Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Рождественский, Об аддитивном кохомологическом уравнении и замене времени в линейном потоке на торе с диофантовым вектором частот, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 5, 115–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm824>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 09:56:43

УДК 517.9

А. В. Рождественский

**Об аддитивном кохомологическом уравнении
и замене времени в линейном потоке
на торе с диофантовым вектором частот**

Для 1-периодической функции f конечной гладкости и диофантова вектора α исследуется проблема разрешимости *аддитивного кохомологического уравнения* на торе

$$w(T_\alpha x) - w(x) = f(x) - \int_{\mathbb{T}^d} f(t) dt,$$

где $T_\alpha x = x + \alpha \pmod{1}$ – сдвиг тора $\mathbb{T}^d$ на вектор α , а w – неизвестная измеримая функция.

Получены необходимые и достаточные условия сопряженности линейного потока на $(d+1)$ -мерном торе *репараметризованному потоку*

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\alpha}{F(x, y)}, \\ \dot{y} = \frac{1}{F(x, y)}, \end{cases}$$

где $F(x, y)$ – положительная 1-периодическая функция конечной гладкости.

Библиография: 26 названий.

Введение

Пусть $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ – d -мерный тор, $d \in \mathbb{N}$. Тор $\mathbb{T}^d$ будем представлять как d -мерный куб $\mathcal{E}^d = [0, 1]^d$ с отождествленными противоположными гранями. Вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$ назовем *существенно иррациональным*, если числа $1, \alpha_1, \dots, \alpha_d$ линейно независимы над $\mathbb{Z}$. Пусть $T_\alpha: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{T}^d$, $T_\alpha x = x + \alpha \pmod{1}$ – преобразование сдвига тора $\mathbb{T}^d$ на вектор α .

Следующее функциональное уравнение, в котором w – неизвестная измеримая функция, а f – заданная суммируемая на $\mathbb{T}^d$ действительная функция,

$$w(T_\alpha x) - w(x) = f(x) - \int_{\mathcal{E}^d} f(t) dt \quad \forall x \in \mathbb{T}^d \quad (1)$$

называется *аддитивным кохомологическим уравнением*. Функция f называется *тривиальным над T_α аддитивным коциклом*, если уравнение (1) имеет измеримое решение.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00248) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-304.2003.1).

ЗАМЕЧАНИЕ. Поясним происхождение терминов “когомологическое уравнение” и “тривиальный коцикл”. Пусть T – автоморфизм пространства Лебега (X, μ) , а группа $\mathbb{Z}$ действует на X итерациями автоморфизма T (т.е. действие элемента $k \in \mathbb{Z}$ на X есть автоморфизм T^k). Пусть $\Gamma(X)$ обозначает группу измеримых функций на X со значениями в абелевой топологической группе Γ . Когомологиями динамической системы (X, μ, T) называется $H^1(\mathbb{Z}, \Gamma(X))$ – группа 1-мерных когомологий группы $\mathbb{Z}$ со значениями в группе $\Gamma(X)$. Элементы $\Gamma(X)$ назовем *коциклами*. Два коцикла φ_1 и φ_2 называются *когомологичными*, если $h(x)\varphi_1(x) = \varphi_2(x)h(Tx) \forall x$ для некоторого коцикла h . Группа $H^1(\mathbb{Z}, \Gamma(X))$ изоморфна группе классов эквивалентности когомологичных коциклов (см., например, [1], [2]).

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^d$ – существенно иррациональный вектор. *Линейным потоком* $R_{\alpha,1}^t$ на торе $\mathbb{T}^{d+1}$ называется фазовый поток следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = 1,$$

где $x \in \mathbb{T}^d$ и $y \in \mathbb{T}$.

Для заданной непрерывной положительной 1-периодической функции

$$F: \mathbb{T}^{d+1} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad \int_{\mathcal{G}^{d+1}} F(z) dz = 1,$$

мы определим *линейный поток с измененным временем (или репараметризованный поток)* $R_{\alpha,F}^t$ как фазовый поток следующей системы дифференциальных уравнений на $(d+1)$ -мерном торе:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha}{F(x,y)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{F(x,y)}.$$

Пусть $\beta \geq 0$. Вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$ называется *β -диофантовым*, если существует положительная константа C_α такая, что

$$|q|^{d+\beta} \|q\alpha\| \geq C_\alpha \quad (2)$$

при всех $q \in \mathbb{Z}^d$, $q \neq 0$.

Изложим план статьи.

В §1 мы вводим определения строго β -диофантова вектора, пространства Орлича, изотропного и анизотропного пространств Орлича–Лиувилля и Орлича–Вейля (часто используемые в качестве определения классов Орлича–Соболева для дробной гладкости) и другие используемые в тексте статьи определения.

В §2 приведены необходимые для понимания теорем §§4–7 факты о вложениях пространств Орлича–Лиувилля в пространства Орлича, Соболева и Гёльдера.

В §3 доказываются некоторые арифметические свойства последовательности $\{|k|^{-d-\beta} \|\alpha k\|^{-1}\}_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}}$ и вытекающие из них свойства соответствующего мультипликатора Фурье.

В §4 для типичных функций из обобщенных пространств Орлича–Лиувилля (среди которых, в частности, содержатся классы Орлича–Лиувилля и Орлича–Вейля) доказывается расходимость по мере Лебега биркгофовых сумм $\sum_{s=0}^{n-1} f \circ T_\alpha^s$.

В § 5 из результатов § 4 выводятся достаточные условия нетривиальности аддитивных кошиклов из пространств Орлича–Лиувилля и Орлича–Вейля и доказываются достаточные условия наличия суммируемого решения когомологического уравнения (1) и достаточные условия отсутствия у этого уравнения непрерывного решения.

В § 6 для функции F из анизотропного пространства Орлича–Лиувилля или Орлича–Вейля устанавливаются условия изоморфности репараметризованного потока $R_{\alpha, F}$ линейному, а также – условия изоморфности так называемого специального потока над сдвигом T_{α} специальному потоку с “постоянной крышей”.

В § 7 устанавливаются достаточные условия непрерывности спектра косоого сдвига Анзаи тора $\mathbb{T}^d \times S^1$ на ортогональном дополнении в $L^2(\mathbb{T}^d \times S^1)$ к подпространству функций, зависящих только от первых d координат, а также доказываются достаточные условия топологической транзитивности каскада на цилиндре $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$.

§ 1. Основные определения и обозначения

Для $x, y \in \mathbb{R}^d$ обозначим $xy = \sum_{\nu} x_{\nu} y_{\nu}$, $|x|_2 = \sqrt{xx}$, $|x| = |x|_{\infty} = \max_{\nu} |x_{\nu}|$, а для $z \in \mathbb{R}$ через $\|z\|$ обозначим расстояние от z до ближайшего целого числа, $\|z\| = \min\{\{z\}, 1 - \{z\}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^d - \beta$ -диофантов вектор. Будем говорить, что α – *строго β -диофантов вектор*, если существует бесконечная последовательность $\{q_s\}_{s=1}^{\infty} \subset \mathbb{Z}^d$, $0 < |q_1| < |q_2| < \dots$, и константа C^{α} такие, что

$$|q_s|^{d+\beta} \|q_s \alpha\| \leq C^{\alpha} \quad (3)$$

при всех $s \in \mathbb{N}$.

Существование при каждом $\beta > 0$ строго β -диофантовых векторов доказано Н. Г. Мошевитиным в работе [3]. В этой работе также показано, что β -диофантовы векторы образуют всюду плотное в $\mathcal{E}^d$ множество типа G_{δ} . Заметим также, что в силу теоремы Дирихле о совместных приближениях (см. [4; гл. 2, § 1]) 0-диофантовы векторы автоматически являются строго 0-диофантовыми. В теории диофантовых приближений 0-диофантовы векторы обычно называются *плохо приближаемыми*.

Будем говорить, что *типичный* элемент метрического пространства X обладает заданным свойством A , если множество элементов X , обладающих свойством A , содержит в себе всюду плотное в X подмножество типа G_{δ} .

Выпуклую функцию $\psi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ назовем *функцией Юнга*, если $\psi(0) = 0$ и $\psi \not\equiv 0$. Для функции Юнга ψ определим *класс Орлича* $\psi(L)(\mathbb{T}^d)$:

$$\psi(L)(\mathbb{T}^d) = \left\{ f: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ — измеримая функция, } \int_{\mathcal{E}^d} \psi(\lambda |f(x)|) dx < \infty \text{ для некоторого } \lambda > 0 \right\}.$$

Нетрудно видеть, что $\psi_1(L)(\mathbb{T}^d) \subset \psi_2(L)(\mathbb{T}^d)$, если функции Юнга ψ_1 и ψ_2

удовлетворяют соотношению $\psi_2(y) = o(\psi_1(y))$, $y \rightarrow +\infty$, и что класс $\psi(L)(\mathbb{T}^d)$ совпадает с пространством $L^p(\mathbb{T}^d)$, если $\psi(y) = y^p$, $1 \leq p < \infty$.¹

Говорят, что функция Юнга ψ удовлетворяет Δ_2 -условию, если существуют $K > 0$ и y_0 такие, что $\psi(2y) \leq K\psi(y)$ при $y \geq y_0$. Отметим, что если ψ удовлетворяет Δ_2 -условию, то требование

$$\int_{\mathcal{E}^d} \psi(\lambda|f(x)|) dx < \infty \quad \text{для некоторого } \lambda > 0$$

равносильно требованию $\int_{\mathcal{E}^d} \psi(|f(x)|) dx < \infty$. В этом случае факторпространство $\psi(L)(\mathbb{T}^d)$ по подпространству равных нулю почти всюду функций является банаховым пространством относительно нормы Люксембурга

$$\|f\|_{\psi(L)} = \inf \left\{ \lambda > 0 : \int_{\mathcal{E}^d} \psi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right) dx \leq 1 \right\}.$$

В случае, когда $\psi(y) = y^p$, $1 \leq p < \infty$, норма Люксембурга эквивалентна стандартной L^p -норме.

Для $\delta > 0$ будем обозначать через $L \log_+^\delta L(\mathbb{T}^d)$ пространство Орлича, соответствующее функции Юнга $\psi(y) = y \ln^\delta(y + e)$.

В теоремах §§ 4–7 на функции Юнга мы будем налагать следующее условие регулярности, сформулированное в работе И. Стейна [5]. Обозначим

$$\Psi = \{\psi(\cdot) - \text{функция Юнга} : \psi(\sqrt{y}) - \text{вогнутая на } [0, +\infty) \text{ функция}\}.$$

Скажем, что ψ удовлетворяет *условию Стейна*, если $\psi \in \Psi$. Заметим, что если ψ удовлетворяет условию Стейна, то ψ также удовлетворяет Δ_2 -условию.

Положим $e(y) := \exp(2\pi i y)$ для $y \in \mathbb{R}$ и $e_k(x) := \exp(2\pi i k x)$ для $k, x \in \mathbb{R}^d$. Для суммируемой на $\mathbb{T}^d$ функции f через $\widehat{f}_k$ или $\widehat{f}(k)$ будем обозначать ее коэффициенты Фурье:

$$\widehat{f}_k = \widehat{f}(k) = \int_{\mathcal{E}^d} f(t) e_{-k}(t) dt, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

Для заданных $r > 0$ и $d \in \mathbb{N}$ обозначим через $I_r(x) = I_r^d(x)$ *ядро Бесселя–Макдональда* – суммируемую на $\mathbb{T}^d$ функцию, коэффициенты Фурье которой равны $\widehat{I}_r(k) = (1 + |k|_2^2)^{-r/2}$, $k \in \mathbb{Z}^d$.

Пусть $f(x) \in L^1(\mathbb{T}^d)$, $F(x, y) \in L^1(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}^l)$, $l \geq 0$. (В случае $l = 0$ полагаем $F(x, y) = F(x)$.) Тогда *сверткой* f и F будем называть функцию $f * F : \mathbb{T}^{d+l} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$(f * F)(x, y) = \int_{\mathcal{E}^d} f(x - z) F(z, y) dz.$$

¹Мы обозначаем через $L^p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq p < \infty$, пространство действительных функций, суммируемых на $\mathcal{E}^d$ в степени p , а через $L^\infty(\mathbb{T}^d)$ – пространство существенно ограниченных действительных функций на $\mathcal{E}^d$. Отметим, что факторпространство $L^p(\mathbb{T}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, по подпространству равных нулю почти всюду функций (которое мы также будем обозначать через $L^p(\mathbb{T}^d)$) есть банахово пространство относительно стандартной L^p -нормы:

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_{\mathcal{E}^d} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < +\infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{T}^d} |f(x)|, & p = +\infty. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $r > 0$, ψ – функция Юнга. Определим (изотропный) класс Орлича–Лиувилля:

$$I_r\psi(L)(\mathbb{T}^d) = \{f(x) \in \psi(L)(\mathbb{T}^d) : f(x) = (I_r^d * \tilde{f})(x), \tilde{f} \in \psi(L)(\mathbb{T}^d)\},$$

и анизотропный класс Орлича–Лиувилля:

$$I_{r,x}\psi(L)(\mathbb{T}^{d+1}) = \{F(x, y) \in \psi(L)(\mathbb{T}^d \times \mathbb{T}) : \\ F(x, y) = (I_r^d * \tilde{F})(x, y), \tilde{F} \in \psi(L)(\mathbb{T}^{d+1})\}.$$

Обозначим также

$$I_r C(\mathbb{T}^d) = \{f(x) = (I_r * \tilde{f})(x) : \tilde{f} \in C(\mathbb{T}^d)\}.$$

Класс Орлича–Лиувилля $I_r\psi(L)(\mathbb{T}^d)$ можно рассматривать в качестве определения класса Орлича–Соболева в случае нецелого r , так как при $1 < p < \infty$ и $r \in \mathbb{N}$ пространство $W^r L^p(\mathbb{T}^d)$ совпадает с пространством $I_r L^p(\mathbb{T}^d)$ (см., например, [6; гл. 5, § 3]).²

В случае $d = 1$ альтернативой такого определения пространства Соболева для дробной гладкости может служить пространство Орлича–Вейля (которое мы будем также обозначать через $W^r\psi(L)(\mathbb{T})$) – класс периодических функций, дробная в смысле Вейля производная которых принадлежит $\psi(L)$, т.е.

$$W^r\psi(L)(\mathbb{T}) = \{f \in \psi(L)(\mathbb{T}) : f(x) = (B_r * \tilde{f})(x), \tilde{f} \in \psi(L)(\mathbb{T})\},$$

где $B_r(x) \sim 1 + \sum_{k \neq 0} (2\pi)^{-1} \exp(-\frac{\pi}{2} i r \operatorname{sign} k) |k|^{-r} e_k(x)$ – ядро Бернулли.

В случае нецелого r анизотропный класс Орлича–Лиувилля $I_{r,x}\psi(L)(\mathbb{T}^{d+1})$ обычно называют анизотропным классом Орлича–Соболева. (Для натурального r анизотропный класс Орлича–Соболева $W_x^r\psi(L)(\mathbb{T}^{d+1})$ мы определяем как множество функций из $\psi(L)(\mathbb{T}^{d+1})$, для которых обобщенные производные порядков $l = (l_1, \dots, l_d, 0)$, $\sum_{1 \leq s \leq d} |l_s| = r$, также принадлежат пространству $\psi(L)(\mathbb{T}^{d+1})$.)

Определим также анизотропный класс Орлича–Вейля

$$W_x^r\psi(L)(\mathbb{T}^2) = \{F \in \psi(L)(\mathbb{T}^2) : F(x, y) = (B_r * \tilde{F})(x, y), \tilde{F} \in \psi(L)(\mathbb{T}^2)\}.$$

Ясно, что когда r натуральное, а $d = 1$, класс $W_x^r\psi(L)(\mathbb{T}^2)$ совпадает с введенным выше анизотропным пространством Орлича–Соболева.

Через $\mathcal{T}^d$ обозначим пространство действительнозначных тригонометрических полиномов от d переменных,

$$\mathcal{T}^d = \left\{ \operatorname{Re} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d, |k| \leq N} c_k e_k(x) \right) : c_k \in \mathbb{C}, N \in \mathbb{N} \right\},$$

а через $\mathcal{T}_0^d$ – подпространство $\mathcal{T}^d$, состоящее из полиномов с нулевым средним.

²Изотропный класс Орлича–Соболева $W^r\psi(L)(\mathbb{T}^d)$ есть множество функций из пространства $\psi(L)(\mathbb{T}^d)$, для которых обобщенные производные порядков $l = (l_1, \dots, l_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, $\sum_{1 \leq s \leq d} |l_s| = r$, принадлежат классу $\psi(L)(\mathbb{T}^d)$.

Наконец, обозначим через $L^0(\mathbb{T}^d)$ пространство действительнзначных измеримых на $\mathcal{E}^d$ функций.

В §§ 4–7 мы будем использовать следующие метрики: L^0 -метрику

$$\rho_0(f, g) = \int_{\mathcal{E}^d} \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|} dx$$

(напомним, что сходимость в $L^0(\mathbb{T}^d)$ эквивалентна сходимости по мере); “равномерную” метрику

$$\rho_C(f, g) = \max_{x \in \mathcal{E}^d} |f(x) - g(x)|$$

(для непрерывных на $\mathbb{T}^d$ функций); “среднеквадратичную” метрику

$$\rho_2(f, g) = \left(\int_{\mathcal{E}^d} |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

(для подмножеств пространства $L^2(\mathbb{T}^d)$).

Символ “0” в качестве нижнего индекса в обозначении для функционального пространства будет означать пересечение этого пространства с классом интегрируемых функций с нулевым средним.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^d$ — существенно иррациональный вектор. Последовательность натуральных чисел $\{m_j\}_{j=1}^\infty$ назовем α -допустимой, если последовательность векторов $v_j = (m_j \alpha_1 \pmod{1}, \dots, m_j \alpha_d \pmod{1})$, $j = 1, 2, \dots$, имеет предел.

§ 2. Некоторые сведения о вложении пространств Орлича–Лиувилля

Отметим некоторые факты о вложениях пространств Орлича–Лиувилля в пространства Орлича, Орлича–Соболева и Гёльдера.

В этом параграфе условимся не различать непрерывную функцию и функцию, которую можно сделать непрерывной, изменив ее на множестве меры нуль.

1. Кроме отмеченного в § 1 совпадения при натуральном r и $p \in (1, +\infty)$ пространств $I_r L^p$ и $W^r L^p$ справедливы включения

$$W^{2m} L^1(\mathbb{T}^d) \subset I_{2m} L^1(\mathbb{T}^d), \quad W^{2m} L^\infty(\mathbb{T}^d) \subset I_{2m} L^\infty(\mathbb{T}^d),$$

а также равенства

$$W^{2m} L^1(\mathbb{T}) = I_{2m} L^1(\mathbb{T}), \quad W^{2m} L^\infty(\mathbb{T}) = I_{2m} L^\infty(\mathbb{T})$$

при всех $m \in \mathbb{N}$ (см. [6; гл. 5, § 6]).

2. Элементарными вычислениями убеждаемся в том, что $\sum_k (1 + |k|_2^2)^{-r/2} < \infty$ при $r > d$ и, значит, при таких r функция $I_r(x)$ непрерывна на $\mathbb{T}^d$. Более того, если $0 < \varepsilon < r - d$, то $I_r * f = I_{r-d-\varepsilon} * I_{d+\varepsilon} * f \quad \forall f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ и, следовательно, $I_r L^1(\mathbb{T}^d) \subset I_{r-d-\varepsilon} C(\mathbb{T}^d)$.

Более подробно исследуем “крайний” случай $r = d$. Известно, что функция $I_d(x)$ вне точки $x = 0$ бесконечно дифференцируема, а в точке $x = 0$ имеет асимптотику $I_d(x) \sim C \ln(1/|x|)$, $x \rightarrow 0$, $C > 0$ (см. [6; гл. 5, § 6]). Значит, $I_d \in \exp(L)(\mathbb{T}^d)$.

Пусть $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$, $\|f\|_1 = 1$. Из интегрального неравенства Йенсена [7; гл. 1, § 10] имеем ($\lambda > 0$)

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}^d} \exp(|\lambda I_d * f(x)|) dx &= \int_{\mathcal{E}^d} \exp\left(\lambda \left| \int_{\mathcal{E}^d} I_d(x-y) f(y) dy \right| \right) dx \\ &\leq \int_{\mathcal{E}^d} \exp\left(\int_{\mathcal{E}^d} \lambda |I_d(x-y)| |f(y)| dy \right) dx \\ &\leq \int_{\mathcal{E}^d} \int_{\mathcal{E}^d} \exp(\lambda |I_d(x-y)|) |f(y)| dy dx \\ &= \int_{\mathcal{E}^d} \exp(\lambda |I_d(x)|) dx \int_{\mathcal{E}^d} |f(y)| dy = \int_{\mathcal{E}^d} \exp(\lambda |I_d(x)|) dx, \end{aligned}$$

следовательно, $\|I_d * f\|_{\exp(L)} \leq \|I_d\|_{\exp(L)}$, а из неравенства Гёльдера (см. [8; гл. 2, § 9]) имеем $\|I_d * f\|_{\infty} \leq \|I_d\|_{\exp(L)} \|f\|_{L \log_+ L}$, если $f \in L \log_+ L(\mathbb{T}^d)$. Из неравенства Гёльдера также следует, что $I_d * f \in C(\mathbb{T}^d)$ для любой $f \in L \log_+ L(\mathbb{T}^d)$.

Итак, оператор $f \mapsto I_d * f$ непрерывно действует из $L^1(\mathbb{T}^d)$ в $\exp(L)(\mathbb{T}^d)$ и из $L \log_+ L(\mathbb{T}^d)$ в $L^\infty(\mathbb{T}^d)$. Следовательно, по теореме интерполяции для операторов, действующих в пространствах Орлича (см., например, [9]), заключаем, что если $\eta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ – вогнутая функция, $\eta(0) = 0$, а выпуклые функции φ и ψ определены по формулам³

$$\varphi^{-1}(y) = y\eta\left(\frac{1}{\ln(1+y)}\right), \quad \psi^{-1}(y) = \ln(1+y)\eta\left(\frac{1}{\ln(1+y)}\right),$$

то оператор $f \mapsto I_d * f$ непрерывно действует из $\varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ в $\psi(L)(\mathbb{T}^d)$. В частности, полагая $\eta(y) = y^\delta$, $0 < \delta < 1$, заключаем, что оператор $f \mapsto I_d * f$ непрерывно действует из $L \log_+^\delta L(\mathbb{T}^d)$ в $\exp(L^{1/(1-\delta)})(\mathbb{T}^d)$. Итак, мы доказали справедливость вложения $I_d L \log_+^\delta L(\mathbb{T}^d) \subset \exp(L^{1/(1-\delta)})(\mathbb{T}^d)$, $0 < \delta < 1$.

Отметим, что пространство $I_d L \log_+^\delta L(\mathbb{T}^d)$, $0 < \delta < 1$, содержит функцию f , которая бесконечно дифференцируема на $\mathbb{T}^d$ всюду, кроме точки $x = 0$, а в точке $x = 0$ имеет асимптотику

$$f(x) \sim C \ln^{1-\delta} \frac{1}{|x|} \ln^{-2} \left(1 + \ln \frac{1}{|x|} \right), \quad C > 0$$

(см. [10]). Из результатов [7; гл. 5, § 2] следует, что в случае $d = 1$ в качестве такой функции можно взять функцию, ряд Фурье которой есть

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln^{-\delta} k \ln^{-2}(1 + \ln k)}{\sqrt{1+k^2}} \cos 2\pi kx.$$

3. Нетрудно видеть, что $I_r C(\mathbb{T}^d) \subset I_r \psi_1(L)(\mathbb{T}^d) \subset I_r \psi_2(L)(\mathbb{T}^d)$, если $\psi_2(y) = o(\psi_1(y))$ при $y \rightarrow \infty$ и $I_{r_1} \psi(L)(\mathbb{T}^d) \subset I_{r_2} \psi(L)(\mathbb{T}^d)$, если $r_1 \geq r_2$. При натуральном r имеем включения $C^r(\mathbb{T}^d) \subset W^r L^p(\mathbb{T}^d)$, $W^r L^p(\mathbb{T}^d) = I_r L^p \subset I_r L \log_+^\delta(\mathbb{T}^d)$

³Здесь φ^{-1} и ψ^{-1} – функции, обратные к φ и ψ соответственно.

(при $1 < p < \infty$ и $\delta > 0$).⁴ Для нецелых r справедливо включение $I_r C(\mathbb{T}^d) \subset C^r(\mathbb{T}^d)$ (см. [11; гл. 9, § 1]). Заметим также, что для всех $r > 0$ и $\varepsilon > 0$ справедливо включение $C^{r+\varepsilon}(\mathbb{T}^d) \subset I_r C(\mathbb{T}^d)$.

4. Ситуацию наличия особенностей у некоторых функций из класса $I_d L^1(\mathbb{T}^d)$ можно “исправить”, заменив ядро Бесселя–Макдональда I_d на обобщенное ядро I_d^θ со специально подобранным множителем θ . Именно введем в рассмотрение *множитель Харди–Литтлвуда* $\chi(k) = \exp(2\pi i |k|_2 \ln(1 + |k|_2))$, $k \in \mathbb{Z}^d$. В [10] доказано, что если $r > d/2$, то ядро $I_r^\chi(x)$ — непрерывная функция. И значит, из очевидных соотношений $I_d^\chi * f = I_{d/2-\varepsilon} * I_{d/2+\varepsilon}^\chi * f \quad \forall f \in L^1(\mathbb{T}^d)$ заключаем, что $I_d^\chi L^1(\mathbb{T}^d) \subset I_{d/2-\varepsilon} C(\mathbb{T}^d)$, $\varepsilon \in (0, d/2)$.

§ 3. Вспомогательные леммы

Для $j \in \mathbb{Z}_+$ положим $\Delta_j = \{k \in \mathbb{Z}^d : 2^j \leq |k|_\infty \leq 2^{j+1} - 1\}$. Нетрудно сосчитать мощность “кругового слоя” Δ_j . Именно $\text{card } \Delta_j = 2^{jd}((4 - 2^{-j})^d - (2 - 2^{-j})^d)$.

Для измеримой функции λ на пространстве X с мерой μ и измеримого подмножества $\Omega \subset X$ обозначим через $\lambda^*(s; \Omega)$ невозрастающую перестановку функции $\lambda(s)$ на множестве Ω :

$$\lambda^*(s; \Omega) = \inf\{z > 0 : \mu\{t \in \Omega : |\lambda(t)| > z\} \leq s\}.$$

В случае, когда $\Omega = X$, будем писать $\lambda^*(s)$ вместо $\lambda^*(s; \Omega)$. В пространстве $\mathbb{Z}^d$ меру подмножества Ω определим как количество его элементов.

Для заданного $\beta \geq 0$ и вектора $\alpha \in \mathbb{R}^d$ положим

$$\lambda_{\alpha, \beta}(k) = (|k|^{d+\beta} \|\alpha k\|)^{-1}$$

при $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ и $\lambda_{\alpha, \beta}(0) = 0$.

ЛЕММА 3.1. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^d$ — β -диофантов вектор. Тогда существует положительная константа C такая, что

$$\lambda_{\alpha, \beta}^*(s; \Delta_j) \leq \frac{C}{s^{1+\beta/d}} \quad (4)$$

при всех $j \in \mathbb{Z}_+$ и $s = 1, \dots, \text{card } \Delta_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим векторы $l_j(s) \in \Delta_j$, $s = 1, \dots, \text{card } \Delta_j$, из уравнения $\lambda_{\alpha, \beta}^*(s; \Delta_j) = |\lambda_{\alpha, \beta}(l_j(s))|$.

⁴Напомним, что пространство Гёльдера $C^r(\mathbb{T}^d)$ есть пополнение пространства бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{T}^d$ по норме

$$\|f\|_{C^r} = \begin{cases} \sum_{|j| \leq [r]} \|D^j f\|_C, & r \in \mathbb{N}, \\ \|f\|_{C^{[r]}} + \sum_{|j|=[r]} \sup_h |h|^{-\{r\}} \|\Delta_h D^j f\|_\infty, & r \notin \mathbb{N}. \end{cases}$$

Докажем справедливость неравенства

$$|l_j(s)|^{d+\beta} \|\alpha l_j(s)\| \geq \frac{C_\alpha}{2} \frac{s^{1+\beta/d}}{((4^d - 2^d)2^d)^{1+\beta/d}} \quad (5)$$

при всех $s = 1, \dots, \text{card } \Delta_j$. (Нетрудно видеть, что из (5) следует неравенство (4), в котором $C = 2((4^d - 2^d)2^d)^{1+\beta/d}/C_\alpha$.)

При $s = 1, \dots, 4^d - 2^d$ неравенство (5) непосредственно следует из условия β -диофантовости вектора α .

Для фиксированного S , $4^d - 2^d \leq S \leq \text{card } \Delta_j$, найдем $t \in \mathbb{Z}_+$ из соотношений

$$(4^d - 2^d)2^{dt} + 1 \leq S \leq (4^d - 2^d)2^{d(t+1)}. \quad (6)$$

“Круговой слой” $\Pi_j := \{x \in \mathbb{R}^d : 2^j \leq |x|_\infty \leq 2^{j+1}\}$ разобьем на $(\text{vol } \Pi_j)/2^{jd} = 4^d - 2^d$ равных кубов δ_ν с ребрами длины 2^j . Каждый такой куб разобьем на 2^{dt} равных кубов δ_ν^μ . Получим в итоге разбиение Π_j на $(4^d - 2^d)2^{dt}$ равных кубов с длиной ребра 2^{j-t} .

В силу принципа выбора Дирихле хотя бы один из кубов δ_ν^μ содержит сразу две точки из набора $\{l_j(s) : s = 1, \dots, S\}$. Обозначим их через l' и l'' . Ясно, что $|l' - l''| \leq 2^{j-t}$ и $|l'| \geq 2^j$, $|l''| \geq 2^j$. Поэтому, вспоминая определение векторов $l_j(s)$, получим

$$|l_j(S)|^{d+\beta} \|\alpha l_j(S)\| \geq \max\{|l'|^{d+\beta} \|\alpha l'\|, |l''|^{d+\beta} \|\alpha l''\|\} \geq 2^{j(d+\beta)} \max\{\|\alpha l'\|, \|\alpha l''\|\}.$$

Используя свойства $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ и $\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$, имеем неравенство $\max\{\|\alpha l'\|, \|\alpha l''\|\} \geq \|\alpha(l' - l'')\|/2$. Поэтому

$$\begin{aligned} |l_j(S)|^{d+\beta} \|\alpha l_j(S)\| &\geq 2^{j(d+\beta)} \frac{\|\alpha(l' - l'')\|}{2} = \frac{2^{j(d+\beta)}}{|l' - l''|^{d+\beta}} \frac{|l' - l''|^{d+\beta} \|\alpha(l' - l'')\|}{2} \\ &\geq \frac{2^{j(d+\beta)}}{|l' - l''|^{d+\beta}} \frac{C_\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь неравенством $|l' - l''| \leq 2^{j-t}$ и оценками (6), вследствие которых $2^t \geq S^{1/d}/((4^d - 2^d)^{1/d}2)$. Итак, имеем

$$\frac{2^{j(d+\beta)}}{|l' - l''|^{d+\beta}} \geq \frac{2^{j(d+\beta)}}{2^{(j-t)(d+\beta)}} = 2^{t(d+\beta)} \geq \frac{s^{1+\beta/d}}{(4^d - 2^d)^{1+\beta/d} 2^{d+\beta}},$$

а следовательно, справедливо (5), что и требовалось.

ЛЕММА 3.2. *Предположим, что множество $D \subset \mathbb{Z}^d$ лакунарно в следующем смысле: существует номер $j_0 \in \mathbb{N}$ такой, что $D \cap \Delta_j = \emptyset$ при $j < j_0$ и $\text{card}(D \cap \Delta_j) = 1$ при $j \geq j_0$. Тогда*

1) *существуют положительные константы c^1, c^2 такие, что*

$$\sqrt{\sum_{k \in D} |\hat{g}_k|^2} \leq c^1 \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| \ln^{1/2}(e + |g(x)|) dx + c^2 \quad (7)$$

для всякой функции $g \in L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^d)$;

- 2) найдется положительная константа c^3 такая, что для любой последовательности чисел $\{\widehat{g}_k\}_{k \in D}$, для которой $\sum_{k \in D} |\widehat{g}_k|^2 < \infty$, существует функция $g_D \in \bigcap_{2 \leq q < \infty} L^q(\mathbb{T}^d)$ такая, что $\widehat{g}_D(k) = \widehat{g}_k$, если $k \in D$, $\widehat{g}_D(k) = 0$, если $k \notin D$, и

$$\|g_D\|_q \leq c^3 \sqrt{q} \sqrt{\sum_{k \in D} |\widehat{g}_k|^2}, \quad q \in [2, +\infty). \quad (8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Упорядочим элементы множества D следующим способом: $D = \{d_m\}_{m=1}^\infty$, где $\{d_m\} = D \cap \Delta_{j_0+m-1}$. Представим D в виде объединения трех попарно не пересекающихся множеств: $D = D^0 \cup D^1 \cup D^2$, $D^\nu = \{d_l \in D : l \equiv \nu \pmod{3}, l \in \mathbb{N}\}$. Элементы множества D^ν упорядочим в порядке возрастания их норм и обозначим через $d_m^{(\nu)}$, $m = 1, 2, \dots$. Нетрудно убедиться, что

$$|d_{m+1}^{(\nu)}| \geq 4|d_m^{(\nu)}| \quad (9)$$

для любого $m \in \mathbb{N}$.

Пусть $r_m : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $m = 1, 2, \dots$, обозначает m -ю функцию Радемахера:

$$r_m(t) = \begin{cases} 1, & t \in \left(\frac{i-1}{2^m}, \frac{i}{2^m}\right), \quad i \text{ нечетное,} \\ -1, & t \in \left(\frac{i-1}{2^m}, \frac{i}{2^m}\right), \quad i \text{ четное.} \end{cases}$$

Зафиксируем произвольный тригонометрический полином G , удовлетворяющий условию $\sum_{k \in D} |\widehat{G}_k|^2 \neq 0$. (В случае, когда $\sum_{k \in D} |\widehat{G}_k|^2 = 0$, неравенства (7) и (8) тривиальны.)

Для $\nu \in \{0, 1, 2\}$ положим

$$\tau^\nu(x) = \begin{cases} \sum_{k \in D^\nu} \widehat{G}_k e_k(x) \left(\sum_{k \in D^\nu} |\widehat{G}_k|^2 \right)^{-1/2}, & \text{если } \sum_{k \in D^\nu} |\widehat{G}_k|^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } \sum_{k \in D^\nu} |\widehat{G}_k|^2 = 0. \end{cases}$$

Ясно, что $\int_{\mathcal{G}^d} \tau^\nu(x) \overline{G}(x) dx = \sqrt{\sum_{k \in D^\nu} |\widehat{G}_k|^2}$. Обозначим через N степень полинома G . Рассмотрим произведение Рисса

$$R_t^\nu(x) = \prod_{k \in D^\nu, |k| \leq N} (1 + r_{|k|}(t) \cos \pi k x) = 1 + \sum_\nu \gamma_\nu(t) \cos \pi \nu x.$$

Легко видеть, что $R_t(x) \geq 0$, $\int_{\mathcal{G}^d} R_t(x) dx = 1$ и в силу (11) $\gamma_{d_m^{(\nu)}}(t) = r_{|d_m^{(\nu)}|}(t)$. Положим

$$S_t^\nu(x) = \sum_{k \in D^\nu} \widehat{\tau}_k^\nu r_{|k|}(t) e_k(x).$$

Тогда при всех $t \in [0, 1]$, $t \notin \{i/2^m : i \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$, справедливы равенства

$$2S_t^\nu * R_t^\nu(x) = 2 \sum_{k \in D^\nu} \widehat{\tau^\nu}(k) r_{|k|}(t) \frac{r_{|k|}(t)}{2} e_k(x) = \tau^\nu(x).$$

Положим $\chi(u) = \exp(u^2/16)$. Из интегрального неравенства Йенсена (см. [7; гл. 1, § 10]), примененного к выпуклой функции χ , имеем:

$$\begin{aligned} \chi\left(\frac{|\tau^\nu(x)|}{2}\right) &= \chi(|S_t^\nu * R_t^\nu(x)|) \leq \chi\left(\int_{\mathcal{G}^d} |S_t^\nu(x+u)| R_t^\nu(u) du\right) \\ &\leq \int_{\mathcal{G}^d} \chi(|S_t^\nu(x+u)|) R_t^\nu(u) du. \end{aligned}$$

Следовательно, при $t \in [0, 1]$, $t \notin \{i/2^m : i \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{G}^d} \chi\left(\frac{|\tau^\nu(x)|}{2}\right) dx &\leq \int_{\mathcal{G}^d} \int_{\mathcal{G}^d} \chi(|S_t^\nu(x+u)|) R_t^\nu(u) dx du \\ &= \int_{\mathcal{G}^d} R_t^\nu(u) du \int_{\mathcal{G}^d} \chi(|S_t^\nu(x+u)|) dx = \int_{\mathcal{G}^d} \chi(|S_t^\nu(x)|) dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Аналогично,

$$\int_{\mathcal{G}^d} \left(\frac{|\tau^\nu(x)|}{2}\right)^q dx \leq \int_{\mathcal{G}^d} |S_t^\nu(x)|^q dx \quad (11)$$

при всех $q \in [1, +\infty)$ и $t \in [0, 1]$, $t \notin \{i/2^m : i \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$.

В [7; гл. 5, § 8] фактически доказано, что если

$$h(t) = \sum_{l=1}^{\infty} h_l r_l(t), \quad \sum_{l=1}^{\infty} |h_l|^2 \leq 1,$$

то

$$\int_0^1 \exp\left(\frac{|h(t)|^2}{16}\right) dt \leq \frac{4}{4-e}, \quad \int_0^1 |h(t)|^q dt \leq (2\sqrt{q})^q \quad \forall q \in [2, +\infty).$$

Отсюда, полагая $h_l := \widehat{\tau^\nu}(k) e_k(x)$ при $l = |k|$, $k \in D^\nu$, и $h_l := 0$ для других $l \in \mathbb{N}$, заключаем, что

$$\int_0^1 \chi(|S_t^\nu(x)|) dt \leq \frac{4}{4-e}, \quad \int_0^1 |S_t^\nu(x)|^q dt \leq (2\sqrt{q})^q.$$

Следовательно,

$$\int_0^1 \int_{\mathcal{G}^d} \chi(|S_t^\nu(x)|) dx dt = \int_{\mathcal{G}^d} \int_0^1 \chi(|S_t^\nu(x)|) dt dx \leq \frac{4}{4-e}$$

и, значит, существует $t_0 \in [0, 1]$, $t_0 \notin \{i/2^m : i \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}\}$, такое, что

$$\int_{\mathcal{G}^d} \chi(|S_{t_0}(x)|) dx \leq \frac{4}{4-e}.$$

Из (10) и последнего неравенства немедленно следует оценка

$$\int_{\mathcal{E}^d} \chi\left(\frac{|\tau^\nu(x)|}{2}\right) dx \leq \frac{4}{4-e}. \quad (12)$$

Рассуждая аналогично, из (11) получаем, что

$$\int_{\mathcal{E}^d} |\tau^\nu(x)|^q dx \leq 4^q q^{q/2} \quad (13)$$

при всех $q \in [2, +\infty)$.

Из определения множеств D^ν и полиномов τ^ν заключаем, что

$$\sum_{k \in D} \hat{G}_k e_k(x) = \sum_{\nu=0}^2 \sqrt{\sum_{k \in D^\nu} |\hat{G}_k|^2} \tau^\nu(x).$$

Отсюда и из (13) получаем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k \in D} \hat{G}_k e_k(\cdot) \right\|_q &\leq \sum_{\nu=0}^2 \sqrt{\sum_{k \in D^\nu} |\hat{G}_k|^2} \|\tau^\nu\|_q \\ &\leq \left(\sum_{\nu=0}^2 \sqrt{\sum_{k \in D^\nu} |\hat{G}_k|^2} \right) 4\sqrt{q} \leq \sqrt{3} \sqrt{\sum_{k \in D} |\hat{G}_k|^2} 4\sqrt{q} \end{aligned}$$

при всех $q \in [2, \infty)$. То есть справедливо неравенство (8), в котором $c^3 = 4\sqrt{3}$.

Нетрудно проверить, что существуют абсолютные положительные постоянные A и B такие, что $uv \leq \chi(u/2) + Av\sqrt{\ln(e+v)} + B$ при всех неотрицательных u и v . Пусть $g \in L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^d)$. Полагая $G(x) = \sum_{|k| \leq N} \hat{g}_k e_k(x)$, где N достаточно велико, из (12) заключаем, что

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{k \in D} |\hat{G}_k|^2} &\leq \sum_{\nu=0}^2 \sqrt{\sum_{k \in D^\nu} |\hat{G}_k|^2} = \sum_{\nu=0}^2 \int_{\mathcal{E}^d} \tau^\nu(x) \bar{g}(x) dx \leq \sum_{\nu=0}^2 \int_{\mathcal{E}^d} |\tau^\nu(x) g(x)| dx \\ &\leq \sum_{\nu=0}^2 \int_{\mathcal{E}^d} \chi\left(\frac{|\tau^\nu(x)|}{2}\right) dx + 3 \int_{\mathcal{E}^d} (A|g(x)|\sqrt{\ln(e+|g(x)|)} + B) dx \\ &\leq \frac{12}{4-e} + 3A \int_{\mathcal{E}^d} |g(x)|\sqrt{\ln(e+|g(x)|)} dx + 3B. \end{aligned}$$

Отсюда, устремляя N к бесконечности, получаем неравенство (7), в котором $c^1 = 3A$, $c^2 = 3B + 12/(3(4-e))$.

Введем в рассмотрение первые арифметические средние ряда Фурье $\sum_k c_k e_k(x)$:

$$\sigma_{n_1, \dots, n_d}(f)(x) = \frac{1}{(n_1+1) \cdots (n_d+1)} \sum_{k_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{n_d} S_{k_1, \dots, k_d}(x),$$

где $S_{k_1, \dots, k_d}(x) = \sum_{|j_1| \leq k_1} \cdots \sum_{|j_d| \leq k_d} c_j e_j(x)$ — прямоугольные частичные суммы.

Известно [7; гл. 17, §1], что если $1 < q < +\infty$ и нормы $\|\sigma_n(f)\|_q$, $n \in \mathbb{Z}_+^d$, равномерно ограничены, то $\sum_k c_k e_k(x)$ есть ряд Фурье функции $f \in L^q(\mathbb{T}^d)$ и $\|\sigma_n(f) - f\|_q \rightarrow 0$, когда $\min_j n_j \rightarrow +\infty$.

Из (7) заключаем, что существует функция $\tilde{g} \in L^2(\mathbb{T}^d)$ такая, что $\widehat{\tilde{g}}(k) = g_k$, если $k \in D$, $\widehat{\tilde{g}}(k) = 0$, если $k \notin D$.

Зафиксируем $n \in \mathbb{Z}_+^d$. Полином $\sigma_n(\tilde{g}(x))$ можно представить в виде $\sigma_n(\tilde{g}(x)) = \sum_k \xi_k \widehat{g}_k e_k(x)$, где $0 \leq \xi_k \leq 1$. Ясно также, что $\sigma_n(\tilde{g}(x)) = \tilde{g}_0(x) + \tilde{g}_1(x) + \tilde{g}_2(x)$, где $\tilde{g}^\nu(x) = \sum_{k \in D^\nu} \xi_k \widehat{g}_k e_k(x)$. Из (13) следует, что $\|\tilde{g}^\nu\|_q \leq 4\sqrt{q} \|\tilde{g}^\nu\|_2$. Поэтому

$$\begin{aligned} \|\sigma_n(\tilde{g})\|_q &\leq \|\tilde{g}_0\|_q + \|\tilde{g}_1\|_q + \|\tilde{g}_2\|_q \leq 4\sqrt{q} (\|\tilde{g}_0\|_2 + \|\tilde{g}_1\|_2 + \|\tilde{g}_2\|_2) \\ &\leq 4\sqrt{q}\sqrt{3} \|\sigma_n(\tilde{g})\|_2 \leq 4\sqrt{q}\sqrt{3} \|\tilde{g}\|_2. \end{aligned}$$

Итак,

$$\|\tilde{g}\|_q \leq \|\tilde{g} - \sigma_n(\tilde{g})\|_q + \|\sigma_n(\tilde{g})\|_q \leq \|\tilde{g} - \sigma_n(\tilde{g})\|_q + 4\sqrt{3}\sqrt{q} \|\tilde{g}\|_2.$$

Устремляя $\min_j n_j$ к бесконечности, получаем неравенство (8).

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $d = 1$ доказательство леммы 3.2 содержится в [7; гл. 12, §7, гл. 5, §8].

Для заданной функции $\lambda: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$ и натурального s определим (возможно, неоднозначно) векторы $l_j(s) \in \Delta_j$, $j = j_0, j_0 + 1, \dots$, $j_0 = \min\{j : \text{card } \Delta_j \geq s\}$, из уравнения $\lambda^*(s; \Delta_j) = |\lambda(l_j(s))|$.

Положим $D_s(\lambda) = \{l_j^\lambda(s)\}_{j=j_0}^\infty$. Из определения Δ_j и $D_s(\lambda)$ следует, что множества $D_s(\lambda)$, $s = 1, 2, \dots$, попарно не пересекаются и $\bigcup_{s \in \mathbb{N}} D_s(\lambda) = \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$.

ЛЕММА 3.3. *Предположим, что для функции $\lambda: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$, $\lambda(0) = 0$, найдутся константы $c_1 > 0$ и $\gamma \geq 1$ такие, что справедливо неравенство*

$$\lambda^*(s; \Delta_j) \leq \frac{c_1}{s^\gamma} \quad (14)$$

при всех $j \in \mathbb{N}$ и $s = 1, \dots, \text{card } \Delta_j$.

Тогда существуют положительные константы C_1 и C_2 такие, что для любой функции $g \in L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^d)$ существует функция $\Lambda g \in \bigcap_{2 \leq q < \infty} L^q(\mathbb{T}^d)$, коэффициенты Фурье которой равны $\lambda(k) \widehat{g}_k$ и

$$\|\Lambda g\|_q \leq q^\kappa \left(C_1 \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| \ln^{1/2}(e + |g(x)|) dx + C_2 \right), \quad q \in [2, +\infty), \quad (15)$$

где $\kappa = 3/2$ при $\gamma = 1$, $\kappa = 1/2$ при $\gamma > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть константы c^1, c^2 и c^3 — из условия леммы 3.2. Введем обозначение: $J(g) = c^1 \int_0^1 |g(x)| \ln^{1/2}(e + |g(x)|) dx + c^2$.

Пусть $g \in L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^d)$, $s \in \mathbb{N}$. Из леммы 3.2 (в которой положим $D = D_s(\lambda)$) и неравенства (14) следует существование функции $\Lambda_s g \in \bigcap_{2 \leq q < \infty} L^q(\mathbb{T}^d)$ такой, что

$$\widehat{\Lambda_s g}(k) = \begin{cases} \lambda(k) \widehat{g}_k, & k \in D_s(\lambda), \\ 0, & k \notin D_s(\lambda), \end{cases}$$

$$\|\Lambda_s g\|_q \leq c^3 \sqrt{q} \sqrt{\sum_{k \in D_s(\lambda)} |\lambda(k)|^2 |\widehat{g}_k|^2} \leq c^3 \sqrt{q} \frac{c_1}{s^\gamma} \sqrt{\sum_{k \in D_s(\lambda)} |\widehat{g}_k|^2} \leq c_4 \frac{\sqrt{q}}{s^\gamma} J(g), \quad (16)$$

где $c_4 = c^3 c_1$.

Обозначим $\Lambda_s g(x) = \sum_{k \in D_s(\lambda)} \lambda(k) \widehat{g}_k e_k(x)$.

Пусть $\gamma > 1$. Из (16) получим

$$\sum_{s=1}^{\infty} \|\Lambda_s g\|_q \leq c_4 \sqrt{q} J(g) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^\gamma} = c_5 \sqrt{q} J(g),$$

где положительная константа c_5 не зависит от выбора g и q . Отсюда следует, что ряд $\sum_{s=1}^{\infty} \Lambda_s g$ сходится в $L^q(\mathbb{T}^d)$ к функции Λg , коэффициенты Фурье которой равны $\lambda(k) \widehat{g}_k$, и $\|\Lambda g\|_q \leq c_5 \sqrt{q} J(g)$, $q \in [2, \infty)$. Полагая $C_1 = c_5 c^1$, $C_2 = c_5 c^2$, получаем неравенство (15). Пусть теперь $\gamma = 1$. Зафиксируем $g \in L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^d)$ и определим линейное отображение T_g из пространства $l^\infty(\mathbb{N})$ в пространство распределений на $\mathbb{T}^d$ (т.е. в пространство линейных непрерывных функционалов на $C^\infty(\mathbb{T}^d)$) следующим способом. Последовательности $u \in l^\infty(\mathbb{N})$ поставим в соответствие распределение $T_g[u]$, коэффициенты Фурье которого равны $u_{s(k)s}(k) \times \lambda(k) \widehat{g}_k$, где $s(k)$ однозначно определяется из условия $k \in D_s(\lambda)$.

Из (16) и равенства Парсеваля имеем

$$\|T_g[u](\cdot)\|_2^2 = \sum_{s=1}^{\infty} |u_s|^2 s^2 \|\Lambda_s g(\cdot)\|_2^2 \leq 2c_4^2 J^2(g) \|u\|_{l^2(\mathbb{N})}^2$$

при всех $u \in l^2(\mathbb{N})$. Следовательно, линейный оператор T_g непрерывно действует из $l^2(\mathbb{N})$ в $L^2(\mathbb{T}^d)$ и для его нормы справедливо неравенство $\|T_g\|_{l^2 \rightarrow L^2} \leq \sqrt{2} c_4 J(g)$.

Пусть $2 < q < \infty$. В силу неравенства Минковского и (16) имеем

$$\|T_g[u](\cdot)\|_q \leq \sum_{s=1}^{\infty} |u_s| s \|\Lambda_s g(\cdot)\|_q \leq c_4 \sqrt{q} J(g) \|u\|_{l^1(\mathbb{N})}.$$

Значит, T_g непрерывно действует из $l^1(\mathbb{N})$ в $L^q(\mathbb{T}^d)$ и $\|T_g\|_{l^1 \rightarrow L^q} \leq c_4 \sqrt{q} J(g)$.

Пусть $0 < \delta < 1$. Положим

$$\frac{1}{p_1} = \frac{1-\delta}{1} + \frac{\delta}{2}, \quad \frac{1}{q_1} = \frac{1-\delta}{q} + \frac{\delta}{2}.$$

Применяя теорему Рисса–Торина [7; гл. 12, § 1] к оператору T_g , заключаем, что он непрерывно действует из $l^{p_1}(\mathbb{N})$ в $L^{q_1}(\mathbb{T}^d)$ и

$$\begin{aligned}\|T_g\|_{l^{p_1} \rightarrow L^{q_1}} &\leq \|T_g\|_{l^1 \rightarrow L^q}^{1-\delta} \|T_g\|_{l^2 \rightarrow L^2}^\delta \\ &\leq c_4 q^{(1-\delta)/2} J(g)^{1-\delta} 2^{\delta/2} J(g)^\delta \leq \sqrt{2} c_4 q^{(1-\delta)/2} J(g).\end{aligned}$$

Следовательно, $\|T_g[u]\|_{q_1} \leq \sqrt{2} c_4 q^{(1-\delta)/2} J(g) \|u\|_{l^{p_1}}$. В частности, полагая $u = \widehat{u} := \{1/s\}_{s=1}^\infty$, получаем:

$$\|T_g[\widehat{u}]\|_{q_1} \leq \sqrt{2} c_4 q^{(1-\delta)/2} \frac{2}{(p_1 - 1)^{1/p_1}} J(g). \quad (17)$$

Из определения p_1 и q_1 имеем:

$$\begin{aligned}p_1 - 1 &= \frac{\delta}{2 - \delta}, \quad \frac{1}{(p_1 - 1)^{1/p_1}} = \left(\frac{2}{\delta} - 1\right)^{1-\delta/2}, \\ q_1 &= \frac{2q}{2(1-\delta) + q\delta}, \quad 2(\delta - 1)q_1 = (q_1\delta - 2)q, \quad q = \frac{2(1-\delta)}{2/q_1 - \delta}.\end{aligned}$$

Поэтому, полагая $\theta = 2/q_1$, получаем, что

$$q^{(1-\delta)/2} \frac{1}{(p_1 - 1)^{1/p_1}} = \left(\frac{2(1-\delta)}{\theta - \delta}\right)^{(1-\delta)/2} \left(\frac{2}{\delta} - 1\right)^{1-\delta/2}.$$

Выражение в правой части последней формулы обозначим через $F_\theta(\delta)$. Покажем, что $\min_{\delta \in (0, \theta)} F_\theta(\delta)$ имеет порядок $\theta^{-3/2}$ при $\theta \rightarrow 0+$. Действительно, пусть $\bar{\delta} = \bar{\delta}(\theta)$ — точка минимума $F_\theta(\delta)$ на $(0, \theta)$. Имеем

$$F_\theta(\bar{\delta}) \sim 2\sqrt{2} \frac{(\theta - \bar{\delta})^{-1/2 + \bar{\delta}/2}}{\bar{\delta}} = 2\sqrt{2} \bar{\delta}^{-3/2} \left(\frac{\theta}{\bar{\delta}} - 1\right)^{-1/2 + \bar{\delta}/2}, \quad \theta \rightarrow 0+.$$

Ясно, что

$$F_\theta\left(\frac{\theta}{2}\right) \sim 2\sqrt{2} \theta^{-3/2}, \quad \theta \rightarrow 0+. \quad (18)$$

Если предположить, что $\liminf_{\theta \rightarrow 0+} (\bar{\delta}/\theta) = 0$, то, вводя обозначение $\xi = \bar{\delta}/\theta$, получаем

$$F_\theta(\bar{\delta}) \sim 2\sqrt{2} \theta^{-3/2} \xi^{-3/2} \frac{(1-\xi)^{-1/2 + \theta\xi}}{\xi^{-1/2 + \theta\xi}} \geq \theta^{-3/2} \xi^{-1} (1-\xi)^{-1/2 + \theta\xi}, \quad \theta \rightarrow 0+.$$

Из нашего предположения следует, что $\limsup_{\theta \rightarrow 0+} \xi^{-1} (1-\xi)^{-1/2 + \theta\xi} = +\infty$, что противоречит (18). Полученное противоречие доказывает, что

$$\min_{\delta \in (0, \theta)} F_\theta(\delta) \asymp \theta^{-3/2}, \quad \theta \rightarrow 0+. \quad (19)$$

Из (17) и (19) получаем, что существует положительная константа c_6 такая, что $\|T_g[\widehat{u}]\|_q \leq c_6 q^{3/2} J(g)$ при всех $q \in [2, \infty)$. При этом нетрудно видеть, что коэффициенты Фурье функции $T_g[\widehat{u}]$ равны $\lambda(k)\widehat{g}_k$. Для завершения доказательства осталось положить $C_1 = c_6 c^1$ и $C_2 = c_6 c^2$.

ЛЕММА 3.4. Пусть вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$ строго β -диофантов, и пусть векторы q_s , $s = 1, 2, \dots$, удовлетворяют неравенству (3). Тогда для каждого $m \in \mathbb{N}$ существует целое n , $|q_m|^{d+\beta}/C_\alpha \leq n \leq 2|q_m|^{d+\beta}/C_\alpha$, такое, что

$$\sum_{s=1}^m \frac{\sin^2 \pi n q_s \alpha}{|q_s|^{2(d+\beta)} \sin^2 \pi q_s \alpha} \geq \frac{1}{4\pi^2 (C_\alpha)^2} m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства (3) следует, что

$$\sum_{s=1}^m \frac{\sin^2 \pi n q_s \alpha}{|q_s|^{2(d+\beta)} \sin^2 \pi q_s \alpha} \geq \frac{1}{\pi^2 (C_\alpha)^2} \sum_{s=1}^m \sin^2 \pi n q_s \alpha.$$

Положим $A = \min\{l \in \mathbb{Z} : l \geq |q_m|^{d+\beta}/C_\alpha\}$.

Имеем

$$\sum_{n=A}^{2A-1} \cos 2\pi n \alpha q_s = \operatorname{Re} \sum_{n=A}^{2A-1} e^{2\pi i n \alpha q_s}.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=A}^{2A-1} \cos 2\pi n \alpha q_s \leq \left| \sum_{n=A}^{2A-1} e^{2\pi i n \alpha q_s} \right| = \frac{|\sin A \pi q_s \alpha|}{|\sin \pi q_s \alpha|} \leq \frac{1}{2\|q_s \alpha\|} \leq \frac{|q_s|^{d+\beta}}{2C_\alpha}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{A} \sum_{n=A}^{2A-1} \left(\sum_{s=1}^m \sin^2 \pi n q_s \alpha \right) &= \frac{1}{2} \frac{1}{A} \sum_{n=A}^{2A-1} \left(\sum_{s=1}^m (1 - \cos 2\pi n \alpha q_s) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(m - \sum_{s=1}^m \frac{1}{A} \sum_{n=A}^{2A-1} \cos 2\pi n \alpha q_s \right) \geq \frac{1}{2} \left(m - \sum_{s=1}^m \frac{1}{A} \frac{|q_s|^{d+\beta}}{2C_\alpha} \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(m - \sum_{s=1}^m \frac{1}{2} \right) = \frac{m}{4}. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3.5. Пусть заданы последовательность $\{q_s\}_{s=1}^\infty \subset \mathbb{Z}^d$, $|q_1| < |q_2| < \dots$, функция $\lambda: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$ и убывающая функция $\xi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Если существует строго убывающая к нулю функция $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\psi(2) > \xi(2)$, такая, что справедливо неравенство

$$\lambda^*(s; \Delta_j) \leq \psi(s)$$

при всех $j \in \mathbb{N}$ и $s = 1, \dots, \operatorname{card} \Delta_j$, то для каждого $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, существует набор векторов $\{q_1^n, \dots, q_n^n\} \subset \{q_s\}_{s=1}^\infty$ такой, что

$$|\lambda(\delta_1 q_1^n + \dots + \delta_n q_n^n)| \leq \xi(n) \quad (20)$$

всякий раз, когда $\delta_j \in \{-1; 0; 1\}$ и $\sum_{j=1}^n |\delta_j| > 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Переходя в случае необходимости к подпоследовательности, будем полагать, что $|q_{s+1}|/|q_s| \geq 4$ при всех $s \in \mathbb{N}$. Следовательно, для всякого $l \geq 2$ и набора $\{\delta_s\}_{s=1}^{l-1}$, $\delta_s \in \{-1; 0; 1\}$, имеем $|\sum_{s=1}^{l-1} \delta_s q_s| \leq \sum_{s=1}^{l-1} |q_s| \leq |q_l|/3$. Поэтому $|\pm q_l + \sum_{s=1}^{l-1} \delta_s q_s| \leq 4|q_l|/3$, $|\pm q_l + \sum_{s=1}^{l-1} \delta_s q_s| \geq 2|q_l|/3$. Отсюда заключаем, что если $q_l \in \Delta_j$, то множество

$$M_l = \left\{ q : q = \delta_l q_l + \sum_{s=1}^{l-1} \delta_s q_s, \delta_l \in \{-1; 1\}, \delta_s \in \{-1; 0; 1\}, s = 1, \dots, l-1 \right\}$$

принадлежит объединению $\Delta_{j-1} \cup \Delta_j \cup \Delta_{j+1}$, и, следовательно, из условия леммы заключаем, что

$$\begin{aligned} \text{card}\{q \in M_l : |\lambda(q)| > \varepsilon\} &\leq \text{card}\{k \in \Delta_{j-1} \cup \Delta_j \cup \Delta_{j+1} : |\lambda(q)| > \varepsilon\} \\ &\leq 3 \text{card}\{s \in \mathbb{N} : \psi(s) > \varepsilon\} \end{aligned} \quad (21)$$

для всякого $\varepsilon > 0$. Продолжим функцию ψ до непрерывной строго убывающей на $[1, +\infty)$ функции, которую обозначим той же буквой.

Зафиксируем $n \geq 2$ и положим $L_n = [3n\psi^{-1}(\xi(n))]$. Введем множества $Q_1 = \{q_1, \dots, q_{L_n}\}$, $Q_2 = \{q_{L_n+1}, \dots, q_{2L_n}\}, \dots, Q_{n-1} = \{q_{(n-2)L_n+1}, \dots, q_{(n-1)L_n}\}$, $Q_n = \{q_{(n-1)L_n+1}\}$ и докажем, что существуют векторы $q_1^n \in Q_1, \dots, q_n^n \in Q_n$ такие, что справедливо неравенство (20) при всех $\delta_j \in \{-1; 0; 1\}$, $\sum_{j=1}^n |\delta_j| > 1$.

Для заданных векторов $w_2 \in Q_2, \dots, w_n \in Q_n$ оценим сверху количество векторов $w_1 \in Q_1$, для которых существуют $\delta_1 \in \{-1; 1\}$, $l \in \{2, \dots, n\}$ и $\delta_l \in \{-1; 1\}$ такие, что $|\lambda(\delta_l w_l + \delta_1 w_1)| > \xi(n)$.

Определим $N(l) \in \mathbb{N}$ из равенства $w_l = q_{N(l)}$.

Из (21) следует, что

$$\begin{aligned} &\sum_{l=2}^n \text{card}\{w_1 \in Q_1 : \exists \delta_1, \delta_l \in \{-1; 1\}, |\lambda(\delta_1 w_1 + \delta_l w_l)| > \xi(n)\} \\ &\leq \sum_{l=2}^n \text{card}\{q \in M_{N(l)} : |\lambda(q)| > \xi(n)\} \leq (n-1)3\psi^{-1}(\xi(n)) < L_n = \text{card } Q_1. \end{aligned}$$

Следовательно, существует вектор $w_1^0 = \xi_1(w_2, \dots, w_n)$, $w_1^0 \in Q_1$, такой, что

$$|\lambda(\delta_1 w_1^0 + \delta_l w_l)| \leq \xi(n) \quad (22)$$

при всех $l \in \{2, \dots, n\}$ и $\delta_1, \delta_l \in \{-1; 1\}$.

Далее, если $n \geq 3$, то для заданного набора векторов $w_3 \in Q_3, \dots, w_n \in Q_n$ оценим сверху количество векторов $w_2 \in Q_2$, для которых существуют $\delta_1 \in \{-1; 0; 1\}$, $\delta_2 \in \{-1; 1\}$, $l \in \{3, \dots, n\}$ и $\delta_l \in \{-1; 1\}$ такие, что $|\lambda(\delta_l w_l + \delta_2 w_2 + \delta_1 w_1^0(w_2, \dots, w_n))| > \xi(n)$. Так как

$$\delta_l w_l + \delta_2 w' + \delta_1 \xi_1(w', w_3, \dots, w_n) \neq \delta_l w_l + \delta_2 w'' + \delta_1 \xi_1(w'', w_3, \dots, w_n),$$

если $w' \neq w''$, $w', w'' \in Q_2$, значит,

$$\begin{aligned} & \sum_{l=3}^n \text{card} \{w_2 \in Q_2 : \exists \delta_2, \delta_l \in \{-1; 1\}, \delta_1 \in \{-1; 0; 1\}, \\ & \quad |\lambda(\delta_l w_l + \delta_2 w_2 + \delta_1 \xi_1(w_2, \dots, w_n))| > \xi(n)\} \\ & \leq \sum_{l=3}^n \text{card} \{q \in M_{N(l)} : |\lambda(q)| > \xi(n)\} \leq (n-2)3\psi^{-1}(\xi(n)) < L_n = \text{card } Q_2. \end{aligned}$$

Следовательно, существует вектор $w_2^0 = \xi_2(w_3, \dots, w_n)$, $w_2^0 \in Q_2$, такой, что

$$|\lambda(\delta_1 w_1^0 + \delta_2 w_2^0 + \delta_l w_l)| \leq \xi(n), \quad (23)$$

$l \in \{2, \dots, n\}$, $\delta_2, \delta_l \in \{-1; 1\}$, $\delta_1 \in \{-1; 0; 1\}$. (Здесь $w_1^0 = \xi_1(w_2^0, w_3, \dots, w_n)$.)

Пусть $j \in \{3, \dots, n-1\}$, $n \geq 4$, и уже построены отображения $\xi_s: Q_{s+1} \times \dots \times Q_n \rightarrow Q_s$, $s = 1, \dots, j-1$, такие, что при всех $l \in \{j, \dots, n\}$, $\delta_l, \delta_{j-1} \in \{-1; 1\}$, $\delta_s \in \{-1; 0; 1\}$, $s = 1, \dots, j-2$, справедливо неравенство

$$|\lambda(\delta_l w_l + \delta_{j-1} w_{j-1}^0 + \delta_1 w_1^0 + \dots + \delta_{j-2} w_{j-2}^0)| \leq \xi(n),$$

где $w_{j-1}^0 = \xi_{j-1}(w_j, \dots, w_n)$, $w_{j-2}^0 = \xi_{j-2}(w_{j-1}^0, w_j, \dots, w_n)$, $\dots$, $w_1^0 = \xi_1(w_2^0, \dots, w_{j-1}^0, w_j, \dots, w_n)$.

Для $j \geq 3$, $l \in j+1, \dots, n$ и $w \in Q_j$ рассмотрим множества

$$\begin{aligned} M^{j,l}(w) = \{q : q = \delta_l w_l + \delta_j w + \delta_1 w_1^0 + \dots + \delta_{j-1} w_{j-1}^0, \\ \delta_l, \delta_j \in \{-1; 1\}, \delta_s \in \{-1; 0; 1\}, s = 1, \dots, j-1\}. \end{aligned}$$

Из условия на q_s следует, что $M^{j,l}(w') \cap M^{j,l}(w'') = \emptyset$ при $w' \neq w''$, $w', w'' \in Q_j$, и $M^{j,l}(w) \subset M_{N(l)}$ при всех $w \in Q_j$. Поэтому

$$\begin{aligned} & \sum_{l=j+1}^n \text{card} \left\{ w_j \in Q_j : \exists \delta_j, \delta_l \in \{-1; 1\}, \delta_s \in \{-1; 0; 1\}, \right. \\ & \quad \left. \left| \lambda \left(\delta_l w_l + \delta_j w_j + \sum_{s=1}^{j-1} \delta_s w_s^0 \right) \right| > \xi(n) \right\} \\ & \leq \sum_{l=j+1}^n \text{card} \{q \in M_{N(l)} : |\lambda(q)| > \xi(n)\} \leq (n-j)3\psi^{-1}(\xi(n)) < L_n = \text{card } Q_j \end{aligned}$$

и, значит, рассуждая как в случае $j = 2$, заключаем, что существует вектор $w_j^0 = \xi_j(w_{j+1}, \dots, w_n) \in Q_j$, удовлетворяющий неравенству

$$|\lambda(\delta_l w_l + \delta_j w_j^0 + \delta_1 w_1^0 + \dots + \delta_{j-1} w_{j-1}^0)| \leq \xi(n) \quad (24)$$

при всех $l \in \{j+1, \dots, n\}$, $\delta_l, \delta_j \in \{-1; 1\}$, $\delta_s \in \{-1; 0; 1\}$, $s = 1, \dots, j-1$.

Полагая $q_n^n = q_{(n-1)L_n+1}$, $q_{n-1}^n = \xi_{n-1}(q_n^n)$, $q_{n-2}^n = \xi_{n-2}(q_{n-1}^n, q_n^n)$, $\dots$, $q_1^n = \xi_1(q_2^n, \dots, q_n^n)$, из неравенств (22)–(24) заключаем, что набор векторов $\{q_1^n, \dots, q_n^n\}$ искомым.

§ 4. Условия расходимости по мере биркгофовых сумм

4.1. Введем в рассмотрение следующий класс функций целого аргумента:

$$\Theta = \{\theta: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C} : |\theta(k)| \equiv 1, \theta(0) = 0\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Для заданных числа $r \geq d$ и функции $\theta \in \Theta$ обозначим через $I_r^\theta(x) = I_r^{d,\theta}(x)$ *обобщенное ядро Бесселя–Макдональда* – суммируемую на $\mathbb{T}^d$ функцию, коэффициенты Фурье которой равны $\widehat{I_r^\theta}(k) = \theta(k)(1 + |k|_2^2)^{-r/2}$.

В случае, когда $d = 1$, а $\theta(k) = \exp(-\frac{\pi}{2}ir \operatorname{sign} k)$, пространство $I_r^\theta \psi(L)(\mathbb{T}^d)$ совпадает с пространством Орлича–Вейля $W^r \psi(L)(\mathbb{T})$.

Введем в рассмотрение *обобщенный класс Орлича–Лиувилля*:

$$I_r^\theta \psi(L)(\mathbb{T}^d) = \left\{ f \in \psi(L)(\mathbb{T}^d) : f(x) = \int_{\mathbb{S}^d} f(t) dt + I_r^\theta * \tilde{f}(x), \tilde{f} \in \psi(L)(\mathbb{T}^d) \right\}.$$

4.2. Исследуем порядок роста L^2 -нормы биркгофовых сумм для функции $I_{d+\beta}^\theta$.

Обозначим $K_n(x) = \sum_{s=0}^{n-1} I_{d+\beta}^\theta(T_\alpha^s x)$, $n \in \mathbb{N}$. Нетрудно вычислить коэффициенты Фурье функции $K_n(x)$:

$$\widehat{K}_n(k) = (K_n * e_k(x))e_{-k}(x) = \theta(k) \frac{e_k(n\alpha) - 1}{(1 + |k|_2^2)^{(d+\beta)/2}(e_k(\alpha) - 1)}. \quad (25)$$

ЛЕММА 4.1. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^d - \beta$ -диофантов вектор, $\theta \in \Theta$. Тогда существует $C_3 > 0$ такое, что

$$\left\| \sum_{s=0}^{n-1} I_{d+\beta}^\theta \circ T_\alpha^s \right\|_2 \leq C_3 \sqrt{\ln(1+n)}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $l = \left\lceil \frac{2 \ln n}{(d+2\beta) \ln 2} \right\rceil + 1$. Имеем

$$\|K_n\|_2^2 = \sum_q |\widehat{K}_n(q)|^2 = \sum_{|q|=1}^{2^l-1} |\widehat{K}_n(q)|^2 + \sum_{|q|=2^l}^\infty |\widehat{K}_n(q)|^2 = \sum' + \sum''.$$

Для оценки сверху $\sum'$ используем неравенства

$$|\widehat{K}_n(q)| \leq \frac{1}{|\sin \pi \alpha q| |q|^{d+\beta}} \leq \lambda_{\alpha,\beta}(q)$$

и лемму 3.1. Имеем:

$$\begin{aligned} \sum' &\leq \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{q \in \Delta_j} \lambda_{\alpha,\beta}^2(q) = \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{s=1}^{\operatorname{card} \Delta_j} (\lambda_{\alpha,\beta}^*(s; \Delta_j))^2 \\ &\leq C^2 \sum_{j=1}^{l-1} \sum_{s=1}^{+\infty} \frac{1}{s^{2(1+\beta/d)}} \leq C^2 \frac{\pi^2}{6} (l-1). \end{aligned}$$

Для оценки сверху $\sum''$ используем неравенства

$$\|ny\| \leq n\|y\|, \quad |\hat{K}_n(q)| \leq \frac{\|nq\alpha\|}{|q|^{d+\beta}\|q\alpha\|}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \sum'' &\leq n^2 \sum_{|q|=2^l}^{\infty} \frac{1}{|q|^{2(d+\beta)}} = n^2 \sum_{s=2^l}^{\infty} \frac{\text{card}\{q \in \mathbb{Z}^d : |q| = s\}}{s^{2(d+\beta)}} \\ &\leq C_1 n^2 \sum_{s=2^l}^{\infty} \frac{1}{s^{d+1+2\beta}} \leq C_2 \frac{n^2}{2^{l(d+2\beta)}} \leq C_2, \end{aligned}$$

где константы C_1 и C_2 не зависят от выбора n .

Итак, мы доказали, что существует константа C_3 такая, что

$$\|K_n\|_2 \leq C_3 \sqrt{\ln(1+n)} \quad (26)$$

при всех $n \in \mathbb{N}$, что и требовалось доказать.

Отметим также следующее полезное для дальнейшего изложения тождество:

$$(K_n * g)(x) = \sum_{s=0}^{n-1} (I_{d+\beta}^\theta T_\alpha^s) * g(x) = \sum_{s=0}^{n-1} (I_{d+\beta}^\theta * g)(T_\alpha^s x)$$

для любого $g \in L^1(\mathbb{T}^d)$.

4.3. В работе [12] доказана

ЛЕММА (Пичугов). Пусть $F_j \in L^2(\mathbb{T}^d)$, $j = 1, 2, \dots$. Если существует константа C такая, что

$$\sup_{0 < t < 1} (t(F_j * g)^*(t)) \leq C\|g\|_1$$

для любых $j \in \mathbb{N}$ и $g \in L^1(\mathbb{T}^d)$, то найдутся положительные постоянные A_1 и A_2 такие, что для всех $j \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\|F_j\|_1 \leq A_1 + A_2 \ln(e + \|F_j\|_2).$$

В работе [13] Пичугов доказал следующее утверждение.

ТЕОРЕМА (Пичугов). Пусть $T_n: L^1(\mathbb{T}^d) \rightarrow L^1(\mathbb{T}^d)$, $n = 1, 2, \dots$, — линейные непрерывные операторы, перестановочные с операторами сдвига $\tau_a g(x) = g(x+a)$.

Тогда если последовательность $\{T_n g\}_{n=1}^\infty$ сходится по мере для каждой $g \in L^1(\mathbb{T}^d)$, то найдется постоянная $B > 0$ такая, что для всех $n \in \mathbb{N}$, $g \in L^1(\mathbb{T}^d)$ выполняется неравенство

$$\sup_{0 < y < 1} (y(T_n g)^*(y)) \leq B\|g(t)\|_1.$$

В случае $d = 1$ следующая лемма доказана в работе [14]. Ее доказательство для случая произвольного $d \in \mathbb{N}$ полностью повторяет “одномерное” доказательство (с соответствующими изменениями в обозначениях).

ЛЕММА 4.2. Пусть $\psi \in \Psi$, $\mathbf{K}_j \in L^2(\mathbb{T}^d)$, $\mathbf{v}_j \in \psi(L)(\mathbb{T}^d)$, $\int_{\mathbb{G}^d} |\mathbf{v}_j(x)| dx = 1$,
 $\|\mathbf{K}_j\|_2 > 2 \int_{\mathbb{G}^d} \psi(|\mathbf{v}_j(x)|) dx \geq 2 \quad \forall j \in \mathbb{N}$.

Тогда если последовательность $\{\mathbf{K}_j * g\}_{j=1}^\infty$ сходится по мере для каждой $g \in \psi(L)(\mathbb{T}^d)$, то найдется постоянная $C > 0$ такая, что для всех $j \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\|\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j\|_1 \leq C \int_{\mathbb{G}^d} \psi(|\mathbf{v}_j(x)|) dx \ln \left(\|\mathbf{K}_j\|_2 \left(\int_{\mathbb{G}^d} \psi(|\mathbf{v}_j(x)|) dx \right)^{-1} \right).$$

4.4. Перейдем к формулировке и доказательству основных результатов параграфа.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$ строго β -диофантов, $\beta > 0$, $\theta \in \Theta$. Тогда найдется последовательность $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ такая, что для всякой ее подпоследовательности $\{m_j\}_{j=1}^\infty \subset \{n_k\}_{k=1}^\infty$ существует функция $f \in I_{d+\beta}^\theta L(\mathbb{T}^d)$, $\int_{\mathbb{G}^d} f(x) dx = 0$, для которой биркгофовы суммы

$$\mathbf{B}_{m_j}^\alpha(f) = \sum_{s=0}^{m_j-1} f \circ T_\alpha^s$$

расходятся по мере.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что существуют последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^\infty$, последовательность тригонометрических полиномов $\{R_k\}_{k=1}^\infty$, $\|R_k\|_1 = 1$, и положительные постоянные C_1, C_2 такие, что

$$\|K_{n_k} * R_k\|_2 \leq C_1 \sqrt{k}, \quad (27)$$

$$\|K_{n_k} * R_k\|_1 \geq C_2 \sqrt{k} \quad (28)$$

при всех $k \in \mathbb{N}$.

Пусть векторы q_s , $s = 1, 2, \dots$, удовлетворяют неравенству (3). Переходя в случае необходимости к подпоследовательности, полагаем, что $|q_{s+1}|/|q_s| \geq 4$ при всех $s \in \mathbb{N}$.

Зафиксируем натуральное N . Так как

$$|\widehat{K}_N(q)| \leq \frac{|\sin \pi N \alpha q|}{|q|^{d+\beta} |\sin \pi \alpha q|} \leq \frac{1}{|q|^{d+\beta} \|\alpha q\|} = \lambda_{\alpha, \beta}(q), \quad (29)$$

то, полагая $\lambda(q) = \widehat{K}_N(q)$, из леммы 3.1 заключаем, что существует $C > 0$ такое, что $\lambda^*(s; \Delta_j) \leq C s^{-1-\beta/d}$ при всех $j \in \mathbb{N}$ и $s = 1, \dots, \text{card } \Delta_j$.

Введем обозначения:

$$\psi(s) = C s^{-1-\beta/d}, \quad \xi(k) = \frac{C}{2^{\beta/d}} 3^{-k/2},$$

$$\Xi_k = \left\{ (\delta_1, \dots, \delta_k) : \delta_j \in \{-1; 0; 1\}, j = 1, \dots, k, \sum_{j=1}^k |\delta_j| > 1 \right\}.$$

По лемме 3.5 для каждого $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 4$, найдется набор векторов $\{q_1^k, \dots, q_k^k\} \subset \{q_s\}_{s=1}^\infty$ такой, что

$$|\lambda(\delta_1 q_1^k + \dots + \delta_k q_k^k)| \leq \frac{C}{2^{\beta/d}} 3^{-k/2} \quad (30)$$

при всех $(\delta_1, \dots, \delta_k) \in \Xi_k$.

Положим $R_k(x) = \prod_{s=1}^k (1 + \cos \pi q_s^k x)$.

Отметим, что:

- а) $\widehat{R_k}(q) \neq 0$ тогда и только тогда, когда q представимо в виде $q = \sum_{j=1}^k \delta_j q_j^k$,
 $\delta_j \in \{-1; 0; 1\}$;
- б) $\widehat{R_k}(\pm q_s^k) = 1/2$, $s = 1, \dots, k$;
- с) $0 \leq \widehat{R_k}(q) \leq 1$ для любого $q \in \mathbb{Z}^d$.

Из леммы 3.4 заключаем, что существует такое $n_k \in \mathbb{N}$, $|q_k^k|^{\beta+d}/C_\alpha \leq n_k \leq 2|q_k^k|^{\beta+d}/C_\alpha$, что

$$\sum_{s=1}^k \frac{\sin^2 \pi n_k q_s^k \alpha}{|q_s^k|^{2(d+\beta)} \sin^2 \pi q_s^k \alpha} \geq \frac{1}{4\pi^2 (C^\alpha)^2} k. \quad (31)$$

Положим

$$H_k^1(x) = \frac{1}{2} \sum_{q=\pm q_s^k, s=1, \dots, k} \widehat{K}_{n_k}(q) e_q(x),$$

$$H_k^2(x) = \sum_{q=\sum_{s=1}^k \delta_s q_s^k, \delta \in \Xi_k} \widehat{K}_{n_k}(q) \widehat{R_k}(q) e_q(x).$$

Имеем $K_{n_k} * R_k(x) = H_k^1(x) + H_k^2(x)$ в силу свойств а) и б).

Имея в виду (29) и β -диофантовость вектора α , получаем

$$\|H_k^1\|_2^2 = \frac{1}{4} \sum_{s=1, \dots, k} 2|\widehat{K}_{n_k}(q_s^k)|^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{s=1, \dots, k} \lambda_{\alpha, \beta}^2(q_s^k) \leq \frac{1}{2} \sum_{s=1, \dots, k} \frac{1}{C_\alpha^2} = \frac{1}{2C_\alpha^2} k. \quad (32)$$

Из (30) и свойства с) получим, что

$$\|H_k^2\|_2^2 \leq \sum_{\delta \in \Xi_k} \left(\frac{C}{2^{\beta/d}} 3^{-k/2} \right)^2 = \frac{C^2}{2^{2\beta/d}} 3^{-k} \text{card } \Xi_k \leq \frac{C^2}{2^{2\beta/d}}.$$

Следовательно,

$$\|K_{n_k} * R_k\|_2 \leq \|H_k^1\|_2 + \|H_k^2\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{2} C_\alpha} \sqrt{k} + \frac{C}{2^{\beta/d}} \leq C_1 \sqrt{k},$$

где $C_1 = 1/(\sqrt{2} C_\alpha) + C/(2^{\beta/d})$.

Теперь оценим снизу L^1 -норму полинома $K_{n_k} * R_k(x)$. Имеем неравенство $\|K_{n_k} * R_k(x)\|_1 \geq \|H_k^1\|_1 - \|H_k^2\|_1$, при этом $\|H_k^2\|_1 \leq \|H_k^2\|_2 \leq C^2/2^{2\beta/d}$.

Для оценки снизу $\|H_k^1\|_1$ используем свойство логарифмической выпуклости норм в пространствах L_p , из которого, в частности, следует, что

$$\|H_k^1\|_2 \leq \|H_k^1\|_1^{1/3} \|H_k^1\|_4^{2/3},$$

а значит, $\|H_k^1\|_1 \geq \|H_k^1\|_2^3 \|H_k^1\|_4^{-2}$. Из (31) и (25) имеем

$$\begin{aligned} \|H_k^1\|_2 &= \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{s=1, \dots, k} 2|\widehat{K}_{n_k}(q_s^k)|^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{s=1}^k \frac{\sin^2 \pi n_k q_s^k \alpha}{|q_s^k|^{2(d+\beta)} \sin^2 \pi q_s^k \alpha}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2} \pi C^\alpha} \sqrt{k}. \end{aligned}$$

Множества $D^1 = \{q_1^k, \dots, q_k^k\}$ и $D^2 = \{-q_1^k, \dots, -q_k^k\}$ лакуарны в смысле, указанном в формулировке леммы 3.2. Следовательно, из леммы 3.2 получаем, что

$$\begin{aligned} \|H_k^1\|_4 &= \frac{1}{2} \left\| \sum_{q \in D^1} \widehat{K}_{n_k}(q) e_q(\cdot) + \sum_{q \in D^2} \widehat{K}_{n_k}(q) e_q(\cdot) \right\|_4 \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\left\| \sum_{q \in D^1} \widehat{K}_{n_k}(q) e_q(\cdot) \right\|_4 + \left\| \sum_{q \in D^2} \widehat{K}_{n_k}(q) e_q(\cdot) \right\|_4 \right) \\ &\leq \frac{1}{2} c^3 \sqrt{4} \left(\sqrt{\sum_{q \in D^1} |\widehat{K}_{n_k}(q)|^2} + \sqrt{\sum_{q \in D^2} |\widehat{K}_{n_k}(q)|^2} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} c^3 2\sqrt{2} \sqrt{\sum_{q \in D^1 \cup D^2} |\widehat{K}_{n_k}(q)|^2} = 2\sqrt{2} c^3 \|H_k^1\|_2. \end{aligned}$$

Следовательно, из (32) заключаем, что $\|H_k^1\|_4 \leq 2c^3 \sqrt{k}/C_\alpha$. Итак,

$$\|H_k^1\|_1 \geq \left(\frac{1}{2\sqrt{2} \pi C^\alpha} \sqrt{k} \right)^3 \left(\frac{2c^3}{C_\alpha} \sqrt{k} \right)^{-2} = C_2 \sqrt{k},$$

где $C_2 = C_\alpha^2 / (2^{13/2} \pi^3 (C^\alpha)^3 (c^3)^2)$.

Пусть $\{m_j\}_{j=1}^\infty \subset \{n_k\}_{k=1}^\infty$. Предположим, что для любой функции $g \in L(\mathbb{T}^d)$, $\widehat{g}_0 = 0$, последовательность $\{K_{m_j} * g\}_{j=1}^\infty$ сходится по мере. В силу того что $\widehat{K}_{m_j}(0) = 0$, последовательность $\{K_{m_j} * g\}_{j=1}^\infty$ сходится по мере для всякой $g \in L(\mathbb{T}^d)$. В силу неравенства Юнга для свертки и неравенства (5) имеем $\|K_{m_j} * g\|_2 \leq \|K_{m_j}\|_2 \|g\|_1 \leq C_3 \sqrt{\ln m_j}$. Следовательно, $T_j g := K_{m_j} * g$ — линейные непрерывные операторы из $L^1(\mathbb{T}^d)$ в $L^2(\mathbb{T}^d)$ (перестановочные со сдвигами аргумента). Поэтому из теоремы Пичугова заключаем, что существует константа C такая, что

$$\sup_{0 < t < 1} (t(K_{m_j} * g)^*(t)) \leq C \|g\|_1 \quad (33)$$

для любых $j \in \mathbb{N}$ и $g \in L^1(\mathbb{T}^d)$.

Определим k_j из равенства $n_{k_j} = m_j$. Полагая в неравенстве (33) $g(x) := R_{k_j} * h(x)$, где $h(\cdot)$ — произвольная функция из $L^1(\mathbb{T}^d)$, получаем, что

$$\sup_{0 < t < 1} (t(K_{m_j} * R_{k_j} * h)^*(t)) \leq C \|R_{k_j} * h\|_1 \leq C \|R_{k_j}\|_1 \|h\|_1 = C \|h\|_1.$$

Отсюда по лемме Пичугова найдутся положительные постоянные A_1 и A_2 такие, что для всех $j \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\|K_{m_j} * R_{k_j}\|_1 \leq A_1 + A_2 \ln(e + \|K_{m_j} * R_{k_j}\|_2).$$

Однако последнее утверждение противоречит совместному выполнению неравенств (27), (28).

Полученное противоречие доказывает, что существует функция $\tilde{g} \in L^1(\mathbb{T}^d)$, $\widehat{\tilde{g}}(0) = 0$, для которой последовательность $\{K_{m_j} * \tilde{g}\}_{j=1}^\infty$ расходится по мере. Так как по определению $K_{m_j} * \tilde{g}(x) = \sum_{s=0}^{m_j-1} I_{d+\beta}^\theta \tilde{g}(T_\alpha^s x)$, то функция $f(\cdot) := I_{d+\beta}^\theta \tilde{g}(\cdot)$ искомая.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$ плохо приближаемый, $\theta \in \Theta$. Тогда найдется последовательность $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ такая, что для всякой ее подпоследовательности $\{m_j\}_{j=1}^\infty \subset \{n_k\}_{k=1}^\infty$ и всякой $\psi \in \Psi$, удовлетворяющей условию $\psi(y) = o(y \ln^{1/2} y)$, $y \rightarrow +\infty$, существует функция $f \in I_d^\theta \psi(L)(\mathbb{T}^d)$, $\int_{\mathcal{G}^d} f(x) dx = 0$, для которой биркгофовы суммы $\mathbf{B}_{m_j}^\alpha(f)$ расходятся по мере.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{F}_n(x)$ — d -мерное ядро Фейера порядка n , $\mathcal{F}_n(x) = \prod_{j=1}^d \mathcal{F}_n^j(x_j)$, $\mathcal{F}_n^j(x_j) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n (1 - k/n) \cos 2\pi k x_j$. Из известных свойств одномерного ядра Фейера $\mathcal{F}_n^j$ немедленно следует, что $\mathcal{F}_n(x) \geq 0$, $\int_{\mathcal{G}^d} \mathcal{F}_n(x) dx = 1$, $\max_x \mathcal{F}_n(x) = \mathcal{F}_n(0) = n^d$.

Введем обозначение $\tilde{\psi}(y) = \psi(y)/y$. Из выпуклости монотонной функции $\psi(y)$ и условия $\psi(0) = 0$ следует монотонное неубывание на $(0, +\infty)$ функции $\tilde{\psi}(y)$, в силу которого $\tilde{\psi}(\mathcal{F}_n(x)) \leq \tilde{\psi}(n^d)$ и, значит,

$$\int_{\mathcal{G}^d} \psi(|\mathcal{F}_n(x)|) dx = \int_{\mathcal{G}^d} \mathcal{F}_n(x) \tilde{\psi}(\mathcal{F}_n(x)) dx \leq \tilde{\psi}(n^d). \quad (34)$$

В силу леммы Стечкина [15] справедливо неравенство $\mathcal{F}_n^j(x_j) \geq n \cos 2\pi n x_j \geq n(1 - 4n x_j)$ при $|x_j| \leq 1/(4n)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{G}^d} \psi(\mathcal{F}_n(x)) dx &\geq \int_0^{1/(4n)} \cdots \int_0^{1/(4n)} \psi\left(n^d \prod_{j=1}^d (1 - 4n x_j)\right) dx_1 \cdots dx_d \\ &= \frac{1}{(4n)^d} \frac{1}{n^d} \int_0^n \cdots \int_0^n \psi\left(\prod_{j=1}^d x_j\right) dx_1 \cdots dx_d. \end{aligned} \quad (35)$$

Докажем индукцией по d неравенство

$$\frac{1}{n^d} \int_0^n \cdots \int_0^n \psi\left(\prod_{j=1}^d x_j\right) dx_1 \cdots dx_d \geq \psi\left(\frac{n^d}{2^d}\right). \quad (36)$$

При $d = 1$ применим к функции ψ интегральное неравенство Йенсена:

$$\frac{1}{n} \int_0^n \psi(u) du \geq \psi\left(\frac{1}{n} \int_0^n u du\right) = \psi\left(\frac{n}{2}\right).$$

Пусть $a \geq 0$. Введем обозначение $\psi_a(y) = \psi(ay)$. Ясно, что функция ψ_a выпуклая на $[0, +\infty)$. Предположим, что неравенство (36) справедливо для $d = 1, \dots, d_0$. Докажем его справедливость для $d = d_0 + 1$. Имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^{d_0+1}} \int_0^n \cdots \int_0^n \psi \left(\prod_{j=1}^{d_0+1} x_j \right) dx_1 \cdots dx_{d_0+1} \\ &= \frac{1}{n} \int_0^n dx_1 \frac{1}{n^{d_0}} \int_0^n \cdots \int_0^n \psi_{x_1} \left(\prod_{j=1}^{d_0} x_j \right) dx_1 \cdots dx_{d_0} \\ &\geq \frac{1}{n} \int_0^n \psi_{x_1} \left(\frac{n^{d_0}}{2^{d_0}} \right) dx_1 = \frac{1}{n} \int_0^n \psi_{n^{d_0}/2^{d_0}}(x_1) dx_1 \\ &\geq \psi_{n^{d_0}/2^{d_0}} \left(\frac{n}{2} \right) = \psi \left(\frac{n^{d_0+1}}{2^{d_0+1}} \right). \end{aligned}$$

Из вогнутости монотонной функции $\psi(\sqrt{y})$ и условия $\psi(0) = 0$ следует монотонное невозрастание функции $\psi(\sqrt{y})/y$ на $(0, +\infty)$. Отсюда $\psi(y)/y^2 \geq \psi(2^d y)/(2^{2d} y^2)$ и, значит,

$$\psi(n^d) = \psi \left(2^d \frac{n^d}{2^d} \right) \leq 2^{2d} \psi \left(\frac{n^d}{2^d} \right).$$

Из (35), (36) и последнего неравенства заключаем, что

$$\int_{\mathcal{E}^d} \psi(\mathcal{F}_n(x)) dx \geq \frac{1}{(4n)^d} \frac{1}{4^d} \psi(n^d) = \frac{1}{4^{2d}} \tilde{\psi}(n^d). \quad (37)$$

Из теоремы Дирихле о совместном приближении линейных форм [4; гл. 2, §1] следует, что для всякого плохо приближаемого d -мерного вектора существуют последовательность векторов $\{q_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset \mathbb{Z}^d$, $|q_1| < |q_2| < \dots$, и константы $C_1 > 0$, $E > 0$ такие, что $|q_k|^d \|\alpha q_k\| \leq C_1$ и $|q_k| \leq E^k$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Из леммы 3.4 следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется n_k такое, что $C_2 |q_k|^d \leq n_k \leq 2C_2 |q_k|^d$ и

$$\sum_{s=1}^k \frac{\sin^2 \pi n_k q_s \alpha}{|q_k|^{2d} \sin^2 \pi q_s \alpha} \geq C_3 k, \quad (38)$$

где константы $C_2 \geq 1$ и $C_3 > 0$ не зависят от выбора k .⁵

Пусть $\{m_j\}_{j=1}^\infty$ — произвольная подпоследовательность $\{n_k\}_{k=1}^\infty$. Определим k_j из равенства $m_j = n_{k_j}$. Введем обозначения: $\mathbf{K}_j = K_{m_j}$, $\mathbf{v}_j = \mathcal{F}_{m_j}$. Через $C_4, C_5, \dots, C_{13}$ будем обозначать положительные постоянные, не зависящие от выбора j .

В силу леммы 4.1 существует константа $C_4 > 0$ такая, что

$$\|\mathbf{K}_j\|_2 = \|K_{m_j}\|_2 \leq C_4 \sqrt{\ln m_j}, \quad (39)$$

⁵ Из леммы 3.4 имеем $C_2 = 1/C_\alpha$, где C_α — из неравенства (2). В силу теоремы Дирихле $C_\alpha \leq 1$.

а из (38) следует, что

$$\|\mathbf{K}_j\|_2^2 = \|K_{m_j}\|_2^2 \geq \sum_{s=1}^{k_j} |\widehat{K}_{m_j}(q_s)|^2 = \sum_{s=1}^{k_j} \frac{\sin^2 \pi m_j q_s \alpha}{|q_k|^{2d} \sin^2 \pi q_s \alpha} \geq C_3 k_j.$$

Оценим $\|\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j\|_2$ снизу. Имеем

$$\|\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j\|_2^2 \geq \sum_{s=1}^{k_j-2} |\widehat{K}_{m_j}(q_s)|^2 |\widehat{\mathcal{F}}_{m_j}(q_s)|^2. \quad (40)$$

Обозначим через q_s^j компоненты вектора q_s . Тогда

$$|\widehat{\mathcal{F}}_{m_j}(q)|^2 = \prod_{j=1}^d \left| 1 - \frac{q_s^j}{m_j} \right|^2 \geq \prod_{j=1}^d \left| 1 - \frac{|q_s|}{m_j} \right|^2 = \left| 1 - \frac{|q_s|}{m_j} \right|^{2d}.$$

Ясно, что для $s = 1, \dots, k_j - 2$ справедливы неравенства

$$\frac{|q_s|}{m_j} \leq \frac{|q_{k_j-2}|}{C_2 |q_{k_j}|^d} \leq \frac{|q_{k_j-2}|}{|q_{k_j}|^d} \leq \frac{1}{2}.$$

Значит,

$$\|\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j\|_2 \geq \frac{1}{2^d} \sqrt{\sum_{s=1}^{k_j-2} |\widehat{K}_{m_j}(q_s)|^2} \geq C_5 \sqrt{k_j}. \quad (41)$$

Оценим $\|\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j\|_4$ сверху. Имеем $|\widehat{K}_{m_j}(q)| \leq \lambda_{\alpha,0}(q)$, $q \in \mathbb{Z}^d$. Из леммы 3.1 следует, что $\lambda_{\alpha,0}^*(s; \Delta_j) \leq C/s$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $s = 1, \dots, \text{card } \Delta_j$. Значит, полагая $\lambda(k) = \widehat{K}_{m_j}(k)$, $g = \mathbf{v}_j$, применяя лемму 3.3 и неравенство (34), получаем, что

$$\begin{aligned} \|\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j\|_4 &= \left\| \sum_{k \neq 0} \lambda(k) \widehat{g}_k e_k(\cdot) \right\|_4 \leq C_6 \int_{\mathcal{E}^d} |\mathcal{F}_{m_j}(x)| \ln^{1/2}(e + |\mathcal{F}_{m_j}(x)|) dx + C_7 \\ &\leq C_8 \ln^{1/2}(m_j^d). \end{aligned} \quad (42)$$

Имеем соотношения: $\ln m_j = \ln n_{k_j} \leq \ln(2C_2 |q_{k_j}|^d) \leq \ln(2C_2 E^{dk_j}) \leq C_9 k_j$. Отсюда, применяя (42), получаем оценку

$$\|\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j\|_4 \leq C_{10} \sqrt{k_j}. \quad (43)$$

Для оценки снизу $\|\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j\|_1$ воспользуемся неравенством $\|h\|_1 \geq \|h\|_2^3 \|h\|_4^{-2}$, справедливым для любой функции $h \in L^4(\mathbb{T}^d)$, $\|h\|_4 \neq 0$. Из (41) и (43) заключаем, что

$$\|\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j\|_1 \geq C_{11} \sqrt{k_j}. \quad (44)$$

Из неравенств (39), (34), (37) и (44) следует, что

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j\|_1} \int_{\mathcal{G}^d} \psi(|\mathbf{v}_j(x)|) dx \ln \left(\|\mathbf{K}_j\|_2 \left(\int_{\mathcal{G}^d} \psi(|\mathbf{v}_j(x)|) dx \right)^{-1} \right) \\ & \leq C_{12} \frac{\tilde{\psi}(m_j^d)}{\sqrt{k_j}} \ln \frac{C_{13} \sqrt{k_j}}{\tilde{\psi}(m_j^d)}. \end{aligned} \quad (45)$$

Из условия теоремы следует, что $\tilde{\psi}(m_j^d) = o(\sqrt{k_j})$ при $j \rightarrow \infty$, а так как

$$u \ln \frac{C_{13}}{u} = o(1)$$

при $u \rightarrow 0+$, то из (45) заключаем, что

$$\frac{1}{\|\mathbf{K}_j * \mathbf{v}_j\|_1} \int_{\mathcal{G}^d} \psi(|\mathbf{v}_j(x)|) dx \ln \left(\|\mathbf{K}_j\|_2 \left(\int_{\mathcal{G}^d} \psi(|\mathbf{v}_j(x)|) dx \right)^{-1} \right) \rightarrow 0 \quad (46)$$

при $j \rightarrow \infty$. Из неравенств (40), (34), (37) и условия на функцию ψ следует, что

$$\|\mathbf{K}_j\|_2 > 2 \int_{\mathcal{G}^d} \psi(|\mathbf{v}_j(x)|) dx \geq 2 \quad (47)$$

для всех j , превосходящих некоторое $j_0 \in \mathbb{N}$.

Применяя лемму 4.2, из неравенств (46), (47) делаем вывод о существовании функции $g_0 \in \psi(L)(\mathbb{T}^d)$, для которой последовательность $\{\mathbf{K}_j * g_0\}_{j=1}^\infty$ расходится по мере, а значит, полагая $f = I_d^\theta * g$, заключаем, что последовательность $\{\sum_{s=0}^{m_j-1} f(T_\alpha^s x)\}_{j=1}^\infty$ расходится по мере, и при этом

$$f \in I_d^\theta \psi(L)(\mathbb{T}^d), \quad \int_{\mathcal{G}^d} f(x) dx = 0.$$

ЛЕММА 4.3. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^d$ — существенно иррациональный вектор, $\{m_j\}_{j=1}^\infty$ — α -допустимая последовательность, H — подпространство $L^0(\mathbb{T}^d)_0$, содержащее в себе $\mathcal{T}_0^d$. Предположим, что существует функция $f_0 \in H$ такая, что последовательность биркгофовых сумм $\mathbf{B}_{m_j}^\alpha(f_0)$, $j = 1, 2, \dots$, расходится по мере. Тогда существует непустое множество $V \subset H$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) для каждой функции $f \in V$ суммы $\mathbf{B}_{m_j}^\alpha(f)$, $j = 1, 2, \dots$, расходятся по мере;
- 2) V есть G_δ -подмножество (H, ρ_0) ;
- 3) если $f \in V$, то $\{f + p : p \in \mathcal{T}_0^d\} \subset V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $P(f, \lambda) = \text{mes}\{x : |f(x)| > \lambda\}$. Обозначим $B^j(f) = \mathbf{B}_{m_j}^\alpha(f)$, а через U обозначим совокупность функций $f \in H$, для которых $B^j(f)$ расходится по мере. В силу критерия Коши сходимости последовательности множество U представимо в виде $U = \bigcup_{k \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{N}} U^{k,s}$, где $U^{k,s} = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} U_N^{k,s}$,

$$U_N^{k,s} = \left\{ f \in H : \exists n, l \geq N, P\left(B^n(f) - B^l(f), \frac{1}{k}\right) > \frac{1}{s} \right\}.$$

Так как $U \neq \emptyset$, то $U^{k_0, s_0} \neq \emptyset$ хотя бы для одной пары k_0, s_0 .

Пусть $f_0 \in U^{k_0, s_0}$. Для каждого $N \in \mathbb{N}$ определим $n(N), l(N) \geq N$ из условия $P(B^{n(N)}(f_0) - B^{l(N)}(f_0), 1/k_0) > 1/s_0$.

Пусть p — действительнзначный тригонометрический полином с нулевым средним, и пусть полином τ удовлетворяет уравнению $p(x) = \tau(x + \alpha) - \tau(x)$. Имеем:

$$B^n(f_0 + p)(x) - B^l(f_0 + p)(x) = B^n(f_0)(x) - B^l(f_0)(x) + \tau(T_\alpha^{m_n} x) - \tau(T_\alpha^{m_l} x).$$

Из условия α -допустимости последовательности $\{m_j\}_{j=1}^\infty$ следует, что $R_{n,l}(p) := \|\tau \circ T_\alpha^{m_n} - \tau \circ T_\alpha^{m_l}\|_\infty \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$ и, значит, существует $N = N(p)$ такое, что $R_{n,l}(p) < 1/(2k_0)$ при всех $n, l \geq N$. Отсюда и из условия на функцию f следует, что

$$\begin{aligned} & P\left(B^{n(N)}(f_0 + p) - B^{l(N)}(f_0 + p), \frac{1}{2k_0}\right) \\ & \geq P\left(B^{n(N)}(f_0) - B^{l(N)}(f_0), \frac{1}{2k_0} + R_{n(N), l(N)}(p)\right) \\ & \geq P\left(B^{n(N)}(f_0) - B^{l(N)}(f_0), \frac{1}{k_0}\right) > \frac{1}{s_0} \end{aligned}$$

при всех $N \geq N_0$. Следовательно, $f_0 + p \in U^{2k_0, s_0}$.

Докажем теперь, что каждое из множеств $U_N^{2k_0, s_0}$, $N \in \mathbb{N}$, открыто в (H, ρ_0) .

Пусть $f \in U_N^{2k_0, s_0}$, натуральные $n = n(N)$ и $l = l(N)$ определены из условий $P(B^n(f) - B^l(f), 1/(2k_0)) =: E_f > 1/s_0$, $n > l \geq N$. Положим $\sigma_0 = E_f - 1/s_0$.

Имеем

$$\begin{aligned} & P\left(B^n(f + g) - B^l(f + g), \frac{1}{2k_0}\right) \\ & \geq \text{mes}\left\{x : |B^n(f)(x) - B^l(f)(x)| > \frac{1}{2k_0} + |B^n(g)(x) - B^l(g)(x)|\right\}. \end{aligned}$$

Пусть $\delta_0 > 0$ выбрана так, чтобы $P(B^n(f) - B^l(f), 1/(2k_0) + \delta_0) > 1/s_0 + \sigma_0/2$.

Имеем

$$\begin{aligned} & \text{mes}\left\{x : |B^n(f)(x) - B^l(f)(x)| > \frac{1}{2k_0} + |B^n(g)(x) - B^l(g)(x)|\right\} \\ & \geq P\left(B^n(f) - B^l(f), \frac{1}{2k_0} + \delta_0\right) - P\left(B^n(g) - B^l(g), \delta_0\right). \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} P(B^n(g) - B^l(g), \delta_0) &\leq \text{mes} \left\{ x : \sum_{s=l}^{n-1} |g(T_\alpha^s x)| > \delta_0 \right\} \leq \sum_{s=l}^{n-1} P \left(g \circ T_\alpha^s, \frac{\delta_0}{n-l} \right) \\ &= (n-l) P \left(g, \frac{\delta_0}{n-l} \right) \end{aligned}$$

и $P(g, \lambda) \leq (1 + 1/\lambda) \rho_0(g, 0)$ для всякого $\lambda > 0$, то $P(B^n(g) - B^l(g), \delta_0) < \sigma_0/2$ всякий раз, когда $\rho_0(g, 0) < (1 + (n-l)/\delta_0)^{-1}(\sigma_0/(2(n-l)))$, а следовательно, $P(B^n(f+g) - B^l(f+g), 1/(2k_0)) > 1/s_0$ для таких $g \in H$.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$ строго β -диофантов, $\theta \in \Theta$, $H = I_{d+\beta}^\theta L(\mathbb{T}^d)_0$, если $\beta > 0$, $H = I_d^\theta \psi(L)(\mathbb{T}^d)_0$, $\psi \in \Psi$, $\psi(y) = o(y \ln^{1/2} y)$, $y \rightarrow \infty$, если $\beta = 0$;

Тогда существует α -допустимая последовательность $\{m_j\}_{j=1}^\infty$ такая, что для типичной функции f из пространства (H, ρ_0) биркгофовы суммы $\mathbf{B}_{m_j}^\alpha(f)$, $j = 1, 2, \dots$, расходятся по мере.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность $\{n_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{N}$ удовлетворяет теореме 4.1 в случае $\beta > 0$ и теореме 4.2, если $\beta = 0$.

Выберем из нее α -допустимую подпоследовательность $\{m_j\}_{j=1}^\infty$.

По теоремам 4.1 и 4.2 существует функция $f_0 \in H$, для которой биркгофовы суммы $\mathbf{B}_{m_j}^\alpha(f_0)$ расходятся по мере.

Для завершения доказательства теоремы осталось воспользоваться леммой 4.3.

§ 5. О разрешимости аддитивного когомологического уравнения для сдвигов тора

Нетрудно видеть, что любой полином $p \in \mathcal{T}^d$ является тривиальным аддитивным коциклом над T_α для всякого существенно иррационального вектора α . С другой стороны, для суммируемой на $\mathbb{T}^d$ функции, отличной от тригонометрического полинома, разрешимость уравнения (1) зависит от ее "гладкости" и от диофантовых свойств вектора α .

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$ β -диофантов, $X = I_{d+\beta} L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^d)$, $d \in \mathbb{N}$, или $X = W^{1+\beta} L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T})$, если $d = 1$.

Тогда всякая функция f из пространства X есть тривиальный аддитивный коцикл над T_α .

При этом для решения w уравнения (1) верно включение $w \in \exp(L^2)(\mathbb{T}^d)$, если $\beta > 0$, и включение $w \in \exp(L^{2/3})(\mathbb{T}^d)$, если $\beta = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию $\lambda: \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{C}$ по формуле $\lambda(k) = \theta(k) \times (1 + |k|_2^2)^{-(d+\beta)/2} (e_k(\alpha) - 1)^{-1}$, где $\theta(0) = 0$, а при $k \neq 0$ полагаем $\theta(k) \equiv 1$, если $X = I_{d+\beta} L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^d)$, и $\theta(k) = \exp(-\frac{\pi}{2} i r \text{sign } k)$, если $X = W^{1+\beta} L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T})$. Ясно, что

$$|\lambda(k)| \leq \frac{1}{2} |k|^{-d-\beta} |\sin \pi \alpha k|^{-1} \leq \frac{1}{4} |k|^{-d-\beta} \|\alpha k\|^{-1} = \frac{1}{4} \lambda_{\alpha, \beta}(k).$$

Отсюда и из леммы 3.1 следует, что существует положительная константа c такая, что $\lambda^*(s; \Delta_j) \leq c/s^{1+\beta/d}$ при $s = 1, \dots, \text{card } \Delta_j, j \in \mathbb{N}$.

Пусть $g \in L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^d)$, $\widehat{g}_0 = 0$. В силу леммы 3.3 величины $\lambda(k)\widehat{g}_k, k \in \mathbb{Z}^d$, являются коэффициентами Фурье функции $\Lambda g \in \bigcap_{2 \leq q < \infty} L^q(\mathbb{T}^d)$.

Пусть последовательность $g_n \in L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^d)$, $n = 1, 2, \dots$, сходится в пространстве $L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^d)$ к некоторой функции $\widetilde{g}$, а последовательность $f_n := \Lambda g_n$, $n = 1, 2, \dots$, сходится в пространстве $L^2(\mathbb{T}^d)$ к функции $\widetilde{f}$. Ясно, что тогда для каждого $k \in \mathbb{Z}^d$ справедливо $\widehat{g}_n(k) \rightarrow \widehat{\widetilde{g}}(k)$ и $\widehat{f}_n(k) \rightarrow \widehat{\widetilde{f}}(k)$, $n \rightarrow \infty$. Но согласно определению Λg_n мы имеем равенство $\widehat{f}_n(k) = \lambda(k)\widehat{g}_n(k)$ при каждом k . Отсюда, совершая предельный переход при $n \rightarrow \infty$, получаем, что $\widehat{\widetilde{f}}(k) = \lambda(k)\widehat{\widetilde{g}}(k)$ и, значит, $\widetilde{f}(\cdot) = \Lambda \widetilde{g}(\cdot)$. Следовательно, по теореме Банаха о замкнутом графике Λ — линейный непрерывный оператор из $L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^d)$ в $L^2(\mathbb{T}^d)$.

Из определения Λ немедленно следует, что если $\tau(\cdot) \in \mathcal{T}^d$, $\widehat{\tau}_0 = 0$, то

$$\begin{aligned} (\Lambda \tau)(x + \alpha) - \Lambda \tau(x) &= \sum_k \lambda(k) \widehat{\tau}_k (e_k(x + \alpha) - e_k(x)) \\ &= \sum_{k \neq 0} \lambda(k) \widehat{\tau}_k (e_k(\alpha) - 1) e_k(x) = \sum_{k \neq 0} \widehat{\tau}_k \theta(k) \frac{e_k(x)}{(1 + |k|_2^2)^{(d+\beta)/2}} = I_{d+\beta}^\theta * \tau(x). \end{aligned} \quad (48)$$

Пусть опять g — произвольная функция из $L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^d)$, удовлетворяющая условию $\widehat{g}_0 = 0$, и пусть t_n — последовательность тригонометрических полиномов, $\widehat{t}_n(0) = 0$, сходящаяся к g в $L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^d)$. Тогда в силу (48) имеем

$$\begin{aligned} &\|I_{d+\beta}^\theta * g(\cdot) - \Lambda g(\cdot + \alpha) + \Lambda g(\cdot)\|_2 \\ &= \|I_{d+\beta}^\theta * (g - t_n)(\cdot) - \Lambda(g - t_n)(\cdot + \alpha) + \Lambda(g - t_n)(\cdot)\|_2 \\ &\leq \|I_{d+\beta}^\theta * (g - t_n)\|_2 + 2\|\Lambda(g - t_n)\|_2 \\ &\leq \|I_{d+\beta}^\theta\|_2 \|g - t_n\|_1 + 2\|\Lambda_{L \log_+^{1/2} L \rightarrow L^2}\| \cdot \|g - t_n\|_{L \log_+^{1/2} L} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$. Отсюда заключаем, что $I_{d+\beta}^\theta * g(x) = \Lambda g(x + \alpha) - \Lambda g(x)$ при почти всех $x \in \mathbb{T}^d$.

Итак, пусть функция f принадлежит пространству $I_{d+\beta}^\theta L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^d)$. Тогда $f(x) - \int_{\mathcal{E}^d} f(t) dt = I_{d+\beta}^\theta * g(x)$, где $g \in L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^d)$, $\widehat{g}_0 = 0$, и, значит, $f(x) - \int_{\mathcal{E}^d} f(t) dt = w(x + \alpha) - w(x)$ при почти всех x , где $w = \Lambda g$.

Докажем теперь, что $w \in \text{exp}(L^{1/\varkappa})(\mathbb{T}^d)$, где константа $\varkappa$ — из условия леммы 3.3. Из этой леммы следует, что

$$\|Cw\|_{k/\varkappa}^{k/\varkappa} \leq C^{k/\varkappa} \left(\frac{k}{\varkappa}\right)^k J^{k/\varkappa}(g)$$

для любой положительной постоянной C и любого $k \geq 2$. Отсюда заключаем, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{G}^d} \exp(|Cw(x)|^{1/\varkappa}) dx &= 1 + \int_{\mathcal{G}^d} |Cw(x)|^{1/\varkappa} dx + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{\mathcal{G}^d} |Cw(x)|^{k/\varkappa} dx \\ &\leq 1 + C \|w\|_{1/\varkappa}^{1/\varkappa} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^k}{k!} R^k, \end{aligned}$$

где $R = (1/\varkappa)C^{1/\varkappa}J^{1/\varkappa}(g)$. Имеем $k^k/k! \leq e^k$ и $R < e^{-1}$, если $C < (\varkappa/e)^{\varkappa}/J(g)$. Значит, при таком C ряд $\sum_{k=2}^{\infty} (k^k/k!)R^k$ сходится, а следовательно, конечен интеграл $\int_{\mathcal{G}^d} \exp(|Cw(x)|^{1/\varkappa}) dx$, что и требовалось.

Заметим, что если f – нетривиальный аддитивный коцикл над T_α , то $f + C$, где $C \in \mathbb{R}$ – произвольная постоянная, – также нетривиальный аддитивный коцикл над T_α . Поэтому в теоремах 5.2 и 5.3 ограничимся рассмотрением функций, имеющих нулевое среднее.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$ строго β -диофантов и имеет место любое из следующих четырех условий:

1. $X = I_{d+\beta}L^1(\mathbb{T}^d)_0$, $\beta > 0$, $d \in \mathbb{N}$;
2. $X = W^{1+\beta}L^1(\mathbb{T})_0$, $\beta > 0$, $d = 1$;
3. $X = I_d\psi(L)(\mathbb{T}^d)_0$, $\beta = 0$, $d \in \mathbb{N}$, $\psi \in \Psi$, $\psi(y) = o(y \ln^{1/2} y)$, $y \rightarrow +\infty$;
4. $X = W^1\psi(L)(\mathbb{T})_0$, $\beta = 0$, $d = 1$, $\psi \in \Psi$, $\psi(y) = o(y \ln^{1/2} y)$, $y \rightarrow +\infty$.

Тогда типичная функция из пространства (X, ρ_0) есть нетривиальный аддитивный коцикл над T_α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ниже будем полагать, что $\psi(y) = y$, если $\beta > 0$. Определим θ как в теореме 5.1. По теореме 4.3 существует последовательность $\{m_j\}_{j=1}^\infty$ такая, что дробные доли $\{m_j\alpha_s\}$, $s = 1, \dots, d$, имеют предел при $j \rightarrow \infty$, а для типичной функции $f \in X$ биркгофовы суммы $\mathbf{B}_{m_j}^\alpha(f)$ расходятся по мере. Для завершения доказательства осталось только заметить, что совокупность U функций $f \in X$, для которых $\mathbf{B}_{m_j}^\alpha(f)$ расходятся по мере, есть подмножество нетривиальных над T_α аддитивных коциклов в пространстве X .

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$ строго β -диофантов, $X = I_{d+\beta}C(\mathbb{T}^d)_0$, d любое, или $X = W^{1+\beta}C(\mathbb{T})_0$, если $d = 1$.

Тогда для типичной функции из пространства (X, ρ_C) уравнение (1) не имеет непрерывного решения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим θ как в теореме 5.1. Пусть последовательность $\{m_j\}_{j=1}^\infty$ удовлетворяет условию теоремы 4.3.

Рассуждая “от противного”, найдем функцию из $I_{d+\beta}^\theta C(\mathbb{T}^d)_0$, для которой последовательность биркгофовых сумм $B^j(f) = \sum_{s=0}^{m_j-1} f \circ T_\alpha^s$ не является равномерно сходящейся.

Предположим, что для всякой функции $g \in C(\mathbb{T}^d)_0$ последовательность $K_{m_j}g = B^j(I_{d+\beta}^\theta g)$ равномерно сходится и, значит, равномерно ограничена в $C(\mathbb{T}^d)_0$. По теореме Банаха–Штейнгауза отсюда заключаем, что существует константа $C > 0$ такая, что $\|K_{m_j}\|_1 < C \forall j \in \mathbb{N}$. Пусть $h \in L^1(\mathbb{T}^d)_0$. Для каждого $\varepsilon > 0$ найдется

функция $\tau \in C(\mathbb{T}^d)_0$ такая, что $\|h - \tau\|_1 < \varepsilon/(4C)$, а для функции τ найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что $\|K_{m_l} * \tau - K_{m_n} * \tau\|_C < \varepsilon/2$ при всех $n, k > N$. Тогда

$$\begin{aligned} \|K_{m_l} * h - K_{m_n} * h\|_1 &\leq \|K_{m_l} * (h - \tau) - K_{m_n} * (h - \tau)\|_1 \\ &\quad + \|K_{m_l} * \tau - K_{m_n} * \tau\|_1 \\ &\leq 2C\|h - \tau\|_1 + \|K_{m_l} * \tau - K_{m_n} * \tau\|_C < \varepsilon. \end{aligned}$$

Отсюда по критерию Коши сходимости последовательности заключаем, что для всякой $h \in L^1(\mathbb{T}^d)_0$ последовательность $K_{m_j}g$ сходится в пространстве $L^1(\mathbb{T}^d)_0$, а значит, последовательность $B^j * f$ сходится по мере для всякой $f \in I_{d+\beta}^\theta L^1(\mathbb{T}^d)_0$, что, однако, противоречит теореме 4.3.

Заметим теперь, что совокупность U функций $f \in I_{d+\beta}^\theta C(\mathbb{T}^d)_0$, для которых последовательность $B^j(f)$ не является равномерно сходящейся, есть подмножество множества функций из $I_{d+\beta}^\theta C(\mathbb{T}^d)_0$, для которых уравнение (1) не имеет непрерывного решения.

Доказательство того, что U содержит всюду плотное множество типа G_δ , проводится по схеме, использованной при доказательстве леммы 4.3.

Из теоремы 5.3 и теорем вложения §2 следует, что в следующей известной теореме М. Эрмана [16] число ε нельзя положить равным нулю, по крайней мере если $d = 1$ или $d + \beta \notin \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА (М. Эрман). Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^d - \beta$ -диофантов вектор. Если $r = d + \beta + \varepsilon$, $\varepsilon \in (0, 1)$, и $f \in C^r(\mathbb{T}^d)$, то уравнение (1) имеет непрерывное решение $w \in C^\varepsilon(\mathbb{T}^d)$.

§6. О замене времени в линейном потоке на торе и изоморфизме специальных потоков

Напомним, что *потоком* $R^t, t \in \mathbb{R}$, называется однопараметрическая группа автоморфизмов пространства Лебега. Поток R^t называется измеримым, если каково бы ни было измеримое множество L , множество тех точек (x, t) прямого произведения $L \times \mathbb{R}$, для которых $R^t x \in L$, измеримо. Пусть на пространстве Лебега (X_1, μ_1) задан измеримый поток $R_1^t, t \in \mathbb{R}$, а на пространстве Лебега (X_2, μ_2) — измеримый поток $R_2^t, t \in \mathbb{R}$. Потоки R_1^t и R_2^t называются (*метрически*) *изоморфными*, если существуют такие множества полной меры $M_1 \subset X_1$ и $M_2 \subset X_2$ и взаимно однозначное сохраняющее меру отображение S множества M_1 на множество M_2 , что $R_2^t(y) = S \circ R_1^t \circ S^{-1}(y)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ и всех $y \in M_2$.

Функция $g \in L^2(X)$ называется *собственной функцией потока* R^t , заданного на пространстве X , если существует действительное λ (*собственное значение потока*) такое, что $g(R^t x) = e^{2\pi i \lambda t} g(x)$ для всех $t \in \mathbb{R}$ и почти всех $x \in X$. Нетрудно видеть, что множества собственных чисел изоморфных потоков совпадают.

Говорят, что поток R^t имеет *непрерывный спектр*, если он не имеет ненулевых собственных значений, и говорят, что R^t имеет *дискретный спектр*, если множество его собственных функций является базисом в $L^2(X)$.

Ясно, например, что линейный поток $R_{\alpha,1}^t$ на торе $\mathbb{T}^d$ имеет дискретный спектр и $\{k\alpha + s : k \in \mathbb{Z}^d, s \in \mathbb{Z}\}$ есть множество его собственных значений.

Пусть S – автоморфизм пространства Лебега (X, μ) , f – положительная интегрируемая функция на X . Обозначим через M подмножество прямого произведения $X \times \mathbb{R}$, составленное из точек (x, u) , для которых $0 \leq u < f(x)$, и положим для $(x, u) \in M$

$$T_{S,f}^t(x, u) = \begin{cases} (x, u - t) & \text{при } -u \leq t < -u - f(x), \\ \left(S^n x, u + t - \sum_{k=0}^{n-1} f(S^k x) \right) & \text{при } -u + \sum_{k=0}^{n-1} f(S^k x) \leq t < -u + \sum_{k=0}^n f(S^k x), \quad n \in \mathbb{N}, \\ \left(S^{-n} x, u + t - \sum_{k=1}^n f(S^{-k} x) \right) & \text{при } -u - \sum_{k=1}^n f(S^{-k} x) \leq t < -u - \sum_{k=1}^{n-1} f(S^{-k} x), \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Нормируем меру в M , разделив ее на $\int_X f d\mu$. Тогда $T^t = T_{S,f}^t$, $t \in \mathbb{R}$, – измеримый поток на пространстве Лебега M . Такой поток называется *специальным потоком*, построенным по автоморфизму S и функции f .

Рассмотрим специальный поток, построенный по сдвигу тора T_α и функции $f \in L^1(\mathbb{T}^d)$. Для удобства обозначения будем писать $T_{\alpha,f}^t$ вместо $T_{T_\alpha,f}^t$. Известно, что поток $R_{\alpha,F}^t$ может быть реализован как специальный поток $T_{\alpha,f}^t$, построенный по сдвигу T_α и функции $f(x) = R(F)$, где $R(F)(x) = \int_0^1 F(x + t\alpha, t) dt$ – время возвращения материальной точки $(x, 0)$, движущейся под действием потока $R_{\alpha,F}^t$, на “нулевой уровень” $(\mathbb{T}^d, 0)$ (см., например, [17]).

Приведем известный критерий собственных значений специального потока (см. [18]).

ЛЕММА (КСФ). Число $\lambda \in \mathbb{R}$ является собственным значением специального потока $T_{\alpha,f}^t$ тогда и только тогда, когда уравнение

$$h(T_\alpha x) = e^{2\pi i \lambda f(x)} h(x), \quad x \in \mathbb{T}^d,$$

имеет измеримое решение $h: \mathbb{T}^d \rightarrow S^1$.

Следующая лемма фактически доказана в [19].

ЛЕММА (А.Н. Колмогоров). Если функция f , $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = 1$, $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{T}^d$, является тривиальным коциклом над сдвигом T_α , то специальный поток $T_{\alpha,f}^t$ изоморфен потоку $T_{\alpha,1}^t$ (и соответствующая замена переменных явно выражается через решение когомологического уравнения (1)).

Для заданных функции Юнга ψ и суммируемой функции $\tilde{I}(x) \in L^1(\mathbb{T}^d)$ определим функциональные пространства:

$$\begin{aligned}\tilde{I}\psi(L)(\mathbb{T}^d) &= \{f \in \psi(L)(\mathbb{T}^d) : f = \tilde{I} * g, g \in \psi(L)(\mathbb{T}^d)\}, \\ \tilde{I}_x\psi(L)(\mathbb{T}^{d+1}) &= \{F \in \psi(L)(\mathbb{T}^{d+1}) : F = \tilde{I} * G, G \in \psi(L)(\mathbb{T}^{d+1})\}.\end{aligned}$$

Обозначим через $C^+(\mathbb{T}^d)$ множество

$$\left\{ F \in C(\mathbb{T}^d) : F(z) > 0 \ \forall z, \int_{\mathcal{G}^d} F(x) dx = 1 \right\}.$$

ЛЕММА 6.1. Пусть $\tilde{I} \in L^1(\mathbb{T}^d)$, ψ — функция Юнга. Тогда:

- 1) линейный оператор R непрерывно действует из $C(\mathbb{T}^{d+1})$ в $C(\mathbb{T}^d)$;
- 2) для всякой $F \in \tilde{I}_x\psi(L)(\mathbb{T}^{d+1})$ функция $R(F)$ принадлежит пространству $\tilde{I}\psi(L)(\mathbb{T}^d)$;
- 3) для всякой функции $f \in C^+(\mathbb{T}^d) \cap \tilde{I}\psi(L)(\mathbb{T}^d)$ найдется функция $F \in C^+(\mathbb{T}^{d+1}) \cap \tilde{I}_x\psi(L)(\mathbb{T}^{d+1})$, для которой $R(F) = f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $F \in C(\mathbb{T}^{d+1})$. Тогда

$$\begin{aligned}\|R(F)\|_C &= \max_{x \in \mathcal{G}^d} \left| \int_0^1 F(x + t\alpha, t) dt \right| \leq \max_{x \in \mathcal{G}^d} \max_{t \in [0,1]} |F(x + t\alpha, t)| \\ &= \max_{t \in [0,1]} \max_{x \in \mathcal{G}^d} |F(x, t)| = \|F\|_C.\end{aligned}$$

2) Теперь пусть $F(x, y) = \tilde{I} * G(x, y)$, где $G \in \psi(L)(\mathbb{T}^{d+1})$. Имеем

$$\begin{aligned}\tilde{I} * R(G)(z) &= \int_{\mathcal{G}^d} \tilde{I}(x) \int_0^1 G(z - x + t\alpha, t) dt dx \\ &= \int_0^1 \int_{\mathcal{G}^d} \tilde{I}(x) G(z - x + t\alpha, t) dx dt = \int_0^1 (\tilde{I} * G)(z + t\alpha, t) dt = R(F)(z).\end{aligned}$$

Применив неравенство Йенсена к функции ψ , получим

$$\psi(|R(G)(z)|) \leq \psi\left(\int_0^1 |G(z + t\alpha, t)| dt\right) \leq \int_0^1 \psi(|G(z + t\alpha, t)|) dt$$

и, значит,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{G}^d} \psi(|R(G)(z)|) dz &\leq \int_{\mathcal{G}^d} \int_0^1 \psi(|G(z + t\alpha, t)|) dt dz \\ &= \int_0^1 \int_{\mathcal{G}^d} \psi(|G(z + t\alpha, t)|) dz dt = \int_0^1 \int_{\mathcal{G}^d} \psi(|G(z, t)|) dz dt < \infty,\end{aligned}$$

следовательно, $R(G) \in \psi(L)(\mathbb{T}^d)$ и $R(F) \in \tilde{I}\psi(L)(\mathbb{T}^d)$.

3) Пусть $v: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ — непрерывная неотрицательная функция, $\int_0^1 v(t) dt = 1$, $v(t) = 0$ при $t \in [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$. Пусть $f \in C^+(\mathbb{T}^d)$ и $f = \tilde{I} * g$, где $g \in \psi(L)(\mathbb{T}^d)$.

Следуя работе Д. В. Аносова [20], определим на кубе $\mathcal{E}^d \times [0, 1]$ функцию F по формуле $F(x, t) = m + v(t)(f(x - t\alpha) - m)$, где $m = \min_{x \in \mathbb{T}^d} f(x)$, и продолжим F до (непрерывной) 1-периодической функции на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ (которую также обозначим через F).

Из определения F заключаем, что $F(x, t) > 0$ при всех x и t ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}^{d+1}} F(z) dz &= m \left(1 - \int_0^1 v(t) dt \right) + \int_0^1 \int_{\mathbb{T}^d} v(t) f(x - t\alpha) dx dt \\ &= \int_0^1 v(t) dt \int_{\mathcal{E}^d} f(x) dx = 1 \end{aligned}$$

и

$$\int_0^1 F(x + t\alpha, t) dt = \int_0^1 (m + v(t)(f(x) - m)) dt = f(x),$$

т.е. $f = R(F)$.

Положим $G(x, y) = m + v(y)(g(x - y\alpha) - m)$ для $(x, y) \in \mathcal{E}^d \times [0, 1]$ и продолжим G до 1-периодической функции на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ (которую также обозначим через G). Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{I} * G(z, t) &= \int_{\mathcal{E}^d} \tilde{I}(z - x)(m + v(t)(g(x - t\alpha) - m)) dx \\ &= m - mv(t) + v(t) \int_{\mathcal{E}^d} \tilde{I}(z - x)g(x - t\alpha) dx \\ &= m - mv(t) + v(t)(\tilde{I} * g)(z - t\alpha) = F(z, t). \end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned} \psi(|G(z, t)|) &\leq \frac{1}{2}\psi(2|m - mv(t)|) + \frac{1}{2}\psi(2v(t)|g(z - t\alpha)|), \\ \psi(2v(t)|g(z - t\alpha)|) &\leq \psi(2\|v\|_\infty|g(z - t\alpha)|) \leq 4\|v\|_\infty^2 \psi(|g(z - t\alpha)|), \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_{\mathcal{E}^d} \psi(|G(z, t)|) dz dt &\leq C_1 + 2\|v\|_\infty^2 \int_0^1 \int_{\mathcal{E}^d} \psi(|g(z - t\alpha)|) dz dt \\ &= C_1 + 2\|v\|_\infty^2 \int_{\mathcal{E}^d} \psi(|g(z)|) dz < \infty, \end{aligned}$$

где $C_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \psi(2m|1 - v(t)|) dt$.

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$ β -диофантов, пространство $Y = I_{d+\beta, x} L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^{d+1})$, $d \in \mathbb{N}$, или $Y = W_x^{1+\beta} L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^2)$, если $d = 1$.

Тогда для всякой $F \in Y \cap C^+(\mathbb{T}^{d+1})$ поток $R_{\alpha, F}^t$ изоморфен потоку $R_{\alpha, 1}^t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\theta(0) = 0$. При $k \neq 0$ положим $\theta(k) \equiv 1$, если $Y = I_{d+\beta, x} L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^{d+1})$, и $\theta(k) = \exp(-\frac{\pi}{2} i r \operatorname{sign} k)$, если $Y = W_x^{1+\beta} L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^2)$.

В силу леммы 6.1 для всякой $F \in Y \cap C^+(\mathbb{T}^{d+1})$ имеем

$$R(F) \in I_{d+\beta}^\theta L \log_+^{1/2} L(\mathbb{T}^d),$$

и, значит, в силу теоремы 5.1 функция $R(F)$ есть тривиальный аддитивный коцикл над T_α . Так как поток $R_{\alpha, F}^t$ изоморфен специальному потоку $T_{\alpha, R(F)}^t$, то для завершения доказательства осталось использовать лемму Колмогорова.

Обозначим $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

ЛЕММА 6.2. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^d$ — существенно иррациональный вектор. Предположим, что для суммируемой функции $f: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$ функциональное уравнение

$$h(x + \alpha) = e^{2\pi i f(x)} h(x) \quad (49)$$

имеет измеримое решение $h: \mathbb{T}^d \rightarrow S^1$. Тогда последовательность биркгофовых сумм $\{\mathbf{B}_{m_k}^\alpha f\}_{k=1}^\infty$ сходится по мере для любой α -допустимой последовательности $\{m_k\}_{k=1}^\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть измеримая функция $h: \mathbb{T}^d \rightarrow S^1$ удовлетворяет (49). Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем $\delta > 0$ такое, что $\omega_1(h, \delta) < (2 \sin^2 \pi \varepsilon)/\pi$. (Здесь $\omega_1(h, \delta) = \sup_{|y| \leq \delta} \int_{\mathcal{G}^d} |h(x+y) - h(x)| dx$ — интегральный модуль непрерывности функции h .) Из критерия Коши сходимости последовательности в полном метрическом пространстве заключаем, что существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\max_{s=1, \dots, d} |\{m_j \alpha_s\} - \{m_l \alpha_s\}| < \delta$$

при всех $j \geq N, l \geq N$.

Имеем соотношения

$$\begin{aligned} \text{mes}\{x : |\mathbf{B}_{m_j}^\alpha f(x) - \mathbf{B}_{m_l}^\alpha f(x)| > \varepsilon\} &\leq \frac{1}{\sin \pi \varepsilon} \int_{\mathcal{G}^d} |\sin \pi (\mathbf{B}_{m_j}^\alpha f(x) - \mathbf{B}_{m_l}^\alpha f(x))| dx \\ &= \frac{1}{2 \sin \pi \varepsilon} \int_{\mathcal{G}^d} |e^{\pi i (\mathbf{B}_{m_j}^\alpha f(x) - \mathbf{B}_{m_l}^\alpha f(x))} - e^{-\pi i (\mathbf{B}_{m_j}^\alpha f(x) - \mathbf{B}_{m_l}^\alpha f(x))}| dx \\ &= \frac{1}{2 \sin \pi \varepsilon} \int_{\mathcal{G}^d} |e^{2\pi i (\mathbf{B}_{m_j}^\alpha f(x) - \mathbf{B}_{m_l}^\alpha f(x))} - 1| dx \\ &= \frac{1}{2 \sin \pi \varepsilon} \int_{\mathcal{G}^d} |h(x + m_j \alpha) - h(x + m_l \alpha)| dx \\ &= \frac{1}{2 \sin \pi \varepsilon} \int_{\mathcal{G}^d} |h(x + \{m_j \alpha\}) - h(x + \{m_l \alpha\})| dx \\ &= \frac{1}{2 \sin \pi \varepsilon} \int_{\mathcal{G}^d} |h(x + \{m_j \alpha\} - \{m_l \alpha\}) - h(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{2 \sin \pi \varepsilon} \omega_1(h, \delta) < \frac{\sin \pi \varepsilon}{\pi} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Следовательно, последовательность $\mathbf{B}_{m_k}^\alpha f$ фундаментальная (в пространстве $(L^0(\mathbb{T}^d), \rho_0)$) и в силу критерия Коши сходится по мере.

Для произвольного подмножества M пространства $L^1(\mathbb{T}^d)$ обозначим через $M + 1$ множество $\{f(x) = g(x) + 1 : g \in M\}$.

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$ строго β -диофантов и справедливо любое из следующих четырех условий:

1. $Y = I_{d+\beta,x} L^1(\mathbb{T}^{d+1})_0$, $\beta > 0$, $d \in \mathbb{N}$;
2. $Y = W_x^{1+\beta} L^1(\mathbb{T}^2)_0$, $\beta > 0$, $d = 1$;
3. $Y = I_{d,x}^\chi \psi(L)(\mathbb{T}^{d+1})_0$, $\beta = 0$, $d \in \mathbb{N}$, $\psi \in \Psi$, $\psi(y) = o(y \ln^{1/2} y)$, $y \rightarrow +\infty$;
4. $Y = W_x^1 \psi(L)(\mathbb{T}^2)_0$, $\beta = 0$, $d = 1$, $\psi \in \Psi$, $\psi(y) = o(y \ln^{1/2} y)$, $y \rightarrow +\infty$.

Тогда для типичной функции F из метрического пространства

$$(Y \cap C^+(\mathbb{T}^{d+1}), \rho_C)$$

число $\lambda = 1$ не является собственным значением потока $R_{\alpha,F}^t$ (и, значит, поток $R_{\alpha,F}^t$ не изоморфен потоку $R_{\alpha,1}^t$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\theta(0) = 0$. При $k \neq 0$ положим $\theta(k) \equiv 1$, если $Y = I_{d+\beta,x} L^1(\mathbb{T}^{d+1})_0$, $\theta(k) = \exp(-\frac{\pi}{2} i r \operatorname{sign} k)$, если $Y = W_x^{1+\beta} L^1(\mathbb{T}^2)_0$ или $Y = W_x^1 \psi(L)(\mathbb{T}^2)_0$, и $\theta(k) = \chi(k) = \exp(2\pi i |k|_2 \ln(1+|k|_2))$, если $Y = I_{d,x}^\chi \psi(L)(\mathbb{T}^{d+1})_0$.

Положим $X := I_{d+\beta}^\theta \psi(L)(\mathbb{T}^d)_0$. Согласно лемме 4.3 и теореме 4.3 существуют α -допустимая последовательность $\{m_j\}_{j=1}^\infty$ и множество V , удовлетворяющие следующим свойствам:

- 1) множество V есть непустое G_δ -подмножество (X, ρ_0) ;
- 2) если $f_0 \in V$, то $\{f_0 + p : p \in \mathcal{T}_0^d\} \subset V$;
- 3) для каждого $f_0 \in V$ биркгофовы суммы $\mathbf{B}_{m_j}^\alpha(f)$, $j = 1, 2, \dots$, расходятся по мере.

Из теорем вложения §2 заключаем, что любая функция из пространства X совпадает почти всюду с непрерывной функцией. Так как метрика ρ_0 не различает совпадающие почти всюду функции, то мы можем считать, что $X \subset C(\mathbb{T}^d)$. При этом ясно, что любое G_δ -подмножество пространства (X, ρ_0) является также G_δ -подмножеством пространства (X, ρ_C) .

Из 1), 2) следует, что множество $V + 1$ есть G_δ -подмножество пространства $(X + 1, \rho_C)$ и что $V + 1 \supset \{f_0(x) + p(x) : p \in \mathcal{T}_0^d\}$ для всякой $f_0 \in V + 1$.

По лемме 4.1 оператор R непрерывно действует из $C(\mathbb{T}^{d+1})$ в $C(\mathbb{T}^d)$. Поэтому $R^{-1}(V + 1)$ есть G_δ -подмножество $(Y + 1, \rho_C)$.

Пусть $p(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d, l \in \mathbb{Z}} a_{k,l} e(kx + ly) \in \mathcal{T}_0^{d+1}$. Тогда

$$\begin{aligned} R(p)(x) &= \int_0^1 \sum_{k,l} a_{k,l} e(k(x + y\alpha) + ly) dy = \sum_{k,l} a_{k,l} e(kx) \int_0^1 e(yk\alpha + ly) dy \\ &= \sum_k \left(\sum_l a_{k,l} \int_0^1 e(yk\alpha + ly) dy \right) e_k(x) \in \mathcal{T}_0^d. \end{aligned}$$

Поэтому если $f_0 \in V + 1$, $F_0 \in R^{-1}(f_0)$ и $p \in \mathcal{T}_0^{d+1}$, то $R(F_0 + p) = R(F_0) + R(p) \in V + 1$. И значит, множество $R^{-1}(V + 1)$ всюду плотно в $(Y + 1, \rho_C)$.

Отсюда следует, что $R^{-1}(V + 1) \cap C^+(\mathbb{T}^{d+1})$ — всюду плотное G_δ -подмножество $(Y_1 \cap C^+(\mathbb{T}^{d+1}), \rho_C)$. Для завершения доказательства осталось воспользоваться леммой 6.2 и леммой КСФ.

Полезным дополнением к теореме 6.2 может служить следующая теорема, принадлежащая Б. Файаду [21].

ТЕОРЕМА (Б. Файад). Пусть существенно иррациональный вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$ не является β -диофантовым, $\beta > 0$. Тогда для типичной функции F из пространства $(C^{\beta+d}(\mathbb{T}^{d+1}) \cap C^+(\mathbb{T}^{d+1}), \rho_C)$ поток $R_{\alpha, F}^t$ имеет непрерывный спектр.

ТЕОРЕМА 6.3. 1) Пусть вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$ и пространство X удовлетворяют условиям теоремы 5.1. Тогда для всякой функции $f \in X$, $\int_{\mathbb{S}^d} f(x) dx = 1$, $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{T}^d$, специальный поток $T_{\alpha, f}^t$ изоморфен специальному потоку $T_{\alpha, 1}^t$.

2) Пусть вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$ и пространство X удовлетворяют условиям теоремы 5.2. Тогда для типичной функции f из пространства $((X+1) \cap \{f : f(x) > 0, x \in \mathbb{T}^d\}, \rho_0)$ специальный поток $T_{\alpha, f}^t$ не изоморфен потоку $T_{\alpha, 1}^t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт 1) теоремы следует из теоремы 5.1 и леммы Колмогорова. Пункт 2) теоремы получаем, применяя лемму 6.2, лемму КСФ и теорему 4.3 так, как это сделано при доказательстве теоремы 6.2.

В следующей теореме Степина [22] проблема изоморфизма специальных потоков исследуется с другой позиции.

ТЕОРЕМА (А.М. Степин). Пусть $f \in C^{3/2+\varepsilon}(\mathbb{T})$, $\varepsilon > 0$, $\int_{\mathbb{S}^d} f(x) dx = 1$, $f(x) > 0$, $x \in \mathbb{T}^d$, и f не является тригонометрическим многочленом. Тогда найдется всюду плотное на $[0, 1]$ подмножество M типа G_δ такое, что для $\alpha \in M$ специальные потоки $T_{\alpha, f}^t$ и $T_{\alpha, 1}^t$ не изоморфны.

§ 7. О свойствах слабого перемешивания и топологической транзитивности косых сдвигов тора и цилиндра

Мультипликативным коциклом на $\mathbb{T}^d$ назовем измеримое отображение из $\mathbb{T}^d$ в $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ — единичную окружность.

Мультипликативный коцикл называется *тривиальным над T_α* , если для некоторой константы $\varkappa \in S^1$ и мультипликативного коцикла h справедливо тождество $h(x)\varphi(x) = \varkappa h(T_\alpha x)$.

Мультипликативный коцикл φ называется *слабо перемешивающим над T_α* , если ни для какого $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ коцикл φ^n не является тривиальным над T_α .

Легко видеть, что если f — тривиальный аддитивный коцикл над T_α , то $\varphi(x) = e^{2\pi i f(x)}$ — тривиальный над T_α мультипликативный коцикл.

Заметим также, что каждый мультипликативный коцикл φ может быть представлен в виде $\varphi(x) = e^{2\pi i f(x)}$, где $f: \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная измеримая действительнoзначная функция. Пусть M — некоторое линейное подпространство $L^\infty(\mathbb{T}^d; \mathbb{R})$ — пространства измеримых существенно ограниченных действительнoзначных функций на $\mathbb{T}^d$.

Обозначим через $\Phi(M)$ множество мультипликативных коциклов вида $\varphi(x) = e^{2\pi i f(x)}$, где $f \in M$. Множество $\Phi(M)$ снабдим групповой операцией поточечного умножения функций и метрикой ρ_2 . Для простоты обозначения вместо $\Phi(L^\infty(\mathbb{T}^d; \mathbb{R}))$ будем писать Φ .

ТЕОРЕМА 7.1. Пусть вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$ строго β -диофантов и имеет место любое из следующих четырех условий:

- 1) $Y = \Phi(I_{d+\beta} L^1(\mathbb{T}^d))$, $\beta > 0$, $d \in \mathbb{N}$;
- 2) $Y = \Phi(W_1^{1+\beta}(\mathbb{T}))$, $\beta > 0$, $d = 1$;
- 3) $Y = \Phi(I_d \psi(L)(\mathbb{T}^d))$, $\beta = 0$, $d \in \mathbb{N}$, $\psi \in \Psi$, $\psi(y) = o(y \ln^{1/2} y)$, $y \rightarrow +\infty$;
- 4) $Y = \Phi(W^1 \psi(L)(\mathbb{T}))$, $\beta = 0$, $d = 1$, $\psi \in \Psi$, $\psi(y) = o(y \ln^{1/2} y)$, $y \rightarrow +\infty$.

Тогда слабо перемешивающие над T_α мультипликативные коциклы образуют в (Y, ρ_2) всюду плотное множество типа G_δ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим функцию $\theta \in \Theta$ как в теореме 5.2 и будем полагать ниже $\varphi(y) = y$ в случае, когда $\beta > 0$.

Докажем сначала, что совокупность Ξ коциклов, не являющихся слабо перемешивающими, образует в (Φ, ρ_2) множество типа F_σ . Следуя [23], положим

$$\Phi_{j,k}^n := \left\{ \varphi \in \Phi : \exists c \in S^1, \exists h \in \Phi \quad \varphi^n(x) = c \cdot h(T_\alpha x) \bar{h}(x), |\widehat{\varphi}(j)| \geq \frac{1}{k} \right\}.$$

Нетрудно видеть, что $\Xi = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}^d} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \Phi_{j,k}^n$. Докажем, что $\Phi_{j,k}^n$ — замкнутое подмножество (Φ, ρ_2) .

Пусть $\varphi_s \in \Phi_{j,k}^n$, $s = 1, 2, \dots$, и φ_s сходятся в Φ к φ_0 . Определим $h_s \in \Phi$ и $c_s \in S^1$ из уравнения

$$\varphi_s^n(x) = c_s \cdot h_s(T_\alpha x) \bar{h}_s(x).$$

В силу слабой компактности единичного шара в $L^2(\mathbb{T}^d)$ существуют подпоследовательность $\{h_{s_k}\}$ последовательности $\{h_s\}$ и функция $h_0 \in L^2(\mathbb{T}^d)$ такие, что

$$\int_{\mathbb{G}^d} h_{s_k}(x) \bar{\xi}(x) dx \rightarrow \int_{\mathbb{G}^d} h_0(x) \bar{\xi}(x) dx$$

для любой $\xi \in L^2(\mathbb{T}^d)$. Переходя при необходимости к подпоследовательности, будем полагать, что c_{s_k} сходятся к некоторому $c_0 \in S^1$. Для краткости записи будем обозначать h_{s_k} через h_s , а c_{s_k} через c_s .

Из слабой сходимости h_s к h_0 следует, что $\widehat{h}_s(j) \rightarrow \widehat{h}_0(j)$, $s \rightarrow \infty$, и, значит, $|\widehat{h}_0(j)| \geq 1/k$.

Пусть $\xi \in L^2(\mathbb{T}^d)$. Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{G}^d} \varphi_s^n(x) h_s(x) \bar{\xi}(x) dx - \int_{\mathbb{G}^d} \varphi_0^n(x) h_0(x) \bar{\xi}(x) dx \right| \\ & \leq \left| \int_{\mathbb{G}^d} (\varphi_s^n(x) - \varphi_0^n(x)) h_s(x) \bar{\xi}(x) dx \right| + \left| \int_{\mathbb{G}^d} \varphi_0^n(x) (h_s(x) - h_0(x)) \bar{\xi}(x) dx \right|. \end{aligned}$$

Из слабой сходимости h_s к h_0 следует, что $\int_{\mathbb{G}^d} \varphi_0^n(x) (h_s(x) - h_0(x)) \bar{\xi}(x) dx \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Так как $\|\varphi_s^n - \varphi_0^n\|_2 \leq n \|\varphi_s - \varphi_0\|_2$, то

$$\left| \int_{\mathbb{G}^d} (\varphi_s^n(x) - \varphi_0^n(x)) h_s(x) \bar{\xi}(x) dx \right| \leq \|\varphi_s^n - \varphi_0^n\|_2 \|h_s \xi\|_2 \leq n \|\varphi_s - \varphi_0\|_2 \|\xi\|_2 \rightarrow 0$$

при $s \rightarrow \infty$.

Аналогично,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathcal{G}^d} (c_s h_s(T_\alpha x) - c_0 h_0(T_\alpha x)) \bar{\xi}(x) dx \right| \\
& \leq \left| \int_{\mathcal{G}^d} (c_s h_s(x) - c_0 h_0(x)) \bar{\xi}(T_{-\alpha} x) dx \right| + \left| \int_{\mathcal{G}^d} (c_0 h_s(x) - c_0 h_0(x)) \bar{\xi}(T_{-\alpha} x) dx \right| \\
& \leq |c_s - c_0| \int_{\mathcal{G}^d} |\xi(x)| dx + \left| \int_{\mathcal{G}^d} (h_s(x) - h_0(x)) \bar{\xi}(T_{-\alpha} x) dx \right| \rightarrow 0
\end{aligned}$$

при $s \rightarrow \infty$.

Отсюда, вспоминая, что $\varphi_s^n(x) h_s(x) = c_s h_s(T_\alpha x)$, заключаем, что $\varphi_0^n(x) h_0(x) = c_0 h_0(T_\alpha x)$ для почти всех $x \in \mathbb{T}^d$. Следовательно, $|h_0(x)| = |\varphi_0^n(x) h_0(x)| = |c_0 h_0(T_\alpha x)| = |h_0(T_\alpha x)|$ при почти всех x . Отсюда и из эргодичности автоморфизма T_α вытекает, что функция $|h_0(x)|$ — константа на множестве полной меры. При этом константа отлична от нуля, так как $\widehat{h}_0(j) \neq 0$. Полагая $h(x) = h_0(x)/|h_0(x)|$ ($\in \Phi$), имеем

$$\varphi_0^n(x) = c_0 h(T_\alpha x) \bar{h}(x) \quad \text{при почти всех } x$$

и, значит, $\varphi_0 \in \Phi_{j,k}^n$.

Итак, совокупность слабо перемешивающих над T_α коциклов в (Φ, ρ_2) является подмножеством типа G_δ и, значит, при всяком $\psi \in \Psi$ и $\beta \geq 0$ слабо перемешивающие над T_α коциклы образуют в $(\Phi(I_{d+\beta}^\theta \psi(L)(\mathbb{T}^d)), \rho_2)$ подмножество типа G_δ .

Пусть φ — произвольный коцикл из $\Phi(I_{d+\beta}^\theta \psi(L)(\mathbb{T}^d))$. Нетрудно видеть, что коциклы вида $\varphi(x) = \varphi_0(x) e^{2\pi i p(x)}$, где $p \in \mathcal{T}^d$, всюду плотны в $\Phi(I_{d+\beta}^\theta \psi(L)(\mathbb{T}^d))$. Если при этом коцикл φ слабо перемешивающий над T_α , то всякий коцикл вышеуказанного вида также является слабо перемешивающим (над T_α). Действительно, предположим противное. Пусть для некоторого $p_0 \in \mathcal{T}^d$ существуют $n \neq 0$, $c \in S^1$ и $h \in \Phi$ такие, что $\varphi^n(x) e^{2\pi i n p_0(x)} = c h(T_\alpha x) \bar{h}(x)$. Но коцикл $e^{-2\pi i n p_0(x)}$ тривиальный над T_α . Поэтому существуют $c_1 \in S^1$ и $h_1 \in \Phi$ такие, что $e^{-2\pi i n p_0(x)} = c_1 h_1(T_\alpha x) \bar{h}_1(x)$, и, значит,

$$\varphi^n(x) = e^{-2\pi i n p_0(x)} c h(T_\alpha x) \bar{h}(x) = c c_1 h(T_\alpha x) h_1(T_\alpha x) \bar{h}(x) \bar{h}_1(x),$$

т.е. коцикл $\varphi^n(x)$ тривиальный над T_α . Получили противоречие.

Докажем теперь существование слабо перемешивающего коцикла в пространстве $\Phi(I_{d+\beta}^\theta \psi(L)(\mathbb{T}^d))$. Из теоремы 5.2 следует, что в условиях теоремы существует нетривиальный над T_α аддитивный коцикл $f_0 \in I_{d+\beta}^\theta \psi(L)(\mathbb{T}^d)_0$. Из теоремы Мура–Шмидта (см. [24]) немедленно следует, что существует $s \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\varphi_s(x) = \exp(2\pi i s f_0(x))$$

— нетривиальный над T_α мультипликативный коцикл. Положим

$$S = \{s \in \mathbb{R} : \varphi_s(x) = \exp(2\pi i s f_0(x)) \text{ — тривиальный коцикл над } T_\alpha\}.$$

В работе [24] также доказано, что аддитивная группа S — борелевское подмножество $\mathbb{R}$.

Так как всякая собственная борелевская подгруппа $\mathbb{R}$ имеет лебегову меру 0, то $\text{mes} \bigcup_{k \neq 0} \{s : ks \in S(f)\} = 0$ и, значит, существует такое $s_0 \in \mathbb{R}$, что $ks_0 \notin S$ при всех $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Последнее свойство, очевидно, означает, что коцикл $\exp(2\pi i s_0 f_0(\cdot))$ слабо перемешивающий над T_α . Теорема полностью доказана.

Пусть φ – мультипликативный коцикл, $f \in C(\mathbb{T}^d)$ – непрерывная функция, а $\alpha \in \mathbb{R}^d$ – существенно иррациональный вектор. Косым сдвигом Анзаи тора $\mathbb{T}^d \times S^1$ называется его автоморфизм вида

$$S_{\alpha, \varphi}(x, w) = (T_\alpha x, w\varphi(x)), \quad x \in \mathbb{T}^d, \quad w \in S^1.$$

Косым сдвигом цилиндра $\mathbb{T}^d \times \mathbb{R}$ (цилиндрическим каскадом) называется автоморфизм цилиндра вида

$$S^{\alpha, f}(x, y) = (T_\alpha x, y + f(x)), \quad x \in \mathbb{T}^d, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Пусть H – подпространство пространства $L^2(\mathbb{T}^d \times S^1)$, Q – заданный автоморфизм $\mathbb{T}^d$. Скажем, что автоморфизм Q имеет на H непрерывный спектр, если пространство H не содержит отличных от тождественно постоянных собственных функций автоморфизма Q .

Положим $H_0 = \{F \in L^2(\mathbb{T}^d \times S^1) : F(x, y) = g(x), g(x) \in L^2(\mathbb{T}^d)\}$ и обозначим через $H_0^\perp$ ортогональное дополнение к H_0 в $L^2(\mathbb{T}^d \times S^1)$.

ТЕОРЕМА 7.2. Пусть вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$ и пространство Y удовлетворяют условиям теоремы 7.1. Тогда для типичного мультипликативного коцикла ψ из пространства (Y, ρ_2) косой сдвиг Анзаи $S_{\alpha, \varphi}$ имеет непрерывный спектр на $H_0^\perp$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из работы [25] следует, что косой сдвиг $S_{\alpha, \varphi}$ имеет непрерывный спектр на $H_0^\perp$ тогда и только тогда, когда мультипликативный коцикл ψ слабо перемешивающий над T_α .

ТЕОРЕМА 7.3. Пусть вектор $\alpha \in \mathbb{R}^d$ строго β -диофантов, $X = I_{d+\beta}C(\mathbb{T}^d)_0$, если $d \in \mathbb{N}$, или $X = W^{1+\beta}C(\mathbb{T})_0$, если $d = 1$.

Тогда для типичной функции f из пространства (X, ρ_C) цилиндрический каскад $S^{\alpha, f}$ топологически транзитивен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно критерию Хедлунда [26] топологическая транзитивность цилиндрического каскада $S^{\alpha, f}$, построенного по непрерывной функции f с нулевым средним и существенно иррациональному вектору α , равносильна отсутствию непрерывного решения когомологического уравнения (1), и, значит, требуемое утверждение вытекает из теоремы 5.3.

Автор признателен Д. В. Аносову, А. Б. Катку, А. В. Кочергину, Н. Г. Мошечину и А. М. Степину за полезные обсуждения.

Список литературы

1. Кириллов А. А. Динамические системы, факторы и представления групп // УМН. 1967. Т. 22. № 5. С. 67–80.
2. Степин А. М. О когомологиях групп автоморфизмов пространства Лебега // Функци. анализ и его прилож. 1971. Т. 5. № 2. С. 91–92.
3. Мошечин Н. Г. О совместных диофантовых приближениях. Векторы заданного диофантова типа // Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 5. С. 706–716.

4. Шмидт В. М. Диофантовы приближения. М.: Мир, 1983.
5. Stein E. M. On limits of sequences of operators // Ann. of Math. 1961. V. 74. P. 140–170.
6. Стейн И. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
7. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. М.: Мир, 1965.
8. Красносельский М. А., Рутецкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлица. М.: Физматлит, 1958.
9. Maligranda L., Karlovich A. Yu. On the interpolation constant for Orlicz spaces // Proc. Amer. Math. Soc. V. 129. №9. P. 2727–2739.
10. Wainger S. Special trigonometric series in k dimensions // Mem. Amer. Math. Soc. 1965. V. 59.
11. Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1969.
12. Пичугов С. А. Оценки норм операторов, непрерывных по мере // Матем. заметки. 1991. Т. 50. №1. С. 146–148.
13. Pichugov S. A. Translation invariant operators in linear metric spaces // Anal. Math. 1992. V. 18. №3. P. 237–248.
14. Рождественский А. В. Об абсолютно непрерывных слабо перемешивающих копиях над иррациональными поворотами окружности // Матем. сб. 2003. Т. 194. №5. С. 139–156.
15. Стечкин С. Б. Обобщение некоторых неравенств С. Н. Бернштейна // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60. №9. С. 1511–1514.
16. Herman M. R. Sur la conjugaison differentiable des diffeomorphismes du cercle a des rotations // Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 1979. V. 49. P. 5–233.
17. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.–Л.: ОГИЗ, 1947.
18. Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
19. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // Докл. АН СССР. 1953. Т. 93. С. 763–766.
20. Аносов Д. В. Об аддитивном функциональном гомологическом уравнении, связанном с эргодическим поворотом окружности // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1973. Т. 37. №6. С. 1259–1274.
21. Fayad B. R. Weak mixing for reparametrized linear flows on the torus // Ergodic Theory Dynam. Systems. 2002. V. 22. №2.
22. Степин А. М. О гомологическом уравнении теории динамических систем // Исследования по теории функций многих вещественных переменных. Тематический межвузовский сборник. Ярославль: Изд-во Ярославского гос. ун-та, 1982. С. 106–117.
23. Iwanik A., Serafin J. Most monothetic extensions are rank-1 // Colloq. Math. 1993. V. 56. №1. P. 63–76.
24. Moore C. C., Schmidt K. Coboundaries and homomorphism for nonsingular actions and a problem of H. Helson // Proc. London Math. Soc. (3). 1980. V. 40. P. 443–475.
25. Anzai H. Ergodic skew product transformations on the torus // Osaka J. Math. 1951. V. 3. P. 83–99.
26. Gottschalk W. H., Hedlund G. A. Topological dynamics. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1955. (Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. V. 36.)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: arozhd@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию
05.11.2003