Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Вильданова, Ф. Х. Мукминов, Анизотропные классы единственности для вырождающегося параболического уравнения, *Матем. сб.*, 2013, том 204, номер 11, 41–54

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8234>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 07:04:29

УДК 517.956.4

В. Ф. Вильданова, Ф. Х. Мукминов

Анизотропные классы единственности для вырождающегося параболического уравнения

Для вырождающегося линейного параболического уравнения второго порядка в неограниченной области установлены анизотропные классы единственности теклиндовского типа. Рассматриваются задача Коши и смешанные задачи с краевыми условиями первого и третьего типов.

Библиография: 18 названий.

Ключевые слова: параболическое уравнение, анизотропный класс единственности, неограниченная область.

DOI: 10.4213/sm823

§ 1. Введение

Пусть Ω – неограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим в цилиндрической области $D^T = (0, T) \times \Omega$ линейное уравнение второго порядка

$$u_t = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(t, x) u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n (b_i u_{x_i} + (c_i u)_{x_i}) - d(t, x) u. \quad (1.1)$$

В частности, допустимо $\Omega = \mathbb{R}^n$, тогда будет рассматриваться задача Коши.

Работа посвящена доказательству единственности решения задачи Коши и смешанных задач для уравнения (1.1) в неограниченной области D^T . Основы полагающей является работа А. Н. Тихонова [1], в которой не только был указан класс единственности $|u(t, x)| \leq B \exp(b|x|^2)$ для уравнения теплопроводности, но и впервые был построен пример неединственности решения задачи Коши. В работе [2] С. Теклинд уточнил этот результат, показав, что единственность решения задачи Коши имеет место в классе $|u(t, x)| \leq B \exp(|x|h(|x|))$, где $h(r)$ – неубывающая положительная функция с расходящимся интегралом

$$\int_1^\infty \frac{dr}{h(r)} = +\infty. \quad (1.2)$$

При этом для любой функции со сходящимся интегралом $\int_1^\infty \frac{dr}{h_1(r)} < \infty$ был построен пример ненулевого решения задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности с нулевой начальной функцией, удовлетворяющего оценке $|u(t, x)| \leq B \exp(|x|h_1(|x|))$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00081-а).

Позже было выполнено много исследований по классам единственности для параболических уравнений и систем (см., например, работы [3]–[16]). Подробный обзор этих работ имеется, например, в [3]. В работах [4] и [5] отмечено, что в случае смешанных задач адекватной является запись класса единственности в терминах роста L_2 -норм

$$\int_0^T \int_{\{|x| < r\} \cap \Omega} u^2(t, x) dx dt \leq B \exp(rh(r)).$$

Анизотропные классы единственности рассматривались в работах [6], [7]. В случае первой смешанной задачи были установлены геометрические классы единственности, являющиеся более широкими, чем теклиндовские, если область Ω достаточно быстро сужается на бесконечности (см. [3]). Зависимость классов единственности от младших коэффициентов уравнения изучалась в работе [8].

В настоящей работе все коэффициенты уравнения предполагаются интегрируемыми по любому ограниченному подмножеству D^T . На элементы симметрической матрицы $A(t, x) = \{a_{ij}(t, x)\}$ наложены следующие условия: существуют положительная непрерывная в D^T функция $s(t, x)$ и число C такие, что для любого вектора $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, и почти всех $(t, x) \in D^T$ справедливы неравенства

$$(y, y)_{A(t, x)} \equiv \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(t, x) y_i y_j \geq s^2(t, x) |y|^2, \quad (1.3)$$

$$C^{-1} |y|_{A(0, x)} \leq |y|_{A(t, x)} \leq C |y|_{A(0, x)}, \quad |y|_{A(t, x)}^2 = (y, y)_{A(t, x)}, \quad (1.4)$$

где элементы матрицы $A(0, x)$ так же, как и функция $d(0, x)$, предполагаются интегрируемыми по любому ограниченному подмножеству области Ω . Далее будем писать $A(t)$ вместо $A(t, x)$.

Отметим, что рассматриваемые уравнения могут вырождаться на боковой границе области D^T или бесконечности. Предполагается также, что выполняются неравенства

$$k \leq d(t, x) \leq C d(0, x), \quad t \in [0, T], \quad x \in \Omega. \quad (1.5)$$

В последнем неравенстве слева вместо k может стоять любое число, даже отрицательное, поскольку при исследовании единственности решения допустима замена $u(t, x) = e^{at} v(t, x)$. Ради некоторых упрощений будем считать далее, что $k = 1$. На младшие коэффициенты наложены ограничения

$$\sum_{i=1}^n (b_i(t, x) - c_i(t, x))^2 \leq s^2(t, x) d(t, x), \quad (1.6)$$

$$\sum_{i=1}^n b_i^2(t, x) + c_i^2(t, x) \leq C s^2(t, x) d(t, x). \quad (1.7)$$

На боковой границе цилиндра D^T заданы краевые условия первого и третьего типов

$$u(t, x)|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial N} + \sum_{i=1}^n n_i c_i u \right) \Big|_{\Gamma_2} = 0. \quad (1.8)$$

Краевые условия будут пониматься довольно формально. А именно, будет рассматриваться обобщенное решение, определяемое с учетом этих краевых условий. (Несколько более подробно об этом будет сказано в § 2.) Здесь $\Gamma_1 \subset \Gamma = (0, T) \times \partial\Omega$ – произвольное замкнутое подмножество боковой границы цилиндра Γ и Γ_2 – дополнение к нему: $\Gamma_2 = \Gamma \setminus \Gamma_1$; $\partial u / \partial N = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} n_j$, n_j – компоненты внешней нормали к границе. Начальная функция

$$u(0, x) = \varphi(x) \in L_{2,lc}(\Omega) \quad (1.9)$$

предполагается квадратично суммируемой по любому ограниченному подмножеству $Q \subset \Omega$.

Анизотропные классы единственности для вырождающегося уравнения в не-дивергентной форме получены в работе [7]. Для простоты ограничимся формулировкой результата этой работы в случае задачи Коши для уравнения

$$u_t = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) u_{x_i x_j}$$

с гладкими коэффициентами. Рассматривается положительная функция $S_0(x) \geq 0$, удовлетворяющая условиям

$$S_0 \in C^2(\mathbb{R}^n), \quad \frac{\partial S_0}{\partial r} > 0, \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} S_0(x) = +\infty.$$

Определяется функция $G_0(\rho) = \min_{|x|=\rho} S_0(x)$ и по ней – миноранта

$$G(\rho) = \rho^{-1} \int_0^\rho G_0(\tau) \ln \frac{\rho}{\tau} d\tau.$$

Далее определяется функция $k(\rho) = [G'(\rho)]^{-2} > 0$, $\rho \geq 0$. График Γ функции $U(x) = G^{-1}(S_0(x))$ в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$ называется структурной поверхностью. Расстояние вдоль геодезической поверхности Γ от начала координат до точки $(x, U(x)) \in \Gamma$ обозначается $\sigma(x)$. Если коэффициенты уравнения удовлетворяют неравенствам

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \sigma_{x_i} \sigma_{x_j} \leq A_0 k(\sigma(x)), \quad \sum_{i,j=1}^n \sigma(x) a_{ij}(t, x) \sigma_{x_i x_j} \leq A_1 k(\sigma(x)),$$

то условие

$$|u(t, x)| \leq B \exp[G(\sigma(x))h(G(\sigma(x)))]$$

с функцией Тэклинда h является классом единственности решения задачи Коши (или первой смешанной задачи). Доказательство этого результата проводится методом барьеров и довольно сложно. Отметим, что ряд технических требований для функций S_0 , G здесь опущен.

В работе [7] сначала вводится анизотропный класс функций, затем формируется семейство уравнений, для которого он является классом единственности. В настоящей работе подход противоположный. Для конкретного уравнения анизотропный класс единственности конструктивно вычисляется по выбранной функции $\sigma(x)$.

В работе [6] анизотропные классы единственности установлены для уравнений с младшими членами методами теории стохастических процессов. При этом вырождение уравнений понимается в том смысле, что матрица $\{a_{ij}\}$ имеет ранг меньше максимального всюду в рассматриваемой области.

В работе [8] рассматривались эволюционные уравнения высокого порядка с одной пространственной переменной. В частности, в случае задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$u_t = u_{xx} - d(x)u$$

при выполнении условий

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} d(x) = +\infty \ (-\infty), \quad |d|^{-1/2}(1 + |d''|) + |d|^{-3/2}|d'|^2 \in L_1(R),$$

установлен следующий точный класс единственности:

$$|D_x^k u(t, x)| \leq \frac{\alpha(x)}{(1 + |d|)^{(n-1-2k)/(2n)}} \exp\left(\mu \left| \int_0^x |d(r)|^{1/2} dr \right| + \beta t\right),$$

$$t > 0, \quad x \in R, \quad k = 0, 1,$$

с положительными числами μ, β и бесконечно малой α .

Пусть $\sigma(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, – локально липшицева положительная функция с ограниченными поверхностями уровня и множества $\{x | \sigma(x) < r\}$ гомеоморфны шару. Будем предполагать выполненным неравенство

$$(c, \nabla \sigma) \leq 0, \quad (t, x) \in D^T. \quad (1.10)$$

Положим

$$s_c(r) = \sup\{|\nabla \sigma|_{A(t)}|(t, x) \in D^T, \sigma(x) = r\}, \quad r > 0.$$

Если функция $s_c(r)$ не определена в окрестности нуля, доопределяем ее единицей. Потребуем выполнения следующего условия:

$$\int_0^\infty \frac{dr}{s_c(r)} = \infty. \quad (1.11)$$

Положим также $\Omega(r) = \{x \in \Omega \mid \sigma(x) < r\}$, $D_\rho^{T,r} = (0, T) \times (\Omega(r) \setminus \Omega(\rho))$ (индекс $\rho = 0$ будет опускаться).

ТЕОРЕМА. Пусть $u(t, x)$ – решение в D^T задачи (1.1), (1.8) с начальным условием

$$u(0, x) = 0. \quad (1.12)$$

Пусть выполнены условия (1.10), (1.11). Если существует такая монотонно неубывающая на полуоси $[0, \infty)$ положительная функция $h(r)$, что интеграл

$$\int_0^\infty \frac{dr}{h(r)s_c(r)} = \infty \quad (1.13)$$

расходится и для всех $r \geq 1$

$$\|u\|_{D^{T,r}} \leq \exp(f(r)h(r)), \quad (1.14)$$

где $f(r) = \int_0^r \frac{d\tau}{s_c(\tau)}$, то $u(t, x) \equiv 0$ в D^T .

§ 2. Обобщенное решение задачи

Введем следующие обозначения: $D_a^b = (a, b) \times \Omega$, $D^T = D_0^T$,

$$(u, w)_{A,d} = \int_{D^T} [(\nabla u, \nabla w)_{A(0)} + d(0, x)uw] dx dt.$$

Через $\|u\|_{D^T}$ будем обозначать норму в $L_2(D^T)$. На множестве сужений на D^T функций из $C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Gamma_1)$ определим норму

$$\|u\|_{H^{0,1}(D^T)}^2 = (u, u)_{A,d}.$$

Полношение этого линейного пространства обозначим $\dot{H}^{0,1}(D^T; \Gamma_1)$. Непростым является вопрос: в каком случае можно гарантировать, что функции из этого пространства будут иметь нулевой след на множестве Γ_1 ? Подробное исследование этого вопроса не является целью настоящей работы. Отметим лишь, что достаточным для этого является условие суммируемости функции s^{-2} в окрестности множества Γ_1 при гладкой границе $\partial\Omega$. В этом нетрудно убедиться, пользуясь неравенством вида

$$f^2(1) = \left(\int_0^1 f'(t) dt \right)^2 \leq \int_0^1 s^2(t) f'^2(t) dt \int_0^1 s^{-2}(t) dt, \quad f(0) = 0.$$

Если же уравнение на границе имеет более высокую степень вырождения, то функции из пространства $\dot{H}^{0,1}(D^T; \Gamma_1)$ могут вовсе не обращаться в нуль в таких точках множества Γ_1 (см. пример 3 из работы [17]). По-видимому, задание краевого условия в таких точках множества Γ_1 является излишним.

Через $\dot{H}_{lc}^{0,1}(D^T; \Gamma_1)$ обозначим пространство функций, при каждом $r > 0$ совпадающих в $D^{T,r}$ с некоторой функцией из пространства $\dot{H}^{0,1}(D^T; \Gamma_1)$.

Обобщенным решением задачи (1.1), (1.8), (1.9) в D^T будем называть функцию $u(t, x) \in \dot{H}_{lc}^{0,1}(D^T; \Gamma_1)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{D^T} \left(-uv_t + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n (c_i u v_{x_i} - b_i u_{x_i} v) + du v \right) dx dt \\ &= \int_{\Omega} \varphi(x) v(0, x) dx \end{aligned} \quad (2.1)$$

для любой функции $v(t, x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Gamma_1)$ такой, что $v(T, x) = 0$.

Покажем, что для обобщенного решения задачи (1.1), (1.8), (1.9) применима стандартная техника осреднений Стеклова (см., например, [18; гл. 3, § 2]):

$$u_h(t, x) = \frac{1}{h} \int_0^h u(t + \tau, x) d\tau.$$

Отметим сначала ограниченность операторов сдвига $T_z v(t) = v(t + z)$ и осреднения Стеклова в пространстве $\dot{H}^{0,1}(D^T; \Gamma_1)$ в предположении, что функция $v(t)$ продолжена нулем вне интервала $(0, T)$:

$$\begin{aligned} \|T_z v\|_{H^{0,1}(D^T)} &\leq \|v\|_{H^{0,1}(D^T)}, \\ \|v_h\|_{H^{0,1}(D^T)} &\leq \|v\|_{H^{0,1}(D^T)}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Приведем здесь только основной фрагмент доказательства последнего неравенства. Зафиксируем точку x . Пусть ортогональная матрица b_{pi} приводит матрицу $\{a_{ij}\}$ к диагональному виду: $a_{ij}(0, x) = \sum_{p,q=1}^n \lambda_q \delta_p^q b_{pi} b_{qj}$. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(0, x) (v_h)_{x_i} (v_h)_{x_j} &= \sum_{i,j=1}^n \sum_{p,q=1}^n \lambda_q \delta_p^q b_{pi} b_{qj} (v_h)_{x_i} (v_h)_{x_j} \\ &= \sum_{q=1}^n \lambda_q \left(\sum_{i=1}^n b_{qi} v_{x_i} \right)_h \left(\sum_{j=1}^n b_{qj} v_{x_j} \right)_h = \sum_{q=1}^n \frac{\lambda_q}{h^2} \left(\int_0^h \sum_{j=1}^n b_{qj} v_{x_j}(t+z) dz \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{h} \int_0^h \sum_{p,q=1}^n \lambda_q \delta_p^q \sum_{i,j=1}^n b_{pi} v_{x_i}(t+z) b_{qj} v_{x_j}(t+z) dz \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(0, x) v_{x_i}(t+z) v_{x_j}(t+z) dz. \end{aligned}$$

Теперь нетрудно завершить доказательство неравенства (2.2).

Установим нужное для дальнейшего интегрального соотношения. Заменив в (2.1) функцию v на v_{-h} , $v \in C_0^\infty(D^T)$, нетрудно получить тождество

$$\int_{D^T} \left[(u_h)_t v + \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_i})_h v_{x_j} + \sum_{i=1}^n ((c_i u)_h v_{x_i} - (b_i u_{x_i})_h v) + (du)_h v \right] dx dt = 0, \quad (2.3)$$

которое будет справедливо также и для функций $v(t, x) \in \dot{H}^{0,1}(D^T; \Gamma_1)$, равных нулю при $t > T - \delta$, $\delta > 0$, и при $|x| > R$ для какого-либо R . В частности, если $\eta(x)$ – липшицева функция с ограниченным носителем, то, подставляя $v = \eta(x) u_h^\tau$ в (2.3), где u^τ – продолженная нулем при $t > \tau$ функция u , получим

$$\begin{aligned} \int_{D^T} \left[\frac{1}{2} ((u_h^\tau)^2 \eta)_t + \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_i})_h (\eta u_h^\tau)_{x_j} \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^n ((c_i u)_h (\eta u_h^\tau)_{x_i} - (b_i u_{x_i})_h (\eta u_h^\tau)) + (du)_h (\eta u_h^\tau) \right] dx dt = 0. \quad (2.4) \end{aligned}$$

Обоснуем возможность предельного перехода в равенстве (2.4) при $h \rightarrow 0$ к соотношению

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u^2(\tau, x) - \varphi^2(x)) \eta dx \\ + 2 \int_{D^\tau} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} (\eta u)_{x_j} + \sum_{i=1}^n (c_i u (\eta u)_{x_i} - b_i u_{x_i} \eta u) + du^2 \eta \right] dx dt = 0. \quad (2.5) \end{aligned}$$

Ограниченность носителя функции η при таком предельном переходе позволяет считать, что функция u является элементом пространства $\dot{H}^{0,1}(D^T; \Gamma_1)$. Покажем, например, что

$$\begin{aligned} \int_{D^T} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_i})_h (v_h)_{x_j} dx dt &= \int_{D^T} (\nabla u, \nabla (v_h)_{-h})_{A(t)} dx dt \\ &\rightarrow \int_{D^T} (\nabla u, \nabla v)_{A(t)} dx dt \end{aligned} \quad (2.6)$$

при $h \rightarrow 0$. С этой целью рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{D^T} (\nabla u, \nabla(v_h)_{-h} - \nabla v_h)_{A(t)} dx dt \right| \\
 &= \left| \int_{D^T} \left(\frac{\nabla u}{h}, \int_{-h}^0 \nabla(v_h(t+z) - v_h(t)) dz \right)_{A(t)} dx dt \right| \\
 &\leq \int_{-h}^0 \frac{dz}{h} \int_{D^T} |(\nabla u, \nabla(v_h(t+z) - v_h(t)))_{A(t)}| dx dt \\
 &\leq \int_{-h}^0 \|u\|_{H^{0,1}} \|T_z v_h - v_h\|_{H^{0,1}} \frac{dz}{h} \equiv I.
 \end{aligned}$$

Выберем произвольное $\varepsilon > 0$. Для функции $v \in C_0^\infty(D_0^{T-\delta})$ очевидна равномерная непрерывность семейства функций v_h и ∇v_h . Поэтому, выбрав достаточно малое h , при $|z| \leq h$ добиваемся оценки

$$\|T_z v_h - v_h\|_{H^{0,1}(D^T)} \leq \varepsilon, \quad (2.7)$$

которая влечет неравенство $I \leq C\varepsilon$. В силу ограниченности операторов сдвига и осреднения Стеклова последняя оценка остается в силе и для функций $v(t, x) \in \dot{H}^{0,1}(D^T; \Gamma_1)$, равных нулю при $t > T - \delta$. Совершенно аналогично устанавливается малость величины

$$\left| \int_{D^T} (\nabla u, \nabla v_h - \nabla v)_{A(t)} dx dt \right| \leq C\varepsilon$$

при достаточно малых h .

Таким образом, предельный переход (2.6) обоснован. В частности, полагая в (2.6) $v = \eta(x)u^\tau(t, x)$, получаем

$$\int_{D^T} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{x_i})_h (\eta u_h^\tau)_{x_j} dx dt \rightarrow \int_{D^T} (\nabla u, \nabla(\eta u^\tau))_{A(t)} dx dt, \quad h \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

Теперь установим предельный переход

$$\int_{D^T} (b_i u_{x_i})_h v_h dx dt = \int_{D^T} b_i u_{x_i} (v_h)_{-h} dx dt \rightarrow \int_{D^T} b_i u_{x_i} v dx dt, \quad h \rightarrow 0. \quad (2.9)$$

Сначала рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}
 & \int_{D^T} b_i u_{x_i} [(v_h)_{-h} - v_h] dx dt = \left| \int_{D^T} b_i u_{x_i} \frac{1}{h} \int_{-h}^0 (v_h(t+z) - v_h(t)) dz dx dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{h} \int_{-h}^0 dz \int_{D^T} |b_i u_{x_i} (v_h(t+z) - v_h(t))| dx dt = J.
 \end{aligned}$$

Применив неравенство (1.7), нетрудно получить оценку

$$J \leq \frac{1}{h} \int_{-h}^0 dz \int_{D^T} \left[\varepsilon s^2 u_{x_i}^2 + \frac{C^2(d(t, x) + 1)}{\varepsilon} (v_h(t+z) - v_h(t))^2 \right] dx dt.$$

Пользуясь неравенством (2.7), нетрудно установить неравенство $J \leq C_1 \varepsilon$. Точно так же устанавливается малость величины

$$\left| \int_{D^T} b_i u_{x_i} [v_h - v] dx dt \right| \leq C_1 \varepsilon.$$

Таким образом, предельный переход (2.9) обоснован. Совершенно аналогично обосновываются предельные переходы при $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \int_{D^T} (c_i u)_h v_{hx_i} dx dt &\rightarrow \int_{D^T} c_i u v_{x_i} dx dt, \\ \int_{D^T} (du)_h v_h dx dt &\rightarrow \int_{D^T} du v dx dt. \end{aligned}$$

Пользуясь этими соотношениями и (2.8), осуществляем предельный переход от (2.4) к (2.5). Конечно, при этом используется принадлежность $u(t)$ к пространству $C([0, T]; L_{2,lc}(\Omega))$, которая устанавливается из (2.3), как обычно (см., например, [18; гл. 4, лемма 4.1]).

§ 3. Доказательство теоремы

Техника работы [5] распространяется здесь на вырождающиеся уравнения. Теорема будет выведена из следующего утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть $\varphi(x) = 0$, $x \in \Omega(R)$, $u(t, x)$ – решение задачи (1.1), (1.8), (1.9) и выполнено (1.10). Тогда для всех $t > 0$, $r \in (0, R]$, справедливо неравенство

$$H^{t,r}(u) \leq \exp \left(1 - 2\kappa_1 t^{-1} \left(\int_r^R \frac{d\tau}{s_c(\tau)} \right)^2 \right) \max_{\tau \in [0,t]} H^{\tau,R}(u), \quad (3.1)$$

где

$$H^{t,r}(u) = \int_{\Omega(r)} u^2(x, t) dx,$$

$$\kappa_1 = 1/(16e^2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r \leq R$, $\xi(\tau, r, \rho)$ – непрерывная неотрицательная функция, равная единице при $\tau \leq r - \rho$ и нулю при $\tau \geq r$. В оставшемся интервале она удовлетворяет условию $\partial \xi / \partial \tau = -1/(zs_c(\tau))$, где параметр z находится из условия

$$z = \int_{r-\rho}^r \frac{d\tau}{s_c(\tau)}.$$

Подставим $\eta(x) = \xi^2(\sigma(x), r, \rho)$ в тождество (2.5). В силу условия (1.10) устанавливаем, что $\partial \eta / \partial c \geq 0$. Тогда из (2.5) в силу условия $\eta \varphi \equiv 0$, используя (1.6),

для любого $r > \rho > 0$ нетрудно получить неравенства

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \eta u^2(T, x) dx + 2 \int_{D^T} \left[\sum_{i,j=1}^n \eta a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + du^2 \eta \right] dx dt \\ & \leq 2 \int_{D^T} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u \frac{\partial \eta}{\partial x_j} dx dt \\ & \quad + 2 \int_{D^T} \sum_{i=1}^n \eta |c_i - b_i| |u u_{x_i}| dx dt - 2 \int_{D^T} u^2 \frac{\partial \eta}{\partial c} dx dt \\ & \leq 2 \int_{D^T} (\varepsilon \xi^2 |\nabla u|_{A(t)}^2 + \varepsilon^{-1} u^2 |\nabla \xi|_{A(t)}^2 + s \sqrt{d} |u \nabla u| \eta) dx dt. \end{aligned}$$

Далее, при $\varepsilon = 1/2$ будем иметь

$$\int_{\Omega} \eta u^2(T, x) dx \leq 4 \int_{D^T} u^2 |\nabla \xi|_{A(t)}^2 dx dt.$$

Используя вид функции η и определение функции s_c , нетрудно получить неравенство

$$\int_{\Omega(r-\rho)} u^2(t, x) dx \leq \frac{4}{z^2} \int_0^t \int_{\Omega(r) \setminus \Omega(r-\rho)} u^2 dx dt.$$

Запишем последнее, используя функцию H :

$$H^{t, r-\rho}(u) \leq \frac{4}{z^2} \int_0^t H^{\tau, r}(u) d\tau. \quad (3.2)$$

Отметим, что, выбирая $\varepsilon = 1/4$, можно получить также неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(r-\rho)} u^2(t, x) dx + \frac{1}{2} \int_{D^{T, r-\rho}} \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i} u_{x_j} + du^2 \right] dx dt \\ & \leq \frac{8}{z^2} \int_0^t \int_{\Omega(r) \setminus \Omega(r-\rho)} u^2 dx dt. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Неравенство (3.2) будем применять индуктивно для последовательности r_i , $i = 0, 1, 2, \dots, k$, $r_0 = R$, $r_{i+1} = r_i - \rho_i$; числа ρ_i выбираются так, чтобы $z = \int_{r_{i+1}}^{r_i} \frac{d\tau}{s_c(\tau)}$. Число z выберем ниже. Учитывая, что $H^{t, r}(u) \leq A = \max_{\tau \in [0, t]} H^{\tau, R}(u)$, будем иметь

$$H^{t, r_1}(u) = H^{t, r_0 - \rho_0}(u) \leq \frac{4At}{z^2}.$$

Далее индукцией по k установим неравенство

$$H^{t, r_k}(u) \leq \frac{A4^k t^k}{z^{2k} k!}. \quad (3.4)$$

Пользуясь неравенством Стирлинга, из (3.4) нетрудно получить

$$H^{t, r_k}(u) \leq \frac{A4^k e^k t^k}{\sqrt{2\pi k} z^{2k} k^k} \leq A \exp\left(-k \ln \frac{z^2 k}{4et}\right). \quad (3.5)$$

Число k будем выбирать так, чтобы $4e^2t \leq z^2k \leq 8e^2t$. Тогда из (3.5) следует, что $H^{t,r_k}(u) \leq Ae^{-k}$. Для пары чисел r, R выстроим последовательность r_i так, чтобы $r_k = r$. Тогда число z будет определяться из следующего равенства:

$$zk = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{r_{i+1}}^{r_i} \frac{d\tau}{s_c(\tau)} = \int_r^R \frac{d\tau}{s_c(\tau)} = I.$$

В качестве k выбираем наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $k \geq I^2/(8e^2t)$. Тогда $z^2k^2 > 8e^2t(k-1)$ и $z^2k > 4e^2t$ при $k \geq 2$. Таким образом, неравенство (3.1) установлено для $k \geq 2$. При $k = 1$ оно тривиально.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $u(t, x)$ – обобщенное решение задачи (1.1), (1.8), (1.9) в D^T , $T \leq 1$. Тогда для всех $t \in (0, T]$, $r \in [0, R]$ справедливо неравенство

$$H^{t,r}(u) \leq 12 \exp\left(-2\kappa_1 t^{-1} \left(\int_r^R \frac{d\lambda}{s_c(\lambda)}\right)^2\right) \max_{\tau \in [0, t]} H^{\tau, R}(u) + 14 \|\varphi\|_{\Omega(R)}^2. \quad (3.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v(t, x)$ – решение задачи (1.1), (1.8), (1.9) с начальной функцией $\varphi(x)\chi_{\Omega(R)} \in L_2(\Omega)$, где $\chi_{\Omega(R)}$ – характеристическая функция множества $\Omega(R)$. Для $v(t, x)$ из (2.5) при $\eta = 1$ с помощью (1.6) нетрудно установить неравенство

$$\|v(t)\|^2 + \int_0^t \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} v_{x_i} v_{x_j} + dv^2 \right) dx dt \leq \|\varphi\|_{\Omega(R)}^2. \quad (3.7)$$

Отсюда следует, что

$$\|\varphi\|_{\Omega(R)}^2 \geq \max_{\tau \in [0, t]} H^{\tau, R}(v), \quad t \in (0, T]. \quad (3.8)$$

Функция $w(t, x) = u(t, x) - v(t, x)$ удовлетворяет условию предложения, следовательно, для $t \in (0, T]$, $r \in [0, R]$ имеем

$$\begin{aligned} H^{t,r}(u) &\leq 2H^{t,r}(w) + 2H^{t,r}(v) \\ &\leq 4 \exp\left(1 - 2\kappa_1 t^{-1} \left(\int_r^R \frac{d\tau}{s_c(\tau)}\right)^2\right) \left\{ \max_{\tau \in [0, t]} H^{\tau, R}(u) + \max_{\tau \in [0, t]} H^{\tau, R}(v) \right\} \\ &\quad + 2H^{t,R}(v). \end{aligned}$$

Используя (3.8), из последнего соотношения выводим неравенство (3.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Зафиксируем произвольное $t \in (0, T]$. Возьмем произвольное $R_0 > 1$ и оценим $\|u(t)\|_{\Omega(R_0)}^2$ следующим образом. Рассмотрим последовательность R_k такую, что $f(R_k) = 2^k f(R_0)$. Положим

$$\Delta t_k = \frac{\kappa_1}{4} \frac{f(R_k)}{h(R_k)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

В силу монотонности функции $h(r)$ и условия (1.13) имеем

$$\sum_{k=1}^p \Delta t_k = \frac{\kappa_1}{4} \sum_{k=1}^p \frac{\int_{R_k}^{R_{k+1}} \frac{dr}{s_c(r)}}{h(R_k)} \geq \frac{\kappa_1}{4} \int_{R_1}^{R_{p+1}} \frac{dr}{h(r)s_c(r)} \rightarrow \infty \quad \text{при } p \rightarrow \infty.$$

Следовательно, при любом выборе числа R_0 найдется такой номер p , что

$$\sum_{k=1}^{p+1} \Delta t_k \geq t. \quad (3.10)$$

Пусть $p = p(R_0)$ – наименьший из номеров p , удовлетворяющих неравенству (3.10), так что $\sum_{k=1}^p \Delta t_k < t$. Переопределим Δt_{p+1} равенством

$$\Delta t_{p+1} = t - \sum_{k=1}^p \Delta t_k \leq \frac{\kappa_1}{4} \frac{f(R_{p+1})}{h(R_{p+1})}. \quad (3.11)$$

Определим убывающую последовательность времен $t_0 = t$, $t_1 = t_0 - \Delta t_1$, $t_2 = t_1 - \Delta t_2$, $\dots$, $t_p = t_{p-1} - \Delta t_p = 0$. Очевидно, в силу (3.9), (3.11) справедливы неравенства

$$\frac{\frac{\kappa_1}{2} (f(R_k))^2}{\Delta t_k} \geq 2f(R_k)h(R_k), \quad k = 1, \dots, p+1. \quad (3.12)$$

Из (3.2) и (1.14) выводим соотношения

$$\begin{aligned} \|u(s)\|_{\Omega(R_{k-1})}^2 &\leq \widehat{M} \int_0^T \|u(\tau)\|_{\Omega(R_k)}^2 d\tau \leq \widehat{M} \exp(f(R_k)h(R_k)), \\ s &\in (0, T], \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где

$$\widehat{M} = 4 \left(\int_{R_{k-1}}^{R_k} \frac{d\rho}{s_c(\rho)} \right)^{-2} = 16(f(R_k))^{-2} \leq 16(f(R_1))^{-2} \equiv \frac{M}{12}.$$

Рассматривая функцию $u(t, x)$ как решение задачи для уравнения (1.1) с начальными данными при $t = t_1$, с помощью неравенства (3.6) и определения последовательности R_k выводим соотношение

$$\|u(t_0)\|_{\Omega(R_0)}^2 \leq 12 \exp\left(-2\kappa_1 \frac{(f(R_1)/2)^2}{\Delta t_1}\right) \max_{t \in [t_1, t_0]} \|u(t)\|_{\Omega(R_1)}^2 + 14\|u(t_1)\|_{\Omega(R_1)}^2.$$

Воспользуемся неравенствами (3.13), (3.12):

$$\begin{aligned} \|u(t_0)\|_{\Omega(R_0)}^2 &\leq M \exp\left(f(R_1)h(R_1) - \kappa_1 \frac{f^2(R_1)}{2\Delta t_1}\right) + 14\|u(t_1)\|_{\Omega(R_1)}^2 \\ &\leq M \exp(-f(R_1)h(R_1)) + 14\|u(t_1)\|_{\Omega(R_1)}^2. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Совершенно аналогично выводятся неравенства при $k = 2, \dots, p$

$$\begin{aligned} \|u(t_1)\|_{\Omega(R_1)}^2 &\leq M \exp\left(f(R_2)h(R_2) - \kappa_1 \frac{f^2(R_2)}{2\Delta t_2}\right) + 14\|u(t_2)\|_{\Omega(R_2)}^2 \\ &\leq M \exp(-f(R_2)h(R_2)) + 14\|u(t_2)\|_{\Omega(R_2)}^2, \\ \|u(t_{k-1})\|_{\Omega(R_{k-1})}^2 &\leq M \exp(-f(R_k)h(R_k)) + 14\|u(t_k)\|_{\Omega(R_k)}^2. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Поскольку $t_{p+1} = 0$, то, применяя (3.13), (3.12), находим, что

$$\|u(t_p)\|_{\Omega(R_p)}^2 \leq M \exp(-f(R_{p+1})h(R_{p+1})).$$

Умножив (3.15), $k = 1, \dots, p+1$, на 14^{k-1} и сложив, получим при $R_0 \geq 1$

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{\Omega(R_0)}^2 &\leq M \{ \exp(-f(R_1)h(R_1)) + \dots + 14^p \exp(-f(R_{p+1})h(R_{p+1})) \} \\ &\leq M \{ \exp(-f(R_1)h(R_1)) + \dots + 14^p \exp(-2^p f(R_1)h(R_1)) \} \leq C_1(f(R_1))^{-2}. \end{aligned}$$

Итак, установлено, что монотонно неубывающая неотрицательная функция $\|u(t)\|_{\Omega(R_0)}^2$ от аргумента R_0 стремится к нулю при $R_0 \rightarrow \infty$. Следовательно, $\|u(t)\|_{\Omega(R_0)}^2 = 0$ при любом $R_0 > 0$. В силу произвольности $t \in (0, T]$ получаем решение $u(t, x) \equiv 0$ в D^T .

§ 4. Классы единственности и примеры неединственности

Пусть функция σ удовлетворяет условию Липшица с постоянной 1: $|\nabla \sigma| \leq 1$, и множества $\{x | \sigma(x) < r\}$ гомеоморфны шару. Рассмотрим уравнение (1.1) с коэффициентами, удовлетворяющими условию

$$\gamma s^2(\sigma(x)) \leq \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) y_i y_j \leq s^2(\sigma(x)) \quad (4.1)$$

с непрерывной функцией $s(r)$, $r > 0$, для любого единичного вектора $y \in \mathbb{R}^n$ и почти всех $(t, x) \in D^T$. Функцию $s_c(r)$ в случае выполнения условия (4.1) можно определить равенством $s_c(r) = s(r)$. Тогда теорема выделяет следующий класс единственности:

$$\|u\|_{D^{T,r}} \leq \exp\left(h(r) \int_1^r \frac{d\tau}{s(\tau)}\right) \quad \forall r \geq 1, \quad (4.2)$$

где положительная функция $h(r)$ такова, что интеграл

$$\int_1^\infty \frac{dr}{h(r)s(r)} = \infty \quad (4.3)$$

расходится. В частности, можно взять $n = 2$, $h(r) = s(r) = r^{1/2}$, $\sigma(x) = (x_1^2 + x_2^2)^{1/4}$. Тогда условие (4.2) выделяет анизотропный класс функций, допускающий существенно разный рост вдоль координатных осей. В изотропном случае, т.е. при $\sigma(x) = |x|$, имеем класс единственности

$$\|u\|_{D^{T,r}} \leq \exp(\varepsilon r) \quad \forall r \geq 1,$$

совпадающий по порядку с цитированным во введении классом единственности из работы [7] (совпадение произошло для всех рассмотренных примеров).

Если же взять $h(r) = r^{3/2}$, $s(r) = r^{-1/2}$, $\sigma(x) = |x|$, то получаем класс единственности

$$\|u\|_{D^{T,r}} \leq \exp(\varepsilon r) \quad \forall r \geq 1,$$

который шире, чем теклиндовский класс для равномерно параболического уравнения.

Построить примеры неединственности для анизотропных уравнений не удалось. Для одномерного вырождающегося уравнения теплопроводности пример неединственности (подтверждающий точность найденного класса единственности) строится заменой переменной x в примере Тэклинда подобно тому, как это сделано в работе [7]. Пусть для возрастающей функции $h(x)$ интеграл (1.2) сходится и $u(t, y)$ – ненулевое решение задачи Коши для уравнения $u_t = u_{yy} - ku$ с нулевой начальной функцией, удовлетворяющее оценке $|u(t, y)| \leq \exp(|y|h(|y|))$. Положим

$$y = f(x) = \int_0^x \frac{dr}{s(r)},$$

где $s(r)$ – четная положительная функция. Имеем $u_t = (u_x s(x))_x s(x) - ku = (u_x s^2)' - u_x s s' - ku$. Условие (1.6) будет выполнено, если $s'^2 \leq k$. Так как $|u(t, y(x))| \leq \exp(|f(x)|h(|f(x)|))$ и для функции $h_1(r) = h(f(r))$ интеграл (1.13) сходится, то построен пример, подтверждающий точность класса единственности (1.14).

Список литературы

- [1] A. Tychonoff, “Théorèmes d’unicité pour l’équation de la chaleur”, *Матем. сб.*, **42**:2 (1935), 199–216.
- [2] S. Tacklind, “Sur les class quasianalytiques des solutions des equations aux derivees partielles du type parabolique”, *Nova Acta Reg. Soc. Schi. Uppsal. Ser. 4*, **10**:3 (1936), 3–55.
- [3] Л. М. Кожевникова, “Классы единственности решений первой смешанной задачи для уравнения $u_t = Au$ с квазиэллиптическим оператором A в неограниченных областях”, *Матем. сб.*, **198**:1 (2007), 59–102; англ. пер.: L. M. Kozhevnikowa, “Uniqueness classes for solutions in unbounded domains of the first mixed problem for the equation $u_t = Au$ with quasi-elliptic operator A ”, *Sb. Math.*, **198**:1 (2007), 55–96.
- [4] О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, “Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений”, *УМН*, **33**:5 (1978), 7–76; англ. пер.: O. A. Olejnik, E. V. Radkevich, “The method of introducing a parameter in the study of evolutionary equations”, *Russian Math. Surveys*, **33**:5 (1978), 7–84.
- [5] А. К. Гущин, “О равномерной стабилизации решений второй смешанной задачи для параболического уравнения”, *Матем. сб.*, **119**(161):4(12) (1982), 451–508; англ. пер.: A. K. Gushchin, “On the uniform stabilization of solutions of the second mixed problem for a parabolic equation”, *Math. USSR-Sb.*, **47**:2 (1984), 439–498.
- [6] И. М. Сонин, “О классах единственности для вырождающихся параболических уравнений”, *Матем. сб.*, **85**(127):4(8) (1971), 459–473; англ. пер.: I. M. Sonin, “On uniqueness classes for degenerating parabolic equations”, *Math. USSR-Sb.*, **14**:4 (1971), 453–469.
- [7] Л. И. Камынин, “О единственности решения первой краевой задачи в неограниченной области для параболического уравнения второго порядка”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **24**:9 (1984), 1331–1345; англ. пер.: L. I. Kamynin, “The uniqueness of the solution of the first boundary value problem in an unbounded domain for a second-order parabolic equation”, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, **24**:5 (1984), 32–40.
- [8] Я. И. Житомирский, “Классы единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с быстро растущими коэффициентами”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **31**:5 (1967), 1159–1178; англ. пер.: Ya. I. Zhitomirskij, “Uniqueness classes

- for solutions of the Cauchy problem for linear equations with rapidly increasing coefficients", *Math. USSR-Izv.*, **1**:5 (1967), 1109–1129.
- [9] О. А. Ладыженская, "О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения", *Матем. сб.*, **27(69)**:2 (1950), 175–184.
- [10] В. Ф. Гилимшина, Ф. Х. Мукминов, "Об убывании решения вырождающегося линейного параболического уравнения", *Уфимск. матем. журн.*, **3**:4 (2011), 43–56.
- [11] О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, "Аналитичность и теоремы типа Лиувилля и Фрагмена–Линделефа для общих параболических систем дифференциальных уравнений", *Функц. анализ и его прил.*, **8**:4 (1974), 59–70; англ. пер.: О. А. Oleinik, E. V. Radkevich, "Analyticity and theorems of Liouville and Phragmen–Lindelof type for general parabolic systems of differential equations", *Funct. Anal. Appl.*, **8**:4 (1974), 322–330.
- [12] О. А. Олейник, "О единственности решений задачи Коши для общих параболических систем в классах быстро растущих функций", *УМН*, **29**:5(179) (1974), 229–230.
- [13] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, "Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений", *УМН*, **31**:6(192) (1976), 142–166; англ. пер.: О. А. Oleinik, G. A. Iosif'yan, "An analogue of Saint-Venant's principle and the uniqueness of solutions of boundary value problems for parabolic equations in unbounded domains", *Russian Math. Surveys*, **31**:6 (1976), 153–178.
- [14] Л. И. Камынин, Б. И. Химченко, "О проблеме Тихонова–Петровского для параболических уравнений второго порядка", *Сиб. матем. журн.*, **22**:5 (1981), 78–115; англ. пер.: L. I. Kamynin, B. N. Khimchenko, "Tikhonov–Petrovskii problem for second-order parabolic equations", *Siberian Math. J.*, **22**:5 (1981), 709–734.
- [15] Ф. Х. Мукминов, "О равномерной стабилизации решений первой смешанной задачи для параболического уравнения", *Матем. сб.*, **181**:11 (1990), 1486–1509; англ. пер.: F. Kh. Mukminov, "On uniform stabilization of solutions of the first mixed problem for a parabolic equation", *Math. USSR-Sb.*, **71**:2 (1992), 331–353.
- [16] Л. М. Кожевникова, "О классах единственности решения первой смешанной задачи для квазилинейной параболической системы второго порядка в неограниченной области", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65**:3 (2001), 51–66; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, "On uniqueness classes of solutions of the first mixed problem for a quasi-linear second-order parabolic system in an unbounded domain", *Izv. Math.*, **65**:3 (2001), 469–484.
- [17] В. В. Жиков, "О весовых соболевских пространствах", *Матем. сб.*, **189**:8 (1998), 27–58; англ. пер.: V. V. Zhikov, "Weighted Sobolev spaces", *Sb. Math.*, **189**:8 (1998), 1139–1170.
- [18] О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967; англ. пер.: О. А. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, N. N. Ural'tseva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type*, Transl. Math. Monogr., **23**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.

Венера Фидарисовна Вильданова
(Venera F. Vil'danova)

Башкирский государственный педагогический
университет им. М. Акмуллы, г. Уфа
E-mail: gilvenera@mail.ru

Поступила в редакцию
25.03.2013 и 12.06.2013

Фарит Хамзаевич Мукминов
(Farit Kh. Mukminov)

Башкирский государственный университет, г. Уфа
E-mail: mfxh@rambler.ru