac{1}{\pi \beta_r} \right| \leq r \beta_r C(r) \frac{1}{n^2}.$$

Так что при $|x| \leq rn/(2n+1)$ и $k \leq r-4$

$$|\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x)| \leq C(r) \frac{1}{n^2}. \quad (2.8)$$

Но при $|x| \leq r/2$

$$|\varphi^{(r-2)}(x)| \leq \beta_r \sum_{\nu=1}^s \binom{s}{\nu} \nu^k \int_0^\infty \frac{|2 \sin t/2|^r}{t^2} dt \leq C(r).$$

Поэтому при $k \leq r-3$ и $|x| \leq r/2$

$$|\varphi^{(k)}(x)| = \left| \frac{1}{(r-k-1)!} \int_r^x (x-t)^{r-k-1} \varphi^{(r-2)}(t) dt \right| \leq C(r) \left(\frac{r}{2} - |x| \right)^{r-k}.$$

Следовательно, при $k \leq r-4$, учитывая еще (2.8), получаем

$$\sup_{|x| \leq rn/(2n+1)} |\varphi_n^{(k)}(x)| \leq C_2(r), \quad \left| \varphi_n \left(\frac{rn}{2n+1} \right) \right| + \left| \varphi_n' \left(\frac{rn}{2n+1} \right) \right| \leq \frac{C_3(r)}{n^2}.$$

Из (2.7) теперь следует, что при $rn/(2n+1) \leq |x| \leq (rn+1)/(2n+1)$

$$\begin{aligned}
&|\varphi(x) - \varphi_n(x)| + \frac{1}{n} |\varphi'(x) - \varphi_n'(x)| + \frac{1}{n^2} |\varphi''(x) - \varphi_n''(x)| \\
&\leq |\varphi(x)| + \frac{1}{n} |\varphi'(x)| + \frac{1}{n^2} |\varphi''(x)| + |\varphi_n(x)| + \frac{1}{n} |\varphi_n'(x)| + \frac{1}{n^2} |\varphi_n''(x)| \\
&\leq C_4(r) \frac{1}{n^r} + C_5(r) \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

И при $rn/(2n+1) \leq |x| \leq r/2$

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| + \frac{1}{n} |\varphi'(x) - \varphi_n'(x)| = |\varphi(x)| + \frac{1}{n} |\varphi'(x)| \leq \frac{C_6(r)}{n^r}.$$

При $r \geq 2$ $\varphi(x) = \varphi_n(x) = 0$.

Лемма 2.5 доказана.

Определим теперь число и кратность нулей $1 - \varphi$.

$$\begin{aligned} 1 - \varphi(x) &= \beta_r \sum_{\nu=0}^s (-1)^{\nu+1} \binom{s}{\nu} \int_0^\infty \cos \nu x t \left(\frac{2 \sin t/2}{t} \right)^r dt \\ &= \pi \beta_r \sum_{\nu=0}^s (-1)^{\nu+1} \binom{s}{\nu} B_{r-1}(\nu x), \end{aligned} \quad (2.9)$$

где

$$B_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos x t \left(\frac{2 \sin t/2}{t} \right)^{n+1} dt, \quad n \geq 0,$$

– хорошо известные базисные B -сплайны Шёнберга степени n с носителем $[-(n+1)/2, (n+1)/2]$, принадлежащие $C^{n-1}(\mathbb{R})$. Их узлами являются точки $\{k - (n+1)/2\}$, $0 \leq k \leq n$. См., например, [8; теоремы 3.5.34–3.5.37].

Очевидно, $B_0(x) = 1$ при $|x| < 1/2$, $B_0(x) = 0$ при $|x| > 1/2$, $B_0(\pm 1/2) = 1/2$. Легко видеть, что при $n \in \mathbb{N}$

$$B_n(x) = \int_{x-1/2}^{x+1/2} B_{n-1}(t) dt = (B_{n-1} * B_0)(x)$$

и B_n – сплайн с рациональными коэффициентами.

Явный вид, который нам не понадобится, имеется в таблице преобразований Фурье [13].

ЛЕММА 2.6. *При $k \in [0, n-1]$ $B_n^{(k)}$ имеет на $(-(n+1)/2, (n+1)/2)$ ровно k нулей и все они простые. При $k \geq 2$ нули $B_n^{(k)}$ и $B_n^{(k-1)}$ перемежаются.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим теорему Ролля, учитывая, что при $k \in [0, n-1]$ $B_n^{(k)}(\pm(n+1)/2) = 0$, а в силу четности B_n и при нечетном k $B_n^{(k)}(0) = 0$.

Тогда B_n'' имеет на $(-(n+1)/2, (n+1)/2)$ не менее двух различных нулей, B_n''' – не менее трех нулей и т.д. $B_n^{(n-1)}$ имеет на $(-(n+1)/2, (n+1)/2)$ не менее $n-1$ нуля.

Если бы хотя бы одна из производных $B_n^{(k)}$ при $k \in [0, n-2]$ имела более k нулей с учетом кратностей, то и у $B_n^{(n-1)}$ было бы не менее n нулей. Но $B_n^{(n-1)}$ – непрерывная кусочно линейная функция, не имеющая нулей при $(n-1)/2 \leq |x| \leq (n+1)/2$. Остается $n-1$ отрезок, на каждом из которых не более одного нуля. Противоречие. Лемма доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно доказать, что при нечетном $n = 2m-1$, например,

$$B_n^{(n-1)}(x) = (-1)^{m+[x]} \left[\binom{n}{m+[x]} \{x\} - \binom{n-1}{m+[x]-1} \right], \quad |x| \leq m,$$

где $\{x\} = x - [x]$ – дробная часть x .

ЛЕММА 2.7. *Четная функция $1 - \varphi$ имеет на $(0, r/2)$ не более $[s/2]$ нулей, и все они простые, а $x = 0$ имеет кратность $s_1 = 2[(s+1)/2]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения φ в лемме 2.5 видно, что $(1 - \varphi(x))_{x=0}^{(k)} = 0$ при $0 \leq k < s$, а при нечетном s – и при $0 \leq k \leq s$.

Легко видеть, что при четном s $(-1)^{s/2} \varphi^{(s)}(0) > 0$.

Пусть теперь s – нечетное. Тогда

$$\begin{aligned} 1 - \varphi(x) &= \frac{1}{2} \beta_r \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{ixt})^s \left(\frac{2 \sin t/2}{t} \right)^r dt \\ &= 2^{s-1} i^s \beta_r \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isxt/2} (\sin xt)^s \left(\frac{2 \sin t/2}{t} \right)^r dt. \end{aligned}$$

Но при $u \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sin^s u &= \left(u - \frac{u^3}{6} + \dots \right)^s = \left(u - \frac{u^3}{6} \right)^s + s \left(u - \frac{u^3}{6} \right)^{s-1} \left(\frac{u^5}{5!} + \dots \right) \\ &= u^s - \frac{s}{6} u^{s+2} + O(u^{s+4}), \\ e^{-ius/2} (\sin u)^s &= \left(1 - \frac{isu}{2} - \frac{u^2 s^2}{8} + \dots \right) \left(u^s - \frac{s}{6} u^{s+2} + \dots \right) \\ &= u^s - i \frac{s}{2} u^{s+1} + O(u^{s+2}). \end{aligned}$$

Так что $(-1)^{(s-1)/2} \varphi^{(s+1)}(0) > 0$.

Как следует из лемм 2.5 и 2.8, такие же неравенства в нуле справедливы при замене φ на φ_n при больших n .

При $s \equiv 0 \pmod{4}$ или $s \equiv 1 \pmod{4}$ φ_n имеет в нуле строгий минимум. А поскольку есть точки, в которых значения φ_n больше $\varphi_n(0) = 1$, а $\varphi_n(r/2) = 0$, то есть еще точки, в которых $\varphi_n = 1$.

Из формулы (2.9) следует, что

$$1 - \varphi(x) = \pi \beta_r x^s \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 B_{r-1}^{(s)}[x(t_1 + \dots + t_s)] dt_s$$

(s -кратный интеграл по единичному кубу).

Применяем к интегралу теорему о среднем. Так как куб – компактное и связное множество, то среднюю точку $\xi(x) = (\xi_1(x), \dots, \xi_s(x))$ можно считать лежащей внутри куба. Поэтому при $x \neq 0$ и $\xi(x) \neq 0$, или $\xi_1(x) + \dots + \xi_s(x) > 0$.

Имеем

$$1 - \varphi(x) = \pi \beta_r x^s B_{r-1}^{(s)}(x(\xi_1(x) + \dots + \xi_s(x))). \quad (2.10)$$

При нечетном s , когда $B_{r-1}^{(s)}(0) = 0$, в силу леммы 2.6 у $B_{r-1}^{(s)}$ ровно $(s-1)/2$ нулей на $(0, r/2)$. При четном s , когда $B_{r-1}^{(s)}(0) \neq 0$, в силу той же леммы 2.6 у $B_{r-1}^{(s)}$ ровно $s/2$ положительных нулей. Так что $1 - \varphi$ имеет на $(0, r/2)$ не более $[s/2]$ нулей.

Предположим, что существует $x_1 > 0$: $1 - \varphi(x_1) = 0$ и $\varphi'(x_1) = 0$. В силу предыдущего

$$B_{r-1}^{(s)}(x_1(\xi_1(x_1) + \dots + \xi_s(x_1))) = 0.$$

Из равенства (2.10) следует, что

$$\begin{aligned} 0 = \varphi'(x_1) &= -\pi\beta_r x_1^s \int_0^1 dt_1 \dots \int_0^1 (t_1 + \dots + t_s) B_{r-1}^{(s+1)}[x_1(t_1 + \dots + t_s)] dt_s \\ &= -\pi\beta_r x_1^s (\tilde{\xi}_1(x_1) + \dots + \tilde{\xi}_s(x_1)) B_{r-1}^{(s+1)}[x_1 \tilde{\xi}_1(x_1) + \dots + \tilde{\xi}_s(x_1)]. \end{aligned}$$

Но в силу леммы 2.6 у $B_{r-1}^{(s)}$ и $B_{r-1}^{(s+1)}$ нет общих нулей. Так что все нули $1 - \varphi$ простые. Лемма доказана.

Теперь из информации о нулях $1 - \varphi$ выведем информацию о нулях $1 - \varphi_n$ при больших n .

ЛЕММА 2.8. Пусть функции $g_n \in C^1[a, b]$, а g_n и g'_n при $n \rightarrow \infty$ сходятся равномерно на $[a, b]$ к g и g' соответственно. Если $g(x) = 0$ на $[a, b]$ только при $x = x_0 \in (a, b)$ и $g'(x_0) \neq 0$, то существует номер N такой, что функция g_n при $n \geq N$ равна нулю на $[a, b]$ лишь при одном x_n и $g'_n(x_n) \neq 0$. При этом $\lim x_n = x_0$, а

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{[a, b]} \left| \frac{g_n(x)}{x - x_n} - \frac{g(x)}{x - x_0} \right| = 0.$$

А если еще $g_n \in C^2[a, b]$ и последовательность $\{g''_n\}$ ограничена на $[a, b]$, то ограничена на $[a, b]$ и последовательность

$$\left(\frac{g_n(x)}{x - x_n} \right)'.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если есть такая последовательность $\{x_n\}$, что $g_n(x_n) = 0$, то $\lim x_n = x_0$, так как в противном случае существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к $x_1 \neq x_0$, и

$$g(x_1) = \lim [g(x_1) - g(x_{n_k})] + [g(x_{n_k}) - g_n(x_{n_k})] = 0,$$

что противоречит условию леммы.

В силу того, что $g'(x_0) \neq 0$, для достаточно малых $\delta > 0$

$$g(x_0 - \delta)g(x_0 + \delta) < 0.$$

Поэтому найдется такой номер N , начиная с которого $g_n(x_0 - \delta)g_n(x_0 + \delta) < 0$, и, значит, существует $x_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ с условием $g_n(x_n) = 0$. Если бы для бесконечного числа n существовали $x_{1,n} \neq x_{2,n}$ такие, что $g_n(x_{1,n}) = g_n(x_{2,n}) = 0$, то при некоторой последовательности $\tilde{x}_n$ было бы $g'_n(\tilde{x}_n) = 0$. А так как по доказанному $\lim \tilde{x}_n = x_0$, то и $g'(x_0) = 0$, что противоречит условию.

Осталось учесть, что равномерно по $x \in [a, b]$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g_n(x)}{x - x_n} &= \lim \int_0^1 g'_n(x_n + t(x - x_n)) dt \\ &= \int_0^1 g'(x_0 + t(x - x_0)) dt = \frac{g(x)}{x - x_0}, \\ \left(\frac{g_n(x)}{x - x_n} \right)' &= \int_0^1 t g''_n(x_n + t(x - x_n)) dt. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

§ 3. Доказательства теорем 1–3

Комплекснозначная числовая последовательность $\{\lambda_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ является мультипликатором из $C(\mathbb{T})$ в $C(\mathbb{T})$, если для любой функции $f \in C(\mathbb{T})$ ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \lambda_k \widehat{f}_k e_k \sim \Lambda f$$

является рядом Фурье некоторой функции $\Lambda f \in C(\mathbb{T})$ и

$$\|\{\lambda_k\}\|_M = \sup_{\|f\| \leq 1} \|\Lambda f\| < \infty.$$

Такой оператор перестановочен со сдвигом и является сверткой функции f с некоторой мерой на окружности.

Аналогично определяется мультипликатор из $L_p(\mathbb{T})$ в $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$. При этом $\|\{\lambda_k\}\|_{M_p} \leq \|\{\lambda_k\}\|_M$ (см., например, [10; гл. I и VI] или [14; гл. 16]).

В случае $\lambda_k = g(\varepsilon k)$, $g \in C(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$, важно определить для пространства $C(\mathbb{T})$ принадлежность g банаховой алгебре

$$B(\mathbb{R}) = \left\{ g : g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} d\mu(t), \|g\|_B = \text{var } \mu < \infty \right\},$$

где μ – конечная на $\mathbb{R}$ комплекснозначная борелевская мера, а $\text{var } \mu$ – ее полная вариация, так как в этом случае

$$\sup_{\varepsilon > 0} \|\{g(\varepsilon k)\}\|_M = \|g\|_M$$

(см. [10], [14], [8]).

Если мера μ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, т.е. $d\mu = h dx$, $h \in L_1(\mathbb{R})$, то имеем подалгебру $A(\mathbb{R})$ абсолютно сходящихся интегралов Фурье с нормой $\|g\|_B = \|g\|_A = \|h\|_1$.

Пусть при φ и ψ из $C(\mathbb{R})$ (справа – ряды Фурье)

$$\Phi_\varepsilon(f) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(\varepsilon k) \widehat{f}_k e_k, \quad \Psi_\varepsilon(f) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(\varepsilon k) \widehat{f}_k e_k.$$

Нам понадобится следующий принцип сравнения мультипликаторов.

ЛЕММА 3.1 (см. [8; теоремы 7.1.11, 7.1.14]). *Если $g = \varphi/\psi \in B(\mathbb{R})$, то при любом $\varepsilon > 0$*

$$\|\Phi_\varepsilon(f)\| \leq \|g\|_B \|\Psi_\varepsilon(f)\|.$$

А если хотя бы для одной бесконечно малой последовательности $\{\varepsilon_n\}$ при любом n

$$\|\Phi_{\varepsilon_n}(f)\| \leq K \|\Psi_{\varepsilon_n}(f)\|,$$

а операторы $J - \Psi_{\varepsilon_n}$ компактны в $C(\mathbb{T})$ (J – тождественный оператор), то это неравенство с той же константой K верно для любого $\varepsilon > 0$ и, кроме того, в пространстве $L_p(\mathbb{T})$, $1 \leq p \leq \infty$.

Для доказательства принадлежности $B(\mathbb{R})$ воспользуемся следующим признаком Бёрлинга (более общая теорема есть в [8; теорема 6.4.2]).

ЛЕММА 3.2. Если g локально абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$, g и $g' \in L_2$, то

$$\|g\|_B = \|g\|_A \leq C(\|g\|_2 + \|g'\|_2).$$

(См. также обзорную статью [15].)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Применяем лемму 3.1.

Очевидно, что

$$\|g\|_B \leq \|g - g(\infty)\|_A + |g(\infty)|, \quad g(\infty) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x).$$

В силу леммы 3.2

$$\|g - g(\infty)\|_A \leq C(\|g - g(\infty)\|_2 + \|g'\|_2).$$

Очевидно, что при любом $a > 0$

$$\|g\|_2 \leq \sqrt{2a} \sup_{|x| \leq a} |g(x)| + \left(\int_{|x| \geq a} |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (3.1)$$

При доказательстве оценки приближения сверху (см. (1.2) и (1.4))

$$g_n(x) = \frac{1 - \varphi_n(x)}{(\psi_1^0(x))^{s_1} \prod_{j=1}^p \psi_1^{x_{j,n}}(x) \psi_1^{-x_{j,n}}(x)}, \quad g_n(\infty) = 1.$$

Берем $a = r/2$. При $|x| \leq r/2$

$$g_n(x) = \frac{1 - \varphi_n(x)}{x^{s_1} \prod_{j=1}^p (x^2 - x_{j,n}^2)} \left(\frac{x}{\psi_1^0(x)} \right)^{s_1} \prod_{j=1}^p \frac{x - x_{j,n}}{\psi_1^{x_{j,n}}(x)} \frac{x + x_{j,n}}{\psi_1^{-x_{j,n}}(x)}.$$

Первая дробь ограничена по n в силу лемм 2.5 и 2.8.

Коэффициенты сплайна $1 - \varphi$ рациональные (см. рассуждения перед леммой 2.6), и, значит, среди его нулей нет чисел вида $2m\pi$, $|m| \in \mathbb{N}$. Поэтому существует $\delta > 0$ такое, что при достаточно больших n $|x_{j,n} - 2m\pi| \geq \delta$. Тогда в силу леммы 2.2 (см. (2.1) и (2.2)) является ограниченным и каждый из следующих множителей у g_n .

При $|x| \geq r/2$

$$g_n(x) - 1 = \left(\frac{1}{\psi_1^0(x)} \right)^{s_1} \prod_{j=1}^p \frac{1}{\psi_1^{x_{j,n}}(x)} \frac{1}{\psi_1^{-x_{j,n}}(x)} - 1.$$

А так как

$$\frac{1}{\psi_1^{x_{j,n}}(x)} - 1 = \frac{1 - \psi_1^{x_{j,n}}(x)}{\psi_1^{x_{j,n}}(x)},$$

$$\prod_{k=1}^m a_k - 1 = a_m - 1 + \sum_{k=1}^{m-1} (a_k - 1) \prod_{q=k+1}^m a_q,$$

то в силу леммы 2.2 (см. (2.3) и (2.4)) ограничено по n и второе слагаемое в (3.1) при $g = g_n - 1$.

Таким же образом оцениваем сверху $\|g'_n\|_2$. К множителям с φ_n применяем леммы 2.5, 2.7 и 2.8, а к множителям с ψ_1^t — лемму 2.2.

Для оценки приближения функций полиномами $\tau_{s,r,n}(f)$ снизу нужно рассмотреть подобным образом функцию $1/g_n - 1 = (1 - g_n)/g_n$. Но, как видно из предыдущего,

$$\inf_n \inf_{x \in \mathbb{R}} |g_n(x)| > 0.$$

Так же из предыдущего следуют нужные оценки и для $(1/g_n)' = -g'_n/g_n^2$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Действуем по той же схеме.

Чтобы применить лемму 2.1, нужно несколько изменить определение функции φ_n .

При $\mu = r/(2\pi)$ положим при $|x| \leq n/(\mu(2n+1))$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi\alpha_{r,n}} \int_{-\pi}^{\pi} [1 - (1 - e^{i\mu(2n+1)xt})^s] D_n^r(t) dt,$$

а при $|x| \geq (n+1)/(\mu(2n+1))$ $\varphi_n(x) = 0$.

Тогда $\lambda_{k,n} = \varphi_n(k/(\mu(2n+1)))$ при $k \in \mathbb{Z}$.

Как и ранее, чтобы четная функция φ_n принадлежала $C^1(\mathbb{R})$, определим ее на $[n/(\mu(2n+1)), (n+1)/(\mu(2n+1))]$ многочленом третьей степени (четыре условия в концах отрезка).

Предельная функция

$$\varphi(x) = \beta_r \int_0^\infty [1 - (1 - e^{i\mu xt})^s] \left(\frac{2 \sin t/2}{t} \right)^r dt,$$

$\varphi \in C^{r-2}(\mathbb{R})$, и $\varphi(x) = 0$ при $|x| \geq a = r/(2\mu) = \pi$.

Как и ранее, при $x \in \mathbb{R}$ и $r \geq 6$

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| + \frac{1}{n} |\varphi'(x) - \varphi'_n(x)| \leq \frac{C(r)}{n^2},$$

а функция $1 - \varphi_n$ имеет на $(0, \pi)$ p нулей $\{x_{j,n}\}_1^p$. Нули простые, а $x = 0$ имеет кратность s_1 .

В этом случае

$$g_n(x) = \frac{1 - \varphi_n(x)}{(\psi_1^0(x))^{s_1-2p} \prod_{j=1}^p \psi^{x_{j,n}}(x) \psi^{-x_{j,n}}(x)}.$$

При $|x| \leq \pi$

$$g_n(x) = \frac{1 - \varphi_n(x)}{x^{s_1} \prod_{j=1}^p (x^2 - x_{j,n}^2)} \left(\frac{x}{\psi^0(x)} \right)^{s_1} \prod_{j=1}^p \frac{x(x - x_{j,n})}{\psi^{x_{j,n}}(x)} \frac{x(x + x_{j,n})}{\psi^{-x_{j,n}}(x)}.$$

Очевидно, что $\psi^0(\infty) = 1$, а при $t \neq 0$ $\psi^t(\infty) = 1 - \lambda$, $\lambda(-t) = \overline{\lambda(t)}$ и

$$|1 - \lambda| = \frac{2|1 - e^{it}|^2}{|2it + 3 - 4e^{it} + e^{2it}|} \geq \frac{8 \sin^2 t/2}{2|t| + 8}.$$

При этом $g_n(\infty) = |1 - \lambda|^{-2p}$.

Применяя вместо леммы 2.2 лемму 2.1, получаем

$$\sup_n \left[\sup_{|x| \leq \pi} |g_n(x)|^2 + \int_{|x| \geq \pi} |g_n(x - g_n(\infty))|^2 dx \right].$$

Подобные неравенства справедливы при замене g_n на g'_n , на $1/g_n - 1/(g_n(\infty))$ и на $(1/g_n)'$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Достаточно доказать два неравенства: для $g \in C^q(\mathbb{T})$

$$\|g - \tau_{s,r,n}(g)\| \leq \gamma \|d_n^q(g)\|, \quad (3.2)$$

а для $f \in C(\mathbb{T})$

$$\|d_n^q(\tau_{s,r,n}(f))\| \leq \gamma \|f - \tau_{s,r,n}(f)\|, \quad (3.3)$$

где γ не зависит от f , g и n .

Действительно, при оценке приближения сверху

$$\begin{aligned} \|f - \tau_{s,r,n}(f)\| &\leq \|f - g\| + \|g - \tau_{s,r,n}(g)\| + \|\tau_{s,r,n}(f - g)\| \\ &\leq (1 + \gamma)\|f - g\| + \|g - \tau_{s,r,n}(g)\|, \end{aligned}$$

и нужно лишь применить (3.2).

А при оценке приближения снизу в качестве g берем $\tau_{s,r,n}(f)$:

$$\|f - \tau_{s,r,n}(f)\| + \|d_n^q \tau_{s,r,n}(f)\|,$$

и применяем (3.3).

Учтем теперь, что

$$\prod_{j=1}^p \left(\frac{1}{2n+1} \frac{d}{dx} - ix_{j,n} \right) g \sim i \sum_{k \in \mathbb{Z}} \prod_{j=1}^p \left(\frac{k}{2n+1} - ix_{j,n} \right) \widehat{g}_k e_k.$$

Для доказательства неравенства (3.2) методом мультипликаторов (см. лемму 3.1) нужно проверить, что

$$\sup_n \left\| \frac{1 - \varphi_n(x)}{x^{s_1} \prod_{j=1}^p (x^2 - x_{j,n}^2)} \right\|_B < \infty.$$

Локальная принадлежность $A(\mathbb{R})$ на $[-(r+1)/2, (r+1)/2]$ уже доказана, а при $|x| \geq r/2$ очевидна.

А для доказательства неравенства (3.3) нужно проверить, что при четной непрерывной функции $\chi_{r,n}$, равной 1 при $|x| \leq rn/(2n+1)$, равной нулю при $|x| \geq (rn+1)/(2n+1)$ и линейной на $[rn/(2n+1), (rn+1)/(2n+1)]$,

$$\sup_n \left\| \frac{x^{s_1} \prod_{j=1}^p (x^2 - x_{j,n}^2) \chi_{r,n}(x)}{1 - \varphi_n(x)} \right\|_A < \infty.$$

Но это, как и ранее, следует из лемм 2.7 и 2.8. Теорема доказана.

Теорема 1 была анонсирована в [16].

Список литературы

- [1] А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматгиз, М., 1960; англ. пер.: A. F. Timan, *Theory of approximation of functions of a real variable*, Macmillan, New York, 1963.
- [2] R. M. Trigub, “Exact order of approximation of periodic functions by linear polynomial operators”, *East J. Approx.*, **15**:1 (2009), 25–50.
- [3] Р. М. Тригуб, “Линейные методы суммирования и абсолютная сходимость рядов Фурье”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:1 (1968), 24–49; англ. пер.: R. M. Trigub, “Linear summation methods and the absolute convergence of Fourier series”, *Math. USSR-Izv.*, **2**:1 (1968), 21–46.
- [4] B. R. Draganov, “Exact estimates of the rate of approximation of convolution operators”, *J. Approx. Theory*, **162**:5 (2010), 952–979.
- [5] С. Б. Стечкин, “О порядке наилучших приближений непрерывных функций”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **15**:3 (1951), 219–242.
- [6] С. Н. Бернштейн, “О свойствах однородных функциональных классов”, *Докл. АН СССР*, **57** (1947), 111–114; *Собрание сочинений*, т. II, Изд-во АН СССР, М., 1954.
- [7] Р. М. Тригуб, “Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и приближение полиномами функций на торе”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **44**:6 (1980), 1378–1409; англ. пер.: R. M. Trigub, “Absolute convergence of Fourier integrals, summability of Fourier series, and polynomial approximation of functions on the torus”, *Math. USSR-Izv.*, **17**:3 (1981), 567–593.
- [8] R. M. Trigub, E. S. Belinsky, *Fourier analysis and approximation of functions*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.
- [9] В. И. Иванов, “Прямые и обратные теоремы теории приближения периодических функций в работах С. Б. Стечкина и их развитие”, Тр. ИММ УрО РАН, **16**, 2010, 5–17; англ. пер.: V. I. Ivanov, “Direct and inverse theorems in approximation theory for periodic functions in S. B. Stechkin’s papers and the development of these theorems”, *Proc. Inst. Math. Mech.*, **273**:1 (2011), 1–13.
- [10] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974; пер. с англ.: E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Math. Ser., **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971.
- [11] Ю. С. Коломойцев, Р. М. Тригуб, “Об одном неклассическом методе приближения периодических функций тригонометрическими полиномами”, *Укр. матем. вест.*, **9**:3 (2012), 356–374; англ. пер.: Yu. S. Kolomoitsev, R. M. Trigub, “On the nonclassical approximation method for periodic functions by trigonometric polynomials”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **188**:2 (2013), 113–127.
- [12] О. В. Котова, Р. М. Тригуб, “Точный порядок приближения периодических функций одним неклассическим методом суммирования рядов Фурье”, *Укр. матем. ж.*, **64**:7 (2012), 954–969; англ. пер.: O. V. Kotova, R. M. Trigub, “Exact order of approximation of periodic functions by one nonclassical method of summation of Fourier series”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **64**:7 (2012), 1090–1108.
- [13] В. А. Диткин, А. П. Прудников, *Интегральные преобразования и операционное исчисление*, Физматгиз, М., 1961; англ. пер.: V. A. Ditkin, A. P. Prudnikov, *Integral transforms and operational calculus*, Pergamon Press, Oxford–Edinburgh–New York–Paris–Frankfurt, 1965.
- [14] Р. Эдвардс, *Ряды Фурье в современном изложении*, т. 2, Мир, М., 1985; пер. с англ.: R. E. Edwards, *Fourier series. A modern introduction*, v. 2, Grad. Texts in Math., **85**, Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1982.
- [15] E. Liflyand, S. Samko, R. Trigub, “The Wiener algebra of absolutely convergent Fourier integrals: an overview”, *Anal. Math. Phys.*, **2**:1 (2012), 1–68.

- [16] Р. М. Тригуб, “Точный порядок приближения периодических функций полиномами Бернштейна–Стечкина”, *Допов. НАН Укр.*, **7** (2013), 26–29.

Роальд Михайлович Тригуб

(Roald M. Trigub)

Донецкий национальный университет, Украина

E-mail: roald.trigub@gmail.com

Поступила в редакцию

28.02.2013 и 10.05.2013