Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Миронов, Об одном кольце коммутирующих дифференциальных операторов ранга два, отвечающем кривой рода два, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 5, 103–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm823>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 15:00:12

УДК 517.43

А. Е. Миронов

Об одном кольце коммутирующих дифференциальных операторов ранга два, отвечающем кривой рода два

В статье предложен метод построения коммутирующих обыкновенных линейных дифференциальных операторов ранга два, отвечающих кривой рода два, а также указан пример таких операторов с полиномиальными коэффициентами.

Библиография: 13 названий.

§ 1. Введение и основные результаты

В настоящей статье предложен метод нахождения некоторых коммутирующих обыкновенных линейных дифференциальных операторов ранга два, отвечающих кривой рода два.

Уравнения коммутации двух операторов

$$L_1 = \frac{d^n}{dx^n} + \sum_{i=0}^{n-2} u_i(x) \frac{d^i}{dx^i}, \quad L_2 = \frac{d^m}{dx^m} + \sum_{i=0}^{m-1} v_i(x) \frac{d^i}{dx^i}, \quad n < m,$$

представляют собой сложную систему нелинейных уравнений на коэффициенты u_i, v_j . Первые результаты по этим уравнениям были получены в 1920–30-е годы Берчналлом и Чаунди [1]–[3]. В частности, Берчналл и Чаунди доказали следующее утверждение.

ЛЕММА 1. *Если $L_1 L_2 = L_2 L_1$, то существует ненулевой полином Q от двух коммутирующих переменных такой, что $Q(L_1, L_2) = 0$.*

Например, несложно убедиться, что операторы

$$L_1 = \frac{d^2}{dx^2} - \frac{2}{x^2}, \quad L_2 = \frac{d^3}{dx^3} - \frac{3}{x^2} \frac{d}{dx} + \frac{3}{x^3}$$

коммутируют между собой, при этом они связаны полиномиальным соотношением $L_1^3 = L_2^2$.

Новый интерес к коммутирующим дифференциальным операторам появился в 1970-е годы в связи с тем, что было замечено, что некоторые нелинейные уравнения типа уравнения Кортевега–де Фриза эквивалентны условию коммутации специально подобранных операторов. Например, операторы

$$L = \partial_x^2 - u, \quad A = \partial_t - \partial_x^3 + \frac{3}{2} u \partial_x + \frac{3}{4} u_x$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 03-01-00403 и 03-01-06482) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-2185.2003.1).

коммутируют в том и только том случае, когда функция $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению Кортевега–де Фриза

$$u_t = \frac{1}{4}(6uu_x + u_{xxx}).$$

Наличие (L, A) -пары позволяет строить точные решения этих уравнений.

В основе построения операторов L_1 и L_2 лежит спектральная кривая Γ – пополнение кривой, заданной в $\mathbb{C}^2$ уравнением $Q(z, w) = 0$. Мы будем рассматривать только случай общего положения, когда кривая Γ гладкая. Для каждой точки $P \in \Gamma$ найдется совместная собственная функция $\psi(x, P)$ операторов L_1 и L_2 . Эта функция имеет существенную особенность в некоторой точке $q \in \Gamma$, а на $\Gamma - \{q\}$ она мероморфна. При этом

$$L_i \psi = \lambda_i(P) \psi, \quad (1)$$

где $\lambda_i(P)$ – некоторая мероморфная функция на Γ с единственным полюсом в точке q . Число l линейно независимых совместных собственных функций, отвечающих общей точке $P \in \Gamma$, называется *рангом пары* L_1, L_2 . Порядки операторов L_1 и L_2 делятся на l : $n = n'l, m = m'l$. Порядки полюсов функций λ_1 и λ_2 в точке q равны соответственно n' и m' . В случае ранга 1 ψ можно выразить через тэта-функцию кривой Γ и коэффициенты операторов восстанавливаются по ψ (см. [4]). В случае ранга $l > 1$, как показал Кричевер [5], нахождение ψ сводится к решению интегрального уравнения, точное решение которого получить не удастся. На самом деле для нахождения операторов ранга $l > 1$ не обязательно знать ψ . Кричевер и Новиков [6], [7] предложили следующий метод нахождения таких операторов.

Пусть $\psi_0(x, P), \dots, \psi_{l-1}(x, P), P \in \Gamma$, – совместные собственные функции, нормированные следующим образом:

$$\frac{d^i}{dx^i} \psi_j(x_0, P) = \delta_{ij}, \quad (2)$$

где x_0 – некоторая фиксированная точка. Обозначим через Φ матрицу Вронского функций ψ_j

$$\Phi = \begin{pmatrix} \psi_0 & \dots & \psi_{l-1} \\ \psi'_0 & \dots & \psi'_{l-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_0^{(l-1)} & \dots & \psi_{l-1}^{(l-1)} \end{pmatrix}.$$

Компоненты $\chi_i(x, P)$ матрицы

$$\frac{d\Phi}{dx} \Phi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ \chi_0 & \chi_1 & \chi_2 & \dots & \chi_{l-1} \end{pmatrix}$$

не зависят от выбора точки x_0 . По функциям χ_i из разложения

$$\frac{d^l}{dx^l} \psi_j = \chi_{l-1} \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} \psi_j + \dots + \chi_0 \psi_j$$

и нормировки (2) можно находить производные ψ_j любого порядка в точке x_0 . Далее, из (1) находятся значения коэффициентов операторов L_i в точке x_0 . Поскольку функции χ_j не зависят от x_0 , получаем значения коэффициентов операторов в любой точке. Таким образом, нахождение операторов сводится к нахождению функций χ_j . Новиков и Кричевер [6], [7] нашли χ_j в случае кривой рода 1 и ранга 2. Мохов [8], используя подход Новикова и Кричевера, нашел χ_j в случае $g = 1$ и $l = 3$ (см. также [9]). Как указали Новиков и Гриневич, спектральная теория периодических операторов ранга $l > 1$, связанных с кривой Γ , сводится к спектральной теории операторов ранга 1 после перехода к l -листному накрытию кривой Γ [10], [11].

Необходимо отметить, что к задаче отыскания пар коммутирующих операторов существует и чисто алгебраический подход. Так, например, Диксмье [12], используя алгебры Вейля, нашел пары коммутирующих операторов рода 1 с полиномиальными коэффициентами.

Основной результат этой работы заключается в следующем. Пусть $l = 2$ и кривая Γ рода 2 задается в $\mathbb{C}^2$ уравнением

$$w^2 = F(z) = z^6 + c_5 z^5 + c_4 z^4 + c_3 z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0, \quad (3)$$

где $c_0 \neq 0$. Кривая Γ допускает голоморфную инволюцию

$$\sigma: \Gamma \rightarrow \Gamma, \quad \sigma(z, w) = (z, -w),$$

которая имеет шесть неподвижных точек $(z_i, 0)$, где z_i — точки ветвления (корни уравнения $F(z) = 0$). Мы рассматриваем случай, когда $\sigma\chi_1 = \chi_1$. Тогда функция χ_1 определена на Γ/σ , т.е. можно считать, что χ_1 зависит только от z и не зависит от w . Функцию χ_0 мы представляем в виде $\frac{1}{2}(\chi_0 + \sigma\chi_0) + \frac{1}{2}\sqrt{(\chi_0 - \sigma\chi_0)^2}$, где $\chi_0 + \sigma\chi_0$ и $(\chi_0 - \sigma\chi_0)^2$ также определены на $\mathbb{C}$. Таким образом, мы сводим задачу нахождения χ_i на Γ к нахождению трех функций на $\mathbb{C}$: χ_1 , $\chi_0 + \sigma\chi_0$ и $(\chi_0 - \sigma\chi_0)^2$. Смена знака у $\sqrt{(\chi_0 - \sigma\chi_0)^2}$ дает функцию $\sigma\chi_0$. Имеет место

ТЕОРЕМА 1. Компоненты $\chi_0(x, P)$ и $\chi_1(x, P)$ матрицы $\frac{d\Phi}{dx}\Phi^{-1}$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \chi_1(x, P) &= -\frac{\gamma'_1(x)}{z - \gamma_1(x)} - \frac{\gamma'_2(x)}{z - \gamma_2(x)} - \frac{\gamma'_1(x)}{\gamma_1(x)} - \frac{\gamma'_2(x)}{\gamma_2(x)}, \\ \chi_0(x, P) &= -\frac{1}{2} \frac{H(x)\gamma'_1(x)}{z - \gamma_1(x)} - \frac{1}{2} \frac{H(x)\gamma'_2(x)}{z - \gamma_2(x)} + \frac{1}{2z} + \frac{\kappa_2(x)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{R(x, z)}, \\ R(x, z) &= \frac{F_1(x)\gamma_1'^2(x)}{(z - \gamma_1(x))^2} + \frac{2G_1(x)\gamma_1'(x)}{z - \gamma_1(x)} + \frac{F_2(x)\gamma_2'^2(x)}{(z - \gamma_2(x))^2} + \frac{2G_2(x)\gamma_2'(x)}{z - \gamma_2(x)} \\ &\quad + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} \left(\frac{2(\gamma_1(x) + \gamma_2(x))}{\gamma_1(x)\gamma_2(x)} + \frac{c_1}{c_0} \right) + \frac{\gamma_1^2(x)\gamma_2^2(x)}{c_0}. \end{aligned}$$

Все нули функции R имеют первый порядок и расположены в точках ветвления, все полюсы имеют второй порядок (поэтому функция $\sqrt{R}$ корректно

определена на Γ). Функции $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ удовлетворяют нелинейному дифференциальному уравнению, которое интегрируемо в квадратурах относительно $\gamma_1(x)$, если положить

$$\gamma_2(x) = \frac{C - B\gamma_1(x)}{B + A\gamma_1(x)}, \quad A, B, C \in \mathbb{C}. \quad (4)$$

В этом случае решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$\gamma_1^{-1}(y_1) = \int \sqrt{\frac{y_1 y_2}{2c_0(y_2 - y_1)^3} \left(y_2^2 F(y_1) - \frac{y_1^2 F(y_2)(B + Ay_1)^4}{(B^2 + AC)^2} \right)} dy_1, \quad (5)$$

где $y_1 = \gamma_1(x)$, $y_2 = \frac{C - By_1}{B + Ay_1}$. Функции $H(x)$, $F_i(x)$, $G_i(x)$ и $\kappa_2(x)$ выражаются через $\gamma_1(x)$ и $\gamma_2(x)$ по формулам (24), (20)–(23) и (14).

СЛЕДСТВИЕ 1. Оператор, отвечающий функции

$$\lambda = \frac{1}{2z^3} + \frac{w}{2z^3\sqrt{c_0}} + \frac{c_1}{4z^2c_0} + \frac{1}{z} \left(\frac{c_2}{4c_0} - \frac{c_1^2}{16c_0^2} \right),$$

имеет вид

$$L = \frac{d^6}{dx^6} + f_4 \frac{d^4}{dx^4} + f_3 \frac{d^3}{dx^3} + f_2 \frac{d^2}{dx^2} + f_1 \frac{d}{dx} + f_0,$$

где

$$\begin{aligned} f_4 &= \alpha - 3a_0, & f_3 &= -6a'_0 - 3b_1, \\ f_2 &= \beta - 7a''_0 - 6b'_1 - 3a_1 - 2\alpha a_0 + 3a_0^2, \\ f_1 &= -2\alpha b_1 + 3a_0 b_1 - 3b_2 - 2\alpha a'_0 + 6a_0 a'_0 - 6a'_1 - 7b''_1 - 4a'''_0, \\ f_0 &= \gamma - \beta a_0 + \alpha a_0^2 - a_0^3 - 2\alpha a_1 + 3a_0 a_1 + 2(a'_0)^2 \\ &\quad - 2\alpha b'_1 - 6b'_2 - \alpha a''_0 + 3a_0 a''_0 - 7a''_1 - 4b'''_1 - a_0^{\text{IV}}. \end{aligned}$$

Функции $a_0(x)$, $a_1(x)$, $b_1(x)$ и $b_2(x)$ находятся из разложений χ_0 и χ_1 в ряд по степеням z :

$$\begin{aligned} \chi_0 &= \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + O(z^2), & \chi_1 &= b_1 z + b_2 z^2 + O(z^3), \\ a_0(x) &= \frac{H(x)\gamma'_1(x)}{2\gamma_1(x)} + \frac{H(x)\gamma'_2(x)}{2\gamma_2(x)} + \frac{\kappa_2}{2} + \frac{\gamma_1(x) + \gamma_2(x)}{2\gamma_1(x)\gamma_2(x)} + \frac{c_1}{4c_0}, \\ a_1(x) &= \frac{H(x)\gamma'_1(x)}{2\gamma_1^2(x)} + \frac{H(x)\gamma'_2(x)}{2\gamma_2^2(x)} + \frac{F_1(x)\gamma_1'^2(x)}{4\gamma_1^2(x)} - \frac{G_1(x)\gamma_1'(x)}{2\gamma_1(x)} + \frac{F_2(x)\gamma_2'^2(x)}{4\gamma_2^2(x)} \\ &\quad - \frac{G_2(x)\gamma_2'(x)}{2\gamma_2(x)} + \frac{\gamma_1^2(x)\gamma_2^2(x)}{4c_0} - \frac{1}{16} \left(\frac{2(\gamma_1(x) + \gamma_2(x))}{\gamma_1(x)\gamma_2(x)} + \frac{c_1}{c_0} \right)^2, \\ b_1(x) &= \frac{\gamma'_1(x)}{\gamma_1^2(x)} + \frac{\gamma'_2(x)}{\gamma_2^2(x)}, & b_2(x) &= \frac{\gamma'_1(x)}{\gamma_1^3(x)} + \frac{\gamma'_2(x)}{\gamma_2^3(x)}, \end{aligned}$$

α, β и γ – коэффициенты разложения λ в ряд

$$\lambda = \frac{1}{z^3} + \frac{\alpha}{z^2} + \frac{\beta}{z} + \gamma + O(z),$$

$$\alpha = \frac{c_1}{2c_0}, \quad \beta = \frac{c_2}{2c_0} - \frac{c_1^2}{8c_0^2}, \quad \gamma = \frac{c_1^3}{32c_0^3} - \frac{c_1c_2}{8c_0^2} + \frac{c_3}{4c_0}.$$

Операторы, коммутирующие с L , легко находятся из уравнений коммутации.

Отметим, что при $c_1 = c_5 = 0, c_3 = 8c_0$ и при

$$\gamma_1(x) = -\gamma_2(x) = \frac{1}{x}$$

коэффициенты операторов являются рациональными функциями. Среди таких операторов можно выделить операторы с полиномиальными коэффициентами. Укажем пример. Пусть кривая Γ задана уравнением

$$w^2 = z^6 + 2z^3 + \frac{1}{4}.$$

Тогда операторы

$$\begin{aligned} L_1 &= \partial_x^6 - \frac{3x^4}{16} \partial_x^4 - \frac{3x^3}{2} \partial_x^3 + \frac{3}{256} (x^8 - 576x^2) \partial_x^2 + \left(\frac{3x^7}{32} - 6x \right) \partial_x \\ &\quad - \frac{x^{12}}{4096} + \frac{23x^6}{64} - \frac{3}{2}, \\ L_2 &= \partial_x^8 - \frac{x^4}{4} \partial_x^6 - 3x^3 \partial_x^5 + \frac{1}{128} (3x^8 - 2368x^2) \partial_x^4 + \frac{1}{8} (3x^7 - 320x) \partial_x^3 \\ &\quad - \left(\frac{x^{12}}{1024} - \frac{45x^6}{16} + 30 \right) \partial_x^2 - \left(\frac{3x^{11}}{256} - \frac{35x^5}{4} \right) \partial_x \\ &\quad + \frac{x^{16} - 3712x^{10} + 716800x^4}{65536}, \\ L_3 &= \partial_x^{10} - \frac{5x^4}{16} \partial_x^8 - 5x^3 \partial_x^7 + \frac{5}{128} (x^8 - 1024x^2) \partial_x^6 + \frac{5}{16} (3x^7 - 416x) \partial_x^5 \\ &\quad - \left(\frac{5x^{12}}{2048} - \frac{85x^6}{8} + 150 \right) \partial_x^4 - \frac{5}{256} (3x^{11} - 3136x^5) \partial_x^3 \\ &\quad + \frac{5(x^{16} - 8192x^{10} + 2437120x^4)}{65536} \partial_x^2 + \frac{5}{4096} (x^{15} - 2464x^9 + 215040x^3) \partial_x \\ &\quad - \frac{x^{20}}{1048576} + \frac{15x^{14}}{2048} - \frac{1505x^8}{256} + \frac{525x^2}{4} \end{aligned}$$

попарно коммутируют. Операторы L_1, L_2 и L_3 задают коммутативное кольцо дифференциальных операторов, изоморфное кольцу мероморфных функций на Γ с полюсом в точке q . Между L_1 и L_2 справедливо следующее алгебраическое соотношение:

$$L_2^3 = L_1^4 - 4L_1^3 + 3L_1^2.$$

Через $\tilde{\Gamma}$ обозначим кривую Берчналла–Чаунди, соответствующую паре операторов L_1 и L_2 . Кривая $\tilde{\Gamma}$ имеет каспидальную особую точку $(0, 0)$. Операторы L_1 и L_2 отвечают функциям

$$\lambda_1 = \frac{1}{2z^3} + \frac{w}{z^3} + 2, \quad \lambda_2 = \frac{1}{2z^4} + \frac{w}{z^4} + \frac{2}{z},$$

которые задают бирациональную эквивалентность

$$\pi: \Gamma \rightarrow \tilde{\Gamma}, \quad \pi(z, w) = (\lambda_1, \lambda_2).$$

Прообразом каспидальной точки служит точка $\sigma(q)$. Для того чтобы отображение π являлось морфизмом, необходимо пополнить $\tilde{\Gamma}$ на бесконечности каспидальной точкой типа $(3, 4)$, при этом ее прообразом будет точка q .

Автор благодарит И. А. Тайманова за проявленный интерес к работе.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим сначала общий случай кривой рода g и операторов ранга l . Совместные собственные функции $\psi_j(x, P)$ операторов L_1 и L_2 обладают следующими свойствами [5]. На $\Gamma - \{q\}$ функции ψ_j имеют lg простых полюсов $P_1, \dots, P_{lg}$, причем P_i не зависят от x . В окрестности q справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$\psi(x, P) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \xi_j(x) k^{-j} \right) \Psi,$$

где k^{-1} — локальный параметр в окрестности точки q , $\xi_0 = (1, 0, \dots, 0)$, $\psi = (\psi_0, \dots, \psi_{l-1})$, Ψ — решение матричного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dx} \Psi = A \Psi,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ k + g_0(x) & g_1(x) & g_2(x) & \dots & g_{l-2}(x) & 0 \end{pmatrix},$$

$g_i(x)$ — некоторые функции. Вычеты $v_{ij}(x)$ функций ψ_j , $j < l - 1$, в точках P_i пропорциональны вычетам $v_{i,l-1}(x)$ функции ψ_{l-1} :

$$v_{ij}(x) = \alpha_{ij} v_{i,l-1}(x).$$

Набор (P_j, α_{ij}) называется *параметрами Тюринга*. Компоненты $\chi_i(x, P)$ матрицы $\frac{d\Phi}{dx} \Phi^{-1}$ обладают следующим свойством [5]. Это мероморфные функции на Γ

с lg полюсами $P_1(x), \dots, P_{lg}(x)$, причем при $x = x_0$ эти точки совпадают с полюсами $P_1, \dots, P_{lg}$ функций ψ_j . В окрестности точки q функции χ_i имеют вид

$$\begin{aligned}\chi_0(x, P) &= k + g_0(x) + O(k^{-1}), \\ \chi_j(x, P) &= g_j(x) + O(k^{-1}), \quad j < l-1, \\ \chi_{l-1}(x, P) &= O(k^{-1}).\end{aligned}$$

В точках $P_i(x)$ справедливы разложения

$$\chi_j = \frac{c_{ij}(x)}{k - \gamma_i(x)} + d_{ij}(x) + O(k - \gamma_i(x)).$$

Обозначим через $\alpha_{ij}(x)$ отношение $\frac{c_{ij}(x)}{c_{i,l-1}(x)}$, $0 \leq j \leq l-1$, $1 \leq i \leq lg$. Следующая теорема доказана Кричевером [5].

ТЕОРЕМА 2. *Параметры $\gamma_i(x)$, $\alpha_{ij}(x)$, $d_{ij}(x)$, $0 \leq j \leq l-2$, $1 \leq i \leq lg$, удовлетворяют уравнениям:*

$$\begin{aligned}c_{i,l-1}(x) &= -\gamma'_i(x), \\ d_{i0}(x) &= \alpha_{i0}(x)\alpha_{i,l-2}(x) + \alpha_{i0}(x)d_{i,l-1}(x) - \alpha'_{i0}(x), \\ d_{ij}(x) &= \alpha_{ij}(x)\alpha_{i,l-2}(x) - \alpha_{i,j-1}(x) + \alpha_{ij}(x)d_{i,l-1}(x) - \alpha'_{ij}(x), \quad j \geq 1.\end{aligned}$$

Отметим, что эти уравнения инвариантны относительно выбора локального параметра в окрестности $P_i(x)$ и q , т.е. при замене локального параметра соответствующие коэффициенты разложений будут также удовлетворять этой системе.

При $g = 2$ и $l = 2$ по теореме 2 в окрестности точки $P_i(x)$, $1 \leq i \leq 4$, функции χ_i имеют вид:

$$\chi_0(x, P) = \frac{-\alpha_{i0}(x)\gamma'_i(x)}{k - \gamma_i(x)} + d_{i0}(x) + O(k - \gamma_i(x)), \quad (6)$$

$$\chi_1(x, P) = \frac{-\gamma'_i(x)}{k - \gamma_i(x)} + d_{i1}(x) + O(k - \gamma_i(x)), \quad (7)$$

причем имеет место равенство

$$d_{i0}(x) = \alpha_{i0}^2(x) + \alpha_{i0}(x)d_{i1}(x) - \alpha'_{i0}(x), \quad (8)$$

а в окрестности q — следующий вид:

$$\chi_0(x, P) = k + g_0(x) + O(k^{-1}), \quad (9)$$

$$\chi_1(x, P) = O(k^{-1}). \quad (10)$$

Пусть Γ задается уравнением (3), а точка q имеет координаты $(0, \sqrt{F(0)})$. Выберем в окрестности $P_i(x)$ локальный параметр $z = \gamma_i(x)$, а в окрестности q — локальный параметр z . Пусть $\sigma\chi_1 = \chi_1$. Тогда можно считать, что $\sigma P_1(x) = P_3(x)$

и $\sigma P_2(x) = P_4(x)$, следовательно, $\gamma_1 = \gamma_3$, $\gamma_2 = \gamma_4$, $d_{11} = d_{31}$, $d_{21} = d_{41}$. Таким образом, в силу (7) имеет место равенство

$$\chi_1 = \frac{1}{2}(\chi_1 + \sigma\chi_1) = \frac{-\gamma'_1}{z - \gamma_1} + \frac{-\gamma'_2}{z - \gamma_2} - \varkappa_1,$$

где $\varkappa_1(x)$ – некоторая функция.

Так как $\chi_1(q) = 0$, то $\varkappa_1 = \gamma'_1/\gamma_1 + \gamma'_2/\gamma_2$. Из разложения (7) выводим, что

$$d_{11} = \frac{-\gamma'_2}{\gamma_1 - \gamma_2} - \varkappa_1, \quad d_{21} = \frac{-\gamma'_1}{\gamma_2 - \gamma_1} - \varkappa_1. \quad (11)$$

Далее, из разложений (6) и (9) получаем

$$\chi_0 + \sigma\chi_0 = -\frac{(\alpha_{10} + \alpha_{30})\gamma'_1}{z - \gamma_1} - \frac{(\alpha_{20} + \alpha_{40})\gamma'_2}{z - \gamma_2} + \frac{1}{z} + \varkappa_2, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} (\chi_0 - \sigma\chi_0)^2 &= \frac{(\alpha_{30} - \alpha_{10})^2\gamma_1'^2}{(z - \gamma_1)^2} + \frac{2(d_{10} - d_{30})(\alpha_{30} - \alpha_{10})\gamma_1'}{z - \gamma_1} \\ &+ \frac{(\alpha_{40} - \alpha_{20})^2\gamma_2'^2}{(z - \gamma_2)^2} + \frac{2(d_{20} - d_{40})(\alpha_{40} - \alpha_{20})\gamma_2'}{z - \gamma_2} + \frac{1}{z^2} + \frac{V}{z} + \varkappa, \end{aligned} \quad (13)$$

где $\varkappa(x)$, $\varkappa_2(x)$ и $V(x)$ – некоторые функции. Из равенства (12) получаем

$$\begin{aligned} d_{10} + d_{30} &= -\frac{(\alpha_{20} + \alpha_{40})\gamma'_2}{\gamma_1 - \gamma_2} + \frac{1}{\gamma_1} + \varkappa_2, \\ d_{20} + d_{40} &= -\frac{(\alpha_{10} + \alpha_{30})\gamma'_1}{\gamma_2 - \gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} + \varkappa_2, \end{aligned} \quad (14)$$

откуда

$$d_{10} + d_{30} - (d_{20} + d_{40}) = -\frac{(\alpha_{20} + \alpha_{40})\gamma'_2}{\gamma_1 - \gamma_2} + \frac{(\alpha_{10} + \alpha_{30})\gamma'_1}{\gamma_2 - \gamma_1} + \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}. \quad (15)$$

Из формулы (13) имеем

$$(\chi_0 - \sigma\chi_0)^2 = \frac{g}{(z - \gamma_1)^2(z - \gamma_2)^2z^2},$$

где

$$\begin{aligned} g &= z^6\varkappa + z^5(V - 2\varkappa(\gamma_1 + \gamma_2) + 2(d_{20} - d_{40})(\alpha_{40} - \alpha_{20})\gamma'_2 \\ &+ 2(d_{10} - d_{30})(\alpha_{30} - \alpha_{10})\gamma'_1) + z^4(\varkappa(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 4\gamma_1\gamma_2) - 2V(\gamma_1 + \gamma_2) \\ &- 2(\gamma_2 + 2\gamma_1)(d_{20} - d_{40})(\alpha_{40} - \alpha_{20})\gamma'_2 - 2(\gamma_1 + 2\gamma_2)(d_{10} - d_{30})(\alpha_{30} - \alpha_{10})\gamma'_1 \\ &+ (\alpha_{40} - \alpha_{20})^2\gamma_2'^2 + (\alpha_{30} - \alpha_{10})^2\gamma_1'^2 + 1) \\ &+ z^3(-2(\gamma_1\gamma_2^2 + \gamma_2\gamma_1^2)\varkappa + V(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 4\gamma_1\gamma_2) - 2(\gamma_1 + \gamma_2) \\ &+ 2(\gamma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_2)(d_{20} - d_{40})(\alpha_{40} - \alpha_{20})\gamma'_2 \\ &+ 2(\gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_2)(d_{10} - d_{30})(\alpha_{30} - \alpha_{10})\gamma'_1 - 2(\alpha_{40} - \alpha_{20})^2\gamma_2'^2\gamma_1 \\ &- 2(\alpha_{30} - \alpha_{10})^2\gamma_1'^2\gamma_2) + z^2(\varkappa\gamma_1^2\gamma_2^2 - V2(\gamma_1\gamma_2^2 + \gamma_2\gamma_1^2) + (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 4\gamma_1\gamma_2) \\ &- 2(d_{20} - d_{40})(\alpha_{40} - \alpha_{20})\gamma'_2\gamma_2\gamma_1^2 - 2(d_{10} - d_{30})(\alpha_{30} - \alpha_{10})\gamma'_1\gamma_1\gamma_2^2 \\ &+ \gamma_1^2(\alpha_{40} - \alpha_{20})^2\gamma_2'^2 + \gamma_2^2(\alpha_{30} - \alpha_{10})^2\gamma_1'^2\gamma_2^2) \\ &+ z(\gamma_1^2\gamma_2^2V - 2(\gamma_1\gamma_2^2 + \gamma_2\gamma_1^2)) + \gamma_1^2\gamma_2^2. \end{aligned}$$

Функция $(\chi_0 - \sigma\chi_0)^2$ имеет нули в шести точках ветвления. Так как $\deg g = 6$, то нули g совпадают с нулями функции $F(x)$, следовательно, мы имеем равенства

$$\begin{aligned} V - 2\kappa(\gamma_1 + \gamma_2) + 2(d_{20} - d_{40})(\alpha_{40} - \alpha_{20})\gamma_2' \\ + 2(d_{10} - d_{30})(\alpha_{30} - \alpha_{10})\gamma_1' - c_5\kappa = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \kappa(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 4\gamma_1\gamma_2) - 2V(\gamma_1 + \gamma_2) - 2(\gamma_2 + 2\gamma_1)(d_{20} - d_{40})(\alpha_{40} - \alpha_{20})\gamma_2' \\ - 2(\gamma_1 + 2\gamma_2)(d_{10} - d_{30})(\alpha_{30} - \alpha_{10})\gamma_1' + (\alpha_{40} - \alpha_{20})^2\gamma_2'^2 \\ + (\alpha_{30} - \alpha_{10})^2\gamma_1'^2 + 1 - c_4\kappa = 0, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} -2(\gamma_1\gamma_2^2 + \gamma_2\gamma_1^2)\kappa + V(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 4\gamma_1\gamma_2) - 2(\gamma_1 + \gamma_2) \\ + 2(\gamma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_2)(d_{20} - d_{40})(\alpha_{40} - \alpha_{20})\gamma_2' \\ + 2(\gamma_2^2 + 2\gamma_1\gamma_2)(d_{10} - d_{30})(\alpha_{30} - \alpha_{10})\gamma_1' \\ - 2(\alpha_{40} - \alpha_{20})^2\gamma_2'^2\gamma_1 - 2(\alpha_{30} - \alpha_{10})^2\gamma_1'^2\gamma_2 - c_3\kappa = 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \kappa\gamma_1^2\gamma_2^2 - V2(\gamma_1\gamma_2^2 + \gamma_2\gamma_1^2) + (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + 4\gamma_1\gamma_2) \\ - 2(d_{20} - d_{40})(\alpha_{40} - \alpha_{20})\gamma_2'\gamma_2\gamma_1^2 - 2(d_{10} - d_{30})(\alpha_{30} - \alpha_{10})\gamma_1'\gamma_1\gamma_2^2 \\ + \gamma_1^2(\alpha_{40} - \alpha_{20})^2\gamma_2'^2 + \gamma_2^2(\alpha_{30} - \alpha_{10})^2\gamma_1'^2\gamma_2^2 - c_2\kappa = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \gamma_1^2\gamma_2^2V - 2(\gamma_1\gamma_2^2 + \gamma_2\gamma_1^2) - c_1\kappa = 0, \\ \gamma_1^2\gamma_2^2 - c_0\kappa = 0. \end{aligned}$$

Из последних двух уравнений получаем

$$\kappa = \frac{\gamma_1^2\gamma_2^2}{c_0}, \quad V = \frac{2(\gamma_1 + \gamma_2)}{\gamma_1\gamma_2} + \frac{c_1}{c_0}.$$

Решим систему уравнений (16)–(19) относительно $(\alpha_{30} - \alpha_{10})^2$, $(\alpha_{40} - \alpha_{20})^2$, $(d_{20} - d_{40})(\alpha_{40} - \alpha_{20})$ и $(d_{10} - d_{30})(\alpha_{30} - \alpha_{10})$. Получим

$$F_1 = (\alpha_{30} - \alpha_{10})^2 = \frac{\gamma_2^2 F(\gamma_1)}{c_0\gamma_1'^2(\gamma_1 - \gamma_2)^2}, \quad (20)$$

$$F_2 = (\alpha_{40} - \alpha_{20})^2 = \frac{\gamma_1^2 F(\gamma_2)}{c_0\gamma_2'^2(\gamma_2 - \gamma_1)^2}, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} G_1 &= (d_{10} - d_{30})(\alpha_{30} - \alpha_{10}) \\ &= \frac{1}{2(\gamma_2 - \gamma_1)\gamma_1'} \left(\frac{\gamma_1^2 F(\gamma_2)}{c_0(\gamma_2 - \gamma_1)^2} + \frac{\gamma_2^2 F(\gamma_1)}{c_0(\gamma_1 - \gamma_2)^2} - \frac{\gamma_1^2\gamma_2^2}{c_0} (3\gamma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_2 + \gamma_2^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(\gamma_1 + \gamma_2)}{\gamma_1} - \frac{c_1\gamma_2}{c_0} + 1 - c_4\frac{\gamma_1^2\gamma_2^2}{c_0} - c_5\frac{\gamma_1^2\gamma_2^2}{c_0}(\gamma_2 + 2\gamma_1) \right), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} G_2 &= (d_{20} - d_{40})(\alpha_{40} - \alpha_{20}) \\ &= \frac{1}{2(\gamma_1 - \gamma_2)\gamma_2'} \left(\frac{\gamma_1^2 F(\gamma_2)}{c_0(\gamma_2 - \gamma_1)^2} + \frac{\gamma_2^2 F(\gamma_1)}{c_0(\gamma_1 - \gamma_2)^2} - \frac{\gamma_1^2\gamma_2^2}{c_0} (\gamma_1^2 + 2\gamma_1\gamma_2 + 3\gamma_2^2) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2(\gamma_1 + \gamma_2)}{\gamma_2} - \frac{c_1\gamma_1}{c_0} + 1 - c_4\frac{\gamma_1^2\gamma_2^2}{c_0} - c_5\frac{\gamma_1^2\gamma_2^2}{c_0}(\gamma_1 + 2\gamma_2) \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Теперь найдем $\alpha_{10} + \alpha_{30}$ и $\alpha_{40} + \alpha_{20}$. Из (8) имеем тождества

$$\begin{aligned} d_{10} - d_{30} &= \alpha_{10}^2 - \alpha_{30}^2 + d_{11}(\alpha_{10} - \alpha_{30}) - (\alpha'_{10} - \alpha'_{30}), \\ d_{20} - d_{40} &= \alpha_{20}^2 - \alpha_{40}^2 + d_{21}(\alpha_{20} - \alpha_{40}) - (\alpha'_{20} - \alpha'_{40}). \end{aligned}$$

Умножив эти тождества на $\alpha_{30} - \alpha_{10}$ и на $\alpha_{40} - \alpha_{20}$, получим

$$\begin{aligned} G_1 &= (\alpha_{10}^2 - \alpha_{30}^2)(\alpha_{30} - \alpha_{10}) - d_{11}F_1 + \frac{1}{2}F'_1, \\ G_2 &= (\alpha_{20}^2 - \alpha_{40}^2)(\alpha_{40} - \alpha_{20}) - d_{21}F_2 + \frac{1}{2}F'_2, \end{aligned}$$

откуда

$$\alpha_{10} + \alpha_{30} = \frac{\frac{1}{2}F'_1 - d_{11}F_1 - G_1}{F_1}, \quad \alpha_{40} + \alpha_{20} = \frac{\frac{1}{2}F'_2 - d_{21}F_2 - G_2}{F_2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \alpha_{10}^2 + \alpha_{30}^2 &= \frac{1}{2}(\alpha_{10} + \alpha_{30})^2 + \frac{1}{2}(\alpha_{10} - \alpha_{30})^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2}F'_1 - d_{11}F_1 - G_1}{F_1} \right)^2 + \frac{1}{2}F_1, \\ \alpha_{20}^2 + \alpha_{40}^2 &= \frac{1}{2}(\alpha_{20} + \alpha_{40})^2 + \frac{1}{2}(\alpha_{20} - \alpha_{40})^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2}F'_2 - d_{21}F_2 - G_2}{F_2} \right)^2 + \frac{1}{2}F_2. \end{aligned}$$

Из (8) выводим

$$\begin{aligned} d_{10} + d_{30} &= \alpha_{10}^2 + \alpha_{30}^2 - (\alpha'_{10} + \alpha'_{30}) + d_{11}(\alpha_{10} + \alpha_{30}), \\ d_{20} + d_{40} &= \alpha_{20}^2 + \alpha_{40}^2 - (\alpha'_{20} + \alpha'_{40}) + d_{21}(\alpha_{20} + \alpha_{40}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} d_{10} + d_{30} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2}F'_1 - d_{11}F_1 - G_1}{F_1} \right)^2 + \frac{1}{2}F_1 - \frac{d}{dx} \left(\frac{\frac{1}{2}F'_1 - d_{11}F_1 - G_1}{F_1} \right) \\ &\quad + d_{11} \left(\frac{\frac{1}{2}F'_1 - d_{11}F_1 - G_1}{F_1} \right), \\ d_{20} + d_{40} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\frac{1}{2}F'_2 - d_{21}F_2 - G_2}{F_2} \right)^2 + \frac{1}{2}F_2 - \frac{d}{dx} \left(\frac{\frac{1}{2}F'_2 - d_{21}F_2 - G_2}{F_2} \right) \\ &\quad + d_{21} \left(\frac{\frac{1}{2}F'_2 - d_{21}F_2 - G_2}{F_2} \right). \end{aligned}$$

Воспользуемся формулами (20)–(23) и (11), чтобы выразить $\alpha_{10} + \alpha_{30}$ и $\alpha_{20} + \alpha_{40}$ через γ_1 и γ_2 . Получим

$$\begin{aligned} H = \alpha_{10} + \alpha_{30} &= \frac{\frac{1}{2}F'_1 - d_{11}F_1 - G_1}{F_1} \\ &= \frac{-2\gamma_2^2\gamma_1'^2 + \gamma_1^2(2\gamma_1'\gamma_2' - \gamma_2\gamma_1'') + \gamma_1\gamma_2(2\gamma_1'^2 + \gamma_2\gamma_1'')}{\gamma_1\gamma_2(\gamma_1 - \gamma_2)\gamma_1'}, \quad (24) \\ \alpha_{20} + \alpha_{40} &= \frac{\frac{1}{2}F'_2 - d_{21}F_2 - G_2}{F_2} \\ &= \frac{-2\gamma_1^2\gamma_2'^2 + \gamma_2^2(2\gamma_1'\gamma_2' - \gamma_1\gamma_2'') + \gamma_1\gamma_2(2\gamma_2'^2 + \gamma_1\gamma_2'')}{\gamma_1\gamma_2(\gamma_2 - \gamma_1)\gamma_2'}. \end{aligned}$$

Отметим, что в случае выполнения равенства

$$\alpha_{10} + \alpha_{30} = \alpha_{20} + \alpha_{40}$$

уравнение (15) сильно упрощается и принимает вид:

$$\frac{F_1}{2} - \frac{F_2}{2} = \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2}.$$

Имеем

$$\alpha_{10} + \alpha_{30} - (\alpha_{20} + \alpha_{40}) = \frac{2\gamma_1'\gamma_2'(\gamma_1' + \gamma_2') + (\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_2''\gamma_1' - \gamma_1''\gamma_2')}{(\gamma_1 - \gamma_2)\gamma_1'\gamma_2'}.$$

Как заметил М. В. Нецадим, равенство

$$2\gamma_1'\gamma_2'(\gamma_1' + \gamma_2') + (\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_2''\gamma_1' - \gamma_1''\gamma_2') = 0$$

вытекает из

$$A\gamma_1\gamma_2 + B(\gamma_1 + \gamma_2) - C = 0, \quad A, B, C \in \mathbb{C}.$$

Таким образом, если γ_2 выражается через γ_1 по формуле (4), то уравнение (15) принимает следующий вид:

$$\frac{\gamma_2^2 F(\gamma_1)}{2c_0\gamma_1'^2(\gamma_1 - \gamma_2)^2} - \frac{\gamma_1^2 F(\gamma_2)(B + Ay_1)^4}{2c_0\gamma_1'^2(B^2 + AC)^2(\gamma_1 - \gamma_2)^2} = \frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\gamma_2};$$

тем самым оно интегрируемо в квадратурах (см. (5)). Теорема 1 доказана.

С помощью полученных формул найдем коэффициенты оператора шестого порядка. Из равенства

$$\psi_i'' = \chi_0\psi_i + \chi_1\psi_i'$$

выразим производные высокого порядка функции ψ_i через ψ_i , ψ_i' , χ_0 и χ_1 и подставим полученные выражения в

$$(\partial_x^6 + f_5\partial_x^5 + f_4\partial_x^4 + f_3\partial_x^3 + f_2\partial_x^2 + f_1\partial_x + f_0)\psi_i = \lambda\psi_i.$$

Получим

$$P_1\psi_i + P_2\psi_i' = \lambda\psi_i,$$

где

$$\begin{aligned} P_1 = & \chi_0^{\text{IV}} + 4\chi_1'''\chi_0 + 6\chi_1''\chi_0' + 4\chi_1'\chi_0'' + \chi_1\chi_0''' + 4(\chi_0')^2 + 7\chi_0\chi_0'' + 8(\chi_1')^2\chi_0 \\ & + 9\chi_1\chi_1''\chi_0 + 7\chi_1\chi_1'\chi_0' + \chi_1^2\chi_0'' + 6\chi_1'\chi_0^2 + 9\chi_1\chi_0\chi_0' + 9\chi_1'\chi_1^2\chi_0 \\ & + \chi_1^3\chi_0' + \chi_0^3 + 3\chi_1^2\chi_0^2 + \chi_1^4\chi_0 + f_5(\chi_0'' + 3\chi_1''\chi_0 + 3\chi_1'\chi_0' + \chi_1\chi_0'' + 4\chi_0\chi_0' \\ & + 5\chi_1\chi_1'\chi_0 + \chi_1^2\chi_0' + 2\chi_1\chi_0^2 + \chi_1^3\chi_0) \\ & + f_4(\chi_0'' + 2\chi_1'\chi_0 + \chi_1\chi_0' + \chi_0^2 + \chi_1^2\chi_0) + f_3(\chi_0' + \chi_1\chi_0) + f_2\chi_0 + f_0, \\ P_2 = & 4\chi_0''' + 7\chi_1''\chi_0 + 12\chi_1'\chi_0' + 9\chi_1\chi_0'' + 6\chi_0\chi_0' + 15\chi_1'\chi_1\chi_0 + 9\chi_1^2\chi_0' \\ & + 3\chi_1\chi_0^2 + 4\chi_1^3\chi_0 + \chi_1^{\text{IV}} + 10\chi_1''\chi_1' + 5\chi_1\chi_1''' + 15(\chi_1')^2\chi_1 \\ & + 10\chi_1'\chi_1^3 + 10\chi_1''\chi_1^2 + \chi_1^5 + f_5(3\chi_0'' + 4\chi_1'\chi_0 + 5\chi_1\chi_0' + \chi_0^2 + 3\chi_1^2\chi_0 \\ & + \chi_1''' + 3(\chi_1')^2 + 4\chi_1\chi_1'' + 6\chi_1'\chi_1^2 + \chi_1^4) \\ & + f_4(2\chi_0' + 2\chi_1\chi_0 + \chi_1'' + 3\chi_1\chi_1' + \chi_1^3) + f_3(\chi_0 + \chi_1' + \chi_1^2) + f_2\chi_1 + f_1. \end{aligned}$$

Из равенства (2) и из того, что χ_0 и χ_1 не зависят от выбора x_0 , следует

$$P_1 = \lambda, \quad P_2 = 0.$$

Коэффициенты f_j находятся из разложений χ_i и λ в ряд по степеням z в окрестности q .

Список литературы

1. *Burchnell J. L., Chaundy I. W.* Commutative ordinary differential operators // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. 1923. V. 21. P. 420–440.
2. *Burchnell J. L., Chaundy I. W.* Commutative ordinary differential operators // Proc. Royal Soc. London Ser. A. 1928. V. 118. P. 557–583.
3. *Burchnell J. L., Chaundy I. W.* Commutative ordinary differential operators // Proc. Royal Soc. London Ser. A. 1931. V. 134. P. 471–485.
4. *Кричевер И. М.* Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии // Функц. анализ и его прилож. 1977. Т. 11. № 1. С. 15–31.
5. *Кричевер И. М.* Коммутативные кольца линейных обыкновенных дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прилож. 1978. Т. 12. № 4. С. 41–52.
6. *Кричевер И. М., Новиков С. П.* Голоморфные расслоения над римановыми поверхностями и уравнение Кадомцева–Петвиашвили. I // Функц. анализ и его прилож. 1978. Т. 12. № 4. С. 41–52.
7. *Кричевер И. М., Новиков С. П.* Голоморфные расслоения над алгебраическими кривыми и нелинейные уравнения // УМН. 1980. Т. 35. № 6. С. 47–68.
8. *Могов О. И.* Коммутирующие дифференциальные операторы ранга 3 и нелинейные уравнения // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 6. С. 1291–1314.
9. *Dehorgny P.* Operateurs differentiels et courbes elliptiques // Compositio Math. 1981. V. 43. № 1. P. 71–99.
10. *Новиков С. П., Гриневич П. Г.* О спектральной теории коммутирующих операторов ранга 2 с периодическими коэффициентами // Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 1. С. 25–26.
11. *Новиков С. П.* Коммутирующие операторы ранга $l > 1$ с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263. № 6. С. 1311–1313.
12. *Диксмье Ж.* Об алгебрах Вейля // Математика. 1969. Т. 13. № 4. С. 16–44.
13. *Гриневич П. Г.* Рациональные решения уравнений коммутации дифференциальных операторов // Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 1. С. 19–24.

Институт математики
им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск
E-mail: mironov@ngs.ru

Поступила в редакцию
05.06.2003