Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Двирный, В. И. Слынько, Об устойчивости по нелинейному квазиоднородному приближению дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 6, 109–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8233>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 18:12:29

УДК 517.925.51

А. И. Двирный, В. И. Слынько

Об устойчивости по нелинейному квазиоднородному приближению дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

Для квазиоднородных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием установлены обратные теоремы прямого метода Ляпунова. Получены условия существования функций Ляпунова, удовлетворяющих оценкам, характерным для квазиоднородных функций. С помощью этих результатов установлены условия устойчивости состояния равновесия нелинейной системы с импульсным воздействием на основе свойств ее квазиоднородного приближения. Полученные результаты проиллюстрированы на примере крупномасштабной системы с однородными подсистемами.

Библиография: 30 названий.

Ключевые слова: импульсное воздействие, квазиоднородная система, устойчивость по Ляпунову, прямой метод Ляпунова.

DOI: 10.4213/sm8233

§ 1. Введение

Исследование устойчивости критических положений равновесия нелинейных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (импульсных систем) является актуальной задачей для этого класса систем. Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений при помощи принципа сведения (см. [1]–[6]) аналогичная задача может быть сведена к исследованию систем, которые содержат лишь критические переменные. Такие системы называют также модельными системами (см. [2]). Исследование модельных систем – существенно нелинейная задача, при решении которой важно в правой части системы выделить главную часть, которая и будет определять свойства устойчивости равновесия модельной системы. Эта главная часть может обладать свойствами однородности или квазиоднородности (см. [2], [7]). Например, к случаю квазиоднородной главной части приводит критический случай с кратным нулевым корнем, которому соответствует жорданова клетка порядка больше 1. Исследованию устойчивости по нелинейному приближению для систем обыкновенных дифференциальных уравнений посвящены работы И. Г. Малкина [8], Н. Н. Красовского [9], [10], В. И. Зубова [7], [11]. Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с квазиоднородной правой частью В. И. Зубов (см. [11]) установил условия устойчивости по нелинейному приближению, дополнительно предполагая, кроме условия асимптотической устойчивости состояния равновесия этой системы, еще и наличие некоторой априорной оценки

решений. В основе этого результата лежит обратная теорема Ляпунова, утверждающая факт существования квазиоднородной функции Ляпунова с подходящими свойствами. При доказательстве этого результата существенно используется автомодельность автономной квазиоднородной системы относительно замены переменных $x \rightarrow \alpha^G x$, $t \rightarrow \alpha^{\mu-1} t$. Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с однородной правой частью Н. Н. Красовский [10] доказал, что из асимптотической устойчивости нулевого решения системы следует существование функции Ляпунова, удовлетворяющей оценкам, характерным для форм. В совокупности с результатами В. И. Зубова этот факт приводит к выводу о существовании однородной функции Ляпунова. Доказательство этих результатов также существенно опирается на свойство автомодельности однородной системы.

Для импульсных систем проблема устойчивости в критических случаях является менее разработанной. В работе [12] обоснован принцип сведения для импульсных систем в некоторых частных случаях. В работе [13] исследованы аналоги некоторых классических критических случаев, общий способ построения функции Ляпунова для импульсных систем в критических случаях представлен в [14]. Важным вопросом для теории устойчивости критических положений равновесия импульсных систем является исследование устойчивости по квазиоднородному приближению. Уместно отметить, что вопрос об устойчивости по линейному приближению для импульсных систем решен в монографии А. М. Самойленко и Н. А. Перестюка (см. [15]).

Основной отличительной особенностью квазиоднородных импульсных систем, в отличие от квазиоднородных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, является отсутствие свойства автомодельности. Поэтому метод исследования устойчивости по квазиоднородному приближению, развитый В. И. Зубовым (см. [7], [11]), требует некоторой модификации. При этом можно использовать общие подходы к обращению теорем Ляпунова для импульсных систем, развитые в работе А. О. Игнатьева (см. [16]).

Настоящая работа состоит из шести параграфов. В § 1 обоснована актуальность работы. Второй параграф посвящен формулировке постановки задачи и основного результата. В § 3 доказана теорема о существовании функции Ляпунова для квазиоднородной импульсной системы. Четвертый параграф посвящен доказательству основной теоремы об устойчивости по квазиоднородному приближению. В § 5 развиваются методы получения априорных оценок решений квазиоднородных и однородных импульсных систем. В § 6 приведены примеры приложения полученных результатов к исследованию устойчивости критического положения равновесия крупномасштабной импульсной системы с однородными независимыми подсистемами. Показана общность полученных результатов.

§ 2. Постановка задачи

Пусть $\mathbb{R}^n$ – n -мерное евклидово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Обозначим $G = \text{diag}(g_1, \dots, g_n)$, где $g_s = p_s/q_s$, $s = \overline{1, n}$, p_s, q_s – натуральные числа, q_s – нечетные числа. Для действительного числа $\alpha \in \mathbb{R}$ обозначим $\alpha^G = \text{diag}(\alpha^{g_1}, \dots, \alpha^{g_n})$.

Напомним (см. [7], [17]), что функция $f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ называется квазиоднородной функцией измерения $\mu = p/q$ типа $G = \text{diag}(g_1, \dots, g_n)$ (p – натуральное число, q – нечетное число), если при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$f(\alpha^G x) = \alpha^{G+(\mu-1)I} f(x).$$

Аналогично, функция $V \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ называется квазиоднородной измерения m типа G , если при всех $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство

$$V(\alpha^G x) = \alpha^m V(x).$$

Следуя В.И. Зубову (см. [11]), введем также функцию $R(x) = \sum_{s=1}^n |x_s|^{1/g_s}$. Отметим, что $R(\alpha^G x) = |\alpha| R(x)$ при всех $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Множества $\mathcal{N}_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid R(x) < r\}$ являются окрестностями точки $x = 0$, хотя не всегда являются выпуклыми (поскольку $R(x)$ в общем случае нормой не является).

Для вектора $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ обозначим $|x| = (|x_1|, \dots, |x_n|)^T \in \mathbb{R}_+^n$ и заметим, что из неравенств $y \geq x \geq 0$ следует неравенство $R(y) \geq R(x)$.

Также заметим, что при всех $\theta \in [0, 1]$, $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, справедливо неравенство

$$R(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \leq R(|x_1| + |x_2|).$$

Если $V \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ – квазиоднородная функция измерения m типа G , то существуют действительные постоянные η_i , $i = 1, 2$, для которых выполняются неравенства (см. [11])

$$\eta_1 R^m(x) \leq V(x) \leq \eta_2 R^m(x).$$

Если $\eta_1 > 0$, то функция $V(x)$ является положительно определенной.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x) + P(t, x), & t \neq \tau_k, \\ \Delta x(t) &= g(x(t)) + Q_k(x(t)), & t = \tau_k, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $g \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $\Delta x(t) = x(t+0) - x(t)$. Относительно функций f и g предположим, что они являются квазиоднородными функциями измерения μ типа G . Функции $P(t, x)$ и $Q_k(x)$ описывают некоторые возмущения правых частей квазиоднородного приближения системы

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(y), & t \neq \tau_k, \\ \Delta y(t) &= g(y(t)), & t = \tau_k. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Относительно функций $P(t, x)$ и $Q_k(x)$ предполагается, что они удовлетворяют условиям, гарантирующим существование и единственность решения задачи Коши $x(t; t_0, x_0)$ для системы дифференциальных уравнений (2.1). Кроме того, предположим, что решения $x(t; t_0, x_0)$ непрерывны слева при $t = \tau_k$ и непрерывно зависят от начальных условий x_0 . Также примем, что $P(t, 0) = 0$, $Q_k(0) = 0$.

Относительно моментов импульсного воздействия $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ предположим, что они удовлетворяют двустороннему неравенству

$$0 < \theta_1 \leq \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta_2 < +\infty.$$

Целью настоящей работы является установление условий, при которых из асимптотической устойчивости состояния равновесия $y = 0$ системы квазиоднородного приближения (2.2) следует асимптотическая устойчивость состояния равновесия $x = 0$ возмущенной системы (2.1). Аналогичная задача рассматривалась также в работах [16], [18], [19]. В этих работах получены условия обращения теорем прямого метода Ляпунова для импульсных систем при достаточно общих предположениях относительно правых частей системы. В качестве приложения полученных результатов указаны условия, при которых устойчивость тривиального решения системы сохраняется при малых возмущениях правых частей. Эти условия состоят в том, что возмущения являются асимптотически затухающими (или асимптотически затухающими “в среднем”) при возрастании времени. В настоящей работе рассматривается более узкий класс импульсных систем – системы с квазиоднородными правыми частями. За счет такого сужения класса систем удастся доказать существование функции Ляпунова со свойствами, аналогичными свойствам квазиоднородных функций. С помощью таких функций можно установить условия сохранения асимптотической устойчивости тривиального состояния равновесия в случае, когда возмущения являются достаточно малыми (равномерно по времени) в некоторой окрестности состояния равновесия. Эти условия не являются следствием результатов работ [16], [18], [19]. Некоторые из результатов, полученные в настоящей работе, являются развитием результатов работ [16], [18], [19].

Рассмотрим однопараметрическое семейство дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\frac{dz}{d\tau} = f(z), \quad \tau \neq \varepsilon^{\mu-1}\tau_k, \quad \Delta z(\tau) = \varepsilon^{\mu-1}g(z(\tau)), \quad \tau = \varepsilon^{\mu-1}\tau_k, \quad (2.3)$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in (0, 1]$, $z(\tau; \tau_0, y_0, \varepsilon)$ – решение задачи Коши для системы (2.3), $z(\tau_0; \tau_0, z_0, \varepsilon) = z_0$.

Основной результат настоящей работы состоит в следующем утверждении.

Предположим, что для решений системы (2.3) выполняется следующая априорная оценка: существуют положительные постоянные a , σ , τ' , r_0 , не зависящие от $\varepsilon \in (0, 1]$ и τ_0 и такие, что при всех $\tau \geq \tau_0 + \tau'$ и $z_0 \in \partial \mathcal{N}_{\tau_0}$, где $\partial \mathcal{N}_{\tau_0}$ – граница множества $\mathcal{N}_{\tau_0}$, выполняется неравенство

$$\|z(\tau; \tau_0, z_0, \varepsilon)\| \leq a(\tau - \tau_0)^{-\sigma}. \quad (2.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Нетрудно видеть, что выполнение априорной оценки (2.4) для решений системы (2.2) при $\varepsilon = 1$ с показателем $\sigma = 1/(\mu - 1)$ влечет за собой выполнение априорной оценки (2.4) с тем же показателем при любом $\varepsilon \in (0, 1]$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть система квазиоднородного приближения (2.2) такова, что ее состояние равновесия $y = 0$ является асимптотически устойчивым, для однопараметрического семейства квазиоднородных систем (2.3) выполняется априорная оценка (2.4), а для возмущений $P(t, x)$ и $Q_k(x)$ равномерно по t, k выполняются предельные соотношения

$$\frac{\|P(t, x)\|}{\|R^{(\mu-1)I+G}(x)\|} \rightarrow 0, \quad \frac{\|Q_k(x)\|}{\|R^{(\mu-1)I+G}(x)\|} \rightarrow 0 \quad (2.5)$$

при $\|x\| \rightarrow 0$.

Тогда состояние равновесия $x = 0$ системы (2.1) асимптотически устойчиво.

Доказательству этой теоремы посвящен § 4.

§ 3. Вспомогательные результаты

Исследуем вопрос о существовании вспомогательной функции Ляпунова для системы нелинейного приближения (2.2) в случае, когда состояние равновесия $y = 0$ является асимптотически устойчивым. При этом используем некоторые идеи работ [7], [16].

Напомним некоторые общие сведения, касающиеся теорем метода сравнения для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием, которые будут использоваться в дальнейшем изложении. Множество

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, i = \overline{1, n}\}$$

является телесным конусом в пространстве $\mathbb{R}^n$. Этот конус естественным образом вводит в пространстве $\mathbb{R}^n$ полуупорядоченность по правилу: $x \geq y$, если и только если $x - y \in \mathbb{R}_+^n$. Пусть Ω – связная окрестность точки $x = 0$, $\Omega_1 = \Omega \cap \mathbb{R}_+^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функция $\varphi: \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *неубывающей*, если из условия $u_2 \geq u_1$, $u_i \in \Omega_1$, следует, что $\varphi(u_2) \geq \varphi(u_1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [20]). Функция $\varphi: \mathbb{R} \times \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет *условиям Вазжевского* (называется *квазимоноotonно неубывающей*), если каждая из компонент $\varphi_s(t, x)$, $s = \overline{1, n}$, вектора $\varphi(t, x)$ удовлетворяет условию: из

$$0 \leq x'_k \leq x''_k, \quad k \neq i, \quad k = \overline{1, n}, \quad x'_i = x''_i$$

следует, что $\varphi_i(t, x') \leq \varphi_i(t, x'')$.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= G(t, u), & t \neq \tau_k, \\ \Delta u(t) &= \Psi_k(u), & t = \tau_k, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $u \in \mathbb{R}^n$, $G \in C(\mathbb{R} \times \Omega_1; \mathbb{R}^n)$, $\Psi_k \in C(\Omega_1; \mathbb{R}^n)$. Предположим, что решение задачи Коши для системы уравнений (3.1) единственно. Пусть вектор-функция $u: [t_0, \omega) \rightarrow \mathbb{R}^n$ является решением системы (3.1) с начальным условием $u(t_0) = u_0$, $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times \Omega_1$ и $u(\tau_k + 0) \in \Omega_1$, если только $\tau_k \in (t_0, \omega)$. Пусть $m: [t_0, \tilde{\omega}) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\tilde{\omega} \leq \omega$, – кусочно непрерывная вектор-функция с разрывами первого рода в точках τ_k , непрерывная слева от них и удовлетворяющая условиям

а) $m(\tau_k + 0) \in \Omega_1$, если $\tau_k \in [t_0, \tilde{\omega})$;

б) $D^+ m(t) \leq G(t, m(t))$, $t \neq \tau_k$, $\Delta m(t) \leq \Psi_k(m(t))$, $t = \tau_k$, $k \in \mathbb{N}$, $m(t_0) \leq u_0$.

Здесь D^+ – верхняя производная Дини.

ЛЕММА 1 (см. [21]). *Предположим, что*

1) *функция G – квазимонотонно неубывающая на множестве $\mathbb{R} \times \Omega_1$;*

- 2) функции $u + \Psi_k(u)$, $k \in \mathbb{N}$, – неубывающие на множестве Ω_1 ;
 3) выполняются условия а) и б).
 Тогда $m(t) \leq u(t)$ при всех $t \in [t_0, \tilde{\omega})$.

При выполнении условий 1) и 2) леммы 1 оператор сдвига $U(t, t_0): \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ вдоль решений системы (3.1) является неубывающим, т.е. из условий $u_2 \geq u_1 \geq 0$ следует, что $U(t, t_0)u_2 \geq U(t, t_0)u_1$ при всех $t \geq t_0$, для которых определены правая и левая части этого неравенства и $U(\tau_k, t_0)u_i \in \Omega_1$, $i = 1, 2$. Этот факт является следствием аналогичного утверждения для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которых удовлетворяют условию Важевского (см. [22]).

Сформулируем еще один результат, необходимый для дальнейшего изложения, заимствованный из работы [16].

ЛЕММА 2. Пусть $t_0 \in \mathbb{R}$, $f_1 \in [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $f_2 \in [t_0, +\infty) \rightarrow \infty$ – две ограниченные неотрицательные кусочно непрерывные функции, имеющие односторонние пределы в точках разрыва, такие, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f_1(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f_2(t) = 0.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\left| \sup_{t \in [t_0, +\infty)} f_1(t) - \sup_{t \in [t_0, +\infty)} f_2(t) \right| \leq \sup_{t \in [t_0, +\infty)} |f_1(t) - f_2(t)|.$$

Отметим справедливость тождества

$$y(t; t_0, \varepsilon^G y_0) = \varepsilon^G z(\varepsilon^{\mu-1} t; \varepsilon^{\mu-1} t_0, y_0, \varepsilon) \quad (3.2)$$

при всех $t \geq t_0$, для которых правая и левая части равенства существуют. Здесь $y(t; t_0, y_0)$ – решение задачи Коши для системы (2.2).

Действительно, пусть

$$\zeta(t) = y(t; t_0, \varepsilon^G y_0) - \varepsilon^G z(\varepsilon^{\mu-1} t; \varepsilon^{\mu-1} t_0, y_0, \varepsilon),$$

тогда функция $\zeta(t)$ является решением системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\frac{d\zeta}{dt} = f(\zeta + \varepsilon^G z(\varepsilon^{\mu-1} t; \varepsilon^{\mu-1} t_0, y_0, \varepsilon)) - \varepsilon^{G+(\mu-1)I} f(z(\varepsilon^{\mu-1} t; \varepsilon^{\mu-1} t_0, y_0, \varepsilon)),$$

$$t \neq \tau_k,$$

$$\Delta \zeta(t) = g(\zeta + \varepsilon^G z(\varepsilon^{\mu-1} t; \varepsilon^{\mu-1} t_0, y_0, \varepsilon)) - \varepsilon^{G+(\mu-1)I} g(z(\varepsilon^{\mu-1} t; \varepsilon^{\mu-1} t_0, y_0, \varepsilon)),$$

$$t = \tau_k.$$

(3.3)

В силу предположения о квазиоднородности функций f и g система уравнений (3.3) имеет решение $\zeta = 0$. Поскольку $\zeta(t_0) = 0$, то в силу единственности решений задачи Коши $\zeta(t) \equiv 0$ при всех $t \geq t_0$, для которых правая и левая части равенства (3.2) существуют.

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что состояние равновесия $y = 0$ системы (2.2) асимптотически устойчиво и для однопараметрического семейства систем (2.3) выполняется априорная оценка (2.4).

Тогда для достаточно большого рационального числа m ($m = s_1/s$, s – нечетное число, s_1 – четное число) и положительно определенной квазиоднородной функции $W(y)$ m -го измерения типа G существуют функция $V(t, y)$, положительные постоянные $r_1, \gamma_i, i = 1, 2, 3$, такие, что выполняются оценки

$$\gamma_1 R^{m+1-\mu}(y) \leq V(t, y) \leq \gamma_2 R^{m+1-\mu}(y), \quad (3.4)$$

$$D^+V(t, y)|_{(2.2)} \leq -W(y), \quad t \neq \tau_k, \quad (3.5)$$

$$V(\tau_k + 0, y + g(y)) \leq V(\tau_k, y), \quad k \in \mathbb{N},$$

$$|V(t, y_2) - V(t, y_1)| \leq \gamma_3 \|R^{(m-\mu+1)I-G}(|y_1| + |y_2|)\| \|y_2 - y_1\| \quad (3.6)$$

при всех $y, y_1, y_2 \in \mathcal{N}_{r_1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство этой теоремы проведем по следующей схеме: сначала построим вспомогательную функцию $V(t, x)$, удовлетворяющую оценкам (3.4) и (3.5). Затем, используя эту вспомогательную функцию, уточним оценки для решений импульсной системы (2.2). И, наконец, докажем оценку (3.6).

При доказательстве этой теоремы удобно считать, что $g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_n$. Прежде всего напомним, что существуют положительные числа $\eta_i, i = 1, 2$, такие, что при всех $y \in \mathbb{R}^n$ выполняются неравенства

$$\eta_1 R^m(y) \leq W(y) \leq \eta_2 R^m(y). \quad (3.7)$$

Следуя идеям работ [11], [16], рассмотрим функцию

$$V(t_0, y_0) = \int_{t_0}^{+\infty} W(y(s; t_0, y_0)) ds + \sup_{s \in [t_0, +\infty)} R^{m+1-\mu}(y(s; t_0, y_0)). \quad (3.8)$$

Докажем сходимость несобственного интеграла, входящего в правую часть равенства (3.8). Будем считать, что $y_0 \in \mathcal{N}_{r_1}$, и обозначим $\varepsilon_{y_0} = R(y_0)/r_0 \in (0, 1]$, $\tau_0 = \varepsilon_{y_0}^{\mu-1} t_0$. Тогда из тождества (3.2) следует, что

$$y(s; t_0, y_0) = \varepsilon_{y_0}^G z(\varepsilon_{y_0}^{\mu-1} s; \varepsilon_{y_0}^{\mu-1} t_0, \varepsilon_{y_0}^{-G} y_0, \varepsilon_{y_0}).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{+\infty} W(y(s; t_0, y_0)) ds &= \varepsilon_{y_0}^{m+1-\mu} \int_{\tau_0}^{+\infty} W(z(\tau; \tau_0, \varepsilon_{y_0}^{-G} y_0, \varepsilon_{y_0})) d\tau \\ &= \varepsilon_{y_0}^{m+1-\mu} \left(\int_{\tau_0}^{\tau_0 + \tau'} W(z(\tau; \tau_0, \varepsilon_{y_0}^{-G} y_0, \varepsilon_{y_0})) d\tau \right. \\ &\quad \left. + \int_{\tau_0 + \tau'}^{+\infty} W(z(\tau; \tau_0, \varepsilon_{y_0}^{-G} y_0, \varepsilon_{y_0})) d\tau \right). \end{aligned}$$

Используя обобщенную лемму Гронуолла–Беллмана (см. [15]), можно показать, что существует положительная постоянная $M_{\tau'}$, не зависящая от $\varepsilon \in (0, 1]$ и зависящая от τ' , такая, что при всех $s \in [\tau_0, \tau_0 + \tau']$ выполняется неравенство

$$\|z(s; \tau_0, z_0, \varepsilon)\| \leq M_{\tau'} \|z_0\|. \quad (3.9)$$

Поэтому при всех $s \in [\tau_0, \tau_0 + \tau']$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} W(z(s; \tau_0, \varepsilon_{y_0}^{-G} y_0, \varepsilon_{y_0})) &\leq \eta_2 R^m(z(s; \tau_0, \varepsilon_{y_0}^{-G} y_0, \varepsilon_{y_0})) \\ &\leq \eta_2 \left(\sum_{s=1}^n M_{\tau'}^{\frac{1}{g_s}} \|\varepsilon_{y_0}^{-G} y_0\|_{\frac{1}{g_s}} \right)^m \leq \eta_2 M^* \left(\sum_{l=1}^n \left(\sum_{s=1}^n r_0^{2g_s} \right)^{\frac{g_l}{2}} \right)^m. \end{aligned}$$

Здесь обозначено $M^* = \max_{s=1, n} M_{\tau'}^{\frac{m}{g_s}}$ и учтено $R(\varepsilon_{y_0}^{-G} y_0) = \varepsilon_{y_0}^{-1} R(y_0) = r_0$.

Как следствие, получим неравенство

$$\int_{\tau_0}^{\tau_0 + \tau'} W(z(\tau; \tau_0, \varepsilon_{y_0}^{-G} y_0, \varepsilon_{y_0})) d\tau \leq \tau' \eta_2 M^* \left(\sum_{l=1}^n \left(\sum_{s=1}^n r_0^{2g_s} \right)^{\frac{g_l}{2}} \right)^m.$$

Аналогично, с учетом априорной оценки (2.4) получим

$$\begin{aligned} \int_{\tau_0 + \tau'}^{+\infty} W(z(\tau; \tau_0, \varepsilon_{y_0}^{-G} y_0, \varepsilon_{y_0})) d\tau &\leq \eta_2 \int_{\tau_0 + \tau'}^{+\infty} R^m(z(\tau; \tau_0, \varepsilon_{y_0}^{-G} y_0, \varepsilon_{y_0})) d\tau \\ &\leq \eta_2 \int_{\tau_0 + \tau'}^{+\infty} \left(\sum_{s=1}^n a_{\frac{1}{g_s}} (\tau - \tau_0)^{-\frac{\sigma}{g_s}} \right)^m d\tau \\ &\leq \eta_2 \left(\sum_{s=1}^n a_{\frac{1}{g_s}} - \frac{1}{g_n} (\tau')^{\frac{\sigma}{g_n} - \frac{\sigma}{g_s}} \right)^m \int_{\tau_0 + \tau'}^{+\infty} (\tau - \tau_0)^{-\frac{m\sigma}{g_n}} d\tau. \end{aligned}$$

Выберем число m так, чтобы выполнялось неравенство $m\sigma > g_n$, тогда

$$\int_{\tau_0 + \tau'}^{+\infty} (\tau - \tau_0)^{-\frac{m\sigma}{g_n}} d\tau = \frac{(\tau')^{1 - \frac{m\sigma}{g_n}}}{m\sigma/g_n - 1}.$$

Этим доказана сходимость несобственного интеграла, входящего в выражение для функции $V(t_0, y_0)$. Покажем конечность величины

$$\sup_{s \in [t_0, +\infty)} R^{m+1-\mu}(y(s; t_0, y_0)).$$

Действительно,

$$\sup_{s \in [t_0, +\infty)} R^{m+1-\mu}(y(s; t_0, y_0)) = \varepsilon_{y_0}^{m+1-\mu} \sup_{\tau \in [t_0, +\infty)} R^{m+1-\mu}(z(\tau; \tau_0, \varepsilon_{y_0}^{-G} y_0, \varepsilon_{y_0})).$$

Из априорной оценки (2.4) и неравенства (3.9) следует оценка

$$R(z(\tau; \tau_0, \varepsilon_{y_0}^{-G} y_0, \varepsilon_{y_0})) \leq \begin{cases} M^* \sum_{l=1}^n \left(\sum_{s=1}^n r_0^{2g_s} \right)^{\frac{g_l}{2}}, & \tau \in [\tau_0, \tau_0 + \tau'], \\ \sum_{s=1}^n (a M_{\tau'})^{\frac{1}{g_s}} (\tau')^{-\frac{\sigma}{g_s}}, & \tau \in (\tau_0 + \tau', +\infty). \end{cases}$$

Таким образом, функция $V(t, y)$ определена при всех $(t, y) \in \mathbb{R} \times \overline{\mathcal{N}}_{r_1}$. Из приведенных выше рассуждений следуют неравенства

$$V(t, y) \leq \gamma_2 R^{m+1-\mu}(y), \quad V(t, y) \geq R^{m+1-\mu}(y). \quad (3.10)$$

Существование верхней производной Дини $D^+V(t, y)|_{(2.2)}$ вдоль решений системы дифференциальных уравнений (2.2) при $t \neq \tau_k$ и выполнение неравенств (3.5) фактически доказано в работе [16].

Полученные оценки (3.4)–(3.5) для функции $V(t, y)$ и лемма 1 позволяют несколько уточнить оценки для решений системы (2.2). Зафиксируем число m_0 настолько большим, чтобы оценки (3.4)–(3.5) для функции $V(t, y)$ выполнялись при $m = m_0$. Лемма 1 позволяет установить оценку

$$V(t, y(t; t_0, y_0)) \leq U(t; t_0, V(t_0, y_0)),$$

где $U(t; t_0, U_0)$ – решение задачи Коши для дифференциального уравнения с импульсным воздействием

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= -\frac{\eta_1}{\gamma_2^{\frac{m_0}{m_0+1-\mu}}} U^{\frac{m_0}{m_0+1-\mu}}(t), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta U(t) &= 0, \quad t = \tau_k, \end{aligned}$$

которое является обыкновенным дифференциальным уравнением. Обозначим

$$\eta_3 = \frac{\eta_1}{\gamma_2^{\frac{m_0}{m_0+1-\mu}}},$$

тогда из неравенств (3.10) следует

$$\begin{aligned} R(y(t; t_0, y_0)) &\leq U^{\frac{1}{m_0+1-\mu}}(t; t_0, \gamma_2 R^{m_0+1-\mu}(y_0)) \\ &\leq R(y_0) \left(\gamma_2^{1-\mu} + \frac{\eta_3(\mu-1)}{m_0+1-\mu} R^{\mu-1}(y_0)(t-t_0) \right)^{\frac{1}{1-\mu}}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\eta'_3 = \frac{\eta_3(\mu-1)}{m_0+1-\mu},$$

тогда последнее неравенство можно представить в виде

$$R(y(t; t_0, y_0)) \leq \gamma_2 R(y_0) (1 + \eta'_3 (\gamma_2 R(y_0))^{\mu-1} (t-t_0))^{\frac{1}{1-\mu}}. \quad (3.11)$$

Докажем, что число m можно увеличить так, чтобы выполнялось неравенство (3.6). При этом, не умаляя общности, будем считать, что $t_0 < \tau_1$.

Действительно, с учетом того, что $y(s; t_0, y_i) \rightarrow 0$, $i = 1, 2$, при $s \rightarrow +\infty$ из утверждения леммы 2 получим оценку

$$\begin{aligned} |V(t_0, y_2) - V(t_0, y_1)| &\leq \int_{t_0}^{+\infty} |W(y(s; t_0, y_2)) - W(y(s; t_0, y_1))| ds \\ &+ \sup_{s \in [t_0, +\infty)} |R^{m+1-\mu}(y(s; t_0, y_2)) - R^{m+1-\mu}(y(s; t_0, y_1))|. \end{aligned}$$

Из формулы конечных приращений получим

$$W(y(s; t_0, y_2)) - W(y(s; t_0, y_1)) = \int_0^1 \left(\frac{\partial W}{\partial y}(y(s; t_0, y_\theta)) \right)^T \frac{\partial y}{\partial y_0}(s; t_0, y_\theta) d\theta (y_2 - y_1), \quad (3.12)$$

где $y_\theta = y_1 + \theta(y_2 - y_1)$, $\theta \in [0, 1]$.

Прежде всего отметим, что матрица Якоби

$$J(t, t_0, y_\theta) = \frac{\partial y}{\partial y_0}(t; t_0, y_\theta), \quad J(t_0, t_0, y_\theta) = I$$

при $t \geq t_0$ удовлетворяет линейной системе дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (системе уравнений в вариациях [15])

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial y}(y(t; t_0, y_\theta))J, & t \neq \tau_k, \\ \Delta J &= \frac{\partial g}{\partial y}(y(t; t_0, y_\theta))J, & t = \tau_k. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Пусть $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\|\xi\| = 1$ и

$$\omega(t) = \|J(t, t_0, y_\theta)\xi\|^2, \quad \eta_4 = \sup_{x \in \partial \mathcal{N}_1} \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\|, \quad \eta_5 = \sup_{x \in \partial \mathcal{N}_1} \left\| \frac{\partial g}{\partial x} \right\|,$$

тогда вследствие свойства квазиоднородности функций f и g выполняются неравенства

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y}(y) \right\| \leq \eta_4 R^{\mu-1}(y), \quad \left\| \frac{\partial g}{\partial y}(y) \right\| \leq \eta_5 R^{\mu-1}(y)$$

и из (3.13) следуют неравенства

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \xi^T J^T \left(\frac{\partial f}{\partial y}(y(t; t_0, y_\theta)) + \frac{\partial f^T}{\partial y}(y(t; t_0, y_\theta)) \right) J \xi \leq 2 \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(y(t; t_0, y_\theta)) \right\| \|J\xi\|^2 \\ &\leq 2\eta_4 R^{\mu-1}(y(t; t_0, y_\theta))\omega(t), \quad t \neq \tau_k, \\ \omega(\tau_k + 0) &= \xi^T J^T \left(I + \frac{\partial g}{\partial y}(y(\tau_k; t_0, y_\theta)) \right)^T \left(I + \frac{\partial g}{\partial y}(y(\tau_k; t_0, y_\theta)) \right) J \xi \\ &\leq \left(1 + \left\| \frac{\partial g}{\partial y}(y(\tau_k; t_0, y_\theta)) \right\| \right)^2 \omega(\tau_k) \leq (1 + \eta_5 R^{\mu-1}(y(\tau_k; t_0, y_\theta)))^2 \omega(\tau_k). \end{aligned}$$

Применяя утверждение леммы 1 к функции $\omega(t)$, получим неравенство

$$\begin{aligned} \|J(t, t_0, y_\theta)\| &\leq \exp \left\{ \eta_4 \int_{t_0}^t R^{\mu-1}(y(s; t_0, y_\theta)) ds \right\} \prod_{k=1}^{N(t_0, t)} (1 + \eta_5 R^{\mu-1}(y(\tau_k; t_0, y_\theta))) \\ &\leq \exp \left\{ \eta_4 \int_{t_0}^t R^{\mu-1}(y(s; t_0, y_\theta)) ds + \eta_5 \sum_{k=1}^{N(t_0, t)} R^{\mu-1}(y(\tau_k; t_0, y_\theta)) \right\}, \end{aligned}$$

где $N(t_0, t)$ – мощность множества $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty \cap (t_0, t)$.

Применяя неравенство (3.11), получим оценки

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t R^{\mu-1}(y(s; t_0, y_\theta)) ds &\leq (\gamma_2 R(y_\theta))^{\mu-1} \int_{t_0}^t \frac{ds}{1 + \eta_3' (\gamma_2 R(y_\theta))^{\mu-1} (s - t_0)} \\ &= \frac{1}{\eta_3'} \ln(1 + \eta_3' (\gamma_2 R(y_\theta))^{\mu-1} (t - t_0)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N(t_0, t)} R^{\mu-1}(y(\tau_k; t_0, y_\theta)) &\leq (\gamma_2 R(y_\theta))^{\mu-1} \sum_{k=1}^{N(t_0, t)} \frac{1}{1 + \eta'_3 (\gamma_2 R(y_\theta))^{\mu-1} (\tau_k - t_0)} \\
&\leq (\gamma_2 R(y_\theta))^{\mu-1} \left(1 + \sum_{k=2}^{N(t_0, t)} \frac{1}{\tau_k - \tau_{k-1}} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \frac{ds}{1 + \eta'_3 (\gamma_2 R(y_\theta))^{\mu-1} (s - t_0)} \right) \\
&\leq (\gamma_2 R(y_\theta))^{\mu-1} \left(1 + \sum_{k=2}^{N(t_0, t)} \frac{1}{\theta_1} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \frac{ds}{1 + \eta'_3 (\gamma_2 R(y_\theta))^{\mu-1} (s - t_0)} \right) \\
&\leq (\gamma_2 R(y_\theta))^{\mu-1} + \frac{1}{\theta_1 \eta'_3} \ln(1 + \eta'_3 (\gamma_2 R(y_\theta))^{\mu-1} (\tau_{N(t_0, t)} - t_0)) \\
&\leq (\gamma_2 R(|y_1| + |y_2|))^{\mu-1} + \frac{1}{\theta_1 \eta'_3} \ln(1 + \eta'_3 (\gamma_2 R(y_\theta))^{\mu-1} (t - t_0)).
\end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо при всех $t \geq t_0$, если дополнительно принять, что при $N(t_0, t) = 0$ сумма в пределах от 1 до $N(t_0, t)$ равна нулю.

Обозначим $M = \gamma_2 \sup_{y_1 \in \mathcal{N}_{r_1}, y_2 \in \mathcal{N}_{r_1}} R(|y_1| + |y_2|)$.

С учетом этих оценок

$$\|J(t, t_0, y_\theta)\| \leq e^{\eta_5 M^{\mu-1}} (1 + \eta'_3 (\gamma_2 R(y_\theta))^{\mu-1} (t - t_0))^{\frac{\eta_4 \theta_1 + \eta_5}{\theta_1 \eta'_3}}. \quad (3.14)$$

Вследствие квазиоднородности функции $W(y)$ справедлива оценка

$$\left\| \frac{\partial W}{\partial y}(y) \right\| \leq \eta_6 \|R^{mI-G}(y)\|, \quad \eta_6 = \sup_{y \in \partial \mathcal{N}_1} \left\| \frac{\partial W}{\partial y} \right\|.$$

Поэтому из представления (3.12) следует оценка

$$\begin{aligned}
&|W(y(s; t_0, y_2)) - W(y(s; t_0, y_1))| \\
&\leq \int_0^1 \left\| \frac{\partial W}{\partial y}(y(s; t_0, y_\theta)) \right\| \left\| \frac{\partial y}{\partial y_0}(s; t_0, y_\theta) \right\| d\theta \|y_2 - y_1\| \\
&\leq \eta_6 \int_0^1 \|(\gamma_2 R(y_\theta))^{mI-G}\| \\
&\quad \times \|(1 + \eta'_3 (\gamma_2 R(y_\theta))^{\mu-1} (s - t_0))^{\frac{\eta_4 \theta_1 + \eta_5}{\theta_1 \eta'_3} I + \frac{mI-G}{1-\mu}}\| d\theta \|y_2 - y_1\| \\
&\leq \eta'_6 \int_0^1 \|R^{mI-G}(y_\theta)\| \\
&\quad \times \|(1 + \eta'_3 (\gamma_2 R(y_\theta))^{\mu-1} (s - t_0))^{\frac{\eta_4 \theta_1 + \eta_5}{\theta_1 \eta'_3} I + \frac{mI-G}{1-\mu}}\| d\theta \|y_2 - y_1\|. \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Здесь $\eta'_6 = \eta_6 \|\gamma_2^{mI-G}\|$ – положительная постоянная.

При $s \geq t_0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned}
&\|(1 + \eta'_3 (\gamma_2 R(y_\theta))^{\mu-1} (s - t_0))^{\frac{\eta_4 \theta_1 + \eta_5}{\theta_1 \eta'_3} I + \frac{mI-G}{1-\mu}}\| \\
&\leq (1 + \eta'_3 (\gamma_2 R(y_\theta))^{\mu-1} (s - t_0))^{\frac{\eta_4 \theta_1 + \eta_5}{\theta_1 \eta'_3} + \frac{m-gn}{1-\mu}}. \quad (3.16)
\end{aligned}$$

Зафиксируем положительное число ε_1 и число m ($m \geq m_0$) выберем так, что

$$\frac{\theta_1 \eta_4 + \eta_5}{\theta_1 \eta'_3} + \frac{m - gn}{1 - \mu} \leq 1 + \varepsilon_1.$$

Тогда из оценок (3.15) и (3.16) следует неравенство

$$\begin{aligned}
& \int_{t_0}^{+\infty} |W(y(s; t_0, y_2)) - W(y(s; t_0, y_1))| ds \\
& \leq \int_{t_0}^{+\infty} \eta'_6 \int_0^1 \|R^{mI-G}(y_\theta)\| (1 + \eta'_3(\gamma_2 R(y_\theta))^{\mu-1}(s - t_0))^{-1-\varepsilon_1} d\theta \|y_2 - y_1\| ds \\
& = \eta'_6 \int_0^1 \|R^{mI-G}(y_\theta)\| \int_{t_0}^{+\infty} (1 + \eta'_3(\gamma_2 R(y_\theta))^{\mu-1}(s - t_0))^{-1-\varepsilon_1} ds d\theta \|y_2 - y_1\| \\
& = \frac{\eta'_6}{\eta'_3 \varepsilon_1} \int_0^1 \|R^{mI-G}(y_\theta)\| (\gamma_2 R(y_\theta))^{1-\mu} d\theta \|y_2 - y_1\| \\
& \leq \frac{\eta'_6 \gamma_2^{1-\mu}}{\eta'_3 \varepsilon_1} \|R^{(m+1-\mu)I-G}(|y_1| + |y_2|)\| \|y_2 - y_1\|.
\end{aligned}$$

Далее, не умаляя общности, предположим, что $y_\theta \neq 0$ при всех $\theta \in [0, 1]$, и рассмотрим разность

$$\begin{aligned}
& |R^{m+1-\mu}(y(s; t_0, y_2)) - R^{m+1-\mu}(y(s; t_0, y_1))| \\
& \leq \int_0^1 (m+1-\mu) R^{m-\mu}(y(s; t_0, y_\theta)) \\
& \quad \times \|D_y^+ R(y(s; t_0, y_\theta))\| \|J(s; t_0, y_\theta)\| d\theta \|y_2 - y_1\|.
\end{aligned}$$

Очевидно, что существует положительная постоянная η_7 такая, что

$$\|D_y^+ R(y)\| \leq \eta_7 \|R^{I-G}(y)\|.$$

Здесь D_y^+ – верхняя производная Дини.

Поэтому

$$\begin{aligned}
& |R^{m+1-\mu}(y(s; t_0, y_2)) - R^{m+1-\mu}(y(s; t_0, y_1))| \\
& \leq \eta_7 \|\gamma_2^{(m+1-\mu)I-G}\| (m+1-\mu) \int_0^1 \|R^{(m+1-\mu)I-G}(y_\theta)\| \\
& \quad \times \|(1 + \eta'_3(\gamma_2 R(y_\theta))^{\mu-1}(s - t_0))^{\frac{\eta_4 \theta_1 + \eta_5}{\theta_1 \eta'_3} I + \frac{(m+1-\mu)I-G}{1-\mu}}\| d\theta \|y_2 - y_1\|.
\end{aligned}$$

Если это необходимо, число m увеличим настолько, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\eta_4 \theta_1 + \eta_5}{\theta_1 \eta'_3} + \frac{m+1-\mu-g_n}{1-\mu} < 0,$$

тогда

$$\begin{aligned}
& \sup_{s \in [t_0, +\infty)} |R^{m+1-\mu}(y(s; t_0, y_2)) - R^{m+1-\mu}(y(s; t_0, y_1))| \\
& \leq \eta_7 \|\gamma_2^{(m+1-\mu)I-G}\| (m+1-\mu) \|R^{(m+1-\mu)I-G}(|y_1| + |y_2|)\| \|y_2 - y_1\|.
\end{aligned}$$

Таким образом, теорема полностью доказана.

§ 4. Доказательство теоремы об устойчивости по нелинейному приближению

Доказательство теоремы проведем по следующему плану: используя функцию Ляпунова для невозмущенной системы (2.2), существование которой доказано в теореме 2, установим оценки полной производной и полной разности этой функции вдоль решений возмущенной системы (2.1). На основе этих оценок установим устойчивость и асимптотическую устойчивость решения $x = 0$ системы (2.1).

Для исследования устойчивости состояния равновесия $x = 0$ системы (2.1) применим функцию Ляпунова $V(t, x)$, существование которой обеспечивает теорема 2.

Предварительно установим оценки для вспомогательной функции $V(t, x)$ вдоль решений системы дифференциальных уравнений (2.1) в достаточно малой окрестности $\mathcal{N}_{r_0}$, $r_0 > 0$, состояния равновесия $x = 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$, тогда

$$\begin{aligned} & \frac{V(t + \varepsilon, x + \varepsilon f(x) + \varepsilon P(t, x)) - V(t, x)}{\varepsilon} = \frac{V(t + \varepsilon, x + \varepsilon f(x)) - V(t, x)}{\varepsilon} \\ & + \frac{V(t + \varepsilon, x + \varepsilon f(x) + \varepsilon P(t, x)) - V(t + \varepsilon, x + \varepsilon f(x))}{\varepsilon} \\ & \leq \frac{V(t + \varepsilon, x + \varepsilon f(x)) - V(t, x)}{\varepsilon} \\ & + \gamma_3 \|R^{(m-\mu+1)I-G}(2x + 2\varepsilon f(x) + \varepsilon P(t, x))\| \|P(t, x)\|. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0+$, получим неравенство

$$\begin{aligned} D^+V(t, x)|_{(2.1)} & \leq D^+V(t, x)|_{(2.2)} + \gamma_3 \|R^{(m-\mu+1)I-G}(2x)\| \|P(t, x)\| \\ & \leq -W(x) + \gamma_3 \|R^{(m-\mu+1)I-G}(2x)\| \|P(t, x)\|. \end{aligned}$$

В достаточно малой окрестности $\mathcal{N}_{r_0}$ состояния равновесия $x = 0$ для некоторой положительной постоянной C_1 справедливо неравенство

$$\frac{\|R^{(m-\mu+1)I-G}(2x)\|}{\|R^{(m-\mu+1)I-G}(x)\|} \leq C_1.$$

Поэтому в этой окрестности справедливо неравенство

$$\begin{aligned} D^+V(t, x)|_{(2.1)} & \leq -\eta_1 R^m(x) + \gamma_3 C_1 \|R^{(m-\mu+1)I-G}(x)\| \|R^{(\mu-1)I+G}(x)\| \psi_1(x) \\ & \leq (-\eta_1 + \gamma_3 C_1 \psi_1(x)) R^m(x), \end{aligned}$$

где $\psi_1(x)$ – положительная непрерывная функция, $\psi_1(x) \rightarrow 0$ при $\|x\| \rightarrow 0$. Уменьшая, если это необходимо, окрестность состояния равновесия $x = 0$, можно добиться выполнения неравенства

$$\psi_1(x) \leq \frac{\eta_1}{2\gamma_3 C_1},$$

тогда

$$D^+V(t, x)|_{(2.1)} \leq -\frac{\eta_1}{2} R^m(x). \quad (4.1)$$

Оценка разности вспомогательной функции $V(t, x)$ вдоль решений нелинейной системы (2.1) при $t = \tau_k$ имеет вид

$$V(t + 0, x + g(x) + Q_k(x)) - V(t, x) \leq \gamma_3 \|R^{(\mu-\mu+1)I-G}(2x + 2g(x) + Q_k(x))R^{(\mu-1)I+G}(x)\| \psi_2(x),$$

где $\psi_2(x)$ – непрерывная положительная функция, $\psi_2(x) \rightarrow 0$ при $\|x\| \rightarrow 0$.

Отметим, что существует положительная постоянная η_8 такая, что в достаточно малой окрестности $\mathcal{N}_{r_0}$ (r_0 , возможно, необходимо уменьшить) состояния равновесия $x = 0$ выполняется неравенство

$$\Phi(x) \equiv \|R^{(\mu-\mu+1)I-G}(2x + 2g(x) + Q_k(x))R^{(\mu-1)I+G}(x)\| \leq \eta_8 R^m(x).$$

Докажем это утверждение. Очевидно, что

$$\Phi(x) = \alpha^m \|R^{(\mu-\mu+1)I-G}(2\alpha^{-G}x + 2\alpha^{-G}g(x) + \alpha^{-G}Q_k(x))R^{(\mu-1)I+G}(\alpha^{-G}x)\|.$$

Пусть $\alpha = R(x)$, тогда $R(\alpha^{-G}x) = 1$ и, как следствие, при всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство $\|\alpha^{-G}x\| \leq r^*$, где r^* – положительная постоянная. Из очевидного тождества $\alpha^{-G}g(x) = \alpha^{\mu-1}g(\alpha^{-G}x)$ следует неравенство

$$\|\alpha^{-G}g(x)\| \leq \eta_9 R^{\mu-1}(x),$$

где $\eta_9 = \sup_{x \in \partial \mathcal{N}_1} \|g(x)\|$.

Непосредственно из условия теоремы следует, что

$$\|\alpha^{-G}Q_k(x)\| \leq R^{\mu-1}(x)\psi_2(x).$$

Обозначим через r^{**} максимум функции $2r^* + 2\eta_9 R^{\mu-1}(x) + R^{\mu-1}(x)\psi_2(x)$ в рассматриваемой окрестности состояния равновесия $x = 0$ и обозначим $\eta_8 = \sup_{\|x\| \leq r^{**}} \|R^{(\mu-\mu+1)I-G}(x)\|$, тогда получим требуемую оценку.

Таким образом,

$$V(t + 0, x + g(x) + Q_k(x)) - V(t, x) \leq \gamma_3 \eta_8 R^m(x) \psi_2(x) \quad (4.2)$$

и существует достаточно малое положительное число r_0 такое, что в окрестности $\mathcal{N}_{r_0}$ выполняются оценки (4.1) и (4.2).

Покажем, что можно выбрать положительное число $r_1 < r_0$ и соответствующее положительное число δ_1 настолько малым, что любое решение $x(t; t_0, x_0)$ с начальными условиями $\|x_0\| < \delta_1$ не выходит за пределы окрестности $\mathcal{N}_{r_1}$ при всех $t \geq t_0$. Число r_1 выберем так, чтобы $r_1 < r_0$, и зафиксируем число $t^* > \tau_2$. Тогда вследствие непрерывной зависимости решений задачи Коши $x(t; t_0, x_0)$ от начального условия x_0 существует число $\delta_1 > 0$ такое, что $x(t; t_0, x_0) \in \mathcal{N}_{r_1}$ при всех $t \in [t_0, t^*]$, $x(t^*; t_0, x_0) \notin \mathcal{N}_{r_1}$. Обозначим через k_0 наибольшее натуральное число, для которого $\tau_{k_0} < t^*$. Тогда

$$\begin{aligned} V(t^*, x(t^*; t_0, x_0)) - V(\tau_1 + 0, x(\tau_1 + 0; t_0, x_0)) &\leq -\frac{\eta_1}{2} \int_{\tau_{k_0}}^{t^*} R^m(x(s; t_0, x_0)) ds \\ &- \frac{\eta_1}{2} \sum_{k=2}^{k_0} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} R^m(x(s; t_0, x_0)) ds - \frac{\eta_1}{2} \int_{t_0}^{\tau_1} R^m(x(s; t_0, x_0)) ds \\ &+ \sum_{k=2}^{k_0} \gamma_3 \eta_8 R^m(x(\tau_k; t_0, x_0)) \psi_2(x(\tau_k; t_0, x_0)). \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что существует положительная постоянная η_{10} такая, что

$$\left| \frac{dR(x(t; t_0, x_0))}{dt} \right| \leq \eta_{10} R^\mu(x(t; t_0, x_0)). \quad (4.3)$$

Как следствие, $s \in (\tau_{k-1}, \tau_k]$ и

$$R^{1-\mu}(x(s; t_0, x_0)) - R^{1-\mu}(x(\tau_k; t_0, x_0)) \leq \eta_{10}(\mu - 1)(\tau_k - s) \leq \eta_{10}(\mu - 1)\theta_2.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} R(x(s; t_0, x_0)) &\geq R(x(\tau_k; t_0, x_0)) (1 + \eta_{10}(\mu - 1)\theta_2 R^{\mu-1}(x(\tau_k; t_0, x_0)))^{\frac{1}{1-\mu}} \\ &\geq R(x(\tau_k; t_0, x_0)) (1 + \eta_{10}(\mu - 1)\theta_2 r_0^{\mu-1})^{\frac{1}{1-\mu}} \equiv \eta_{11} R(x(\tau_k; t_0, x_0)). \end{aligned}$$

Также из неравенства (4.3) следует оценка

$$R(x(\tau_1; t_0, x_0)) \leq R(x_0) (1 - \eta_{10}(\mu - 1)R^{\mu-1}(x_0)(\tau_1 - t_0))^{\frac{1}{1-\mu}},$$

если только выполняется неравенство $1 - \eta_{10}(\mu - 1)R^{\mu-1}(x_0)(\tau_1 - t_0) > 0$.

Аналогично, справедлива оценка

$$\begin{aligned} R(x(\tau_k; t_0, x_0)) &\leq R(x(\tau_{k-1} + 0; t_0, x_0)) \\ &\quad \times (1 - \eta_{10}(\mu - 1)R^{\mu-1}(x(\tau_{k-1} + 0; t_0, x_0))(\tau_k - \tau_{k-1}))^{\frac{1}{1-\mu}}, \end{aligned}$$

если только выполняется неравенство

$$1 - \eta_{10}(\mu - 1)R^{\mu-1}(x(\tau_{k-1} + 0; t_0, x_0))(\tau_k - \tau_{k-1}) > 0.$$

Поэтому справедлива оценка

$$\begin{aligned} V(t^*, x(t^*; t_0, x_0)) - V(\tau_1 + 0, x(\tau_1 + 0; t_0, x_0)) \\ \leq \sum_{k=2}^{k_0} \left(-\frac{\eta_{11}\eta_{11}^m}{2}(\tau_k - \tau_{k-1}) + \gamma_3\eta_8\psi_2(x(\tau_k; t_0, x_0)) \right) R^m(x(\tau_k; t_0, x_0)). \end{aligned}$$

Число r_1 выберем настолько малым, чтобы в окрестности $\mathcal{N}_{\tau_1}$ точки $x = 0$ выполнялось неравенство

$$\psi_2(x) \leq \frac{\eta_{11}\eta_{11}^m\theta_1}{4\gamma_3\eta_8},$$

тогда

$$V(t^*, x(t^*; t_0, x_0)) - V(\tau_1 + 0, x(\tau_1 + 0; t_0, x_0)) \leq -\frac{\eta_{11}\eta_{11}^m\theta_1}{4} \sum_{k=2}^{k_0} R^m(x(\tau_k; t_0, x_0)).$$

Число $\delta_1 > 0$ выберем настолько малым, чтобы при всех x_0 таких, что $\|x_0\| < \delta_1$, выполнялось неравенство

$$\begin{aligned} R(x_0) &< \min \left[\left(\frac{1}{2\eta_{10}(\mu - 1)(\tau_1 - t_0)} \right)^{\frac{1}{\mu-1}}, \right. \\ &\quad \left. r_1 \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \left(1 + \frac{\gamma_3\eta_8 2^{\frac{m}{\mu-1}} r_0^{\mu-1}}{\gamma_2} \right) \right)^{-\frac{1}{m+1-\mu}} \right]. \end{aligned}$$

Тогда справедливо неравенство $R(x(\tau_1; t_0, x_0)) \leq 2^{1/(\mu-1)} R(x_0)$ и, как следствие, неравенство

$$V(t^*, x(t^*; t_0, x_0)) \leq \gamma_2 R^{m-\mu+1}(x_0) + \gamma_3 \eta_8 2^{\frac{m}{\mu-1}} R^m(x_0) - \frac{\eta_1 \eta_{11}^m \theta_1}{4} \sum_{k=2}^{k_0} R^m(x(\tau_k; t_0, x_0)).$$

Из оценок (3.4) для функции Ляпунова $V(t, x)$ следует, что

$$\begin{aligned} \gamma_1 R^{m+1-\mu}(x(t^*; t_0, x_0)) &\leq \gamma_2 R^{m+1-\mu}(x_0) + \gamma_3 \eta_8 2^{\frac{m}{\mu-1}} R^m(x_0) \\ &\leq \gamma_2 R^{m+1-\mu}(x_0) \left(1 + \frac{\gamma_3 \eta_8 2^{\frac{m}{\mu-1}} r_0^{\mu-1}}{\gamma_2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$R(x(t^*; t_0, x_0)) \leq R(x_0) \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \left(1 + \frac{\gamma_3 \eta_8 2^{\frac{m}{\mu-1}} r_0^{\mu-1}}{\gamma_2} \right) \right)^{\frac{1}{m+1-\mu}}.$$

Тогда

$$r_1 \leq R(x(t^*; t_0, x_0)) < r_1.$$

Полученное противоречие доказывает, что при всех $t \geq t_0$ решение $x(t; t_0, x_0)$ не покидает окрестность $\mathcal{N}_{r_1}$ точки $x = 0$. Поэтому при всех $t > \tau_2$ выполняется неравенство

$$V(t, x(t; t_0, x_0)) \leq \begin{cases} \gamma_2 R^{m-\mu+1}(x_0) + \gamma_3 \eta_8 2^{\frac{m}{\mu-1}} R^m(x_0) \\ - \frac{\eta_1 \eta_{11}^m \theta_1}{4} \sum_{k=2}^{k_0} R^m(x(\tau_k; t_0, x_0)), & t > \tau_2, \\ \gamma_2 R^{m-\mu+1}(x_0) + \gamma_3 \eta_8 2^{\frac{m}{\mu-1}} R^m(x_0), & t \in (\tau_1, \tau_2]. \end{cases} \quad (4.4)$$

Из этих рассуждений также следует, что все решения $x(t; t_0, x_0)$ бесконечно продолжимы на интервал $[t_0, +\infty)$ (см. теорему 2.1 из [15]). Неравенство (4.4) позволяет доказать устойчивость состояния равновесия $x = 0$ системы (2.1).

Возьмем $\varepsilon > 0$ и зададим положительное число δ , $\delta < \delta_1$, так, что

$$\delta < \varepsilon^{\frac{1}{g_s}} \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \left(1 + \frac{\gamma_3 \eta_8 2^{\frac{m}{\mu-1}} r_0^{\mu-1}}{\gamma_2} \right) \right)^{\frac{1}{m+1-\mu}}, \quad s = \overline{1, n}.$$

Тогда $R(x(t; t_0, x_0)) < \varepsilon^{\frac{1}{g_s}}$ при всех $t \geq t_0$, поэтому $|x_s(t; t_0, x_0)| < \varepsilon$, что доказывает устойчивость состояния равновесия $x = 0$ системы (2.1).

Установим асимптотическую устойчивость состояния равновесия $x = 0$. Вследствие доказанного выше свойства устойчивости решения $x = 0$ системы (2.1) можно выбрать положительное число ρ_0 такое, что из неравенства $\|x_0\| < \rho_0$ следует, что $R(x(t; t_0, x_0)) < (2\theta_2(\mu-1)\eta_{10})^{\frac{1}{1-\mu}}$ при всех $t \geq t_0$.

Последовательность чисел $\{V(\tau_k, x(\tau_k; t_0, x_0))\}_{k=1}^{\infty}$ не возрастает, поэтому существует число $\alpha \geq 0$ такое, что

$$\alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} V(\tau_k, x(\tau_k; t_0, x_0)) = \inf_k V(\tau_k, x(\tau_k; t_0, x_0)).$$

Предположим, от противного, что $\alpha > 0$, тогда при всех $k \in \mathbb{N}$

$$V(\tau_k, x(\tau_k; t_0, x_0)) \geq \alpha > 0.$$

Отметим, что $\inf_k R(x(\tau_k; t_0, x_0)) = \beta > 0$. Действительно, в противном случае существует подпоследовательность $\{R(x(\tau_{n_k}; t_0, x_0))\}_{k=1}^\infty$ последовательно-сти $\{R(x(\tau_k; t_0, x_0))\}_{k=1}^\infty$, сходящаяся к нулю при $k \rightarrow +\infty$. Из свойства функции $V(t, x)$ следует неравенство

$$0 < \alpha \leq V(\tau_{n_k}, x(\tau_{n_k}; t_0, x_0)) \leq \gamma_2 R^{m-\mu+1}(x(\tau_{n_k}; t_0, x_0)).$$

При $k \rightarrow \infty$ получим противоречие, и, как следствие, $R(x(\tau_k; t_0, x_0)) \geq \beta$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, с учетом неравенства (4.4) получим при $k \geq 2$ оценку

$$\alpha \leq V(\tau_k, x(\tau_k; t_0, x_0)) \leq V(\tau_1 + 0, x(\tau_1 + 0; t_0, x_0)) - (k-1) \frac{\eta_1 \eta_{11}^m \theta_1 \beta^m}{4}.$$

При достаточно большом k получим противоречие, которое доказывает, что $\lim_{k \rightarrow \infty} V(\tau_k, x(\tau_k; t_0, x_0)) = 0$. Обозначим $\gamma = \limsup_{k \rightarrow \infty} R(x(\tau_k; t_0, x_0)) \geq 0$, тогда существует подпоследовательность $\{R(x(\tau_{n_k}; t_0, x_0))\}_{k=1}^\infty$ последовательности $\{R(x(\tau_k; t_0, x_0))\}_{k=1}^\infty$, сходящаяся к γ при $k \rightarrow +\infty$. Из неравенства

$$\gamma_1 R^{m-\mu+1}(x(\tau_{n_k}; t_0, x_0)) \leq V(\tau_{n_k}, x(\tau_{n_k}; t_0, x_0))$$

переходом к пределу $k \rightarrow \infty$ получим $\gamma = 0$.

Поэтому $x(\tau_k; t_0, x_0) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, и из неравенства

$$R(x(t; t_0, x_0)) \leq 2^{\frac{1}{\mu-1}} R(x(\tau_{k-1} + 0; t_0, x_0))$$

следует, что $x(t; t_0, x_0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

§ 5. Априорные оценки решений

Конструктивное применение теоремы 1 сопряжено не только с необходимостью дать ответ на вопрос об асимптотической устойчивости состояния равновесия $y = 0$ исходной системы (2.2), но и также с необходимостью доказать априорные оценки вида (2.4) для семейства нелинейных систем (2.3). В настоящем разделе, развивая идеи работ [22], [23], укажем два класса систем дифференциальных уравнений, для которых получение такого рода оценок представляется возможным.

Предварительно сформулируем в виде леммы один результат, касающийся нелинейных разностных уравнений, заимствованный из [24; ч. 1, отд. 1, гл. 1, § 2, задача 174].

ЛЕММА 3. Пусть в интервале $0 < x < x_0$ имеем $0 < \vartheta(x) < x$,

$$\vartheta(x) = x - ax^k + bx^l + x^l \epsilon(x), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \epsilon(x) = 0,$$

причем $1 < k < l$, a и b – положительные числа. Полагаем

$$\nu_0 = x, \quad \nu_1 = \vartheta(\nu_0), \quad \nu_1 = \vartheta(\nu_0), \quad \nu_2 = \vartheta(\nu_1), \quad \dots, \quad \nu_n = \vartheta(\nu_{n-1}), \quad \dots$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{k-1}} \nu_n = [(k-1)a]^{\frac{1}{1-k}}.$$

Доказательство приведено в [24; ч. 2].

5.1. Квазиоднородные системы Важевского. Предположим, что для (2.3) существует вектор-функция Ляпунова $V(t, z) = (V_1(t, z), \dots, V_s(t, z))^T$, не зависящая от параметра $\varepsilon \in (0, 1]$ и удовлетворяющая в достаточно малой окрестности состояния равновесия $z = 0$ системы (2.3) следующим условиям.

1. Функции $V_i(t, z)$, $i = \overline{1, s}$, положительно полуопределенные, и существуют положительные постоянные $\underline{\gamma}$, $\varkappa$ такие, что

$$\underline{\gamma} \|z\|^\varkappa \leq \sum_{i=1}^s V_i(t, z).$$

2. Выполняются оценки при всех $i = \overline{1, s}$

$$\begin{aligned} D^+ V_i(t, z) \Big|_{(2.3)} &\leq \widehat{f}_i(V_1(t, z), \dots, V_s(t, z)), & t \neq \varepsilon^{\mu-1} \tau_k, \\ V_i(t+0, z + \varepsilon^{\mu-1} g(z)) - V_i(t, z) &\leq \varepsilon^{\mu-1} \widehat{g}_i(V_1(t, z), \dots, V_s(t, z)), & t = \varepsilon^{\mu-1} \tau_k. \end{aligned}$$

Если $\widehat{f}(u)$ удовлетворяет условиям Важевского, а функция $u + \varepsilon^{\mu-1} \widehat{g}(u)$ является неубывающей по u (в некоторой окрестности $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^s$ точки $u = 0$) при всех $\varepsilon \in (0, 1]$, то лемма 1 гарантирует выполнение неравенств

$$V_i(t, z(t; t_0, z_0)) \leq u_i(t; V_1(t_0, z_0), \dots, V_s(t_0, z_0), \varepsilon), \quad (5.1)$$

где $u_i(t; t_0, u_0, \varepsilon)$, $i = \overline{1, s}$, – решение задачи Коши для системы сравнения

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \widehat{f}(u), & t \neq \varepsilon^{\mu-1} \tau_k, \\ \Delta u(t) &= \varepsilon^{\mu-1} \widehat{g}(u(t)), & t = \varepsilon^{\mu-1} \tau_k. \end{aligned} \quad (5.2)$$

В силу свойства 1 и неравенства (5.1) достаточно рассмотреть вопрос об априорных (равномерных по параметру $\varepsilon \in (0, 1]$) оценках решений семейства нелинейных систем (2.3). Далее ограничимся случаем, когда функции $\widehat{f}$ и $\widehat{g}$ являются квазиоднородными функциями (в конусе $\mathbb{R}_+^s$) измерения q типа $K = \text{diag}(k_1, \dots, k_s)$, т.е. при всех $\alpha \geq 0$, $u \in \mathbb{R}_+^s$ выполняются равенства

$$\widehat{f}(\alpha^K u) = \alpha^{K+(q-1)I} \widehat{f}(u), \quad \widehat{g}(\alpha^K u) = \alpha^{K+(q-1)I} \widehat{g}(u).$$

ТЕОРЕМА 3. *Предположим, что $K \geq I$ и существует вектор $w > 0$ такой, что выполняются неравенства*

$$\begin{aligned} \widehat{f}(w) &\leq \gamma_0 K w, & \widehat{g}(w) &\leq \beta_0 K w, \\ \sup_k (\gamma_0 (\tau_{k+1} - \tau_k) + \beta_0) &< 0. \end{aligned}$$

Тогда для решений однопараметрического семейства систем сравнения (5.2) выполняется равномерно по параметру $\varepsilon \in (0, 1]$ априорная оценка вида (2.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\psi(t; t_0, \psi_0)$ решение задачи Коши для дифференциального уравнения сравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \gamma_0 \psi^q(t), & t \neq \varepsilon^{q-1} \tau_k, \\ \Delta \psi(t) &= \varepsilon^{q-1} \beta_0 \psi^q(t), & t = \varepsilon^{q-1} \tau_k. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Предварительно установим априорную оценку решений для этого семейства уравнений. Введем разностное уравнение

$$z_k = [z_{k-1}^{1-q} + \varepsilon^{q-1}\gamma_0(\tau_k - \tau_k)]^{\frac{q}{1-q}} [z_{k-1}^{1-q} + (\gamma_0(\tau_k - \tau_{k-1}) + \beta_0)\varepsilon^{q-1}] \quad (5.4)$$

и замену переменных $z_k = \varepsilon^{-1}\tilde{z}_k$. Тогда

$$\tilde{z}_k = [\tilde{z}_{k-1}^{1-q} + \gamma_0(\tau_k - \tau_k)]^{\frac{q}{1-q}} [\tilde{z}_{k-1}^{1-q} + (\gamma_0(\tau_k - \tau_{k-1}) + \beta_0)] \equiv \Psi_{k-1}(\tilde{z}_{k-1}).$$

В достаточно малой окрестности точки $z = 0$ справедливо представление

$$\Psi_{k-1}(z) = z + (\gamma_0(\tau_k - \tau_{k-1}) + \beta_0)z^q + \tilde{\Psi}_{k-1}(z),$$

где $\tilde{\Psi}_{k-1}(z)/z^q \rightarrow 0$ при $z \rightarrow 0$ равномерно по $k \in \mathbb{N}$. Обозначим

$$\eta_0 = -\sup_k (\gamma_0(\tau_k - \tau_{k-1}) + \beta_0) > 0.$$

Покажем сначала, что существует положительное достаточно малое число δ_1 , не зависящее от ε , такое, что из условия $z_1 \in (0, \delta_1)$ следует, что z_k существует при всех $k \in \mathbb{N}$ и при этом $z_k > 0$. Выберем число δ_1 так, чтобы

$$\delta_1 < \frac{1}{2} \min\{(|\gamma_0|\theta_2)^{\frac{1}{1-q}}, (|\gamma_0|\theta_2 + |\beta_0|)^{\frac{1}{1-q}}\} \equiv r_1$$

и $\tilde{\Psi}_{k-1}(z) \leq \eta_0 z^q/2$ при всех $z \in (0, \delta_1)$, $k \in \mathbb{N}$.

Обозначим через k_0 натуральное число такое, что $\tilde{z}_k < r_1$ при всех k , $1 \leq k < k_0$, $\tilde{z}_{k_0} \geq r_1$. Тогда

$$r_1 \leq \tilde{z}_{k_0} \leq \tilde{z}_{k_0-1} - \frac{\eta_0}{2} \tilde{z}_{k_0-1}^q < r_1.$$

Полученное противоречие доказывает, что $\tilde{z}_k \in (0, r_1)$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Из леммы 3 следует, что

$$\tilde{z}_k k^{\frac{1}{q-1}} \leq c_0,$$

где c_0 – положительная постоянная. Поэтому

$$z_k \leq \varepsilon^{-1} c_0 k^{\frac{1}{1-q}}.$$

Вследствие непрерывной зависимости решений скалярного уравнения $\dot{\psi} = \gamma_0 \psi^q$ можно указать положительное число δ_2 (не зависящее от ε) такое, что при всех $\psi_0 \in (0, \delta_2)$ выполняется включение $\psi(\varepsilon^{q-1}\tau_1 + 0; t_0, \psi_0, \varepsilon) \in (0, \delta_1)$. В этом случае последовательность $z_k = \psi(\varepsilon^{q-1}\tau_k + 0; t_0, \psi_0, \varepsilon)$ удовлетворяет разностному уравнению (5.4). Пусть $t \in (\varepsilon^{q-1}\tau_k, \varepsilon^{q-1}\tau_{k+1}]$, тогда

$$\begin{aligned} \psi(t; t_0, \psi_0, \varepsilon) &= [z_k^{1-q} + \gamma_0(t - \varepsilon^{q-1}\tau_k)]^{\frac{1}{1-q}} \leq z_k [1 - |\gamma_0|(r_1\theta_2)^{q-1}]^{\frac{1}{1-q}} \\ &\leq \varepsilon^{-1} c_0 k^{\frac{1}{1-q}} [1 - |\gamma_0|(r_1\theta_2)^{q-1}]^{\frac{1}{1-q}}. \end{aligned}$$

Поскольку $\varepsilon^{1-q}(t - \varepsilon^{q-1}\tau_1) \leq \theta_2 k$, то из последнего неравенства следует, что

$$\begin{aligned} \psi(t; t_0, \psi_0, \varepsilon) &\leq c_0 [1 - |\gamma_0|(r_1\theta_2)^{q-1}]^{\frac{1}{1-q}} (t - \varepsilon^{q-1}\tau_1)^{\frac{1}{1-q}} \theta_2^{\frac{1}{1-q}} \\ &= c_0 [1 - |\gamma_0|(r_1\theta_2)^{q-1}]^{\frac{1}{1-q}} \theta_2^{\frac{1}{1-q}} (t - t_0)^{\frac{1}{1-q}} \left(\frac{t - \varepsilon^{q-1}\tau_1}{t - t_0} \right)^{\frac{1}{1-q}}. \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{t - \varepsilon^{q-1}\tau_1}{t - t_0} \rightarrow 1$ при $t \rightarrow +\infty$ равномерно по $\varepsilon \in (0, 1)$, то существует $T \geq 0$, не зависящее от $\varepsilon \in (0, 1]$, такое, что при всех $t \geq t_0 + T$ выполняется оценка

$$\psi(t; t_0, \psi_0, \varepsilon) \leq C_0(t - t_0)^{\frac{1}{1-q}},$$

где C_0 – положительная постоянная. Таким образом, априорная оценка установлена для уравнения сравнения (5.3).

Рассмотрим функцию $v(t) = \psi^K(t)w$. Тогда, используя условия теоремы и предположения относительно квазиоднородности функций $\hat{f}(u)$ и $\hat{g}(u)$, нетрудно установить справедливость неравенства

$$\frac{dv}{dt} \geq \hat{f}(v(t)), \quad t \neq \varepsilon^{q-1}\tau_k,$$

при всех $t \in [t_0, \infty)$, для которых решение задачи Коши $u(t; t_0, \psi_0^K w)$ существует.

Рассмотрим функцию $v(t)$ при $t = \varepsilon^{q-1}\tau_k$

$$\begin{aligned} v(\varepsilon^{q-1}\tau_k + 0) &= \psi^K(\varepsilon^{q-1}\tau_k + 0)w = (\psi(\varepsilon^{q-1}\tau_k) + \beta_0\psi^q(\varepsilon^{q-1}\tau_k))^K w \\ &= \psi^K(\varepsilon^{q-1}\tau_k)(1 + \beta_0\psi^{q-1}(\varepsilon^{q-1}\tau_k))^K w. \end{aligned}$$

Вследствие асимптотической устойчивости решения $\psi = 0$ скалярного дифференциального уравнения сравнения (5.3) существует положительная постоянная δ_3 такая, что при всех $\psi_0 \in (0, \delta_3)$ решение задачи Коши $\psi(t; t_0, \psi_0)$ существует при всех $t \geq t_0$ и выполняются неравенство $\psi(t; t_0, \psi_0) < |\beta_0|^{\frac{1}{1-q}}$ и включение $\psi(t; t_0, \psi_0)w \in \mathcal{N}$. Тогда вследствие неравенства Бернулли

$$(1 + x)^K \geq 1 + Kx, \quad |x| < 1,$$

справедлива оценка

$$v(\varepsilon^{q-1}\tau_k + 0) \geq v(\varepsilon^{q-1}\tau_k) + \hat{g}(v(\varepsilon^{q-1}\tau_k))$$

при всех $\tau_k \in [t_0, \infty)$, для которых решение задачи Коши $u(t; t_0, \psi_0^K w)$ существует.

Из [21; лемма 1] следует неравенство

$$0 \leq u(t; t_0, \psi_0^K w) \leq \psi^K(t; t_0, \psi_0)w,$$

справедливое при всех $t \in [t_0, t^*)$, где t^* – правый конец максимального интервала существования решения $u(t; t_0, \psi_0^K w)$ задачи Коши для системы сравнения (5.2).

Определим норму в пространстве $\mathbb{R}^s$ согласно [25] по формуле

$$\|x\|_w = \inf\{\beta \geq 0 \mid -\beta w \leq x \leq \beta w\}.$$

Вследствие условия Важевского для функции $\hat{f}(u)$ и предположений относительно функции $\hat{g}(u)$ можно указать достаточно малое положительное число δ_4 , $\delta_4 < \delta_3$, $\delta_4 < \|\delta_3^K\|_w$, такое, что при всех $u_0 \geq 0$, $\|u_0\|_w < \delta_4$ выполняется неравенство

$$0 \leq u(t; t_0, u_0) \leq u(t; t_0, \|u_0\|_w w) \leq u(t; t_0, \delta_3^K w) \leq \psi^K(t; t_0, \delta_3)w$$

при всех тех $t \in [t_0, t^{**})$, $t^{**} \leq t^*$, для которых существует решение задачи Коши $u(t; t_0, u_0)$. Из этого неравенства следует оценка

$$\|u(t; t_0, u_0)\|_w \leq \|\psi^K(t; t_0, \delta_3)\|_w, \quad t \in [t_0, t^{**}). \quad (5.5)$$

Если $t^{**} < +\infty$, то в силу утверждения из [15; теорема 2.1] $\|u(t; t_0, u_0)\|_w \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow t^{**}$, что противоречит неравенству (5.5). Это противоречие доказывает, что решение $u(t; t_0, u_0)$ бесконечно продолжимо на интервал $[t_0, +\infty)$. Таким образом, оценка (5.5) выполняется при всех $t \geq t_0$, откуда и следует выполнение необходимой априорной оценки.

СЛЕДСТВИЕ 1. Условия теоремы 2 гарантируют выполнение равномерной по $\varepsilon \in (0, 1]$ априорной оценки решений вида (2.4) для однопараметрического семейства систем (2.3), а также асимптотическую устойчивость состояния равновесия $y = 0$ систем (2.2).

5.2. Однородные системы, близкие к периодическим. Рассмотрим нелинейную однородную систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x), & t &\neq \tau_k, \\ \Delta x(t) &= g(x(t)), & t &= \tau_k, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x)$, $g(x)$ – однородные функции нечетного измерения μ . Установим условия, при которых для решений системы (5.6) выполняется априорная оценка (2.4) с показателем $\sigma = 1/(\mu - 1)$. Предположим, что существует положительное число θ , для которого состояние равновесия $y = 0$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = \theta f(y) + g(y), \quad (5.7)$$

где $y \in \mathbb{R}^n$, является асимптотически устойчивым. Тогда согласно результатам работ [7], [9] для достаточно большого натурального нечетного числа m существует положительно определенная форма $W_0(x)$ порядка m такая, что для некоторой положительно определенной формы $V_0(x)$ порядка $m - \mu + 1$ справедливо уравнение

$$(\nabla_x V_0(x))^T (\theta f(x) + g(x)) = -W_0(x). \quad (5.8)$$

Рассмотрим вспомогательную функцию вида

$$V(t, x) = V_0(x) + V_1(t, x),$$

где $V_1(t, x)$ форма по x измерения m , коэффициенты которой суть ограниченные по t функции, и

$$V_1(\tau_k, x) = \lim_{t \rightarrow \tau_k - 0} V_1(t, x), \quad V_1(\tau_k + 0, x) = \lim_{t \rightarrow \tau_k + 0} V_1(t, x).$$

Пусть $W(t, x)$ – некоторая однородная форма по x измерения m , коэффициенты которой суть ограниченные по t функции, и

$$W(\tau_k, x) = \lim_{t \rightarrow \tau_k - 0} W(t, x), \quad W(\tau_k + 0, x) = \lim_{t \rightarrow \tau_k + 0} W(t, x).$$

Функции $V(t, x)$ и $W(t, x)$ выберем из условий

$$\begin{aligned} (\nabla_x V_0(x))^T f(x) + \frac{\partial V_1}{\partial t} &= -W(t, x), \quad t \in (\tau_k, \tau_{k+1}], \\ (\nabla_x V_0(x))^T g(x) + V_1(\tau_k + 0, x) - V_1(\tau_k, x) &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Дополнительно введем условие $V_1(\tau_{k+1} + 0, x) = V_1(\tau_k + 0, x) = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда уравнения (5.9) сводятся к одному уравнению

$$(\nabla_x V_0(x))^T (f(x)(\tau_{k+1} - \tau_k) + g(x)) = - \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} W(t, x) dt. \quad (5.10)$$

Таким образом, необходимо подобрать функции $V_0(x)$ и $W(t, x)$ так, чтобы удовлетворялось уравнение (5.10).

Пусть $\tau_{k+1} - \tau_k = \theta + \eta_k$. Функцию $W(t, x)$ будем искать в виде ряда по степеням η_k

$$W(t, x) = W_0(x) + \eta_k W_1(x) + \dots + \eta_k^l W_l(x) + \dots, \quad t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]. \quad (5.11)$$

Подставляя это выражение в уравнение (5.10), получим последовательность уравнений

$$\begin{aligned} W_1(x) &= -\frac{1}{\theta} (W_0(x) + (\nabla_x V_0)^T f(x)), \\ W_{l+1}(x) &= -\frac{1}{\theta} W_l(x), \quad l = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Как следствие, из представления (5.11) получим

$$W(t, x) = W_0(x) + W_1(x) \left(\eta_k - \frac{\eta_k^2}{\theta} + \dots + (-1)^l \frac{\eta_k^{l+1}}{\theta^l} + \dots \right), \quad t \in (\tau_k, \tau_{k+1}].$$

Условие сходимости ряда в правой части этого равенства состоит в выполнении неравенства $0 < \tau_{k+1} - \tau_k < 2\theta$. В этом случае получим представление

$$\begin{aligned} W(t, x) &= W_0(x) + \frac{\eta_k \theta}{\eta_k + \theta} W_1(x) \\ &= \frac{\theta}{\tau_{k+1} - \tau_k} W_0(x) - \frac{\tau_{k+1} - \tau_k - \theta}{\tau_{k+1} - \tau_k} (\nabla_x V_0(x))^T f(x), \quad t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]. \end{aligned}$$

Предположим, что функция $W(t, x)$ является положительно определенной. Тогда существует положительная постоянная η_0 такая, что $W(t, x) \geq \eta_0 \|x\|^m$ при всех $t \geq t_0$.

Из первого уравнения системы (5.9) находим

$$V_1(t, x) = - \left((\nabla_x V_0(x))^T f(x) + \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} W(s, x) ds \right) (t - \tau_k), \quad t \in (\tau_k, \tau_{k+1}].$$

Функция $V(t, x)$ является положительно определенной в некоторой достаточно малой окрестности точки $x = 0$ и допускает бесконечно малый высший предел.

Действительно, при $t \in [\tau_k, \tau_{k+1}]$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |V_1(t, x)| &\leq \theta_2 \left(|(\nabla_x V_0(x))^T f(x)| + \theta_2 \sup_{s \in [\tau_k, \tau_{k+1}]} |W(s, x)| \right), \\ \sup_{s \in [\tau_k, \tau_{k+1}]} |W(s, x)| &\leq \frac{\theta}{\tau_{k+1} - \tau_k} |W_0(x)| + \frac{\tau_{k+1} - \tau_k - \theta}{\tau_{k+1} - \tau_k} |(\nabla_x V_0(x))^T f(x)| \\ &\leq \frac{\theta}{\theta_1} |W_0(x)| + \frac{\theta_2 - \theta}{\theta_1} |(\nabla_x V_0(x))^T f(x)|. \end{aligned}$$

Поскольку функции $W_0(x)$ и $(\nabla_x V_0(x))^T f(x)$ являются формами m -го измерения, то существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|W_0(x)| \leq M \|x\|^m, \quad |(\nabla_x V_0(x))^T f(x)| \leq M \|x\|^m.$$

Поэтому

$$|V_1(t, x)| \leq M \theta_2 \left(1 + \frac{\theta_2^2}{\theta_1} \right) \|x\|^m.$$

По предположению функция $V_0(x)$ является положительно определенной формой $(m - \mu + 1)$ -го измерения, поэтому существуют положительные постоянные m_i , $i = 1, 2$, такие, что

$$m_1 \|x\|^{m-\mu+1} \leq V_0(x) \leq m_2 \|x\|^{m-\mu+1}.$$

Поэтому

$$V(t, x) \leq m_2 \|x\|^{m-\mu+1} + M \theta_2 \left(1 + \frac{\theta_2^2}{\theta_1} \right) \|x\|^m.$$

Отсюда следует, что функция $V(t, x)$ в достаточно малой окрестности точки $x = 0$ допускает бесконечно малый высший предел. Из неравенства

$$V(t, x) \geq m_1 \|x\|^{m-\mu+1} \left(1 - \frac{M \theta_2}{m_1} \left(1 + \frac{\theta_2^2}{\theta_1} \right) \|x\|^{\mu-1} \right)$$

следует, что в окрестности точки $x = 0$

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < \left(\frac{m_1}{2M\theta_2(1 + \theta_2^2/\theta_1)} \right)^{\frac{1}{\mu-1}} \right\}$$

справедливо неравенство $V(t, x) \geq m_1 \|x\|^{m-\mu+1}/2$, что доказывает положительную определенность функции $V(t, x)$.

Таким образом, построенная функция $V(t, x)$ в достаточно малой окрестности B_R состояния равновесия $x = 0$ удовлетворяет условиям

$$\gamma_1 \|x\|^{m-\mu+1} \leq V(t, x) \leq \gamma_2 \|x\|^{m-\mu+1}, \quad (5.12)$$

$$\left. \frac{dV}{dt}(t, x) \right|_{(5.6)} \leq -\gamma_3 \|x\|^m, \quad t \neq \tau_k, \quad (5.13)$$

$$V(\tau_k + 0, x + g(x)) - V(\tau_k, x) \leq \gamma_4 \|x\|^{m+\mu-1}. \quad (5.14)$$

Нетрудно доказать, что из этих условий следует асимптотическая устойчивость состояния равновесия $x = 0$ системы (5.6). Поэтому существует достаточно малое положительное число ρ_0 такое, что для всех решений $x(t)$ с начальными

условиями $x(t_0) = x_0 \in B_{\rho_0}$ выполняется включение $x(t) \in B_R$ при всех $t \geq t_0$. Из условий (5.12) и (5.13) следует, что

$$\frac{dV(t, x(t))}{dt} \leq -\frac{\gamma_3}{\gamma_2^{\frac{m}{m-\mu+1}}} V^{\frac{m}{m-\mu+1}}(t, x(t)), \quad t \neq \tau_k.$$

Обозначим

$$\gamma'_3 = \frac{\gamma_3}{\gamma_2^{\frac{m}{m-\mu+1}}}, \quad \gamma'_4 = \frac{\gamma_4}{\gamma_1^{\frac{m+\mu-1}{m-\mu+1}}}.$$

Тогда, интегрируя последнее неравенство, получим

$$\begin{aligned} V(t, x(t)) &\leq V(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0)) \\ &\times \left[1 + \frac{\gamma'_3(\mu - 1)}{m - \mu + 1} (t - \tau_k) V^{\frac{\mu-1}{m-\mu+1}}(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0)) \right]^{\frac{m-\mu+1}{1-\mu}}, \\ &t \in (\tau_k, \tau_{k+1}]. \end{aligned}$$

Из неравенства (5.14) находим, что

$$\begin{aligned} V(\tau_{k+1} + 0, x(\tau_{k+1} + 0)) &\leq V(\tau_{k+1}, x(\tau_{k+1})) + \gamma'_4 V^{\frac{m+\mu-1}{m-\mu+1}}(\tau_{k+1}, x(\tau_{k+1})) \\ &\leq V(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0)) \\ &\times \left[1 + \frac{\gamma'_3(\mu - 1)}{m - \mu + 1} (\tau_{k+1} - \tau_k) V^{\frac{\mu-1}{m-\mu+1}}(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0)) \right]^{\frac{m-\mu+1}{1-\mu}} \\ &+ \gamma'_4 V^{\frac{m+\mu-1}{m-\mu+1}}(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0)) \\ &\times \left[1 + \frac{\gamma'_3(\mu - 1)}{m - \mu + 1} (\tau_{k+1} - \tau_k) V^{\frac{\mu-1}{m-\mu+1}}(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0)) \right]^{\frac{m+\mu-1}{1-\mu}} \\ &\leq V(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0)) \\ &\times \left[1 + \frac{\gamma'_3(\mu - 1)}{m - \mu + 1} \theta_1 V^{\frac{\mu-1}{m-\mu+1}}(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0)) \right]^{\frac{m-\mu+1}{1-\mu}} \\ &+ \gamma'_4 V^{\frac{m+\mu-1}{m-\mu+1}}(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0)) \\ &\times \left[1 + \frac{\gamma'_3(\mu - 1)}{m - \mu + 1} \theta_1 V^{\frac{\mu-1}{m-\mu+1}}(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0)) \right]^{\frac{m+\mu-1}{1-\mu}}. \end{aligned}$$

Поэтому выполняется неравенство

$$V(\tau_k + 0, x(\tau_k + 0)) \leq v_k,$$

где v_k – решение разностного уравнения

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= v_k \left[1 + c_0 v_k^{\frac{\mu-1}{m-\mu+1}} \right]^{\frac{m-\mu+1}{1-\mu}} + \gamma'_4 v_k^{\frac{m+\mu-1}{m-\mu+1}} \left[1 + c_0 v_k^{\frac{\mu-1}{m-\mu+1}} \right]^{\frac{m+\mu-1}{1-\mu}}, \\ c_0 &= \frac{\gamma'_3(\mu - 1)}{m - \mu + 1} \theta_1. \end{aligned}$$

Предполагая, что величина v_k достаточно малая, разложим правую часть этого уравнения в ряд Тейлора

$$v_{k+1} = v_k - \gamma'_3 \theta_1 v_k^{\frac{m}{m-\mu+1}} + O(v_k^{\frac{m+\mu-1}{m-\mu+1}}).$$

Используя утверждение леммы 3, приходим к выводу о существовании постоянной c_1 и натурального числа k_0 таких, что при всех $k \geq k_0$ выполняется неравенство

$$v_k \leq c_1 k^{\frac{m-\mu+1}{1-\mu}}.$$

Из этой оценки выводится неравенство

$$\|x(\tau_k + 0; t_0, x_0)\| \leq \left(\frac{c_1}{\gamma_1}\right)^{\frac{1}{m-\mu+1}} k^{\frac{1}{1-\mu}},$$

из которого достаточно просто выводится необходимая априорная оценка (2.4) с показателем $\sigma = \frac{1}{\mu-1}$.

Итогом приведенных выше рассуждений является следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 4. *Предположим, что система дифференциальных уравнений (5.6) такова, что для заданной положительно определенной формы $W_0(x)$ существуют положительная постоянная θ и положительно определенная форма $V_0(x)$, удовлетворяющая системе дифференциальных уравнений в частных производных (5.8), а последовательность моментов импульсного воздействия $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ такова, что*

$$0 < \theta_1 \leq \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta_2, \quad \theta_2 < 2\theta,$$

и форма

$$W(t, x) = \frac{\theta}{\tau_{k+1} - \tau_k} W_0(x) - \frac{\tau_{k+1} - \tau_k - \theta}{\tau_{k+1} - \tau_k} (\nabla_x V_0(x))^T f(x), \quad t \in (\tau_k, \tau_{k+1}],$$

является положительно определенной.

Тогда состояние равновесия $x = 0$ однородной системы дифференциальных уравнений с импульсным воздействием (5.6) является асимптотически устойчивым и для ее решений выполняется априорная оценка (2.4) с показателем $\sigma = 1/(\mu - 1)$.

Отметим, что условие положительной определенности формы $W(t, x)$ позволяет установить пределы малых отклонений величины $\tau_{k+1} - \tau_k$ от θ , при которых устойчивость состояния равновесия $x = 0$ системы (5.6) будет асимптотической, и при этом будет выполняться априорная оценка (2.4). В случае $n = 2$ построение формы $V_0(x)$ по заданной форме $W_0(x)$ сводится к квадратурам (см. [7]).

§ 6. Пример

В качестве примера рассмотрим вопрос об устойчивости крупномасштабной импульсной системы

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_s}{dt} &= \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s) + \sum_{j=1}^m \mathbf{R}_{sj}(t, \mathbf{x}), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta \mathbf{x}_s(t) &= \mathbf{g}_s(\mathbf{x}_s(t)) + \sum_{j=1}^m \mathbf{Q}_{sj}^{(k)}(\mathbf{x}(t)), \quad t = \tau_k, \end{aligned} \tag{6.1}$$

описывающей динамику системы, состоящей из m взаимодействующих подсистем. Здесь $\mathbf{x}_s \in \mathbb{R}^{n_s}$, $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1^T, \dots, \mathbf{x}_m^T)^T \in \mathbb{R}^n$, $n = \sum_{s=1}^m n_s$, $\mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s)$ – непрерывно дифференцируемые однородные порядка μ_s , $\mu_s > 1$, функции, а $\mathbf{g}_s(\mathbf{x}_s)$ – непрерывные однородные порядка μ_s функции. Векторные функции $\mathbf{R}_{sj}(t, \mathbf{x})$ и $\mathbf{Q}_{sj}^{(k)}(\mathbf{x})$ – непрерывные при $t \geq t_0$, $k \in \mathbb{N}$, $\|\mathbf{x}\| < H$ (H – положительная постоянная, $\|\cdot\|$ – евклидова норма), удовлетворяющие неравенствам

$$\begin{aligned} \|\mathbf{R}_{sj}(t, \mathbf{x})\| &\leq c_{sj} \|\mathbf{x}_1\|^{\alpha_{sj}^{(1)}} \cdots \|\mathbf{x}_m\|^{\alpha_{sj}^{(m)}}, & c_{sj} \geq 0, & \alpha_{sj}^{(l)} \geq 0, \\ \|\mathbf{Q}_{sj}^{(k)}(\mathbf{x})\| &\leq d_{sj} \|\mathbf{x}_1\|^{\beta_{sj}^{(1)}} \cdots \|\mathbf{x}_m\|^{\beta_{sj}^{(m)}}, & d_{sj} \geq 0, & \beta_{sj}^{(l)} \geq 0, & s, j, l = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Будем предполагать, что

$$\mathbf{R}_{sj}(t, 0) = 0, \quad \mathbf{Q}_{sj}^{(k)}(0) = 0,$$

т.е. система (6.1) имеет критическое состояние равновесия $\mathbf{x} = 0$.

Относительно последовательности моментов импульсного воздействия $\{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ предположим, что выполняется неравенство

$$0 < \theta_1 \leq \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta_2 < +\infty.$$

Решение $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) = (\mathbf{x}_1^T(t; t_0, \mathbf{x}_0), \dots, \mathbf{x}_m^T(t; t_0, \mathbf{x}_0))^T$ является непрерывно дифференцируемой функцией на множестве $[t_0, \omega^+(t_0, \mathbf{x}_0)) \setminus \{\tau_k\}_{k=1}^\infty$ и непрерывной слева при $t = \tau_k$, где $\omega^+(t_0, \mathbf{x}_0)$ – правый конец максимального интервала существования решения $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$.

Предположим, что нулевые решения $\mathbf{x}_s = 0$ независимых подсистем

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_s}{dt} &= \mathbf{f}_s(\mathbf{x}_s), & t \neq \tau_k, \\ \Delta \mathbf{x}_s(t) &= \mathbf{g}_s(\mathbf{x}_s(t)), & t = \tau_k, \end{aligned} \quad (6.2)$$

являются асимптотически устойчивыми и, более того, для решений соответствующих однопараметрических семейств однородных систем

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{y}_s}{d\tau} &= \mathbf{f}_s(\mathbf{y}_s), & \tau \neq \varepsilon^{\mu_s-1} \tau_k, \\ \Delta \mathbf{y}_s(\tau) &= \varepsilon^{\mu_s-1} \mathbf{g}_s(\mathbf{y}_s(t)), & \tau = \varepsilon^{\mu_s-1} \tau_k, \end{aligned} \quad (6.3)$$

выполняется априорная оценка решений. А именно существуют положительные постоянные a_s , σ_s , τ'_s , r_s , не зависящие от $\varepsilon \in (0, 1]$, такие, что при всех $\tau \geq \tau_0 + \tau'_m$, $\mathbf{y}_0 \in \partial B_{r_m}$ выполняется неравенство

$$\|\mathbf{y}_s(\tau; \tau_0, \mathbf{y}_{s0}, \varepsilon)\| \leq a_s (\tau - \tau_0)^{-\sigma_s}. \quad (6.4)$$

Применение теоремы 1 приводит к следующим условиям асимптотической устойчивости состояния равновесия $\mathbf{x}_s = 0$ крупномасштабной системы (6.1):

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_{sj}^{(i)}}{\mu_i - 1} > \frac{\mu_s}{\mu_s - 1}, \quad \sum_{i=1}^n \frac{\beta_{sj}^{(i)}}{\mu_i - 1} > \frac{\mu_s}{\mu_s - 1}. \quad (6.5)$$

В качестве конкретного примера рассмотрим двухкомпонентную систему с импульсным воздействием

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= -ax_1^3 + \varepsilon x_1^2 x_2 + (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{7}{6}} x_3^4, \\
 \frac{dx_2}{dt} &= -ax_2^3 + \varepsilon x_1^3 + 2(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{7}{6}} x_3^4, \\
 \frac{dx_3}{dt} &= bx_3^5 + (x_1^2 + x_2^2)^2 x_3^{\frac{4}{3}}, \quad t \neq \tau_k, \\
 \Delta x_1 &= cx_1^3 + \varepsilon x_1^2 x_2 + 2(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{7}{6}} x_3^4, \\
 \Delta x_2 &= cx_2^3 + \varepsilon x_1^3 + (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{7}{6}} x_3^4, \\
 \Delta x_3 &= -dx_3^5 + (x_1^2 + x_2^2)^2 x_3^{\frac{4}{3}}, \quad t = \tau_k.
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Здесь a, b, c, d – положительные параметры, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Примем

$$\mathbf{x}_1 = (x_1, x_2)^T, \quad \mathbf{x}_2 = x_3.$$

Теорема 3 гарантирует выполнение априорных оценок для соответствующих семейств нелинейных систем и асимптотическую устойчивость состояний равновесия $\mathbf{x}_s = 0$, $s = 1, 2$, независимых подсистем, если только выполняются неравенства

$$-a\theta_1 + |\varepsilon|\theta_2 + c + |\varepsilon| < 0, \quad b\theta_2 - d < 0.$$

Применение утверждения теоремы 1 позволяет заключить, что состояния равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (6.6) асимптотически устойчиво.

Отметим, что состояние равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ соответствующей системы без импульсного воздействия

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= -ax_1^3 + \varepsilon x_1^2 x_2 + (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{7}{6}} x_3^4, \\
 \frac{dx_2}{dt} &= -ax_2^3 + \varepsilon x_1^3 + 2(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{7}{6}} x_3^4, \\
 \frac{dx_3}{dt} &= bx_3^5 + (x_1^2 + x_2^2)^2 x_3^{\frac{4}{3}}
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

не является асимптотически устойчивым. Также и неподвижная точка $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ точечного отображения скачка

$$\begin{aligned}
 \bar{x}_1 &= x_1 + cx_1^3 + \varepsilon x_1^2 x_2 + 2(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{7}{6}} x_3^4, \\
 \bar{x}_2 &= x_2 + cx_2^3 + \varepsilon x_1^3 + (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{7}{6}} x_3^4, \\
 \bar{x}_3 &= x_3 - dx_3^5 + (x_1^2 + x_2^2)^2 x_3^{\frac{4}{3}}
 \end{aligned} \tag{6.8}$$

не является устойчивой. Поэтому асимптотическая устойчивость состояния равновесия $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (6.6) является следствием сложного взаимодействия непрерывной и дискретной динамики. Этот же пример свидетельствует о достаточной общности полученных результатов.

§ 7. Обсуждение результатов

Применение основной теоремы, полученной в настоящей работе, сопряжено с необходимостью предварительного доказательства априорной оценки (2.4), равномерной по параметру $\varepsilon \in (0, 1]$, для решений однопараметрического семейства нелинейных импульсных систем (3.2). Такие оценки могут быть получены при использовании метода Ляпунова в сочетании с концепцией метода сравнения. В настоящей работе указан общий способ получения априорных оценок для семейства нелинейных квазиоднородных систем Важевского и для однородных систем, близких к периодическим. Устойчивость автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений со свойством Важевского были предметом исследования в работе [26], которые были развиты в ряде работ [27]–[30]. Вместе с этим результаты, полученные в этих работах, позволяют установить лишь сам факт устойчивости или неустойчивости состояния равновесия, не давая никакой информации об оценках переходных процессов. Наряду с этим в работе [13] предложен иной метод исследования импульсных систем Важевского, который позволил не только установить факт устойчивости, но и также указать общий метод получения необходимых априорных оценок решений.

Отметим также, что отсутствие свойства автомодельности решений квазиоднородной импульсной системы приводит к отсутствию глобальности свойства асимптотической устойчивости. Поэтому актуальной для дальнейшего исследования является проблема оценки области притяжения для квазиоднородных импульсных систем.

Список литературы

- [1] А. М. Ляпунов, *Общая задача об устойчивости движения*, Гостехиздат, М.–Л., 1950, 471 с.; англ. пер.: А. М. Lyapunov, *The general problem of the stability of motion*, Taylor & Francis, Ltd., London, 1992, x+270 pp.
- [2] Л. Г. Хазин, Э. Э. Шноль, *Устойчивость критических положений равновесия*, Изд-во НЦБИ АН СССР, Пуццино, 1985, 216 с.; англ. пер.: L. G. Khazin, È. È Shnol', *Stability of critical equilibrium states*, Nonlinear Sci. Theory Appl., Manchester Univ. Press, Manchester, 1991, xii+208 pp.
- [3] А. Я. Савченко, А. О. Игнатьев, *Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем*, Наукова думка, К., 1989, 304 с.
- [4] Г. В. Каменков, *Избранные труды*, т. I, II, Наука, М., 1971, 258 pp., 214 с.
- [5] Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1970, 720 с.; пер. с англ.: Ph. Hartman, *Ordinary differential equations*, John Wiley & Sons, Inc., New York–London–Sydney, 1964, xiv+612 pp.
- [6] В. А. Плисс, “Принцип сведения в теории устойчивости движения”, *Изв. АН СССР. Серия матем.*, **28**:6 (1964), 1297–1324.
- [7] В. И. Зубов, *Устойчивость движения (методы Ляпунова и их применение)*, 2-е изд., Высшая школа, М., 1984, 232 с.
- [8] И. Г. Малкин, *Теория устойчивости движения*, 2-е изд., Наука, М., 1966, 530 с.; нем. пер. 1-го изд.: J. G. Malkin, *Theorie der Stabilität einer Bewegung*, R. Oldenbourg, München, 1959, xiii+402 pp.
- [9] Н. Н. Красовский, *Некоторые задачи теории устойчивости движения*, Физматгиз, М., 1959, 211 с.; англ. пер.: N. N. Krasovskii, *Stability of motion. Applications of*

- Lyapunov's second method to differential systems and equations with delay*, Stanford Univ. Press, Stanford, Calif., 1963, vi+188 pp.
- [10] Н. Н. Красовский, "Об устойчивости по первому приближению", *ПММ*, **19** (1955), 516–530.
- [11] В. И. Зубов, *Математические методы исследования систем автоматического регулирования*, Судпромгиз, Л., 1959, 324 с.; англ. пер.: V. I. Zubov, *Mathematical methods for the study of automatic control systems*, Pergamon Press, New York–Oxford–London–Paris; Jerusalem Academic Press, Jerusalem, 1962, vii+327 pp.
- [12] О. С. Черникова, "Принцип сведения для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием", *Укр. матем. журн.*, **34**:5 (1982), 601–607; англ. пер.: O. S. Chernikova, "The reduction principle for systems of differential equations with impulse action", *Ukrainian Math. J.*, **34**:5 (1982), 487–492.
- [13] А. И. Двирный, В. И. Слынько, "Аналог критического случая устойчивости Г. В. Каменкова для нестационарных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием", *Укр. матем. вестник*, **9**:3 (2012), 318–340; англ. пер.: A. I. Dvirny, V. I. Slyn'ko, "An analog to Kamenkov's critical stability case for nonstationary systems of impulsive differential equations", *J. Math. Sci.*, **188**:2 (2013), 85–101.
- [14] А. И. Двирный, В. И. Слынько, "Устойчивость решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в критических случаях", *Сиб. матем. журн.*, **52**:1 (2011), 70–80; англ. пер.: A. I. Dvirny, V. I. Slyn'ko, "Stability of solutions to impulsive differential equations in critical cases", *Siberian Math. J.*, **52**:1 (2011), 54–62.
- [15] А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк, *Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием*, Вища школа, Киев, 1987, 288 с.; англ. пер.: A. M. Samoilenko, N. A. Perestyuk, *Impulsive differential equations*, World Sci. Ser. Nonlinear Sci. Ser. A Monogr. Treatises, **14**, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1995, ix+462 pp.
- [16] А. О. Игнатьев, "On the stability of invariant sets of systems with impulse effect", *Nonlinear Anal.*, **69**:1 (2008), 53–72.
- [17] В. В. Козлов, С. Д. Фурта, *Асимптотики решений сильно нелинейных систем дифференциальных уравнений*, 2-е изд., НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика Ижевский Институт компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2009, 312 с.; англ. пер.: V. V. Kozlov, S. D. Furta, *Asymptotic solutions of strongly nonlinear systems of differential equations*, Springer Monogr. Math., Springer, Heidelberg, 2013, xx+262 pp.
- [18] А. О. Игнатьев, "Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием", *Матем. сб.*, **194**:10 (2003), 117–132; англ. пер.: A. O. Ignat'yev, "Method of Lyapunov functions in problems of stability of solutions", *Sb. Math.*, **194**:10 (2003), 1543–1558.
- [19] Р. И. Гладилина, А. О. Игнатьев, "О необходимых и достаточных условиях асимптотической устойчивости импульсных систем", *Укр. матем. журнал*, **55**:8 (2003), 1035–1043; англ. пер.: R. I. Gladilina, A. O. Ignat'ev, "On necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability of impulsive systems", *Ukrainian Math. J.*, **55**:8 (2003), 1254–1264.
- [20] В. В. Румянцев, А. С. Озиранер, *Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных*, Наука, М., 1987, 255 с.
- [21] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov, *Theory of impulsive differential equations*, Ser. Modern Appl. Math., **6**, World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1989, xii+273 с.

- [22] А. И. Двирный, В. И. Слынько, “Устойчивость решений монотонных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием”, *Дифференц. уравнения*, **48**:3 (2012), 316–325; англ. пер.: A. I. Dvirnyi, V. I. Slyn’ko, “Stability of solutions of monotone systems of impulsive differential equations”, *Differ. Equ.*, **48**:3, 318–327.
- [23] А. И. Двирный, В. И. Слынько, “Об устойчивости решений квазиоднородных монотонных импульсных систем”, *Тр. Ин-та прикл. математики и механики*, **24** (2012), 99–115.
- [24] Г. Поля, Г. Сегё, *Задачи и теоремы из анализа*, 2-е изд., ГИТТЛ, М., 1956, 391 с., 431 с.; пер. с нем.: G. Pólya, G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, v. 1, 2, 2te Aufl., Grundlehren Math. Wiss., **XIX, XX**, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1954, xvi+338 pp., x+407 pp.
- [25] М. А. Красносельский, Е. А. Лифшиц, А. В. Соболев, *Позитивные линейные системы: метод положительных операторов*, Наука, М., 1985, 256 с.; англ. пер.: M. A. Krasnosel’skij, Je. A. Lifshits, A. V. Sobolev, *Positive linear systems. The method of positive operators*, Sigma Ser. Appl. Math., **5**, Heldermann Verlag, Berlin, 1989, viii+354 pp.
- [26] А. А. Мартынюк, А. Ю. Оболенский, *Исследование устойчивости автономных систем сравнения*, Препринт 78.28, Ин-т математики АН УССР, Киев, 1978.
- [27] А. Ю. Оболенский, “Об устойчивости систем сравнения”, *Доп. АН УРСР*, **8** (1979), 607–611.
- [28] А. Ю. Оболенский, “Об устойчивости линейных систем сравнения”, *Мат. физика и нелинейн. механика*, **1** (1984), 51–55.
- [29] А. Ю. Оболенский, *Критерии устойчивости движения некоторых нелинейных систем*, Феникс, К., 2010, 228 с.
- [30] А. Ю. Оболенский, “Об устойчивости решений автономных систем Важевского с запаздыванием”, *Укр. матем. журн.*, **35**:5 (1983), 574–579; англ. пер.: A. Yu. Obolenskii, “The stability of solutions of autonomous Wazewski systems with delayed action”, *Ukrainian Math. J.*, **35**:5 (1983), 486–492.

Александр Иванович Двирный
(Aleksandr I. Dvirny)
Hadmark University College, Norway
E-mail: dvirny@mail.ru

Поступила в редакцию
24.03.2013 и 09.12.2013

Виталий Иванович Слынько
(Vitalij I. Slyn’ko)
Институт механики им. С. П. Тимошенко
НАН Украины, г. Киев, Украина
E-mail: vitstab@ukr.net