Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Каплицкий, Дифференциальное уравнение для трансценденты Лерха и связанные с ним симметрические операторы в гильбертовом пространстве, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 8, 13–40

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8236>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 11:52:03

УДК 517.98

В. М. Каплицкий

Дифференциальное уравнение для трансценденты Лерха и связанные с ним симметрические операторы в гильбертовом пространстве

Функция $\Psi(x, y, s) = e^{iy} \Phi(-e^{iy}, s, x)$, где $\Phi(z, s, v)$ – трансцендента Лерха, удовлетворяет двумерному формально самосопряженному гиперболическому дифференциальному уравнению второго порядка

$$L[\Psi] = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + i(x-1) \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{i}{2} \Psi = \lambda \Psi,$$

где $s = 1/2 + i\lambda$. Соответствующее дифференциальное выражение порождает плотно определенный симметрический оператор (минимальный оператор) в гильбертовом пространстве $L_2(\Pi)$, где $\Pi = (0, 1) \times (0, 2\pi)$. В работе получено описание областей определений некоторых симметрических расширений соответствующего минимального оператора. Показано, что формальные решения задачи на собственные значения для построенных симметрических расширений допускают представления в виде функциональных рядов, близких по структуре к ряду Фурье функции $\Psi(x, y, s)$. Обсуждаются достаточные условия, при выполнении которых найденные формальные решения являются собственными функциями рассматриваемых симметрических дифференциальных операторов. Показано, что существует тесная взаимосвязь между спектральными свойствами введенных в работе симметрических дифференциальных операторов и теорией распределения нулей некоторых специальных аналитических функций, аналогичных дзета-функции Римана.

Библиография: 15 названий.

Ключевые слова: трансцендента Лерха, гильбертово пространство, симметрический оператор, собственная функция.

DOI: 10.4213/sm8236

§ 1. Введение

Теория распределения нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$, лежащих в “критической” полосе $0 < \operatorname{Re} s < 1$, имеет принципиальное значение для решения тех задач аналитической теории чисел, которые связаны с асимптотическими свойствами распределения простых чисел (см. [1]). Кроме того, проблема распределения нулей дзета-функции стала источником новых задач в различных разделах теории функций и теории линейных операторов. Существует большое количество работ по спектральной теории дифференциальных операторов, теории автоморфных функций и квантовому хаосу, в которых возникли проблемы, тесно связанные со свойствами распределения нулей дзета-функции Римана и некоторых аналогичных ей более общих рядов Дирихле (см., например, [1]–[5]). В 1887 г. чешский математик М. Лерх ввел в рассмотрение

специальную функцию $\Phi(z, s, v)$, которая является естественным обобщением классических дзета-функции Римана $\zeta(s)$ и дзета-функции Гурвица $\zeta(s, x)$ и совпадает с этими функциями при частных значениях параметров. Трансцендента Лерха удовлетворяет двумерному дифференциальному уравнению с алгебраическими (полиномиальными) коэффициентами. Свойства трансценденты Лерха и некоторых связанных с ней функций, удовлетворяющих двумерным дифференциальным уравнениям, могут быть существенными для установления новых взаимосвязей между теорией распределения нулей римановской дзета-функции с ее аналогами и спектральной теорией некоторых двумерных симметрических дифференциальных операторов. Причина этого заключается в возможности представления уравнения, определяющего собственные числа рассматриваемых в работе дифференциальных операторов, в замкнутом виде и том обстоятельстве, что аналитические функции, входящие в соответствующее уравнение, задаются функциональными рядами, близкими по структуре к ряду Дирихле функции $\zeta(s)$. В круге $|z| < 1$ трансцендента Лерха $\Phi(z, s, v)$ задается рядом

$$\Phi(z, s, v) = \sum_{n=0}^{\infty} (v+n)^{-s} z^n,$$

где s и v – комплексные параметры, причем $v \neq 0, -1, -2, \dots$. В монографии [2] показано, что функция $\Phi(z, s, v)$ допускает аналитическое продолжение по переменной z в плоскость с разрезом вдоль положительной полуоси от точки 1 до ∞ , и приведены различные разложения в ряды и интегральные представления этой функции для всех значений переменных z, s и v , при которых она имеет смысл. Рассмотрим функцию $\Psi(x, y, s)$, связанную с трансцендентой Лерха $\Phi(z, s, v)$ равенством

$$\Psi(x, y, s) = e^{iy} \Phi(-e^{iy}, s, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{i(n+1)y}}{(n+x)^s}.$$

Функция $\Psi(x, y, s)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + i(x-1) \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{i}{2} \Psi = \lambda \Psi, \quad (1.1)$$

где $s = 1/2 + i\lambda$. В справедливости уравнения (1.1) нетрудно убедиться, дифференцируя почленно ряд, которым задается функция $\Psi(x, y, s)$. Легко видеть, что оператор, стоящий в левой части уравнения (1.1), является формально самосопряженным. Непосредственно из определения следует, что функция $\Psi(x, y, s)$ периодична по y с периодом 2π :

$$\Psi(x, y + 2\pi, s) = \Psi(x, y, s). \quad (1.2)$$

Кроме того, нетрудно проверить, что функция $\Psi(x, y, s)$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$\Psi(x+1, y, s) + e^{-iy} \Psi(x, y, s) = \frac{1}{x^s}. \quad (1.3)$$

при $x \neq 0, -1, -2, \dots$. Из функционального уравнения (1.3) и 2π -периодичности по переменной y следует, что функция $\Psi(x, y, s)$ определяется своими значениями в точках (x, y) , принадлежащих прямоугольнику $\Pi = (0, 1) \times (0, 2\pi)$.

Из функционального уравнения (1.3) следует, что функция $\Psi(x, y, s)$ удовлетворяет следующему условию:

$$\frac{d}{dy} [\Psi(x+1, y, s) + e^{-iy} \Psi(x, y, s)] = 0. \quad (1.4)$$

Как нетрудно убедиться, из равенств (1.2) и (1.4) следуют самосопряженные краевые условия для дифференциального оператора, действующего в $L_2(\Pi)$, который задается дифференциальным выражением, стоящим в левой части уравнения (1.1), т.е. соответствующий этому выражению дифференциальный оператор, определенный на линейном многообразии, состоящем из функций $\varphi(x, y) \in C^2(\bar{\Pi})$, которые удовлетворяют краевым условиям

$$\frac{d}{dy} [\varphi(1, y) + e^{-iy} \varphi(0, y)] = 0, \quad y \in [0, 2\pi], \quad (1.5)$$

$$\varphi(x, 2\pi) = \varphi(x, 0), \quad x \in [0, 1], \quad (1.6)$$

является симметрическим оператором в $L_2(\Pi)$. Однако функция $\Psi(x, y, s)$ не принадлежит пространству $L_2(\Pi)$ и, соответственно, не может быть собственной функцией самосопряженного оператора, действующего в $L_2(\Pi)$. Как показывают вычисления (см. § 6), у уравнения (1.1) есть решения, принадлежащие $L_2(\Pi)$ и удовлетворяющие некоторым самосопряженным краевым условиям, которые содержат в себе краевые условия (1.5)–(1.6) как некоторый предельный случай. В связи с этим естественным образом возникает общая задача нахождения локальных краевых условий, с помощью которых выделяются области определений наиболее простых по структуре симметрических расширений минимального оператора, порожденного дифференциальным выражением

$$L[\varphi] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + i(x-1) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{i}{2} \varphi. \quad (1.7)$$

Перейдем к краткому изложению содержания работы. Основным результатом работы является описание (в терминах локальных краевых условий) областей определений семейства симметрических расширений минимального оператора, заданного дифференциальным выражением (1.7) (теорема 5.3). Соответствующие краевые условия имеют вид: $U_j(\varphi) = 0$, $j = 1, 2$, где

$$U_1(\varphi) = \frac{d}{dy} [\varphi(1, y) - \theta_1 e^{-iy} \varphi(0, y)], \quad (1.8)$$

$$U_2(\varphi) = \varphi(x, 2\pi) - \theta_2 \varphi(x, 0), \quad (1.9)$$

θ_1 и θ_2 – комплексные постоянные, по модулю равные единице: $|\theta_j| = 1$, $j = 1, 2$. Для корректного описания областей определения этих расширений вводятся специальное гильбертово пространство $\mathcal{H}^\circ(\Pi) \subset L_2(\Pi)$ и его подпространства $\mathcal{H}_{\theta_1, \theta_2}(\Pi) \subset \mathcal{H}^\circ(\Pi)$ (θ_1 и θ_2 – параметры, входящие в граничные условия), которые состоят из функций, принадлежащих пространству $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$ и удовлетворяющих краевым условиям. Показано, что функции из $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$ обладают обобщенными производными $\varphi_{xy}, \varphi_x \in L_2(\Pi)$ и имеют след φ_Γ на границе $\Gamma = \partial\Pi$, принадлежащий $L_2(\Gamma)$ (точное определение и основные свойства гильбертова пространства $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$ см. в § 4). Наиболее естественные и легко

проверяемые условия принадлежности функции $\varphi(x, y)$ гильбертову пространству $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$ формулируются в терминах свойств последовательности коэффициентов Фурье $\{a_n(x)\}_{n=-\infty}^\infty$ функции $\varphi(x, y)$ по системе $\{e^{i\beta y + iny}/\sqrt{2\pi}\}_{n=-\infty}^\infty$ (теорема 5.4). Краевые условия для функции из пространства $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$ понимаются как условия на след этой функции на границе. Отметим, что решения уравнения $L[\varphi] = \lambda\varphi$, которые являются аналогами функции $\Psi(x, y, s)$, таковы, что они имеют обобщенные производные φ_{xy} и φ_x , принадлежащие $L_2(\Pi)$, но не имеют обобщенной производной φ_y , принадлежащей $L_2(\Pi)$. Поэтому классических соболевских пространств, а также близких к ним по структуре классов функций с доминирующей смешанной производной для наших целей недостаточно. В §6 кратко изложена схема нахождения формального решения задачи на собственные значения для построенных симметрических операторов. Найдено точное решение бесконечной системы уравнений для коэффициентов Фурье собственных функций в случае $\theta_1 = -1$, $\theta_2 = e^{2\pi\beta i}$, $\beta \in (0, 1)$. Вопрос о сходимости (в топологии пространства $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$) соответствующих рядов Фурье в настоящей работе не рассматривается.

§ 2. Основные свойства функции $\Psi(x, y, s)$

Пусть

$$\Phi(z, s, v) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(v+n)^s}, \quad |z| < 1,$$

где $s, v \in \mathbb{C}$, $v \neq -1, -2, -3, \dots$. Как показано в [2], функция $\Phi(z, s, v)$ может быть аналитически продолжена по z в плоскость с разрезом вдоль положительной полуоси от точки 1 до ∞ . Положим

$$\Psi(x, y, s) = e^{iy} \Phi(-e^{iy}, s, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{i(n+1)y}}{(n+x)^s}. \quad (2.1)$$

Легко видеть, что ряд (2.1) сходится при $\operatorname{Re} s > 0$ при почти всех $y \in \mathbb{R}$, $x \neq -1, -2, \dots$. При $\operatorname{Re} s > 1$ ряд сходится абсолютно при всех $y \in \mathbb{R}$ и $x \in K$, где K – произвольный компакт, не содержащий точек $-1, -2, \dots$. Покажем, что функция Ψ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} + i(x-1) \frac{\partial \Psi}{\partial x} + is\Psi = 0. \quad (2.2)$$

Пусть

$$\Psi_n(x, y) = \frac{e^{i(n+1)y}}{(n+x)^s}.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 \Psi_n}{\partial x \partial y} + i(x-1) \frac{\partial \Psi_n}{\partial x} + s\Psi_n = \frac{e^{i(n+1)y}}{(n+x)^s} \left[-\frac{i(n+1)s}{n+x} - i(x-1)s \frac{1}{n+x} + is \right] = 0,$$

так как выражение в квадратных скобках обращается в нуль. Таким образом, каждое слагаемое ряда (2.1) удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.2). В силу линейности уравнения (2.2) функция Ψ также удовлетворяет

этому уравнению при $\operatorname{Re} s > a_0$, где достаточно велико $a_0 > 0$. При других s нужно воспользоваться принципом аналитического продолжения. Отметим следующие основные свойства функции $\Psi(x, y; s)$:

- 1) $\Psi(x, y + 2\pi, s) = \Psi(x, y, s)$ при почти всех x, y (периодичность по y);
- 2) $\Psi(x + 1, y, s) + e^{-iy}\Psi(x, y, s) = 1/x^s$ при почти всех x, y (функциональное уравнение).

Первое свойство очевидно. Докажем второе. Имеем

$$\begin{aligned} \Psi(x + 1, y, s) + e^{-iy}\Psi(x, y, s) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{i(n+1)y}}{(n+1+x)^s} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{iny}}{(n+x)^s} \\ &= \frac{1}{x^s} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{i(n+1)y}}{(n+1+x)^s} + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^{m+1} \frac{e^{i(m+1)y}}{(m+1+x)^s} = \frac{1}{x^s}. \end{aligned}$$

Отметим важное соотношение

$$\Psi(1, 0, s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^s} = (1 - 2^{1-s})\zeta(s), \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

где $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана, которое вытекает из известного представления дзета-функции Римана в полосе $\operatorname{Re} s > 0$ (см. [2]). Функцию $\Psi(x, y, s)$ достаточно задать в тех точках замкнутого прямоугольника $\bar{\Pi} = [0, 1] \times [0, 2\pi]$, в которых она имеет смысл. Условия 1) и 2) позволяют определить $\Psi(x, y, s)$ во всех точках плоскости, в которых она имеет смысл, по ее значениям в точках прямоугольника $\bar{\Pi}$. Нетрудно проверить, что функцию $\Psi(x, y, s)$ можно задать как решение дифференциального уравнения (2.2), удовлетворяющее условиям 1) и 2), т.е. что уравнение (2.2) не имеет других решений, удовлетворяющих этим условиям.

§ 3. Общая формула для $\operatorname{Im}(L[\varphi], \varphi)$

В этом параграфе мы выведем общую формулу для $\operatorname{Im}(L[\varphi], \varphi)$, которая далее используется для описания системы локальных краевых условий, задающих некоторый симметрический оператор, порожденный дифференциальным выражением (1.7). Везде далее мы предполагаем, что скалярное произведение в $L_2(\Pi)$ определяется формулой

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Pi} \overline{\varphi(x, y)} \psi(x, y) dx dy.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть $\varphi, \psi \in C^2(\bar{\Pi})$ и

$$\begin{aligned} l_1(\varphi, \psi) &= \int_0^{2\pi} (\overline{\varphi(1, y)} \psi_y(1, y) - \overline{\varphi(0, y)} \psi_y(0, y) + i \overline{\varphi(0, y)} \psi(0, y)) dy, \\ l_2(\varphi, \psi) &= \int_0^1 (\overline{\varphi_x(x, 2\pi)} \psi(x, 2\pi) - \overline{\varphi_x(x, 0)} \psi(x, 0)) dx. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Тогда

$$\operatorname{Im}(L[\varphi], \varphi) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} l_2(\varphi, \varphi) - \frac{1}{2} \operatorname{Im} l_1(\varphi, \varphi). \tag{3.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$(\varphi, L[\varphi]) = \int_{\Pi} \left(\varphi_{xy} + i(x-1)\varphi_x + \frac{1}{2}i\varphi \right) \bar{\varphi} dx dy = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \int_{\Pi} \varphi_{xy} \bar{\varphi} dx dy, \quad I_2 = \int_{\Pi} \left(i(x-1)\varphi_x \bar{\varphi} + \frac{i}{2}|\varphi|^2 \right) dx dy.$$

Интегрируя по частям, получим

$$I_1 = \int_0^{2\pi} dy \int_0^1 \bar{\varphi} d_x(\varphi_y) = \int_0^{2\pi} (\bar{\varphi} \varphi_y|_{x=0}^{x=1}) dy - \int_{\Pi} \bar{\varphi}_x \varphi_y dx dy,$$

$$\int_{\Pi} \bar{\varphi}_x \varphi_y dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{2\pi} \bar{\varphi}_x dy(\varphi) = \int_0^1 (\bar{\varphi}_x \varphi|_{y=0}^{y=2\pi}) dx - \int_{\Pi} \bar{\varphi} \varphi_{xy} dx dy.$$

Из этих формул следует, что

$$I_1 = l(\varphi, \varphi) - l_2(\varphi, \varphi) + \int_{\Pi} \bar{\varphi} \varphi_{xy} dx dy, \quad (3.3)$$

где

$$l(\varphi, \varphi) = \int_0^{2\pi} (\overline{\varphi(1, y)} \varphi_y(1, y) - \overline{\varphi(0, y)} \varphi_y(0, y)) dy, \quad (3.4)$$

а $l_2(\varphi, \varphi)$ определяется второй из формул (3.1). Аналогичным образом преобразуем интеграл I_2 :

$$I_2 = i \int_0^{2\pi} dy \int_0^1 (x-1) \bar{\varphi} d_x(\varphi) + \frac{i}{2} \int_{\Pi} |\varphi|^2 dx dy$$

$$= i \int_0^{2\pi} ((x-1)|\varphi|^2|_{x=0}^{x=1}) dy - i \int_{\Pi} ((x-1)\varphi \bar{\varphi}_x + |\varphi|^2) dx dy + \frac{i}{2} \int_{\Pi} |\varphi|^2 dx dy,$$

т.е.

$$I_2 = i \int_0^{2\pi} |\varphi(0, y)|^2 dy - \int_{\Pi} \left(i(x-1)\varphi \bar{\varphi}_x + \frac{1}{2}i|\varphi|^2 \right) dx dy. \quad (3.5)$$

Из формул (3.3)–(3.5) получаем

$$(\varphi, L[\varphi]) = l_1(\varphi, \varphi) - l_2(\varphi, \varphi) + (L[\varphi], \varphi), \quad (3.6)$$

где $l_i(\varphi, \varphi)$ ($i = 1, 2$) определены формулой (3.1). Из формулы (3.6) следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(L[\varphi], \varphi) &= \frac{1}{2i} ((L[\varphi], \varphi) - \overline{(L[\varphi], \varphi)}) \\ &= \frac{1}{2i} ((L[\varphi], \varphi) - (\varphi, L[\varphi])) = \frac{1}{2i} (l_2(\varphi, \varphi) - l_1(\varphi, \varphi)). \end{aligned}$$

Так как $\operatorname{Re} \operatorname{Im}(L[\varphi], \varphi) = \operatorname{Im}(L[\varphi], \varphi)$, то из последней формулы получаем (3.2). Предложение доказано.

Положим

$$b_1(\varphi, \psi) = \overline{\varphi(1, y)} \psi_y(1, y) - \overline{\varphi(0, y)} \psi_y(0, y) + i \overline{\varphi(0, y)} \psi(0, y), \quad (3.7)$$

$$b_2(\varphi, \psi) = \overline{\varphi_x(x, 2\pi)} \psi(x, 2\pi) - \overline{\varphi_x(x, 0)} \psi(x, 0). \quad (3.8)$$

Тогда формулу (3.2) можно записать в виде

$$\operatorname{Im}(L[\varphi], \varphi) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_0^1 b_2(\varphi, \varphi) dy - \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} b_1(\varphi, \varphi) dx. \quad (3.9)$$

Для нахождения краевых условий, при которых $\operatorname{Im}(L[\varphi], \varphi) = 0$, необходимо описать линейные многообразия в $L_2(\Pi)$, на которых обращаются в нуль граничные квадратичные формы $l_1(\varphi, \varphi)$ и $l_2(\varphi, \varphi)$. Далее мы будем рассматривать лишь линейные многообразия, выделяемые системой локальных краевых условий наиболее простой структуры. Рассмотрим сначала условия обращения в нуль граничной формы $l_1(\varphi, \varphi)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть $\theta_1 \in \mathbb{C}$, $|\theta_1| = 1$. Пусть $\varphi \in C^2(\overline{\Pi})$ и удовлетворяет условиям

$$U_1(\varphi) = \frac{d}{dy} [\varphi(1, y) - \theta_1 e^{-iy} \varphi(0, y)] = 0, \quad y \in [0, 2\pi], \quad (3.10)$$

$$\varphi(1, 2\pi) = \varphi(1, 0). \quad (3.11)$$

Тогда $l_1(\varphi, \varphi) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$l_1(\varphi, \varphi) = \int_0^{2\pi} b_1(\varphi, \varphi) dy,$$

где

$$b_1(\varphi, \varphi) = \overline{\varphi(1, y)} \varphi_y(1, y) - \overline{\varphi(0, y)} \varphi_y(0, y) + i|\varphi(0, y)|^2.$$

Вычислим $b_1(\varphi, \varphi)$ для функции φ , удовлетворяющей (3.10) и (3.11). Из (3.10) следует, что

$$\varphi(1, y) - \theta_1 e^{-iy} \varphi(0, y) = \mu = \text{const}, \quad (3.12)$$

где $\mu = \varphi(1, 0) - \theta_1 \varphi(0, 0)$. Из (3.12) получаем

$$\begin{aligned} \varphi(1, y) &= \theta_1 e^{-iy} \varphi(0, y) + \mu, \\ \frac{d\varphi(1, y)}{dy} &= \theta_1 e^{-iy} \left(\frac{d\varphi(0, y)}{dy} - i\varphi(0, y) \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Подставляя эти выражения в формулу для $b_1(\varphi, \varphi)$, получим

$$\begin{aligned} b_1(\varphi, \varphi) &= (\overline{\theta_1 e^{iy} \varphi(0, y)} + \overline{\mu}) \varphi_y(1, y) - \overline{\varphi(0, y)} \varphi_y(0, y) + i|\varphi(0, y)|^2 \\ &= \overline{\theta_1 e^{iy} \varphi(0, y)} \varphi_y(1, y) - \overline{\varphi(0, y)} \varphi_y(0, y) + i|\varphi(0, y)|^2 + \overline{\mu} \varphi_y(1, y) \\ &= B(\varphi, \varphi) + \overline{\mu} \varphi_y(1, y). \end{aligned}$$

Из (3.13) с учетом того, что $|\theta_1| = 1$, следует, что

$$B(\varphi, \varphi) = \overline{\varphi(0, y)} (\varphi_y(0, y) - i\varphi(0, y)) - \overline{\varphi(0, y)} \varphi_y(0, y) + i|\varphi(0, y)|^2 = 0,$$

т.е.

$$b_1(\varphi, \varphi) = \overline{\mu} \frac{d\varphi(1, y)}{dy},$$

где $\mu = \varphi(1, 0) - \theta_1 \varphi(0, 0)$. Далее,

$$\begin{aligned} l_1(\varphi, \varphi) &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} b_1(\varphi, \varphi) dy = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \left(\bar{\mu} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi(1, y)}{dy} dy \right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Im} (\bar{\mu} (\varphi(1, 2\pi) - \varphi(1, 0))) = 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

так как $\varphi(1, 2\pi) - \varphi(1, 0) = 0$. Предложение доказано.

Из предложения 3.2 следует, что если φ принадлежит классу $C^2(\bar{\Pi})$, удовлетворяет краевому условию $U_1(\varphi) = 0$ и $\varphi(1, 0) = \varphi(1, 2\pi) = 0$, то имеет место формула

$$\operatorname{Im}(L[\varphi], \varphi) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} l_2(\varphi, \varphi), \quad (3.15)$$

где

$$l_2(\varphi, \varphi) = \int_0^1 (\overline{\varphi_x(x, 2\pi)} \varphi(x, 2\pi) - \overline{\varphi_x(x, 0)} \varphi(x, 0)) dx. \quad (3.16)$$

§ 4. Гильбертовы пространства $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$, $\mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi)$ и $\mathcal{H}_{\theta_1, \theta_2}(\Pi)$

Пусть $\Pi = (0, 1) \times (0, 2\pi)$, $\Gamma = \partial\Pi$. Определим на функциях класса $C^2(\bar{\Pi})$ следующую норму:

$$\|\varphi\|^2 = \int_{\Pi} (|\varphi_{xy}|^2 + |\varphi_x|^2 + |\varphi|^2) dx dy. \quad (4.1)$$

Гильбертово пространство, полученное пополнением $C^2(\bar{\Pi})$ по указанной норме, будем обозначать через $\mathcal{H}(\Pi)$. Пространство $\mathcal{H}(\Pi)$ для наших целей является слишком широким, в частности потому, что для функций из $\mathcal{H}(\Pi)$ нельзя ввести след на границе, принадлежащий $L_2(\Gamma)$. Однако это можно сделать для подпространства $\mathcal{H}^\circ(\Pi) \subset \mathcal{H}(\Pi)$, которое получается как пополнение по норме (4.1) линейного многообразия гладких функций, удовлетворяющих одному дополнительному условию, согласованному с однородными самосопряженными краевыми условиями для дифференциального выражения (1.7), которые были получены в § 3. Дадим соответствующие определения. Пусть L° – подпространство в $C^2(\bar{\Pi})$, состоящее из функций, обращающихся в нуль в угловых точках $(1, 0)$ и $(1, 2\pi)$:

$$L^\circ = \{\varphi \in C^2(\bar{\Pi}) : \varphi(1, 0) = \varphi(1, 2\pi) = 0\}.$$

Через $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$ обозначим гильбертово пространство, полученное пополнением линейного многообразия $L^\circ \subset \mathcal{H}(\Pi)$ по норме (4.1). Гильбертово пространство $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$ играет основную роль в дальнейших построениях. Далее мы докажем, что области определений симметрических расширений минимального оператора, порожденного дифференциальным выражением (1.7), совпадают с линейными многообразиями функций, принадлежащих пространству $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$, у которых след на границе удовлетворяет полученной в предыдущем параграфе системе краевых условий. Очевидно, что $\mathcal{H}^\circ(\Pi) \subset \mathcal{H}(\Pi) \subset L_2(\Pi)$. Пусть $\varphi \in \mathcal{H}^\circ(\Pi)$, $\varphi_n \in L^\circ$, $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{H}(\Pi)} \varphi$. Пусть $\varphi_n|_\Gamma$ – сужение φ_n на границу области. Ниже будет показано, что последовательность $\{\varphi_n|_\Gamma\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна

в $L_2(\Gamma)$ (для произвольной функции из $\mathcal{H}(\Pi)$ аналогичное утверждение неверно), причем каждая из последовательностей $\{\varphi_n(x, 0)\}_{n=1}^\infty$ и $\{\varphi_n(x, 2\pi)\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна в соболевском пространстве $W_2^{(1)}[0, 1]$. Таким образом, последовательность $\{\varphi_n|_\Gamma\}_{n=1}^\infty$ сходится в $L_2(\Gamma)$. Положим

$$\varphi_\Gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n|_\Gamma,$$

где предел понимается в смысле сходимости в $L_2(\Gamma)$. Этот предел не зависит от выбора последовательности $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, $\varphi_n \in L^\circ$, сходящейся к φ в $\mathcal{H}(\Pi)$. Функцию φ_Γ будем называть следом функции φ из $\mathcal{H}(\Pi)$ на границе. Для упрощения обозначений значок Γ в обозначении следа далее будем опускать. Значения следа на соответствующих участках границы будем обозначать через $\varphi(x, 0)$, $\varphi(x, 2\pi)$, $\varphi(0, y)$, $\varphi(1, y)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. Пусть $\varphi \in \mathcal{H}^\circ(\Pi)$ и последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, где $\varphi_n \in L^\circ$, – фундаментальная последовательность такая, что $\varphi_n \rightarrow \varphi$ в $\mathcal{H}(\Pi)$. Тогда последовательность $\{\varphi_n|_\Gamma\}_{n=1}^\infty$ – фундаментальная последовательность в $L_2(\Gamma)$, последовательности $\{\varphi_n(x, 0)\}_{n=1}^\infty$ и $\{\varphi_n(x, 2\pi)\}_{n=1}^\infty$ – фундаментальные последовательности в $W_2^{(1)}[0, 1]$ и, соответственно, функция φ имеет след на границе, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\varphi(0, y), \varphi(1, y) \in L_2[0, 2\pi], \quad \varphi(x, 0), \varphi(x, 2\pi) \in W_2^{(1)}[0, 1].$$

В частности, функции $\varphi(x, 0)$ и $\varphi(x, 2\pi)$ – абсолютно непрерывные функции на отрезке $[0, 1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varphi_n \in L^\circ$ и $\varphi_n \rightarrow \varphi$ по норме пространства $\mathcal{H}(\Pi)$. Тогда

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \xrightarrow{L_2(\Pi)} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x \partial y} \xrightarrow{L_2(\Pi)} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},$$

где $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ – соответствующие обобщенные производные функции φ . Далее, интегрируя квадраты модулей обеих частей тождества

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_n(x, 0)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_m(x, 0)}{\partial x} \\ &= - \int_0^y \left(\frac{\partial^2 \varphi_n(x, \eta)}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial^2 \varphi_m(x, \eta)}{\partial x \partial \eta} \right) d\eta + \left(\frac{\partial \varphi_n(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_m(x, y)}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

по прямоугольнику Π и используя неравенство Гёльдера, получим

$$\left\| \frac{\partial \varphi_n(x, 0)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_m(x, 0)}{\partial x} \right\|_{L_2[0, 1]} \leq c_1 \|\varphi_n - \varphi_m\|_{\mathcal{H}(\Pi)},$$

где $c_1 > 0$ – некоторая постоянная. Таким образом, последовательность

$$\left\{ \frac{\partial \varphi_n(x, 0)}{\partial x} \right\}_{n=1}^\infty$$

фундаментальна в $L_2[0, 1]$, откуда следует, что

$$\frac{\partial \varphi_n(x, 0)}{\partial x} \xrightarrow{L_2[0, 1]} \tilde{\psi}(x) \in L_2[0, 1].$$

Так как $\varphi_n \in L^\circ$, то $\varphi_n(1, 0) = 0$, а тогда функции $\varphi_n(x, 0)$ удовлетворяют равенству

$$\varphi_n(x, 0) - \varphi_m(x, 0) = - \int_x^1 \left(\frac{\partial \varphi_n(\xi, 0)}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_m(\xi, 0)}{\partial \xi} \right) d\xi.$$

Из неравенства Гёльдера следует, что

$$\|\varphi_n(x, 0) - \varphi_m(x, 0)\|_{L_2[0,1]} \leq c_2 \left\| \frac{\partial \varphi_n(x, 0)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_m(x, 0)}{\partial x} \right\|_{L_2[0,1]} \leq c_3 \|\varphi_n - \varphi_m\|_{\mathcal{H}(\Pi)},$$

а тогда последовательность $\{\varphi_n(x, 0)\}_{n=1}^\infty$ — фундаментальная последовательность в соболевском пространстве $W_2^{(1)}[0, 1]$. То же самое, очевидно, справедливо и для последовательности $\{\varphi_n(x, 2\pi)\}_{n=1}^\infty$. Покажем, что последовательности $\{\varphi_n(1, y)\}_{n=1}^\infty$ и $\{\varphi_n(0, y)\}_{n=1}^\infty$ фундаментальны в $L_2[0, 2\pi]$. Из равенства

$$\varphi_n(1, y) - \varphi_m(1, y) = \int_0^1 \left(\xi \left(\frac{\partial \varphi_n(\xi, y)}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_m(\xi, y)}{\partial \xi} \right) + (\varphi_n(\xi, y) - \varphi_m(\xi, y)) \right) d\xi$$

и неравенства Гёльдера следует, что

$$\|\varphi_n(1, y) - \varphi_m(1, y)\|_{L_2[0,2\pi]} \leq c_4 \|\varphi_n - \varphi_m\|_{\mathcal{H}(\Pi)},$$

т.е. последовательность $\{\varphi_n(1, y)\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна в $L_2[0, 2\pi]$. Аналогичным образом доказывается, что последовательность $\{\varphi_n(0, y)\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна в $L_2[0, 2\pi]$. Таким образом, последовательность $\{\varphi_n|_\Gamma\}_{n=1}^\infty$ сходится в $L_2(\Gamma)$ к функции $\varphi_\Gamma \in L_2(\Gamma)$. При этом, как показано выше, существует последовательность $\{\psi_n(x)\}_{n=1}^\infty$, $\psi_n(x) \in W_2^{(1)}[0, 1]$, такая, что $\psi_n(x) \xrightarrow{L_2[0,1]} \varphi(x, 0)$ и $\psi'_n(x) \xrightarrow{L_2[0,1]} \tilde{\psi}(x)$, где $\tilde{\psi} \in L_2[0, 1]$. Отсюда следует, что функция $\varphi(x, 0)$ имеет обобщенную производную, принадлежащую $L_2[0, 1]$, т.е. $\varphi(x, 0) \in W_2^{(1)}[0, 1]$. Доказательство для $\varphi(x, 2\pi)$ аналогично. Предложение доказано.

Поскольку для функции $\varphi(x, y)$, принадлежащей пространству $\mathcal{H}(\Pi)$, корректно определен след на границе, причем функции $\varphi(x, 0), \varphi(x, 2\pi) \in W_2^{(1)}[0, 1]$, то для каждой функции $\varphi \in \mathcal{H}(\Pi)$ существуют односторонние пределы

$$\varphi(+0, 0), \quad \varphi(+0, 2\pi), \quad \varphi(1-0, 0), \quad \varphi(1-0, 2\pi).$$

Каждый из этих односторонних пределов можно рассматривать как линейный непрерывный функционал на пространстве $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$. Доказательство этого утверждения основано на тех же самых рассуждениях, которые использовались выше. Например, в случае функционала $\varphi(+0, 0)$ это делается следующим образом. Для гладкой функции (класса $C^2(\bar{\Pi})$) справедливо равенство

$$\varphi(+0, 0) = \lim_{x \rightarrow +0} \varphi(x, 0) = \int_0^1 \frac{d}{dx} ((x-1)\varphi(x, 0)) dx,$$

из которого (с учетом того, что $\varphi(x, 0) \in W_2^{(1)}[0, 1]$) стандартным образом выводится оценка

$$|\varphi(+0, 0)| \leq c \|\varphi(x, 0)\|_{W_2^{(1)}[0,1]} \leq c' \|\varphi\|_{\mathcal{H}(\Pi)},$$

где $c > 0$, $c' > 0$ – некоторые постоянные. Ввиду плотности L° в $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$ отсюда следует, что $\varphi(+0, 0)$ – линейный непрерывный функционал на пространстве $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$. Заметим, что функционалы $\varphi(1 - 0, 0)$, $\varphi(1 - 0, 2\pi)$ обращаются в нуль на L° , а значит, и на всем пространстве $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$. Таким образом, функция $\varphi \in \mathcal{H}^\circ(\Pi)$ удовлетворяет условию $\varphi(1 - 0, 0) = \varphi(1 - 0, 2\pi) = 0$. Пусть $\theta_1 \in \mathbb{C}$, $|\theta_1| = 1$ и $L_{\theta_1} = \{\varphi \in L^\circ : U_1(\varphi) = 0\}$, где $U_1(\varphi)$ – линейная форма, заданная равенством

$$U_1(\varphi) = \frac{d}{dy} [\varphi(1, y) - \theta_1 e^{-iy} \varphi(0, y)].$$

Пусть $\mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi)$ – гильбертово пространство, полученное пополнением линейного многообразия L_{θ_1} по норме (4.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть функция $\varphi \in \mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi)$. Тогда

$$\operatorname{Im}(L[\varphi], \varphi) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} l_2(\varphi, \varphi), \quad (4.2)$$

где

$$l_2(\varphi, \psi) = \int_0^1 (\overline{\varphi_x(x, 2\pi)} \psi(x, 2\pi) - \overline{\varphi_x(x, 0)} \psi(x, 0)) dx. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$B(\varphi, \psi) = \frac{1}{2} \operatorname{Im} l_2(\varphi, \psi), \quad \varphi, \psi \in \mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi). \quad (4.4)$$

Из предложения 3.1 следует, что это корректно определенная полуторалинейная форма на $\mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi) \times \mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi)$. Из определения нормы в $\mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi)$ следует, что

$$\begin{aligned} |(L[\varphi], \psi)| &\leq C_1 \|\varphi\|_{\mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi)} \|\psi\|_{\mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi)}, \\ |B(\varphi, \psi)| &\leq C_2 \|\varphi\|_{\mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi)} \|\psi\|_{\mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi)}, \end{aligned}$$

т.е. полуторалинейные формы $(L[\varphi], \psi)$ и $B(\varphi, \psi)$ непрерывны на $\mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi) \times \mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi)$. Равенство

$$\operatorname{Im}(L[\varphi], \varphi) = B(\varphi, \varphi) \quad (4.5)$$

в предыдущем параграфе было установлено для всех $\varphi \in \mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi) \cap L_{\theta_1}$. Так как $\mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi) \cap L_{\theta_1}$ плотно в $\mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi)$, то (4.5) справедливо для всех $\varphi \in \mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi)$.

Если V – любое подпространство в $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$ на котором $l_2(\varphi, \varphi) = 0$, то из последней формулы следует, что $\operatorname{Im}(L[\varphi], \varphi) = 0$ при $\varphi \in \mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi) \cap V$. Простейшее краевое условие, приводящее к равенству $l_2(\varphi, \varphi) = 0$, это квазипериодическое краевое условие по переменной y . Пусть $|\theta_2| = 1$ и

$$V_{\theta_2}(\Pi) = \{\varphi \in \mathcal{H}^\circ(\Pi) : \varphi(x, 2\pi) = \theta_2 \varphi(x, 0)\}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_x(x, 2\pi)} \varphi(x, 2\pi) - \overline{\varphi_x(x, 0)} \varphi(x, 0) &= |\theta_2|^2 \overline{\varphi_x(x, 0)} \varphi(x, 0) - \overline{\varphi_x(x, 0)} \varphi(x, 0) \\ &= (|\theta_2|^2 - 1) \overline{\varphi_x(x, 0)} \varphi(x, 0) = 0, \end{aligned}$$

то из предыдущей формулы следует, что $l_2(\varphi, \varphi) = 0$ при $\varphi \in V_{\theta_2}(\Pi)$. Пусть $|\theta_1| = |\theta_2| = 1$. Положим

$$\mathcal{H}_{\theta_1, \theta_2}(\Pi) = \mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi) \cap V_{\theta_2}(\Pi). \quad (4.6)$$

Тогда $\text{Im}(L[\varphi], \varphi) = 0$ при $\varphi \in \mathcal{H}_{\theta_1, \theta_2}(\Pi)$. Каждое из пространств $\mathcal{H}_{\theta_1, \theta_2}(\Pi)$, где $|\theta_i| = 1$, $i = 1, 2$, является областью определения некоторого симметрического расширения минимального оператора, порожденного дифференциальным выражением (1.7). Положим $D(T_{\theta_1, \theta_2}) = \mathcal{H}_{\theta_1, \theta_2}(\Pi)$,

$$T_{\theta_1, \theta_2} \varphi = L[\varphi] \quad \text{при} \quad \varphi \in \mathcal{H}_{\theta_1, \theta_2}(\Pi).$$

Как было показано выше, в этом случае $\text{Im}(T_{\theta_1, \theta_2} \varphi, \varphi) = 0$, откуда, как известно, следует, что оператор $T_{\theta_1, \theta_2}: D(T_{\theta_1, \theta_2}) \rightarrow L_2(\Pi)$ является симметрическим. Пусть функция $\varphi \in \mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi)$. Тогда из определения пространства $\mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi)$ следует, что существует последовательность гладких функций (класса $C^2(\bar{\Pi})$) таких, что $U_1(\varphi_n) = 0$ и φ_n сходится к φ по норме пространства $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$. Из вида граничной формы $U_1(\varphi)$ следует, что условие $U_1(\varphi_n) = 0$ эквивалентно существованию постоянной μ_n такой, что выполняется равенство

$$\varphi_n(1, y) - \theta_1 e^{-iy} \varphi_n(0, y) = \mu_n. \quad (4.7)$$

Деля обе части (4.7) на 2π и интегрируя по отрезку $[0, 2\pi]$, получим

$$\mu_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\varphi_n(1, y) - \theta_1 e^{-iy} \varphi_n(0, y)) dy.$$

Как показано выше, из сходимости последовательности $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ к функции φ по норме пространства $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$ следует, что последовательности $\{\varphi(0, y)\}_{n=1}^\infty$ и $\{\varphi_n(1, y)\}_{n=1}^\infty$ сходятся в $L_2[0, 2\pi]$ к функциям, являющимся следами функции φ на соответствующих участках границы. В этом случае, как нетрудно видеть, числовая последовательность $\{\mu_n\}_{n=1}^\infty$ сходится: $\mu_n \rightarrow \mu$ при $n \rightarrow \infty$. Так как последовательности $\{\varphi_n(0, y)\}_{n=1}^\infty$ и $\{\varphi_n(1, y)\}_{n=1}^\infty$ содержат подпоследовательности, сходящиеся почти всюду на $[0, 2\pi]$, то из равенства (4.7) следует, что след функции φ на границе удовлетворяет условию

$$\varphi(1, y) - \theta_1 e^{-iy} \varphi(0, y) = \mu \quad (4.8)$$

при почти всех $y \in [0, 2\pi]$. Так как производная постоянной равна нулю, то это условие можно записать в виде

$$\frac{d}{dy} [\varphi(1, y) - \theta_1 e^{-iy} \varphi(0, y)] = 0.$$

Хотя функции $\varphi(0, y)$ и $\varphi(1, y)$ могут не иметь обобщенных производных по y , краевое условие (4.8) имеет смысл для любой функции $\varphi \in \mathcal{H}^\circ(\Pi)$. Далее мы условимся записывать это краевое условие всегда в виде $U_1(\varphi) = 0$, понимая его в указанном выше смысле. Тогда всякая функция φ , принадлежащая пространству $\mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi)$, удовлетворяет условию $U_1(\varphi) = 0$. Если функция φ принадлежит пространству $\mathcal{H}_{\theta_1, \theta_2}(\Pi)$, то она удовлетворяет краевым условиям

$$U_1(\varphi) = \frac{d}{dy} [\varphi(1, y) - \theta_1 e^{-iy} \varphi(0, y)] = 0, \quad (4.9)$$

$$U_2(\varphi) = \varphi(x, 2\pi) - \theta_2 \varphi(x, 0) = 0. \quad (4.10)$$

Пусть $\widetilde{\mathcal{H}}_{\theta_1}(\Pi)$ – подпространство в $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$, состоящее из всех функций $\varphi \in \mathcal{H}^\circ(\Pi)$, удовлетворяющих условию $U_1(\varphi) = 0$, $\widetilde{\mathcal{H}}_{\theta_1, \theta_2}(\Pi)$ – подпространство в $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$, состоящее из всех функций $\varphi \in \mathcal{H}^\circ(\Pi)$, удовлетворяющих условиям $U_1(\varphi) = U_2(\varphi) = 0$. Очевидно, что

$$\mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi) \subset \widetilde{\mathcal{H}}_{\theta_1}(\Pi), \quad \mathcal{H}_{\theta_1, \theta_2}(\Pi) \subset \widetilde{\mathcal{H}}_{\theta_1, \theta_2}(\Pi),$$

причем вложения являются изометрическими. Возникает естественный вопрос о совпадении этих пространств. Из определения пространства $\widetilde{\mathcal{H}}_{\theta_1, \theta_2}(\Pi)$ и равенства (4.6) следует, что

$$\mathcal{H}_{\theta_1, \theta_2}(\Pi) = \mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi) \cap V_{\theta_2}(\Pi), \quad \widetilde{\mathcal{H}}_{\theta_1, \theta_2}(\Pi) = \widetilde{\mathcal{H}}_{\theta_1}(\Pi) \cap V_{\theta_2}(\Pi).$$

Таким образом, если $\widetilde{\mathcal{H}}_{\theta_1}(\Pi) = \mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi)$, то $\widetilde{\mathcal{H}}_{\theta_1, \theta_2}(\Pi) = \mathcal{H}_{\theta_1, \theta_2}(\Pi)$. Здесь мы сталкиваемся с довольно типичной для теории гильбертовых функциональных пространств ситуацией, когда нужно доказать равносильность двух различных определений вводимого класса функций, удовлетворяющих некоторым граничным условиям: определения этого класса как замыкания множества гладких функций, удовлетворяющих соответствующим граничным условиям, и определения его как подпространства объемлющего пространства функций с обобщенными производными, состоящего из всех функций, удовлетворяющих тем же граничным условиям. Как известно, в случае пространств Соболева для достаточно “хороших” областей и граничных условий эти определения оказываются эквивалентными (см., например, [6]). Вопрос о том, так ли это в нашем случае, требует дополнительного исследования, которому посвящен § 5.

§ 5. Симметрические операторы $T_{\theta_1, \theta_2}(|\theta_1| = |\theta_2| = 1)$

Напомним, что $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$ – гильбертово пространство, являющееся пополнением линейного многообразия

$$L^\circ = \{\varphi \in C^2(\overline{\Pi}) : \varphi(1, 0) = \varphi(1, 2\pi) = 0\}$$

по норме $\|\cdot\|_{\mathcal{H}(\Pi)}$, где

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}(\Pi)}^2 = \int_{\Pi} (|\varphi_{xy}|^2 + |\varphi_x|^2 + |\varphi|^2) dx dy.$$

Выше было показано, что функция $\varphi \in \mathcal{H}^\circ(\Pi)$ имеет след φ_Γ на границе, $\varphi_\Gamma \in L_2(\Gamma)$, причем $\varphi(x, 0)$, $\varphi(x, 2\pi) \in W_2^{(1)}[0, 1]$. Гильбертово пространство $\widetilde{\mathcal{H}}_{\theta_1}(\Pi)$ было определено выше как подпространство в $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$, состоящее из функций $\varphi \in \mathcal{H}^\circ(\Pi)$, удовлетворяющих краевому условию $U_1(\varphi) = 0$. Перейдем к доказательству плотности гладких функций в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}_\theta(\Pi)$. Пусть $\varphi \in \widetilde{\mathcal{H}}_\theta(\Pi)$. Тогда φ удовлетворяет краевому условию $U_1(\varphi) = 0$, а значит, существует постоянная $\mu \in \mathbb{C}$ такая, что

$$\varphi(1, y) - \theta_1 e^{-iy} \varphi(0, y) = \mu$$

почти всюду на $[0, 2\pi]$. Пусть

$$\varphi(x, y) = \mu \theta_1^{-1} e^{iy} (x - 1) + \varphi_1(x, y).$$

Тогда функция $\varphi_1(x, y)$ удовлетворяет краевому условию

$$\varphi_1(1, y) = \theta_1 e^{-iy} \varphi_1(0, y). \quad (5.1)$$

Так как функция $\varphi_0(x, y) = (x - 1)e^{iy}$ принадлежит $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$, то и $\varphi_1(x, y)$ принадлежит $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$. Функция $\varphi_0(x, y)$ является бесконечно дифференцируемой, поэтому $\varphi(x, y)$ можно приблизить гладкой функцией (класса $C^2(\overline{\Pi})$), если функцию $\varphi_1(x, y)$, удовлетворяющую (5.1), можно приблизить гладкой функцией (класса $C^2(\overline{\Pi})$), удовлетворяющей краевому условию (5.1). Краевое условие (4.1) несколько неудобно для анализа, поэтому целесообразно ввести новое пространство функций, удовлетворяющих обычному условию квазипериодичности по переменной x . Пусть

$$\mathcal{G}^\circ(\Pi) = \{\psi = U\varphi : \varphi \in \mathcal{H}^\circ(\Pi)\},$$

где оператор U действует по формуле

$$(U\varphi)(x, y) = e^{ixy} \varphi(x, y).$$

В пространстве $\mathcal{G}^\circ(\Pi)$ введем норму $\|\cdot\|_{\mathcal{G}^\circ(\Pi)}$, где

$$\|\psi\|_{\mathcal{G}^\circ(\Pi)} = \|\varphi\|_{\mathcal{H}^\circ(\Pi)},$$

если $\psi = U\varphi$, $\varphi \in \mathcal{H}^\circ(\Pi)$. Оператор $U: \mathcal{H}^\circ(\Pi) \rightarrow \mathcal{G}^\circ(\Pi)$ является изометрическим изоморфизмом соответствующих пространств. Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} &= e^{-ixy} \left\{ \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} - iy\psi(x, y) \right\}, \\ \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} &= e^{-ixy} \left\{ \frac{\partial^2 \psi(x, y)}{\partial x \partial y} - iy \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial y} - i\psi(x, y) \right\} \\ &\quad + e^{-ixy} \left\{ -ix \frac{\partial \psi(x, y)}{\partial x} - xy\psi(x, y) \right\} \end{aligned}$$

при $\varphi \in C^2(\overline{\Pi})$, для квадрата нормы $[\|\psi\|_{\mathcal{G}^\circ(\Pi)}]^2$ получим формулу

$$[\|\psi\|_{\mathcal{G}^\circ(\Pi)}]^2 = \int_{\Pi} \sum_{j=1}^3 |(A_j \psi)(x, y)|^2 dx dy,$$

где A_j , $j = 1, 2, 3$, – дифференциальные операторы

$$A_1 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - iy \frac{\partial \psi}{\partial y} - ix \frac{\partial \psi}{\partial x} - (i + xy)\psi, \quad A_2 \psi = i \frac{\partial \psi}{\partial x} + y\psi, \quad A_3 \psi = \psi.$$

Непосредственно из определения нормы следует, что если $\psi \in C^2(\overline{\Pi})$, то

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{L_2(\Pi)} &\leq c_1 \|\psi\|_{\mathcal{G}^\circ(\Pi)}, \\ \|\psi_x\|_{L_2(\Pi)} &\leq c_1 \|\psi\|_{\mathcal{G}^\circ(\Pi)}, \end{aligned}$$

где $c_1 > 0$ – некоторая постоянная. Пусть дифференциальные операторы B_j определены равенствами

$$B_1 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - iy \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{i}{2} \psi, \quad B_2 \psi = i \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad B_3 \psi = \psi. \quad (5.2)$$

Положим

$$\|\psi\|_{\mathcal{G}^\circ(\Pi)}^2 = \int_{\Pi} \sum_{j=1}^3 |(B_j\psi)(x, y)|^2 dx dy. \quad (5.3)$$

Легко видеть, что $\|\cdot\|_{\mathcal{G}^\circ(\Pi)}$ и $|||\cdot|||_{\mathcal{G}^\circ(\Pi)}$ – эквивалентные нормы на пространстве $\mathcal{G}^\circ(\Pi)$. В самом деле, $B_j = A_j + L_j$, где L_j – дифференциальные операторы первого порядка, не зависящие от $\frac{\partial\psi}{\partial y}$. При этом

$$L_1\psi = ix\frac{\partial\psi}{\partial x} - xy\psi + \frac{i}{2}\psi, \quad L_2\psi = -y\psi, \quad L_3\psi = 0.$$

Из неравенства треугольника следует, что

$$\|B_j\psi\|_{L_2(\Pi)} \leq \|A_j\psi\|_{L_2(\Pi)} + \|L_j\psi\|_{L_2(\Pi)}.$$

Так как

$$\|L_j\psi\|_{L_2(\Pi)} \leq c_j (\|\psi_x\|_{L_2(\Pi)} + \|\psi\|_{L_2(\Pi)}) \leq \tilde{c}_j |||\psi|||_{\mathcal{G}^\circ(\Pi)},$$

то $\|\psi\|_{\mathcal{G}^\circ(\Pi)} \leq C |||\psi|||_{\mathcal{G}^\circ(\Pi)}$. Неравенство $|||\psi|||_{\mathcal{G}^\circ(\Pi)} \leq D \|\psi\|_{\mathcal{G}^\circ(\Pi)}$ получается аналогичным образом, т.е. $\|\cdot\|_{\mathcal{G}^\circ(\Pi)}$ и $|||\cdot|||_{\mathcal{G}^\circ(\Pi)}$ – эквивалентные нормы на $\mathcal{G}^\circ(\Pi)$. Таким образом, эквивалентное скалярное произведение в пространстве $\mathcal{G}^\circ(\Pi)$ имеет вид

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\Pi} \sum_{j=1}^3 \overline{(B_j\varphi)(x, y)} (B_j\psi)(x, y) dx dy,$$

или

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{j=1}^3 (B_j\varphi, B_j\psi)_{L_2(\Pi)},$$

где операторы B_j ($j = 1, 2, 3$) заданы формулами (5.2). Заметим, что операторы B_j – симметрические дифференциальные операторы с коэффициентами, зависящими только от переменной y . Так как оператор U переводит L° в себя, то пространство $\mathcal{G}^\circ(\Pi)$ есть пополнение L° по норме (5.3). Пусть $\psi \in \mathcal{G}^\circ(\Pi)$, $\varphi \in \mathcal{H}^\circ(\Pi)$ и $\psi(x, y) = (U\varphi)(x, y) = e^{ixy}\varphi(x, y)$. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$, где $\varphi_n \in L^\circ$, – фундаментальная последовательность, сходящаяся к φ по норме пространства $\mathcal{H}(\Pi)$. Как было показано в §3, при этом $\varphi_n|_\Gamma \rightarrow \varphi_\Gamma$ в $L_2(\Gamma)$, где φ_Γ – след функции $\varphi \in \mathcal{H}^\circ(\Pi)$ на границе, причем $\varphi_n(x, 0) \rightarrow \varphi(x, 0)$, $\varphi_n(x, 2\pi) \rightarrow \varphi(x, 2\pi)$ по норме пространства $W_2^{(1)}[0, 1]$. Последовательность $\psi_n = U\varphi_n$ – очевидно, фундаментальная последовательность в $\mathcal{G}^\circ(\Pi)$. Из формулы $\psi_n(x, y) = e^{ixy}\varphi_n(x, y)$ следует, что последовательность $\{\psi_n|_\Gamma\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна в $L_2(\Gamma)$, причем последовательности $\{\psi_n(x, 0)\}_{n=1}^\infty$ и $\{\psi_n(x, 2\pi)\}_{n=1}^\infty$ фундаментальны в $W_2^{(1)}[0, 1]$. Таким образом, функция ψ , принадлежащая пространству $\mathcal{G}^\circ(\Pi)$, имеет след на границе, принадлежащий $L_2(\Gamma)$, причем $\psi(x, 0)$ и $\psi(x, 2\pi)$ принадлежат $W_2^{(1)}[0, 1]$, и удовлетворяет условию $\psi(1-0, 0) = \psi(1-0, 2\pi) = 0$. Если функция φ удовлетворяет условию (5.1), то функция ψ , как легко видеть, удовлетворяет квазипериодическому краевому условию: $\psi(1, y) = \theta_1\psi(0, y)$. Пусть

$$\tilde{\mathcal{G}}_{\theta_1}(\Pi) = \{\psi \in \mathcal{G}^\circ(\Pi) : \psi(1, y) = \theta_1\psi(0, y)\}.$$

Если $\varphi \in \widetilde{\mathcal{H}}_{\theta_1}(\Pi)$, то, как было показано выше, существует постоянная λ такая, что

$$\varphi = U^{-1}\psi + \lambda\varphi_0,$$

где $\psi \in \widetilde{\mathcal{G}}_{\theta_1}(\Pi)$, а φ_0 – фиксированная гладкая функция, принадлежащая $\widetilde{\mathcal{H}}_{\theta_1}(\Pi)$. При этом нормы $\|U^{-1}\psi\|_{\mathcal{H}^\circ(\Pi)}$ и $\|\psi\|_{\mathcal{G}^\circ(\Pi)}$ эквивалентны. Учитывая, что U^{-1} переводит $C^2(\overline{\Pi})$ в себя, доказательство плотности множества гладких функций в $\widetilde{\mathcal{H}}_{\theta_1}(\Pi)$ эквивалентно доказательству соответствующего утверждения для пространства $\widetilde{\mathcal{G}}_{\theta_1}(\Pi)$. Пусть $\mathcal{G}_{\theta_1}(\Pi)$ – пополнение линейного многообразия, состоящего из функций $\varphi \in \mathcal{G}^\circ(\Pi) \cap C^2(\overline{\Pi})$, удовлетворяющих условию $\varphi(1, y) = \theta_1\varphi(0, y)$, по норме пространства $\mathcal{G}^\circ(\Pi)$. Тогда гильбертово пространство $\mathcal{G}_{\theta_1}(\Pi)$ изометрически вложено в гильбертово пространство $\widetilde{\mathcal{G}}_{\theta_1}(\Pi)$. В этом случае утверждение о плотности гладких функций в $\mathcal{G}_{\theta_1}(\Pi)$ эквивалентно равенству

$$\mathcal{G}_{\theta_1}(\Pi) = \widetilde{\mathcal{G}}_{\theta_1}(\Pi). \quad (5.4)$$

ТЕОРЕМА 5.1. *Пространства $\mathcal{G}_{\theta_1}(\Pi)$ и $\widetilde{\mathcal{G}}_{\theta_1}(\Pi)$ совпадают при всех $|\theta_1| = 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $\mathcal{G}_{\theta_1}(\Pi)$ плотно в $\widetilde{\mathcal{G}}_{\theta_1}(\Pi)$. Если это не так, то найдется вектор $\varphi_0 \neq 0$, $\varphi_0 \in \widetilde{\mathcal{G}}_{\theta_1}(\Pi)$, такой, что $\langle \varphi_0, \psi \rangle = 0$ при любых $\psi \in \mathcal{G}_{\theta_1}(\Pi)$. Так как $|\theta_1| = 1$, то $\theta_1 = e^{2\pi i \alpha}$, $\alpha \in [0, 1]$. Рассмотрим случай $\theta_1 \neq 1$, т.е. $\alpha \in (0, 1)$. Пусть $V \subset \mathcal{G}^\circ(\Pi)$ – линейное многообразие такое, что

$$V = \{e^{2\pi i \alpha x + 2\pi i n x} \eta(y) : n \in \mathbb{Z}, \eta \in C^2[0, 2\pi], \eta(0) = \eta(2\pi) = 0\}.$$

Очевидно, что $V \subset \mathcal{G}_{\theta_1}(\Pi)$, а значит, $\langle \varphi_0, \psi \rangle = 0$ при $\psi \in V$. На гладких функциях полуторалинейная форма $\langle \varphi, \psi \rangle$ задана следующим образом:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{j=1}^3 (B_j \varphi, B_j \psi)_{L_2(\Pi)},$$

где

$$B_1 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - i \left(y \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} \right), \quad B_2 = i \frac{\partial}{\partial x}, \quad B_3 = I.$$

После интегрирования по частям с учетом того, что $B_j^* = B_j$, получим

$$(B_j \varphi, B_j \psi)_{L_2(\Pi)} = \Gamma_j(\varphi, \psi) + (\varphi, B_j^2 \psi)_{L_2(\Pi)}, \quad (5.5)$$

где $\Gamma_j(\varphi, \psi)$ – граничные полуторалинейные формы, вид которых будет указан далее. Так как функция ψ удовлетворяет нулевым граничным условиям по переменной y

$$\psi(x, 0) = \psi(x, 2\pi) = \psi_x(x, 0) = \psi_x(x, 2\pi) = 0,$$

то граничные полуторалинейные формы не содержат интегралов по отрезкам $\partial\Pi$, на которых $y = 0$ или $y = 2\pi$. Простые вычисления показывают, что граничные формы $\Gamma_j(\varphi, \psi)$ имеют вид

$$\Gamma_j(\varphi, \psi) = \sum_{k=1}^m c_k \Gamma(\varphi, D_j \psi),$$

где

$$\Gamma(\varphi, \psi) = \int_0^{2\pi} (\overline{\varphi(1, y)}\psi(1, y) - \overline{\varphi(0, y)}\psi(0, y)) dy,$$

c_k – некоторые постоянные, а D_j – дифференциальные операторы порядка не выше 2 с гладкими коэффициентами, зависящими только от y , т.е.

$$(D_j\varphi)(x, y) = \sum_{0 \leq k+l \leq 2} a_{k,l}^{(j)}(y) \frac{\partial^{k+l}\psi(x, y)}{\partial x^k \partial y^l}.$$

Из определения многообразия V следует, что каждая функция $\psi_j = D_j\psi$ удовлетворяет квазипериодическому краевому условию

$$\psi_j(1, y) = \theta_1 \psi_j(0, y), \quad j = 1, 2, 3.$$

Функционалы, стоящие в обеих частях формулы (5.5), являются непрерывными функционалами на $\tilde{\mathcal{G}}_{\theta_1}(\Pi)$ при каждом фиксированном $\psi \in V$, поэтому после предельного перехода получим, что формула (5.5) справедлива при всех $\varphi \in \tilde{\mathcal{G}}_{\theta_1}(\Pi)$, $\psi \in V$. Квазипериодическое краевое условие, как известно, является самосопряженным, т.е. $\Gamma(\varphi, D_j\psi) = 0$, а значит, $\Gamma_j(\varphi, \psi) = 0$ при $\psi \in V$. Таким образом, получаем, что

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \sum_{j=1}^3 (\varphi, B_j^2 \psi)_{L_2(\Pi)}$$

при $\psi \in V$. Пусть $T = B_1^2 + B_2^2 + B_3^2$. Тогда из предыдущей формулы следует равенство

$$\langle \varphi, \psi \rangle = (\varphi, T\psi)_{L_2(\Pi)}, \quad \varphi \in \tilde{\mathcal{G}}_{\theta_1}(\Pi), \quad \psi \in V.$$

В частности, полагая в этой формуле $\varphi = \varphi_0$, получим

$$(\varphi_0, T\psi)_{L_2(\Pi)} = 0 \quad (5.6)$$

при всех $\psi \in V$. Если $\psi \in V$, то $\psi \equiv e^{i\gamma x} \eta(y)$, где $\gamma = 2\pi\alpha + 2\pi n$, $\eta \in C^2[0, 2\pi]$. Несложное вычисление, использующее явные формулы для операторов B_j , приводит к следующему результату:

$$T(e^{i\gamma x} \eta) \equiv e^{i\gamma x} (L\eta)(y),$$

где L – обыкновенный дифференциальный оператор

$$L\eta = -\frac{d}{dy} \left((\gamma - y)^2 \frac{d\eta}{dy} \right) + \left(\frac{3}{4} + \gamma^2 \right) \eta.$$

Разложим функцию $\varphi_0(x, y)$ в ряд Фурье по системе $\{e^{2\pi\alpha i + 2\pi i n x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Тогда

$$\varphi_0(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n^{(0)}(y) e^{2\pi\alpha i x + 2\pi i n x},$$

где $f_n^{(0)} \in L_2[0, 2\pi]$. Учитывая ортогональность системы $\{e^{2\pi\alpha i x + 2\pi i n x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ на $[0, 1]$, получим

$$\int_0^{2\pi} \overline{f_n^{(0)}(y)} (L\eta)(y) dy = (f_n^{(0)}, L\eta)_{L_2[0, 2\pi]} = 0$$

при всех $\eta \in C^2[0, 2\pi]$ таких, что $\eta(0) = \eta(2\pi) = 0$. Покажем, что отсюда следует, что $f_n^{(0)} = 0$. Рассмотрим два случая.

Пусть $n \neq 0$. Тогда точка $\gamma = 2\pi\alpha + 2\pi n$ не лежит на отрезке $[0, 2\pi]$. Дифференциальное выражение

$$L\eta = -\frac{d}{dy} \left(p_0(y) \frac{d\eta}{dy} \right) + p_1\eta,$$

где $p_0(y) = (\gamma - y)^2 \geq c_0 > 0$, $y \in [0, 2\pi]$, $p_1 > 0$, в случае самосопряженных граничных условий $\eta(0) = \eta(2\pi) = 0$ задает самосопряженный оператор Штурма–Лиувилля, который, как известно, обладает полной системой собственных функций $\{\eta_k\}_{k=1}^\infty$, поэтому

$$(f_n^{(0)}, \eta_k)_{L_2[0, 2\pi]} = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

откуда следует, что $f_n^{(0)} = 0$ при $n \neq 0$.

Рассмотрим второй случай, т.е. случай, когда $n = 0$. Тогда функция $p_0(y) = (\gamma - y)^2$ обращается в нуль во внутренней точке отрезка $[0, 2\pi]$, так как $\gamma = 2\pi\alpha \in (0, 2\pi)$ при $\alpha \in (0, 1)$. Пусть $f_0^{(0)} = f$. Тогда $(f, L\eta)_{L_2[0, 2\pi]} = 0$ при всех $\eta \in C^2[0, 2\pi]$. Так как в этом случае $p_0(y) = (y - \gamma)^2$ обращается в нуль при $y = \gamma \in (0, 2\pi)$, то предыдущие рассуждения в данном случае не применимы. Пусть $0 < \beta < \gamma$. Тогда при $\eta \in C_0^\infty(0, \beta)$ справедливо равенство

$$(f, L\eta)_{L_2[0, 2\pi]} = (f, L\eta)_{L_2[0, \beta]} = (L^*f, \eta)_{L_2[0, \beta]} = 0. \quad (5.7)$$

На отрезке $[0, \beta]$ функция $p_0(y) > 0$ (регулярный случай). Как показано в [7], в регулярном случае область определения оператора, сопряженного к минимальному оператору, порожденному дифференциальным выражением

$$l[\eta] = -\frac{d}{dy} \left(p_0(y) \frac{d\eta}{dy} \right) + p_1\eta,$$

состоит из функций η таких, что η и η' абсолютно непрерывны на $[0, \beta]$ и $l[\eta] \in L_2[0, \beta]$. Из (5.7) получаем, что $L^*f = 0$, т.е. $f \in AC^1[0, \beta]$ и

$$-\frac{d}{dy} \left((\gamma - y)^2 \frac{df}{d\eta} \right) + p_1f = 0.$$

Решения этого дифференциального уравнения имеют вид $f(y) = C(\gamma - y)^\mu$, где $-\mu(\mu - 1) - 2\mu + p_1 = 0$, т.е.

$$\mu_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4p_1}}{2}.$$

Так как $p_1 > 3/4$, то $\mu_1 > 1/2$, $\mu_2 < -1/2$. Решение с $\mu_2 < -1/2$ не принадлежит $L_2[0, \beta]$, поэтому $f(y) = c_\beta(\gamma - y)^{\mu_1}$, $y \in [0, \beta]$. Так как f не зависит от β , то $c_\beta = c_1$ при всех $\beta \in (0, \gamma)$. Таким образом, $f(y) = c_1(\gamma - y)^{\mu_1}$, $y \in [0, \gamma)$. Аналогичным образом получается, что $f(y) = c_2(y - \gamma)^{\mu_1}$ при $y \in (\gamma, 2\pi)$. Значит, функция f должна иметь вид

$$f(y) = \begin{cases} c_1(\gamma - y)^{\mu_1}, & y \in (0, \gamma), \\ c_2(y - \gamma)^{\mu_1}, & y \in (\gamma, 2\pi). \end{cases} \quad (5.8)$$

Так как $\mu_1 > 1/2$, то f непрерывна на $[0, 2\pi]$ и имеет обобщенную производную $f' \in L_2[0, 2\pi]$. Таким образом, мы показали, что если $\langle \varphi_0, \psi \rangle = 0$ при $\psi \in V$, то

$$\varphi_0(x, y) = f(y)e^{2\pi\alpha ix},$$

где функция $f(y)$ имеет вид (5.8). Так как $f \in W_2^{(1)}[0, 2\pi]$, то существует последовательность $f^k \in C^2[0, 2\pi]$ такая, что $\|f - f^k\|_{W_2^{(1)}[0, 2\pi]} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

В этом случае, как известно, $f^k(y) \rightarrow f(y)$ при всех $y \in [0, 2\pi]$. Положим $\varphi_0^k(x, y) = f^k(y)e^{2\pi\alpha ix}$. После простых вычислений, которые мы опустим, получается оценка

$$\|\varphi_0 - \varphi_0^k\|_{\mathcal{G}^\circ(\Pi)} \leq d \|f - f^k\|_{W_2^{(1)}[0, 2\pi]},$$

из которой следует, что $\varphi_0^k \xrightarrow{\mathcal{G}^\circ(\Pi)} \varphi_0$. В этом случае

$$\varphi_0^k(x, 0) \xrightarrow{L_2[0, 1]} \varphi_0(x, 0),$$

где $\varphi(x, 0)$ – след φ на соответствующем участке границы. Таким образом, $\varphi_0(x, 0) = f(0)e^{2\pi\alpha ix}$. Так как $\varphi_0 \in \mathcal{G}_{\theta_1}(\Pi)$, то $\varphi_0(1 - 0, 0) = 0$. Так как $\varphi(1 - 0, 0) = c_1 \gamma^{\mu_1} e^{2\pi\alpha i}$, то отсюда следует, что $c_1 = 0$. Совершенно аналогично показывается, что $c_2 = 0$, т.е. $f(y) \equiv 0$. Таким образом, $\varphi_0 = 0$. Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы в случае $|\theta_1| \neq 1$. Случай $|\theta_1| = 1$ рассматривается совершенно аналогично. Теорема доказана.

Как показано ранее, из теоремы 5.2 следует совпадение пространств $\mathcal{H}_{\theta_1}(\Pi)$ и $\widetilde{\mathcal{H}}_{\theta_1}(\Pi)$, а значит, и пространств $\mathcal{H}_{\theta_1, \theta_2}(\Pi)$ и $\widetilde{\mathcal{H}}_{\theta_1, \theta_2}(\Pi)$ (см. § 4).

ТЕОРЕМА 5.2. *Пространства $\mathcal{H}_{\theta_1, \theta_2}(\Pi)$ и $\widetilde{\mathcal{H}}_{\theta_1, \theta_2}(\Pi)$ совпадают при всех $|\theta_1| = |\theta_2| = 1$.*

Таким образом, имеет место следующая теорема, дающая описание областей определений семейства введенных расширений минимального оператора, порожденного дифференциальным выражением (1.7).

ТЕОРЕМА 5.3. *Каждое из гильбертовых пространств*

$$\mathcal{H}_{\theta_1, \theta_2}(\Pi), \quad |\theta_1| = |\theta_2| = 1,$$

является областью определения некоторого симметрического расширения минимального оператора, порожденного дифференциальным выражением (1.7). Область определения соответствующего симметрического расширения совпадает с линейным многообразием, состоящим из всех функций φ , принадлежащих гильбертову пространству $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$ и удовлетворяющих краевым условиям

$$U_j(\varphi) = 0, \quad j = 1, 2,$$

где

$$U_1(\varphi) = \frac{d}{dy}[\varphi(1, y) - \theta_1 e^{-iy} \varphi(0, y)], \quad U_2(\varphi) = \varphi(x, 2\pi) - \theta_2 \varphi(x, 0).$$

При этом выполнение краевого условия $U_1(\varphi) = 0$ для функции φ , принадлежащей пространству $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$, понимается в указанном выше специальном смысле, а именно, как существование постоянной μ такой, что почти всюду на $[0, 2\pi]$ выполняется равенство (4.8).

Если функция $\varphi(x, y) \in \mathcal{H}_{\theta_1, \theta_2}(\Pi)$, то она удовлетворяет условию квазипериодичности по переменной y : $\varphi(x, 2\pi) = e^{2\pi\beta i} \varphi(x, 0)$. Представим функцию $\varphi(x, y)$ рядом Фурье по системе $\{e^{i\beta y + iny}\}_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$\varphi(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(x) e^{i\beta y + iny}.$$

В следующей теореме приводятся удобные для проверки достаточные условия принадлежности функции $\varphi(x, y)$, заданной соответствующим рядом Фурье, пространству $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$, выраженные в терминах последовательности коэффициентов Фурье $\{a_n(x)\}_{n=-\infty}^\infty$.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть $\beta \in [0, 1)$, $a_n(x) \in C^2[0, 1]$, $n \in \mathbb{Z}$, причем выполнены следующие условия:

$$1) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^1 |a_n(x)|^2 dx < +\infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 \int_0^1 |a'_n(x)|^2 dx < +\infty; \quad (5.9)$$

$$2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N a_n(1) = 0. \quad (5.10)$$

Тогда ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x) e^{i\beta y + iny}$$

сходится в смысле главного значения по норме пространства $\mathcal{H}(\Pi)$ к функции $\varphi(x, y)$, принадлежащей пространству $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\varphi_N(x, y) = \sum_{n=-N}^N a_n(x) e^{i\beta y + iny}.$$

Докажем, что последовательность $\{\varphi_N\}_{N=1}^\infty$ фундаментальна в $\mathcal{H}(\Pi)$. Для этого нужно доказать, что последовательности

$$\{\varphi_N\}_{N=1}^\infty, \quad \left\{ \frac{\partial \varphi_N}{\partial x} \right\}_{N=1}^\infty, \quad \left\{ \frac{\partial^2 \varphi_N}{\partial x \partial y} \right\}_{N=1}^\infty$$

фундаментальны в $L_2(\Pi)$. Имеем

$$\frac{\partial \varphi_N(x, y)}{\partial x} = \sum_{n=-N}^N a'_n(x) e^{i\beta y + iny}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_N(x, y)}{\partial x \partial y} = i \sum_{n=-N}^N a'_n(x) (n + \beta) e^{i\beta y + iny}.$$

Учитывая ортонормированность системы функций

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\beta y + iny} \right\}_{n=-\infty}^\infty$$

на отрезке $[0, 2\pi]$, получим

$$\|\varphi_N - \varphi_M\|_{L_2(\Pi)}^2 = c \sum_{M \leq |n| \leq N} \int_0^1 |a_n(x)|^2 dx$$

при $N > M$. Из условия (5.9) следует, что $\|\varphi_N - \varphi_M\|_{L_2(\Pi)} \rightarrow 0$ при $N, M \rightarrow \infty$. Совершенно аналогично доказывается, что каждая из последовательностей

$$\left\{ \frac{\partial \varphi_N}{\partial x} \right\}_{N=1}^{\infty}, \quad \left\{ \frac{\partial^2 \varphi_N}{\partial x \partial y} \right\}_{N=1}^{\infty}$$

фундаментальна в $L_2(\Pi)$, а тогда последовательность $\{\varphi_N\}_{N=1}^{\infty}$ фундаментальна в $\mathcal{H}(\Pi)$. Пусть

$$\tilde{\varphi}_N(x, y) = \varphi_N(x, y) - \varphi_N(1, 0)e^{i\beta y}.$$

Тогда $\tilde{\varphi}_N(1, 0) = \tilde{\varphi}_N(1, 2\pi) = 0$. По условию теоремы числовая последовательность

$$\varphi_N(1, 0) = \sum_{n=-N}^N a_n(1)$$

сходится к нулю. Отсюда следует, что последовательность $\{\tilde{\varphi}_N\}_{N=1}^{\infty}$ также фундаментальна в $\mathcal{H}(\Pi)$. Так как $\tilde{\varphi}_N \in L^\circ$, то последовательность $\{\tilde{\varphi}_N\}_{N=1}^{\infty}$ сходится к функции φ , принадлежащей $\mathcal{H}^\circ(\Pi)$. Так как числовая последовательность $\{\varphi_N(1, 0)\}_{N=1}^{\infty}$ сходится к нулю, то $\varphi_N - \tilde{\varphi}_N \rightarrow 0$ и $\varphi_N \rightarrow \varphi$ в топологии $\mathcal{H}(\Pi)$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если условие (5.10) заменить на условие сходимости в смысле главного значения ряда $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(1)$, то совершенно аналогично доказывается, что $\varphi_N \rightarrow \varphi$ в $\mathcal{H}(\Pi)$ и $\varphi_N|_{\partial\Pi} \rightarrow \varphi|_{\partial\Pi}$ в $L_2(\partial\Pi)$. Повторяя предыдущие вычисления, нетрудно показать, что в этом случае последовательность коэффициентов $\{a_n(x)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ принадлежит l_2 при всех $x \in [0, 1]$, ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x)$ сходится в смысле главного значения при всех $x \in [0, 1]$ и справедливы следующие формулы для следа функции $\varphi(x, y)$ на границе:

$$\begin{aligned} \varphi(0, y) &= \text{v.p.} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(0)e^{i\beta y + iny}, & \varphi(1, y) &= \text{v.p.} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(1)e^{i\beta y + iny}, \\ \varphi(x, 0) &= e^{-2\pi\beta i} \varphi(x, 2\pi) = \text{v.p.} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(x). \end{aligned}$$

§ 6. О формальных решениях задачи

на собственные значения в случае $\theta_1 = -1$, $\theta_2 = e^{2\pi\beta i}$, $\beta \in (0, 1)$

Пусть $\beta \in (0, 1)$, $\theta_1 = -1$, $\theta_2 = e^{2\pi\beta i}$. Пространство $\mathcal{H}_{\theta_1, \theta_2}(\Pi)$ с такими значениями параметров θ_1 и θ_2 будем обозначать через $\mathcal{H}_\beta(\Pi)$. Оператор T_{θ_1, θ_2} с соответствующими значениями параметров будем обозначать T_β . Ввиду условия квазипериодичности по переменной y решение задачи на собственные значения естественно разыскивать в виде формального ряда Фурье по системе

$$\{e^{i\beta y + iny}\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(x) e^{i\beta y + iny}. \quad (6.1)$$

Собственные функции удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + i(x-1) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{1}{2} i \varphi = \lambda \varphi \quad (6.2)$$

и следующим граничным условиям:

$$U_1(\varphi) = \frac{d}{dy} (\varphi(1, y) + e^{-iy} \varphi(0, y)) = 0, \quad (6.3)$$

$$U_2(\varphi) = \varphi(x, 2\pi) - e^{2\pi\beta i} \varphi(x, 0) = 0, \quad (6.4)$$

в которых фигурирует след функции $\varphi \in \mathcal{H}_\beta(\Pi)$ на границе прямоугольника Π . Дифференцируя ряд почленно и подставляя полученные выражения для φ_x , φ_{xy} в соответствующее уравнение, получим

$$(n-1+\beta+x) a'_n(x) + s a_n(x) = 0, \quad n \in \mathbb{Z},$$

где $s = 1/2 + i\lambda$. Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$a_n(x) = \frac{c_n}{(n-1+\beta+x)^s}, \quad (6.5)$$

где c_n – произвольная постоянная. Для нахождения c_n воспользуемся граничным условием (6.3). Если φ удовлетворяет (6.3), то существует постоянная μ такая, что

$$e^{-iy} \varphi(0, y) + \varphi(1, y) = \mu. \quad (6.6)$$

Подставляя это разложение в (6.6), получим

$$\begin{aligned} e^{-iy} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{c_n}{(n-1+\beta)^s} e^{i\beta y + iny} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{c_n}{(n+\beta)^s} e^{i\beta y + iny} \\ = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{c_{n+1} + c_n}{(n+\beta)^s} e^{i\beta y + iny} = \mu. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Положим $\varphi_0(y) \equiv 1$, $y \in [0, 2\pi]$. Разложим функцию φ_0 по полной ортонормированной системе

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\beta y + iny} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Простое вычисление показывает, что

$$1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n e^{i\beta y + iny}, \quad (6.8)$$

где $b_n = \frac{1}{2\pi i} \frac{1 - e^{-2\pi\beta i}}{n + \beta}$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда из (6.7), (6.8) следует, что

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{c_{n+1} + c_n}{(n+\beta)^s} e^{i\beta y + iny} = \mu_1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n + \beta} e^{i\beta y + iny}, \quad \mu_1 = \mu \frac{1 - e^{-2\pi\beta i}}{2\pi i}. \quad (6.9)$$

Если $\mu \neq 0$, то постоянную μ_1 можно считать равной 1 (умножение постоянной μ на λ соответствует переходу от функции $\varphi(x, y)$ к функции $\lambda\varphi(x, y)$). Считая, что $\mu_1 = 1$, и приравнявая коэффициенты при $e^{i\beta y + iny}$ в (6.9), получим систему уравнений относительно постоянных c_n

$$c_n + c_{n+1} = \frac{1}{(n + \beta)^{1-s}}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Функции $a_n(x)$, $a'_n(x)$ принадлежат $L_2[0, 1]$ при $n \neq 0$. Функция $a_0(x) = c_0/(\beta + x - 1)^s$ имеет особенность в точке $x = 1 - \beta \in (0, 1)$. Если $\operatorname{Re} s > 0$, то функции $a_0(x)$ и $a'_0(x)$ принадлежат $L_2[0, 1]$ лишь при условии $c_0 = 0$. Таким образом, мы приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} c_n + c_{n+1} = \frac{1}{(n + \beta)^{1-s}}, & n \in \mathbb{Z}; \\ c_0 = 0. \end{cases} \quad (6.10)$$

Так как c_0 известно, то рекуррентное соотношение (6.10) позволяет определить все c_n . Пусть $f_n = f_n(\beta, s) = 1/(n + \beta)^{1-s}$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда из (6.10) получаем

$$\begin{aligned} c_1 + c_0 &= f_0, & c_1 &= f_0, \\ c_2 + c_1 &= f_1, & c_2 &= f_1 - f_0 = -(f_0 - f_1), \\ c_3 + c_2 &= f_2, & c_3 &= f_2 - c_2 = f_0 - f_1 + f_2 \end{aligned}$$

и так далее. Таким образом,

$$c_n = c_n(\beta, s) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f_k(\beta, s), \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.11)$$

Пусть $0 < \operatorname{Re} s < 1$ и

$$\delta_n = \delta_n(\beta, s) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k + \beta)^{1-s}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.12)$$

(ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k/(k + \beta)^{\alpha}$ сходится при всех $\operatorname{Re} \alpha > 0$). Тогда

$$c_n = c_n(\beta, s) = (-1)^n (\delta_0(\beta, s) - \delta_n(\beta, s)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.13)$$

Найдем c_n при $n = -1, -2, \dots$. Пусть $d_n = c_{-n}$. Тогда из (6.10) следует, что $c_n + c_{n-1} = f_{n-1}$, т.е. $d_n + d_{n+1} = f_{-n-1} = \tilde{f}_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, откуда

$$d_n = d_n(\beta, s) = (-1)^n (\tilde{\delta}_0(\beta, s) - \tilde{\delta}_n(\beta, s)),$$

где

$$\tilde{\delta}_n(\beta, s) = \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \tilde{f}_k(\beta, s) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(-k - 1 + \beta)^{1-s}}.$$

Далее

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_n(\beta, s) &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(-k-1+\beta)^{1-s}} = (-1)^{s-1} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1-\beta)^{1-s}} \\ &= -(-1)^s \delta_n(1-\beta, s),\end{aligned}$$

т.е.

$$c_{-n} = c_{-n}(\beta, s) = -(-1)^{n+s} (\delta_0(1-\beta, s) - \delta_n(1-\beta, s)), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.14)$$

Постоянные δ_n можно выразить через функцию $\Phi(z, s, v)$

$$\begin{aligned}\delta_n &= \sum_{k=n}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k+\beta)^{1-s}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(k+n+\beta)^{1-s}} \\ &= (-1)^n \Phi(-1, 1-s, n+\beta).\end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть $0 < \operatorname{Re} s < 1$, $\beta \in (0, 1)$. Тогда система (6.10) имеет единственное решение, задаваемое формулами

$$\begin{aligned}c_n(\beta, s) &= (-1)^n [\delta_0(\beta, s) - \delta_n(\beta, s)], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ c_{-n}(\beta, s) &= -(-1)^{n+s} [\delta_0(1-\beta, s) - \delta_n(1-\beta, s)], \quad n = 0, 1, 2, \dots,\end{aligned} \quad (6.15)$$

где

$$\delta_n(\beta, s) = (-1)^n \Phi(-1, 1-s, n+\beta), \quad (6.16)$$

$\Phi(z, s, v)$ – трансцендента Лерха.

Таким образом, коэффициенты $c_n(\beta, s)$ найдены, т.е. ряд (5.1) является формальным решением задачи на собственные значения для оператора T_β . Пусть $1/2 < \operatorname{Re} s < 1$, $\beta \in (0, 1)$ и

$$\Psi_\beta(x, y, s) = -\beta^{1-s} \text{v.p.} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n(\beta, s)}{(n-1+\beta+x)^s} e^{i\beta y + iny}. \quad (6.17)$$

Покажем, что функция $\Psi_\beta(x, y, s)$ принадлежит $L_2(\Pi)$ при $1/2 < \operatorname{Re} s < 1$. Из свойств функции $\Phi(z, s, v)$ (см. [2]) вытекает, что последовательность $\delta_n(\beta, s)$ ограничена, а значит, существует такая постоянная $M_0 > 0$, что

$$|c_n(\beta, s)| \leq M_0, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Функции

$$a_n(x) = \frac{c_n(\beta, s)}{(n-1+\beta+x)^s}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

непрерывны на $[0, 1]$, так как $c_0(\beta, s) = 0$ и $|n-1+\beta+x| \geq \min(\beta, 1-\beta)$ при $\beta \in (0, 1)$ и $n \neq 0$. Так как система $\{e^{i\beta y + iny}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ортогональна на $[0, 2\pi]$, то

$$\|\Psi_\beta\|_{L_2(\Pi)}^2 = \sqrt{2\pi} \beta^{1-s} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 \int_0^1 \frac{dx}{|n-1+\beta+x|^{2s}},$$

где $\sigma = \operatorname{Re} s$. Поэтому

$$\|\Psi_\beta\|_{L_2(\Pi)}^2 = \sqrt{2\pi}\beta^{1-\sigma} \sum_{n \neq 0} |c_n|^2 \delta_n,$$

где

$$\delta_n = \int_0^1 \frac{dx}{|n-1+\beta+x|^{2\sigma}}.$$

Так как $\delta_n \sim \frac{1}{n^{2\sigma}}$, а последовательность $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ограничена, то

$$\sum_{n \neq 0} |c_n|^2 \delta_n \leq M \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\sigma}} < +\infty$$

при $2\sigma > 1$, т.е. при $\sigma > 1/2$. Нетрудно убедиться, что коэффициенты Фурье функции $\Psi_\beta(x, y, s)$ удовлетворяют условиям (5.9). Если $\Psi_\beta(x, y, s) \in \mathcal{H}_\beta(\Pi)$, то функция $\Psi_\beta(x, y, s)$ является собственной функцией оператора T_β . Из теоремы (5.4) следует, что достаточным условием для этого является следующее условие:

$$\text{v.p.} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\theta_n(\beta, s)}{(n+\beta)^s} = 0,$$

где $\theta_n(\beta, s) = -\beta^{1-s}c_n(\beta, s)$, которое играет роль уравнения на собственные значения для спектральной задачи $T_\beta\varphi = \lambda\varphi$, где $s = 1/2 + i\lambda$. С учетом симметричности оператора T_β отсюда следует, что в случае сходимости (в смысле главного значения) соответствующего ряда уравнение на собственные значения не имеет решений в области $1/2 < \operatorname{Re} s < 1$ (в противном случае симметрический оператор T_β имел бы невещественное собственное значение). Для доказательства сходимости соответствующего ряда необходимо получить асимптотическое разложение контурного интеграла, известного из теории функции $\Phi(z, s, v)$ (см. [2]), через который могут быть выражены коэффициенты $\theta_n(\beta, s)$ при $n \rightarrow \infty$. Вопрос об асимптотике $\theta_n(\beta, s)$ при $n \rightarrow \infty$ мы намереваемся рассмотреть в другой работе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. Пусть $0 < \operatorname{Re} s < 1$. Тогда имеет место предельное соотношение:

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \theta_n(\beta, s) = -\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{1-s}c_n(\beta, s) = \begin{cases} (-1)^{n-1}, & n = 1, 2, \dots, \\ 0, & n = 0, -1, -2, \dots \end{cases} \quad (6.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = 1, 2, \dots$. Тогда

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{1-s}c_n(\beta, s) = (-1)^n \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{1-s}(\delta_0(\beta, s) - \delta_n(\beta, s)),$$

где $\delta_n(\beta, s) = (-1)^n\Phi(-1, 1-s, n+\beta)$. Так как функция $\Phi(z, s, v)$ регулярна при $v \neq 0, -1, -2, \dots$, то $\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{1-s}\delta_n(\beta, s) = 0$ при $n = 1, 2, \dots$. Далее,

$$\delta_0(\beta, s) = \Phi(-1, 1-s, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+\beta)^{1-s}} = \frac{1}{\beta^{1-s}} + f(\beta),$$

где функция $f(\beta)$ регулярна в окрестности точки $\beta = 0$. Отсюда следует, что

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{1-s} \delta_0(\beta, s) = 1,$$

а тогда

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{1-s} c_n(\beta, s) = (-1)^n$$

при $n = 1, 2, \dots$. Пусть $n = -m, m = 0, 1, 2, \dots$. Тогда

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{1-s} c_{-m}(\beta, s) = -(-1)^n \lim_{\beta \rightarrow 0} \beta^{1-s} [\delta_0(1 - \beta, s) - \delta_m(1 - \beta, s)] = 0,$$

так как функция $\delta_0(1 - \beta, s) - \delta_m(1 - \beta, s)$ регулярна в окрестности точки $\beta = 0$. Таким образом, формула (6.18) доказана.

Пусть $\beta \in (0, 1)$ и ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \theta_n(\beta, s)/(n + \beta)^s$ сходится в смысле главного значения при s , лежащих в полосе $0 < \operatorname{Re} s < 1$. Пусть

$$Z_\beta(s) = \text{v.p.} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\theta_n(\beta, s)}{(n + \beta)^s}, \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1.$$

Тогда формальный предельный переход под знаком суммы с учетом предложения (6.2) приводит к равенству

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} Z_\beta(s) = Z(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

Это соотношение показывает, что в случае равномерной сходимости соответствующего ряда функция $Z_\beta(s)$ может рассматриваться как некоторый аналог дзета-функции Римана. Отметим также, что функция $\Psi(x, y, s)$, не принадлежащая $L_2(\Pi)$, является поточечным пределом семейства функций $\Psi_\beta(x, y, s)$, принадлежащих $L_2(\Pi)$, при $\beta \rightarrow 0$.

В заключение сделаем несколько общих замечаний о спектральных свойствах операторов гиперболического типа. Работа С. Л. Соболева [8] об условиях устойчивости вращающегося волчка с полостью, наполненной жидкостью, была одной из первых работ, в которой конкретная проблема математической физики привела к необходимости исследования некоторой спектральной задачи для уравнения гиперболического типа. Позже в работах других авторов рассматривалась задача Дирихле для волнового уравнения, которая оказалась весьма сложной. Так, например, условия разрешимости такой задачи Дирихле в сильной степени зависят от геометрии границы области, а точнее от взаимного расположения участка границы, содержащего заданную точку, и характеристик волнового оператора, проходящих через эту точку (см. [9]–[13]). Некоторые результаты о существенной самосопряженности и характере точечного спектра операторов Клейна–Гордона на специальных многообразиях с псевдоримановой метрикой, используемых в теоретической физике, получены в работах [4], [5]. В целом же спектральные задачи для гиперболических операторов можно охарактеризовать как неклассические и малоизученные. Как известно, Д. Гильберт и Г. Полиа предположили, что уравнение $\zeta(1/2 + i\lambda) = 0$ должно быть уравнением на собственные значения для некоторого самосопряженного оператора в подходящем гильбертовом пространстве (см. [1]). Пока

этот “спектральный” подход к проблеме распределения нулей дзета-функции не реализован. Полученные в статье результаты показывают, что существует связь между распределением нулей некоторых аналогов дзета-функции Римана и спектральной теорией двумерных операторов гиперболического типа. На это указывает также сходство асимптотики функции распределения собственных значений операторов гиперболического типа с гладкими коэффициентами на двумерном торе, полученной в [14], [15], с хорошо известной асимптотикой функции распределения нулей дзета-функции Римана, лежащих на “критической” прямой. В [15] приведены примеры волновых операторов на двумерном торе, у которых функция распределения собственных значений имеет асимптотику

$$N_\rho(\lambda; A) = c_0 \lambda \ln \lambda + c_1 \lambda + O(\sqrt{\lambda}) \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty.$$

Здесь $N_\rho(\lambda; A)$ – число собственных значений $\lambda_j(A)$ оператора A таких, что $0 < \rho \leq |\lambda_j(A)| \leq \lambda$. Аналогичную асимптотику имеет функция распределения нулей дзета-функции Римана, лежащих на “критической” прямой, причем совпадают (с точностью до коэффициентов) два первых члена асимптотики (см. [1]).

Список литературы

- [1] J. B. Conrey, “The Riemann hypothesis”, *Notices Amer. Math. Soc.*, **50**:3 (2003), 341–353.
- [2] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1, 2-е изд., Наука, М., 1973, 294 с.; пер. с англ.: A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher transcendental functions*, v. I, Based, in part, on notes left by H. Bateman, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York–Toronto–London, 1953, xxvi+302 pp.
- [3] Б. С. Павлов, Л. Д. Фаддеев, “Теория рассеяния и автоморфные функции”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 6, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **27**, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1972, 161–193.
- [4] И. В. Волович, В. В. Козлов, “О суммируемых с квадратом решениях уравнения Клейна–Гордона на многообразиях”, *Докл. РАН*, **408**:3 (2006), 317–320; англ. пер.: I. V. Volovich, V. V. Kozlov, “Square integrable solutions to the Klein–Gordon equation on a manifold”, *Dokl. Math.*, **73**:3 (2006), 441–444.
- [5] V. V. Kozlov, I. V. Volovich, “Finite action Klein–Gordon solutions on Lorentzian manifolds”, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, **3**:7 (2006), 1349–1357.
- [6] О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973, 407 с.; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, *The boundary value problems of mathematical physics*, Appl. Math. Sci., **49**, Springer-Verlag, New York, 1985, xxx+322 pp.
- [7] Н. И. Ахизер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*, ГИТТЛ, М.–Л., 1950, 483 с.; англ. пер.: N. I. Akhiezer, I. M. Glazman, *Theory of linear operators in Hilbert space*, v. I, II, Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1961, 1963, xi+147 pp., v+218 pp.
- [8] С. Л. Соболев, “О движении симметричного волчка с полостью, наполненной жидкостью”, *ПМТФ*, **3** (1960), 20–55.
- [9] В. И. Арнольд, “Малые знаменатели. I. Об отображениях окружности на себя”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **25**:1 (1961), 21–86; англ. пер.: V. I. Arnol’d, “Small denominators. I. Mappings of the circumference onto itself”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **46**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1965, 213–284.

- [10] С. Д. Троицкая, “О не почти периодичности решений задачи С. Л. Соболева в областях с ребрами”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **58**:4 (1994), 97–124; англ. пер.: S. D. Troitskaya, “On non-almost-periodicity of solutions of the Sobolev problem in domains with edges”, *Russian Acad. Sci. Izv. Math.*, **45**:1 (1995), 97–124.
- [11] М. В. Фокин, “Гамильтоновы системы в теории малых колебаний вращающейся идеальной жидкости. I”, *Матем. тр.*, **4**:2 (2001), 155–206; англ. пер.: M. V. Fokin, “Hamiltonian systems in the theory of small oscillations of a rotating ideal fluid. I”, *Siberian Adv. Math.*, **12**:1 (2002), 1–50.
- [12] М. В. Фокин, “Гамильтоновы системы в теории малых колебаний вращающейся идеальной жидкости. II”, *Матем. тр.*, **5**:1 (2002), 167–204; англ. пер.: M. V. Fokin, “Hamiltonian systems in the theory of small oscillations of a rotating ideal fluid. II”, *Siberian Adv. Math.*, **12**:2 (2002), 1–37.
- [13] V. P. Burskii, A. S. Zhedanov, “Dirichlet and Neuman problems for string equation, Poncelet problem and Pell–Abel equation”, *SIGMA*, **2** (2006), 041, 5 pp.
- [14] В. М. Каплицкий, “Асимптотика дискретного спектра квазипериодической краевой задачи для двумерного гиперболического уравнения”, *Матем. сб.*, **200**:2 (2009), 61–74; англ. пер.: V. M. Kaplitskii, “Asymptotic behaviour of the discrete spectrum of a quasi-periodic boundary value problem for a two-dimensional hyperbolic equation”, *Sb. Math.*, **200**:2 (2009), 215–228.
- [15] В. М. Каплицкий, “Об асимптотическом распределении собственных значений самосопряженного гиперболического дифференциального оператора второго порядка на двумерном торе”, *Сиб. матем. журн.*, **51**:5 (2010), 1041–1060; англ. пер.: V. M. Kaplitskii, “Asymptotics of the distribution of eigenvalues of a selfadjoint second order hyperbolic differential operator on the two-dimensional torus”, *Siberian Math. J.*, **51**:5 (2010), 830–846.

Виталий Маркович Каплицкий
(Vitalii M. Kaplitskii)

Южный федеральный университет,
г. Ростов-на-Дону;
Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН
и Правительства Республики
Северная Осетия-Алания
E-mail: kaplitsky@donpac.ru

Поступила в редакцию
04.04.2013 и 17.04.2014