Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. С. Жуковский, Е. А. Панасенко, Определение метрики пространства $\text{clos}_\emptyset(X)$ замкнутых подмножеств метрического пространства X и свойства отображений со значениями в $\text{clos}_\emptyset(\mathbb{R}^n)$, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 9, 65–96

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8240>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 10:18:02

УДК 515.124+515.126.83

Е. С. Жуковский, Е. А. Панасенко

Определение метрики пространства $\text{clos}_\varnothing(X)$ замкнутых подмножеств метрического пространства X и свойства отображений со значениями в $\text{clos}_\varnothing(\mathbb{R}^n)$

Работа посвящена распространению признаков суперпозиционной измеримости, леммы Филиппова о неявной функции и свойства Скорца–Драгоны на многозначные (и, как следствие, на однозначные) отображения, которые не удовлетворяют условиям Каратеодори (верхним условиям Каратеодори), а именно не являются непрерывными (полунепрерывными сверху) по фазовой переменной. Для получения соответствующих утверждений определено пространство $\text{clos}_\varnothing(X)$ всех замкнутых, включая пустое, подмножеств произвольного метрического пространства X ; предложена метрика в этом пространстве; доказана его полнота в случае, когда исходное метрическое пространство X является полным; получен критерий сходимости последовательности; изучены отображения со значениями в $\text{clos}_\varnothing(X)$. Доказывается, что некоторые известные результаты о свойствах многозначных отображений, удовлетворяющих условиям Каратеодори и имеющих значениями компактные подмножества $\mathbb{R}^n$, переносятся на отображения со значениями в $\text{clos}_\varnothing(\mathbb{R}^n)$, измеримые по первому аргументу и непрерывные в предлагаемой метрике по второму аргументу.

Библиография: 22 названия.

Ключевые слова: суперпозиционная измеримость, лемма Филиппова о неявной функции, свойство Скорца–Драгоны, пространство замкнутых подмножеств метрического пространства, многозначное отображение.

DOI: 10.4213/sm8240

Введение

В работе предлагаются модификации и обобщения некоторых известных результатов о многозначных отображениях, действующих в конечномерное пространство $\mathbb{R}^n$, доказывается признак суперпозиционной измеримости, вариант леммы Филиппова о неявной измеримой функции и аналог теоремы Скорца–Драгоны. В связи с многочисленными приложениями в теории дифференциальных включений, задачах управления и других разделах математики подобные свойства многозначных отображений, удовлетворяющих верхним, нижним или “полным” условиям Каратеодори, продолжают интенсивно изучаться, рассматриваются не только отображения, значения которых – компактные подмножества $\mathbb{R}^n$, но и отображения, действующие в пространство замкнутых подмножеств произвольного метрического сепарабельного пространства. Следует отметить, что перечисленные свойства тесно связаны: в лемме Филиппова предполагается существование измеримого сечения у суперпозиции $F(t, U(t))$

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ (проект № 2014/285).

© Е. С. Жуковский, Е. А. Панасенко, 2014

заданного однозначного или многозначного отображения $F(t, u)$ и многозначного измеримого отображения $U(t)$ (такое сечение существует в случае суперпозиционной измеримости или суперпозиционной селектируемости F); доказательства леммы Филиппова и суперпозиционной измеримости, как правило, основываются на свойстве Скорца–Драгони (см., например, [1; доказательства теорем 1.5.15, 1.5.18]). Тем не менее можно привести простые примеры отображений, не удовлетворяющих условиям Каратеодори, не обладающих свойством Скорца–Драгони, но являющихся суперпозиционно измеримыми, для которых утверждение леммы Филиппова остается верным.

ПРИМЕР 1. Определим многозначное отображение

$$F: [a, b] \times \mathbb{R} \multimap \mathbb{R}, \quad F(t, x) \doteq \begin{cases} \{(x - t)^{-1}\}, & x \neq t, \\ \emptyset, & x = t \end{cases} \quad (1)$$

(значениями F при любых $t \in [a, b]$, $x \in \mathbb{R}$, кроме точек $t = x$, являются одноточечные множества, поэтому отображение F можно отождествить с “обычной” однозначной функцией). Отображение F при любом $t \in [a, b]$ по второму аргументу не является ни непрерывным, ни полунепрерывным сверху в точке $x = t$, а обладает лишь свойством полунепрерывности снизу; таким образом, F удовлетворяет только нижним условиям Каратеодори. Как известно (см. [1; пример 1.5.20, (б)]), нижние условия Каратеодори не обеспечивают не только суперпозиционную измеримость, но и суперпозиционную селектируемость. Тем не менее данное отображение является суперпозиционно измеримым, поскольку полный прообраз открытого интервала $A = (y_1, y_2)$ является измеримым по Борелю подмножеством пространства $[a, b] \times \mathbb{R}$ (см. [2; теорема 1’]), например при $y_1 > 0$ это множество есть $F^{-1}(A) = \{(t, x) : y_2^{-1} < x - t < y_1^{-1}\}$.

Рассматриваемое отображение не обладает свойством Скорца–Драгони, так как для любого $E \subset [a, b]$ сужение F на множество $E \times \mathbb{R}$ не является полунепрерывным сверху (и соответственно непрерывным). Отображение F не удовлетворяет предположениям различных вариантов леммы Филиппова, и в то же время справедливо утверждение о неявной функции: для любого измеримого отображения $Q: [a, b] \multimap \mathbb{R}$ с замкнутыми образами, удовлетворяющего условию $Q(t) \setminus \{t\} \neq \emptyset$, и произвольного измеримого сечения y отображения $t \mapsto F(t, Q(t))$ существует измеримое сечение u отображения Q такое, что $\{y(t)\} = F(t, u(t))$ при п.в. $t \in [a, b]$. Действительно, так как $0 \notin F(t, Q(t))$ при п.в. $t \in [a, b]$, то и $y(t) \neq 0$ при п.в. $t \in [a, b]$, а следовательно, существует единственная функция $u(t) = t + 1/y(t)$, удовлетворяющая равенству $y(t) = (u(t) - t)^{-1}$. Очевидно, что если функция y измерима, то u также измерима, а в силу единственности $u(t)$ выполнено $u(t) \in Q(t)$.

Мы покажем, что и в признаке суперпозиционной измеримости, и в лемме Филиппова, и в теореме Скорца–Драгони требование непрерывности функции F по второму аргументу можно ослабить. С этой целью мы определяем метрическое пространство $\text{clos}_{\emptyset}(\mathbb{R}^n)$ всех замкнутых подмножеств (включая пустое) пространства $\mathbb{R}^n$. Это пространство мы наделяем метрикой $\rho_{\mathbb{R}^n}^{\mathbb{S}}$, ранее рассматривавшейся авторами для пространства непустых замкнутых подмножеств как пространства $\mathbb{R}^n$ (см. [3]), так и произвольного метрического пространства (см. [4]). Все перечисленные выше утверждения о свойствах отображений, удовлетворяющих условиям Каратеодори, удастся распространить на

отображения $F: [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{clos}_\varnothing(\mathbb{R}^n)$, которые измеримы по первому аргументу и непрерывны относительно метрики $\rho_{\mathbb{R}^n}^\S$ по второму аргументу. Отметим, что рассмотренное в примере 1 отображение (1) оказывается непрерывным по второму аргументу (и даже по совокупности аргументов) относительно метрики $\rho_{\mathbb{R}}^\S$, т.е. к этому отображению применимы все полученные в работе аналоги известных утверждений.

Приведем основные обозначения, используемые в статье.

Пусть $\mathbb{N} \doteq \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z} \doteq \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{R}_+ \doteq [0, \infty)$, $\mathbb{R}^n$ – n -мерное вещественное пространство с нормой $|\cdot|$. Для топологического пространства X будем обозначать: $\Xi_X(x_0)$ – окрестность точки $x_0 \in X$; $\text{cl } M$ – замыкание множества $M \subset X$; $\overline{M} \doteq X \setminus M$ – дополнение к множеству $M \subset X$; $\text{clos}(X)$ и $\text{comp}(X)$ – пространства всех непустых замкнутых и непустых компактных подмножеств X соответственно. Для метрического пространства (X, ϱ_X) будем обозначать:

$S_X(x_0, r) \doteq \{x \in X : \varrho_X(x, x_0) = r\}$, $B_X^o(x_0, r) \doteq \{x \in X : \varrho_X(x, x_0) < r\}$, $B_X(x_0, r) \doteq \{x \in X : \varrho_X(x, x_0) \leq r\}$ – сфера, открытый и соответственно замкнутый шары в пространстве X радиуса $r > 0$ с центром в точке x_0 ;

$$S_X(x_0, 0) = B_X(x_0, 0) = \{x_0\};$$

$$B_X^o(x_0, 0) = \varnothing;$$

$\varrho_X(x, M) \doteq \inf_{y \in M} \varrho_X(x, y)$ – расстояние в X от точки x до множества $M \neq \varnothing$;

$d_X(M_1, M_2) \doteq \sup_{x \in M_1} \varrho_X(x, M_2)$ – полуотклонение по Хаусдорфу множества M_1 от M_2 ;

$\text{dist}_X(M_1, M_2) \doteq \max\{d_X(M_1, M_2); d_X(M_2, M_1)\}$ – расстояние по Хаусдорфу между множествами M_1, M_2 .

В случае метрического пространства X будем также использовать обозначение $\text{clbd}(X)$ для пространства всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств X .

§ 1. Пространство $(\text{clos}_\varnothing(X), \rho_X^\S)$

В этом параграфе определяется и исследуется пространство $\text{clos}_\varnothing(X)$ всех замкнутых, включая пустое, подмножеств метрического пространства X . Для $\text{clos}_\varnothing(X)$ предложена метрика $\rho_X^\S$, которая, в отличие от обобщенной метрики Хаусдорфа, принимает только конечные значения. Сходимость последовательности множеств F^i , $i = 1, 2, \dots$, относительно $\rho_X^\S$ означает сходимость по Хаусдорфу при каждом $r > 0$ последовательности множеств, полученных объединением F^i с $\overline{B}_X^o(\theta, r) = \{x \in X : \varrho_X(x, \theta) \geq r\}$ – внешним замкнутым шаром радиуса r с центром в некоторой фиксированной точке θ . Такая связь сходимости в предлагаемой метрике со сходимостью по Хаусдорфу позволит далее распространить известные результаты о непрерывных отображениях, действующих в $\text{clbd}(X)$, на отображения, действующие в $\text{clos}_\varnothing(X)$ и непрерывные в метрике $\rho_X^\S$.

Пусть задано метрическое пространство (X, ϱ_X) . Вначале приведем предложенное в [4] определение метрики ρ_X^cl в пространстве $\text{clos}(X)$ и сформулируем основные свойства этой метрики.

Зафиксируем некоторую точку $\theta \in X$; обозначим $B_X^o(r) \doteq B_X^o(\theta, r)$, $B_X(r) \doteq B_X(\theta, r)$, $S_X(r) \doteq S_X(\theta, r)$. Для каждого $r \geq 0$ определим оператор

$$\mathfrak{S}_r: \text{clos}(X) \rightarrow \text{clos}(X)$$

равенством

$$\mathfrak{S}_r H \doteq H \cup \overline{B_X^o(r)}. \quad (2)$$

Далее, для любых $F, G \in \text{clos}(X)$ положим

$$\rho_X^o(F, G) \doteq |\varrho_X(\theta, F) - \varrho_X(\theta, G)|, \quad (3)$$

$$d_X^{\mathfrak{S}}(F, G) \doteq \sup_{r>0} \min \left\{ d_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G), \frac{1}{r} \right\}, \quad (4)$$

$$\rho_X^{\mathfrak{S}}(F, G) \doteq \max \{ d_X^{\mathfrak{S}}(F, G), d_X^{\mathfrak{S}}(G, F) \}, \quad (5)$$

$$\rho_X^{\text{cl}}(F, G) \doteq \rho_X^o(F, G) + \rho_X^{\mathfrak{S}}(F, G). \quad (6)$$

Заметим, что определение (5) равносильно соотношению

$$\rho_X^{\mathfrak{S}}(F, G) \doteq \sup_{r>0} \min \left\{ \text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G), \frac{1}{r} \right\}. \quad (7)$$

ТЕОРЕМА 1 (см. [4]). 1) Для любых $F, G \in \text{clos}(X)$ выполнено $\rho_X^{\text{cl}}(F, G) < \infty$; функция $\rho_X^{\text{cl}}: \text{clos}(X) \times \text{clos}(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$ является метрикой в пространстве $\text{clos}(X)$.

2) Для любых $F, F^i \in \text{clos}(X)$, $i \in \mathbb{N}$, сходимость $\rho_X^{\text{cl}}(F^i, F) \rightarrow 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varrho_X(\theta, F^i) \rightarrow \varrho_X(\theta, F)$ и $\text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F^i, \mathfrak{S}_r F) \rightarrow 0$ для любого $r > 0$.

3) Пусть $F, F^i \in \text{clos}(X)$, $i \in \mathbb{N}$. Если $\text{dist}_X(F^i, F) \rightarrow 0$, то $\rho_X^{\text{cl}}(F^i, F) \rightarrow 0$; если $\rho_X^{\text{cl}}(F^i, F) \rightarrow 0$ и существует такое $p > 0$, что $F^i \subset B_X(p)$, $i \in \mathbb{N}$, то $F \subset B_X(p)$ и $\text{dist}_X(F^i, F) \rightarrow 0$.

4) Если пространство (X, ϱ_X) полное, то $(\text{clos}(X), \rho_X^{\text{cl}})$ также является полным.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Достаточное условие сходимости $\rho_X^{\text{cl}}(F^i, F) \rightarrow 0$, содержащееся в утверждении 2) теоремы 1, можно уточнить, потребовав, чтобы сходимость $\text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F^i, \mathfrak{S}_r F) \rightarrow 0$ имела место не при всех положительных r , а только при r , больших некоторого $r_0 > 0$ (см. [4]).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Функция $\rho_X^{\mathfrak{S}}$ также определяет метрику в $\text{clos}(X)$, но относительно этой метрики пространство $\text{clos}(X)$ может не быть полным, даже если (X, ϱ_X) – полное пространство. Примером фундаментальной последовательности замкнутых множеств, которая не имеет предела в $\text{clos}(\mathbb{R})$ относительно метрики $\rho_{\mathbb{R}}^{\mathfrak{S}}$, служит последовательность множеств $F^i \doteq \{i\}$, $i \in \mathbb{N}$ (см. [4]).

Рассмотрим теперь пространство $\text{clos}_{\emptyset}(X) \doteq \text{clos}(X) \cup \{\emptyset\}$, которое является основным объектом нашего исследования. Для распространения оператора $\mathfrak{S}_r$ на это пространство полагаем $\mathfrak{S}_r \emptyset = \overline{B_X^o(r)}$, что согласуется с формулой (2). Везде далее будем предполагать, что пространство X неограниченное, т.е.

$$\sup_{x \in X} \varrho_X(\theta, x) = \infty.$$

В этом случае $\overline{B_X^\circ(r)} \neq \emptyset$, поэтому $\mathfrak{S}_r \emptyset \neq \emptyset$ для любого $r \geq 0$ (для $F \neq \emptyset$ соотношение $\mathfrak{S}_r F \neq \emptyset$ выполнено и в случае ограниченного пространства X). Очевидно, что формула (3) не имеет смысла для пустых множеств и, значит, метрику ρ_X^{cl} в $\text{clos}_\emptyset(X)$ использовать нельзя. Однако функция $\rho_X^\mathfrak{S}: \text{clos}_\emptyset(X) \times \text{clos}_\emptyset(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$, определенная равенством (7), может выступать здесь в качестве метрики. Покажем это.

Прежде всего, определим функцию $D: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$:

$$D(p, r) \doteq d_X(\overline{B_X^\circ(p)}, \overline{B_X^\circ(r)}) = \begin{cases} 0, & \text{если } r \leq p, \\ \text{dist}_X(\overline{B_X^\circ(p)}, \overline{B_X^\circ(r)}), & \text{если } r > p. \end{cases} \quad (8)$$

Как было отмечено в [4], функция D не возрастает по первому аргументу и не убывает по второму аргументу. Кроме того, для любых $p, r \in \mathbb{R}_+$ значение $D(p, r)$ конечно.

ЛЕММА 1. Пусть $F, G \in \text{clos}_\emptyset(X)$. Тогда:

- 1) функции $r \mapsto d_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G)$, $r \mapsto \text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G)$ не убывают;
- 2) в случае $F \neq \emptyset$ для любого $r \geq 0$ справедливо неравенство

$$d_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G) \leq D(r_*, r), \quad \text{где } r_* = \varrho_X(\theta, F); \quad (9)$$

а если $F = \emptyset$, то $d_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G) = 0$;

- 3) в случае, когда хотя бы одно из множеств F, G не пусто, для любого $r \geq 0$ справедливо неравенство

$$\text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G) \leq D(r_{**}, r), \quad (10)$$

где

$$r_{**} \doteq \begin{cases} \min\{\varrho_X(\theta, F), \varrho_X(\theta, G)\}, & \text{если } F, G \neq \emptyset, \\ \varrho_X(\theta, F), & \text{если } F \neq \emptyset, G = \emptyset, \\ \varrho_X(\theta, G), & \text{если } G \neq \emptyset, F = \emptyset; \end{cases}$$

если же $F = G = \emptyset$, то для любого $r \geq 0$ выполнено $\text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость утверждений 1)–3) в случае, когда оба множества F и G непусты, была показана в [4]. Если $F = \emptyset$ и $G = \emptyset$, то

$$d_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G) = \text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G) = \text{dist}_X(\overline{B_X^\circ(r)}, \overline{B_X^\circ(r)}) = 0$$

при любом $r \geq 0$, т.е. свойства 1)–3) также имеют место.

Рассмотрим случай, когда одно из множеств пусто. Докажем только утверждения 1) и 2), поскольку утверждение 3) является прямым следствием 2). Пусть $F \neq \emptyset$, $G = \emptyset$. Тогда $\text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r \emptyset) = d_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r \emptyset)$. Покажем, что функция $r \mapsto \text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r \emptyset) = d_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r \emptyset)$ не убывает. Согласно лемме 1 работы [4] для любых непустых замкнутых множеств $A, B \subset X$ и любого $r \geq 0$ имеет место неравенство

$$\text{dist}_X(\mathfrak{S}_r A, \mathfrak{S}_r B) \leq \text{dist}_X(A, B).$$

Тогда для любых $r_2 \geq r_1 \geq 0$, полагая $A = \mathfrak{S}_{r_2} F$, $B = \mathfrak{S}_{r_2} \emptyset$ и учитывая равенства $\mathfrak{S}_{r_1} F = \mathfrak{S}_{r_1}(\mathfrak{S}_{r_2} F)$, $\mathfrak{S}_{r_1} \emptyset = \mathfrak{S}_{r_1}(\mathfrak{S}_{r_2} \emptyset)$, получаем оценку

$$\text{dist}_X(\mathfrak{S}_{r_1} F, \mathfrak{S}_{r_1} \emptyset) = \text{dist}_X(\mathfrak{S}_{r_1}(\mathfrak{S}_{r_2} F), \mathfrak{S}_{r_1}(\mathfrak{S}_{r_2} \emptyset)) \leq \text{dist}_X(\mathfrak{S}_{r_2} F, \mathfrak{S}_{r_2} \emptyset).$$

Далее, покажем, что для любого $r \geq 0$ выполнено неравенство (9). Очевидно, (9) имеет место при $r \leq r_*$, так как в этом случае $\mathfrak{S}_r F = \mathfrak{S}_r \emptyset$. При $r > r_*$ в силу соотношений $\overline{B_X^o(r)} \subset \mathfrak{S}_r F \subset \overline{B_X^o(r_*)}$ и $\mathfrak{S}_r \emptyset = \overline{B_X^o(r)}$ получаем

$$d_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r \emptyset) \leq d_X(\overline{B_X^o(r_*)}, \mathfrak{S}_r \emptyset) = d_X(\overline{B_X^o(r_*)}, \overline{B_X^o(r)}) = D(r_*, r).$$

В случае $F = \emptyset$, $G \neq \emptyset$ имеем $\mathfrak{S}_r \emptyset \subset \mathfrak{S}_r G$, следовательно, $d_X(\mathfrak{S}_r \emptyset, \mathfrak{S}_r G) = 0$ при всех r . Таким образом, утверждения 1), 2) выполнены.

ТЕОРЕМА 2. Для любых $F, G \in \text{clos}_\emptyset(X)$ значение $\rho_X^\mathfrak{S}(F, G)$, определяемое формулой (7), конечно; функция $\rho_X^\mathfrak{S}: \text{clos}_\emptyset(X) \times \text{clos}_\emptyset(X) \rightarrow \mathbb{R}_+$ задает метрику в пространстве $\text{clos}_\emptyset(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано при доказательстве теоремы 1 в [4], для любых непустых замкнутых множеств $F, G, H \subset X$ выполнено:

- 1) $\rho_X^\mathfrak{S}(F, G) \geq 0$, $\rho_X^\mathfrak{S}(F, G) = 0$ тогда и только тогда, когда $F = G$;
- 2) $\rho_X^\mathfrak{S}(F, G) \leq \tilde{D} < \infty$, где $\tilde{D} \doteq \max\{D(0, 1), 1\}$;
- 3) $\rho_X^\mathfrak{S}(F, G) = \rho_X^\mathfrak{S}(G, F)$;
- 4) $\rho_X^\mathfrak{S}(F, G) \leq \rho_X^\mathfrak{S}(F, H) + \rho_X^\mathfrak{S}(H, G)$.

Доказательства свойств 1)–4) в случаях, когда какие-то из множеств F, G, H являются пустыми, аналогичны. Здесь мы ограничимся проверкой неравенства 2) для $G = \emptyset$ и любого замкнутого $F \neq \emptyset$.

Пусть $r_* \doteq \varrho_X(\emptyset, F)$. Из определения метрики $\rho_X^\mathfrak{S}$ и рассмотренных выше свойств функций $(p, r) \mapsto D(p, r)$ и $r \mapsto \text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r \emptyset)$ получаем

$$\begin{aligned} \rho_X^\mathfrak{S}(F, \emptyset) &= \sup_{r>0} \min \left\{ \text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r \emptyset), \frac{1}{r} \right\} \leq \sup_{r>0} \min \left\{ D(r_*, r), \frac{1}{r} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \sup_{r \in [0, 1]} D(r_*, r), \sup_{r>1} \frac{1}{r} \right\} = \max \{D(r_*, 1), 1\} \leq \tilde{D}. \end{aligned}$$

Рассмотрим некоторые свойства предложенной метрики $\rho_X^\mathfrak{S}$ пространства $\text{clos}_\emptyset(X)$, если X – линейное нормированное пространство. Прежде всего, в этом случае функция $D: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, определяемая соотношением (8), принимает вид

$$D(p, r) = \begin{cases} 0, & \text{если } r \leq p, \\ r - p, & \text{если } r > p. \end{cases}$$

Соответственно, $\tilde{D} = 1$, т.е. для любых множеств $F, G \in \text{clos}_\emptyset(X)$ согласно теореме 2 выполнено неравенство $\rho_X^\mathfrak{S}(F, G) \leq 1$. При вычислении расстояния $\rho_X^\mathfrak{S}(F, G)$ по формуле (7) следует учитывать, что для линейного нормированного пространства X функция $r \mapsto \text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G)$ непрерывна и не убывает. Поэтому для заданных множеств $F \neq G$ существует единственное решение $\hat{r}$ уравнения $\text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G) = 1/r$ и выполнено $\rho_X^\mathfrak{S}(F, G) = 1/\hat{r}$. Вычислим, например, расстояние между множествами, одно из которых пустое. Имеем $\text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r \emptyset) = r - r_*$ при $r > r_*$. Следовательно, $\rho_X^\mathfrak{S}(F, \emptyset) = 1/\hat{r}$, где $\hat{r}$ есть решение уравнения $r - r_* = 1/r$. Таким образом,

$$\rho_X^\mathfrak{S}(F, \emptyset) = \frac{\sqrt{r_*^2 + 4} - r_*}{2}.$$

В общем случае, если X – произвольное неограниченное метрическое пространство, при $r > r_*$ выполнено $\text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r \varnothing) \geq r - r_*$, поэтому

$$\rho_X^\mathfrak{S}(F, \varnothing) \geq \frac{\sqrt{r_*^2 + 4} - r_*}{2}. \quad (11)$$

Чтобы вычислить точное значение расстояния $\rho_X^\mathfrak{S}$ в случае любого неограниченного метрического пространства X , удобно пользоваться следующим простым способом. Для заданных множеств $F \neq G$ положим

$$\mathfrak{R}(r) \doteq \text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G);$$

тогда определение (7) примет вид

$$\rho_X^\mathfrak{S}(F, G) = \sup_{r>0} \min \left\{ \mathfrak{R}(r), \frac{1}{r} \right\}.$$

Согласно лемме 1 функция $r \mapsto \mathfrak{R}(r)$ не убывает, поэтому существует такое положительное $\widehat{r}$, что $\mathfrak{R}(r) < 1/r$ при всех $r < \widehat{r}$ и $\mathfrak{R}(r) > 1/r$ при всех $r > \widehat{r}$. Докажем, что

$$\rho_X^\mathfrak{S}(F, G) = \frac{1}{\widehat{r}}. \quad (12)$$

Так как для произвольных $r, \bar{r} > 0$ таких, что $r < \bar{r} < \widehat{r}$, выполнено $\mathfrak{R}(r) \leq \mathfrak{R}(\bar{r}) < 1/\bar{r}$, то $\mathfrak{R}(r) \leq 1/\widehat{r}$ и, следовательно,

$$\sup_{r \in (0, \widehat{r})} \min \left\{ \mathfrak{R}(r), \frac{1}{r} \right\} \leq \frac{1}{\widehat{r}}.$$

Кроме того, при $r > \widehat{r}$ имеем $\min\{\mathfrak{R}(r), 1/r\} = 1/r$ и, значит,

$$\sup_{r > \widehat{r}} \min \left\{ \mathfrak{R}(r), \frac{1}{r} \right\} = \frac{1}{\widehat{r}};$$

равенство (12) доказано.

Очевидно, полуотклонение (4) может быть вычислено аналогично, а именно: положим $\mathfrak{R}_+(r) \doteq d_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G)$; тогда $d_X^\mathfrak{S}(F, G) = 1/\widehat{r}_+$, где значение $1/\widehat{r}_+$ таково, что $\mathfrak{R}_+(r) < 1/r$, если $r < \widehat{r}_+$, и $\mathfrak{R}_+(r) > 1/r$ при $r > \widehat{r}_+$.

Для определения метрики $\rho_X^\mathfrak{S}$ в пространстве X была зафиксирована точка θ . Исследуем, как влияет выбор этой точки на предложенную метрику, и с этой целью во введенные выше обозначения мы добавим символ $[\theta]$, например, рассматриваемое метрическое пространство будем обозначать $(\text{clos}_\varnothing(X), \rho_X^\mathfrak{S}[\theta])$.

ТЕОРЕМА 3. *Для любых двух точек $\theta_1, \theta_2 \in X$ метрики $\rho_X^\mathfrak{S}[\theta_1]$, $\rho_X^\mathfrak{S}[\theta_2]$ пространства $\text{clos}_\varnothing(X)$ эквивалентны, т.е. существуют такие числа $\Lambda > \lambda > 0$, что для любых множеств $F \neq G$ выполнено*

$$\lambda \rho_X^\mathfrak{S}[\theta_1](F, G) \leq \rho_X^\mathfrak{S}[\theta_2](F, G) \leq \Lambda \rho_X^\mathfrak{S}[\theta_1](F, G).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим $R_0 \doteq \varrho_X(\theta_1, \theta_2)$. Для любых $r > R_0$ и $x \in X$, если $\varrho_X(x, \theta_1) \geq r$, имеем $\varrho_X(x, \theta_2) \geq r - R_0$, следовательно, справедливо соотношение

$$\overline{B_X^\circ(\theta_1, r)} \subset \overline{B_X^\circ(\theta_2, r - R_0)}.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}[\theta_1](r) &= \text{dist}_X(F \cup \overline{B_X^o(\theta_1, r)}, G \cup \overline{B_X^o(\theta_1, r)}) \\ &\geq \text{dist}_X(F \cup \overline{B_X^o(\theta_2, r - R_0)}, G \cup \overline{B_X^o(\theta_2, r - R_0)}) = \mathfrak{R}[\theta_2](r - R_0). \end{aligned} \quad (13)$$

Воспользуемся приведенным выше способом нахождения расстояния $\rho_X^\S$ и найдем такие $\widehat{r}_1 = \widehat{r}[\theta_1] > 0$, $\widehat{r}_2 = \widehat{r}[\theta_2] > 0$, что

$$\rho_X^\S[\theta_1](F, G) = \frac{1}{\widehat{r}_1}, \quad \rho_X^\S[\theta_2](F, G) = \frac{1}{\widehat{r}_2}.$$

Тогда при всех $r > \widehat{r}_2$ выполнено $\mathfrak{R}[\theta_2](r) > 1/\widehat{r}_2$. Учитывая (13), при любом $r > \widehat{r}_2 + R_0$ имеем

$$\mathfrak{R}[\theta_1](r) \geq \mathfrak{R}[\theta_2](r - R_0) \geq \frac{1}{\widehat{r}_2} > \frac{1}{\widehat{r}_2 + R_0}.$$

Отсюда следует, что $\widehat{r}_1 \leq \widehat{r}_2 + R_0$ и, значит, $\rho_X^\S[\theta_1](F, G) \geq 1/(\widehat{r}_2 + R_0)$. Итак,

$$\rho_X^\S[\theta_1](F, G) \geq \frac{1}{\widehat{r}_2 + R_0} = \frac{1/\widehat{r}_2}{1 + R_0/\widehat{r}_2} = \frac{\rho_X^\S[\theta_2](F, G)}{1 + R_0/\widehat{r}_2},$$

или, что то же самое,

$$\rho_X^\S[\theta_2](F, G) \leq \left(1 + \frac{R_0}{\widehat{r}_2}\right) \rho_X^\S[\theta_1](F, G).$$

Теперь, используя полученную в теореме 2 оценку расстояния

$$\frac{1}{\widehat{r}_2} = \rho_X^\S[\theta_2](F, G) \leq \widetilde{D}[\theta_2],$$

закключаем, что

$$\rho_X^\S[\theta_2](F, G) \leq (1 + R_0 \widetilde{D}[\theta_2]) \rho_X^\S[\theta_1](F, G).$$

Аналогично доказывается неравенство

$$\rho_X^\S[\theta_1](F, G) \leq (1 + R_0 \widetilde{D}[\theta_1]) \rho_X^\S[\theta_2](F, G).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При изменении “начальной” точки θ для полутклонения $d_X^\S[\theta]$ имеет место утверждение, аналогичное теореме 3: для любых $\theta_1, \theta_2 \in X$ существуют такие числа $\Lambda > \lambda > 0$, что для произвольных множеств $F \neq G$ выполнено

$$\lambda d_X^\S[\theta_1](F, G) \leq d_X^\S[\theta_2](F, G) \leq \Lambda d_X^\S[\theta_1](F, G).$$

Доказательство полностью повторяет приведенное выше (достаточно заменить $\mathfrak{R}$ на $\mathfrak{R}_+$ и $\widehat{r}$ на $\widehat{r}_+$).

Везде далее точка θ фиксирована, и из всех обозначений символ $[\theta]$ мы исключаем.

Исследуем свойства метрического пространства $(\text{clos}_\mathcal{D}(X), \rho_X^\S)$.

ЛЕММА 2. Последовательность множеств $\{F^i\}_{i=1}^\infty$ является фундаментальной в $(\text{clos}_\varnothing(X), \rho_X^\varnothing)$ тогда и только тогда, когда для любого $r > 0$ последовательность $\{\mathfrak{S}_r F^i\}_{i=1}^\infty$ фундаментальна в $(\text{clos}(X), \text{dist}_X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть последовательность $\{F^i\}_{i=1}^\infty \subset \text{clos}_\varnothing(X)$ фундаментальна относительно метрики $\rho_X^\varnothing$. Зафиксируем некоторое $\bar{r} > 0$ и покажем, что последовательность $\{\mathfrak{S}_{\bar{r}} F^i\}_{i=1}^\infty \subset \text{clos}(X)$ фундаментальна относительно метрики dist_X . Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$; не ограничивая общности, можно считать, что $\varepsilon \leq 1/\bar{r}$. В силу фундаментальности $\{F^i\}_{i=1}^\infty$ существует такое натуральное $N(\varepsilon)$, что для любых $i, j > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство

$$\rho_X^\varnothing(F^i, F^j) < \varepsilon.$$

Это означает, что для любого $r > 0$

$$\min \left\{ \text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F^i, \mathfrak{S}_r F^j), \frac{1}{r} \right\} < \varepsilon \leq \frac{1}{\bar{r}},$$

откуда при $r = \bar{r}$ получаем оценку

$$\text{dist}_X(\mathfrak{S}_{\bar{r}} F^i, \mathfrak{S}_{\bar{r}} F^j) < \varepsilon. \quad (14)$$

Обратно, пусть последовательность $\{\mathfrak{S}_r F^i\}_{i=1}^\infty$ фундаментальна относительно метрики dist_X для любого $r > 0$; покажем, что $\{F^i\}_{i=1}^\infty$ фундаментальна в $(\text{clos}_\varnothing(X), \rho_X^\varnothing)$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Для $\bar{r} \doteq 2/\varepsilon$ найдется такое $N(\varepsilon)$, что для всех $i, j > N(\varepsilon)$ выполнено $\text{dist}_X(\mathfrak{S}_{\bar{r}} F^i, \mathfrak{S}_{\bar{r}} F^j) < \varepsilon$. Учитывая эту оценку и свойство неубывания функции $r \mapsto \text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F^i, \mathfrak{S}_r F^j)$, получим

$$\begin{aligned} \rho_X^\varnothing(F^i, F^j) &= \sup_{r>0} \min \left\{ \text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F^i, \mathfrak{S}_r F^j), \frac{1}{r} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \sup_{r \in [0, \bar{r}]} \text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F^i, \mathfrak{S}_r F^j), \sup_{r > \bar{r}} \frac{1}{r} \right\} \\ &= \max \left\{ \text{dist}_X(\mathfrak{S}_{\bar{r}} F^i, \mathfrak{S}_{\bar{r}} F^j), \frac{1}{\bar{r}} \right\} < \varepsilon. \end{aligned}$$

ЛЕММА 3. Для любых $F, F^i \in \text{clos}_\varnothing(X)$, $i \in \mathbb{N}$, сходимость $d_X^\varnothing(F^i, F) \rightarrow 0$ ($d_X^\varnothing(F, F^i) \rightarrow 0$) имеет место тогда и только тогда, когда $d_X(\mathfrak{S}_r F^i, \mathfrak{S}_r F) \rightarrow 0$ ($d_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r F^i) \rightarrow 0$) при любом $r > 0$.

Доказательство полностью повторяет доказательство леммы 2, если вместо исходной последовательности $\{F^i\}_{i=1}^\infty$ рассмотреть последовательность $\{F^1, F, F^2, F, \dots\}$ и формально заменить во всех соотношениях расстояния $\rho_X^\varnothing$ и dist_X на полуклонения $d_X^\varnothing$ и d_X соответственно.

ТЕОРЕМА 4. 1) Для любых $F, F^i \in \text{clos}_\varnothing(X)$, $i \in \mathbb{N}$, сходимость $\rho_X^\varnothing(F^i, F) \rightarrow 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $\text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F^i, \mathfrak{S}_r F) \rightarrow 0$ для любого $r > 0$.

2) Пусть $F, F^i \in \text{clos}(X)$, $i \in \mathbb{N}$, и $\rho_X^{\text{cl}}(F^i, F) \rightarrow 0$; тогда $\rho_X^\varnothing(F^i, F) \rightarrow 0$. Пусть $F, F^i \in \text{clos}_\varnothing(X)$, $F^i \neq \varnothing$, $i \in \mathbb{N}$, и $\rho_X^{\text{cl}}(F^i, F) \rightarrow 0$; тогда если числовая последовательность $\{\varrho_X(\theta, F^i)\}_{i=1}^\infty$ ограничена, имеем $F \neq \varnothing$ и $\rho_X^\varnothing(F^i, F) \rightarrow 0$.

3) Если пространство (X, ϱ_X) полное, то $(\text{clos}_\varnothing(X), \rho_X^\varnothing)$ также является полным метрическим пространством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Утверждение непосредственно следует из леммы 3.

2) Пусть $F, F^i \in \text{clos}(X)$, $i \in \mathbb{N}$. Если последовательность $\{F^i\}_{i=1}^\infty$ сходится к F в метрике ρ_X^{cl} , то из определения этой метрики ρ_X^{cl} (см. (3)–(6)) получаем $\rho_X^{\text{S}}(F^i, F) \leq \rho_X^{\text{cl}}(F^i, F) \rightarrow 0$.

Предположим теперь, что $\rho_X^{\text{S}}(F^i, F) \rightarrow 0$, $F^i \neq \emptyset$, $i \in \mathbb{N}$, и последовательность чисел $\varrho^i \doteq \varrho_X(\theta, F^i)$ ограничена, т.е. существует число $R > 0$ такое, что $\varrho^i < R$ для всех i . Множество F непусто, так как иначе для любого $r \geq 2R$ и всех $i \in \mathbb{N}$ было бы выполнено

$$\text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F^i, \mathfrak{S}_r \emptyset) \geq \varrho_X(\theta, \mathfrak{S}_r \emptyset) - \varrho_X(\theta, \mathfrak{S}_r F^i) > 2R - R = R,$$

что согласно п. 1) противоречит сходимости $\rho_X^{\text{S}}(F^i, F) \rightarrow 0$. Итак, $F \neq \emptyset$ и для доказательства сходимости $\rho_X^{\text{cl}}(F^i, F) \rightarrow 0$ достаточно показать, что последовательность $\{\varrho^i\}_{i=1}^\infty$ сходится к $\varrho \doteq \varrho_X(\theta, F)$. Для любых $i \in \mathbb{N}$ и $r \geq \max\{R, \varrho\}$ справедливы равенства $\varrho_X(\theta, F^i) = \varrho_X(\theta, \mathfrak{S}_r F^i)$, $\varrho_X(\theta, F) = \varrho_X(\theta, \mathfrak{S}_r F)$ и, следовательно, выполнена оценка

$$|\varrho^i - \varrho| = |\varrho_X(\theta, \mathfrak{S}_r F^i) - \varrho_X(\theta, \mathfrak{S}_r F)| \leq \text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F^i, \mathfrak{S}_r F). \quad (15)$$

А поскольку согласно п. 1) для любого $r > 0$ имеем $\text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F^i, \mathfrak{S}_r F) \rightarrow 0$, то из (15) получаем $|\varrho^i - \varrho| \rightarrow 0$. Таким образом, $\rho_X^{\text{cl}}(F^i, F) \rightarrow 0$.

3) Чтобы доказать сходимость фундаментальной последовательности $\{F^i\}_{i=1}^\infty$ в метрике ρ_X^{S} , рассмотрим следующие возможные ситуации.

I. Среди множеств F^i , $i \in \mathbb{N}$, нет пустых и последовательность $\{\varrho^i\}_{i=1}^\infty$ неотрицательных чисел $\varrho^i \doteq \varrho_X(\theta, F^i)$, $i \in \mathbb{N}$, ограничена. Покажем, что в этом случае $\{\varrho^i\}_{i=1}^\infty$ является фундаментальной последовательностью. Пусть $\varrho^i < R$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $r \geq R$ и любых $i, j \in \mathbb{N}$ получаем

$$|\varrho^i - \varrho^j| = |\varrho_X(\theta, \mathfrak{S}_r F^i) - \varrho_X(\theta, \mathfrak{S}_r F^j)| \leq \text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F^i, \mathfrak{S}_r F^j). \quad (16)$$

Так как в силу леммы 2 последовательность $\{\mathfrak{S}_r F^i\}_{i=1}^\infty$ фундаментальна для любого $r > 0$, то из (16) следует, что $\{\varrho^i\}_{i=1}^\infty$ также фундаментальна. Таким образом, последовательность $\{F^i\}_{i=1}^\infty$ является фундаментальной в метрике ρ_X^{cl} . Тогда согласно теореме 1 существует непустое замкнутое множество $F \subset X$ такое, что $\rho_X^{\text{cl}}(F^i, F) \rightarrow 0$. Следовательно, $\rho_X^{\text{S}}(F^i, F) \rightarrow 0$ и, значит, последовательность $\{F^i\}_{i=1}^\infty$ сходится в $(\text{clos}_\emptyset(X), \rho_X^{\text{S}})$.

II. Пусть среди множеств F^i , $i \in \mathbb{N}$, нет пустых и последовательность $\{\varrho^i\}_{i=1}^\infty$ неограничена. Докажем, что в этом случае

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \varrho^i = \infty. \quad (17)$$

Предположим противное. Тогда существуют такое число $R > 0$ и такая подпоследовательность $\{\varrho^{j_i}\}_{i=1}^\infty$ последовательности $\{\varrho^i\}_{i=1}^\infty$, что $\varrho^{j_i} \leq R$, $i \in \mathbb{N}$. С другой стороны, в силу неограниченности $\{\varrho^i\}_{i=1}^\infty$ у нее существует еще одна подпоследовательность $\{\varrho^{k_i}\}_{i=1}^\infty$ такая, что $\varrho^{k_i} \geq 2R$, $i \in \mathbb{N}$. Зафиксируем некоторое $r \geq 2R$. Тогда для любого $i \in \mathbb{N}$ получим

$$\varrho_X(\theta, \mathfrak{S}_r F^{k_i}) - \varrho_X(\theta, \mathfrak{S}_r F^{j_i}) \geq \min\{\varrho^{k_i}, r\} - \varrho^{j_i} \geq 2R - R = R,$$

откуда следует, что

$$\text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F^{k_i}, \mathfrak{S}_r F^{j_i}) \geq R.$$

Но это неравенство невозможно, так как последовательность $\{\mathfrak{S}_r F^i\}_{i=1}^\infty$ согласно лемме 2 должна быть фундаментальной в метрике dist_X для любого $r > 0$. Полученное противоречие доказывает соотношение (17).

Далее, из (17) следует сходимость $\{F^i\}_{i=1}^\infty$ к пустому множеству. Действительно,

$$\begin{aligned} \rho_X^\mathfrak{S}(F^i, \emptyset) &= \sup_{r>0} \min \left\{ \text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F^i, \mathfrak{S}_r \emptyset), \frac{1}{r} \right\} \\ &= \sup_{r>\varrho^i} \min \left\{ \text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F^i, \mathfrak{S}_r \emptyset), \frac{1}{r} \right\} \leq \sup_{r>\varrho^i} \frac{1}{r} = \frac{1}{\varrho^i}, \end{aligned} \quad (18)$$

т.е. $\rho_X^\mathfrak{S}(F^i, \emptyset) \rightarrow 0$.

III. Пусть теперь среди множеств F^i , $i \in \mathbb{N}$, бесконечно много пустых и бесконечно много непустых множеств. Тогда последовательность $\{F^i\}_{i=1}^\infty$ можно разбить на две подпоследовательности: $\{F^{j_i}\}_{i=1}^\infty$, $F^{j_i} = \emptyset$ для любых i и $\{F^{k_i}\}_{i=1}^\infty$, $F^{k_i} \neq \emptyset$ для любых i . Рассмотрим подпоследовательность $\{F^{k_i}\}_{i=1}^\infty$. Она фундаментальна как подпоследовательность фундаментальной последовательности, кроме того, последовательность $\{\varrho^{k_i}\}_{i=1}^\infty$ не может быть ограниченной. Действительно, если существует $R > 0$ такое, что $\varrho^{k_i} \leq R$ для любых i , то для любых $i \in \mathbb{N}$ и $r \geq R$ выполнено

$$\text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F^{k_i}, \mathfrak{S}_r \emptyset) \geq 2R - R = R,$$

т.е. для любого $r \geq R$ последовательность $\{\mathfrak{S}_r F^i\}_{i=1}^\infty$ не является фундаментальной, что в силу леммы 2 противоречит фундаментальности последовательности $\{F^i\}_{i=1}^\infty$. Таким образом, согласно п. II подпоследовательность $\{F^{k_i}\}_{i=1}^\infty$ сходится в метрике $\rho_X^\mathfrak{S}$ к пустому множеству и, следовательно, исходная последовательность $\{F^i\}_{i=1}^\infty$ также сходится к пустому множеству в метрике $\rho_X^\mathfrak{S}$.

Из I, II и III следует, что пространство $(\text{clos}_\emptyset(X), \rho_X^\mathfrak{S})$ полное.

Отметим, что к леммам 2, 3 и утверждению 1) теоремы 4 можно сделать замечание, аналогичное замечанию 1: для фундаментальности последовательности $\{F^i\}_{i=1}^\infty$ в метрике $\rho_X^\mathfrak{S}$ (сходимости $d_X^\mathfrak{S}(F^i, F) \rightarrow 0$, $d_X^\mathfrak{S}(F, F^i) \rightarrow 0$ или $\rho_X^\mathfrak{S}(F^i, F) \rightarrow 0$) достаточно потребовать существование такого $r_0 > 0$, что при всех $r > r_0$ последовательность $\{\mathfrak{S}_r F^i\}_{i=1}^\infty$ фундаментальна в метрике dist_X (имеет место сходимость $d_X(\mathfrak{S}_r F^i, \mathfrak{S}_r F) \rightarrow 0$, $d_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r F^i) \rightarrow 0$ или $\rho_X(\mathfrak{S}_r F^i, \mathfrak{S}_r F) \rightarrow 0$ соответственно).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Пространство $(\text{clos}_\emptyset(X), \rho_X^\mathfrak{S})$ является пополнением пространства $(\text{clos}(X), \rho_X^\mathfrak{S})$.

Упомянутая в замечании 2 последовательность множеств $F^i = \{i\} \subset \text{clos}(X)$, $i \in \mathbb{N}$, фундаментальна относительно метрики $\rho_X^\mathfrak{S}$, сходится в пространстве $\text{clos}_\emptyset(X)$ к пустому множеству.

Следующее утверждение, справедливость которого непосредственно вытекает из теорем 1 и 4, выражает связь между сходимостями в метриках $\rho_X^\mathfrak{S}$ и dist_X последовательности непустых замкнутых множеств.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $F, F^i \in \text{clos}(X)$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда:

- 1) если $\text{dist}_X(F^i, F) \rightarrow 0$, то $\rho_X^\mathfrak{S}(F^i, F) \rightarrow 0$;
- 2) если $\rho_X^\mathfrak{S}(F^i, F) \rightarrow 0$ и существует такое $p > 0$, что $F^i \subset B_X(p)$, $i \in \mathbb{N}$, то $\text{dist}_X(F^i, F) \rightarrow 0$.

Приведем краткий обзор некоторых результатов, связанных с рассматриваемым пространством $\text{clos}_\varnothing(X)$. Как отмечено в [5], [6], для заданного топологического пространства X пространство $\text{clos}_\varnothing(X)$ топологизируется различными способами. Выделим здесь топологическое пространство всех замкнутых подмножеств Хаусдорфова сепарабельного локально компактного топологического пространства, рассмотренное в [6], сходимость в котором равносильна сходимости по метрике $\rho_X^\S$ (в настоящей работе от метрического пространства X не требуется ни сепарабельности, ни локальной компактности).

Далее, отметим, что определение метрики для пространства $\text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ всех непустых выпуклых подмножеств $\mathbb{R}^n$ предложено в [7]. Сходимость последовательности $\{F^i\}_{i=1}^\infty \subset \text{clcv}(\mathbb{R}^n)$ относительно этой метрики равносильна ее сходимости в метрике $\rho_{\mathbb{R}^n}^{\text{cl}}$. И как отмечено выше, метрика ρ_X^{cl} для пространства всех непустых замкнутых подмножеств произвольного метрического пространства X рассматривалась авторами в [4]. В основе определений перечисленных метрик лежит следующая конструкция. Заданным множествам F, G при каждом $r > 0$ ставятся в соответствие некоторые “исправленные” множества F^r, G^r , для которых $\text{dist}_X(F^r, G^r) < \infty$; множества $F \cap F^r$ с увеличением r “расширяются” и $\bigcup_r (F \cap F^r) = F$. Расстояние между F и G полагают равным $\sup_{r>0} \min\{\text{dist}_X(F^r, G^r), 1/r\}$. В этой формуле применяется идея М. В. Бебутова построения метрики в пространстве функций, определенных и непрерывных на всей числовой оси (см. [8]).

Отметим также, что при определении полуотклонений и расстояния между $F, G \in \text{clos}_\varnothing(X)$ используются неограниченные множества $\S_r F, \S_r G$; это удобно для вычисления величин $d_X^\S, \rho_X^\S$, но создает сложности для исследования многозначных отображений, действующих в $\text{clos}_\varnothing(X)$. К таким отображениям можно было бы применить известные утверждения об отображениях с ограниченными образами, если бы удалось заменить множества $\S_r F$ и $\S_r G$ в (4), (7) ограниченными множествами, сохранив значения $d_X^\S, \rho_X^\S$. Эту “замену” удастся осуществить, если для каждого $r > 0$ найдется $R(r) \geq r$ такое, что

$$d_X(\S_r F, \S_r G) = d_X(\S_r F \cap B_X(R(r)), \S_r G \cap B_X(R(r))). \quad (19)$$

Тогда в определениях (4), (7) отображение (2) можно будет заменить отображением $\mathfrak{C}_{R(r)}: \text{clos}_\varnothing(X) \rightarrow \text{clbd}(X)$:

$$\mathfrak{C}_{R(r)} H \doteq \S_r H \cap B_X(R(r)) = (H \cup \overline{B_X^o(r)}) \cap B_X(R(r)). \quad (20)$$

В случае когда X – линейное нормированное пространство, равенство (19) выполнено при $R(r) = r$, поэтому значения величин $d_X^\S, \rho_X^\S$, определяемых равенствами (4), (7) (а соответственно и значение ρ_X^{cl}), не изменятся, если вместо оператора (2) использовать (20) с параметром $R(r) = r$, т.е. оператор, определяемый равенством

$$\mathfrak{C}_r H \doteq (H \cup \overline{B_X^o(r)}) \cap B(r) = (H \cap B_X^o(r)) \cup S_X(r). \quad (21)$$

Такое определение использовано в [3] для $X = \mathbb{R}^n$.

Для произвольного неограниченного метрического пространства X равенство (19) при $R(r) = r$ может не выполняться. В этом общем случае, определяя $R(r)$, для каждого $r > 0$ найдем такой $\tilde{x}_r \in X$, что $R_0(r) \doteq \varrho_X(\theta, \tilde{x}_r) \geq r$ (требуемая точка существует вследствие неограниченности пространства). Положим

$$R(r) \doteq R_0(r) + 2r. \quad (22)$$

Тогда имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 4. Для произвольного $r > 0$ и любых $F, G \in \text{clos}_\emptyset(X)$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} d_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G) &= d_X(\mathfrak{C}_{R(r)} F, \mathfrak{C}_{R(r)} G), \\ \text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G) &= \text{dist}_X(\mathfrak{C}_{R(r)} F, \mathfrak{C}_{R(r)} G), \end{aligned} \quad (23)$$

где оператор $\mathfrak{C}_{R(r)}$ определяется соотношениями (20), (22).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (20), учитывая $R(r) > r$, получаем

$$\mathfrak{S}_r H = \mathfrak{S}_r(\mathfrak{C}_{R(r)} H) \quad \forall r > 0, \quad \forall H \in \text{clos}_\emptyset(X).$$

Отсюда (см. [4; лемма 1]) следует

$$d_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G) \leq d_X(\mathfrak{C}_{R(r)} F, \mathfrak{C}_{R(r)} G). \quad (24)$$

Докажем обратное неравенство

$$d_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G) \geq d_X(\mathfrak{C}_{R(r)} F, \mathfrak{C}_{R(r)} G). \quad (25)$$

Сначала установим справедливость равенства

$$d_X(\mathfrak{C}_{R(r)} F, \mathfrak{S}_r G) = d_X(\mathfrak{C}_{R(r)} F, \mathfrak{C}_{R(r)} G). \quad (26)$$

Возьмем произвольный элемент $y \in \mathfrak{C}_{R(r)} F$ и сравним величины $\varrho_X(y, \mathfrak{S}_r G)$, $\varrho_X(y, \mathfrak{C}_{R(r)} G)$. Если $y \in B_X(R(r)) \setminus B_X^o(r)$, то $y \in \mathfrak{C}_{R(r)} G \subset \mathfrak{S}_r G$, т.е.

$$\varrho_X(y, \mathfrak{S}_r G) = \varrho_X(y, \mathfrak{C}_{R(r)} G) = 0.$$

Пусть теперь $y \in B_X^o(r) \cap F$. Имеем

$$\varrho_X(y, \mathfrak{S}_r G) = \min\{\varrho_X(y, \mathfrak{C}_{R(r)} G); \varrho_X(y, \overline{B_X(R(r))})\}.$$

Заметим, что $\varrho_X(y, \mathfrak{C}_{R(r)} G) \leq \varrho_X(y, \overline{B_X(R(r))})$. Действительно, во-первых,

$$\varrho_X(y, \overline{B_X(R(r))}) \geq \varrho_X(\theta, \overline{B_X(R(r))}) - \varrho_X(y, \theta) \geq R(r) - r;$$

во-вторых, так как $R_0(r) = \varrho_X(\theta, \tilde{x}_r)$, то $\tilde{x}_r \in B_X(R(r)) \setminus B_X^o(r) \subset \mathfrak{C}_{R(r)} G$ и, следовательно,

$$\varrho_X(y, \mathfrak{C}_{R(r)} G) \leq \varrho_X(y, \tilde{x}_r) \leq \varrho_X(y, \theta) + \varrho_X(\theta, \tilde{x}_r) \leq r + R_0(r) = R(r) - r.$$

Итак, $\varrho_X(y, \mathfrak{S}_r G) = \varrho_X(y, \mathfrak{C}_{R(r)} G)$, и равенство (26) доказано.

Далее, поскольку $\mathfrak{C}_{R(r)} F \subset \mathfrak{S}_r F$, то $d_X(\mathfrak{S}_r F, \mathfrak{S}_r G) \geq d_X(\mathfrak{C}_{R(r)} F, \mathfrak{S}_r G)$, откуда, учитывая (26), получаем оценку (25).

Окончательно из неравенств (24), (25) получаем требуемые соотношения (23).

Из леммы 4 следует, что полуотклонение $d_X^\mathfrak{S}$ можно вычислять по формуле

$$d_X^\mathfrak{S}(F, G) = \sup_{r>0} \min\left\{d_X(\mathfrak{C}_{R(r)} F, \mathfrak{C}_{R(r)} G), \frac{1}{r}\right\}, \quad (27)$$

а расстояние $\rho_X^\mathfrak{S}$ – по формуле

$$\rho_X^\mathfrak{S}(F, G) = \sup_{r>0} \min\left\{\text{dist}_X(\mathfrak{C}_{R(r)} F, \mathfrak{C}_{R(r)} G), \frac{1}{r}\right\}. \quad (28)$$

§ 2. Непрерывные и полунепрерывные отображения со значениями в $(\text{clos}_\varnothing(X), \rho_X^\varnothing)$

Как показано в [4], использование метрики ρ_X^{cl} в пространстве $\text{clos}(X)$ позволяет получать аналоги некоторых важных свойств непрерывных отображений для отображений, которые не являются непрерывными в метрике Хаусдорфа. Используя полуотклонение $d_X^\varnothing$ и метрику $\rho_X^\varnothing$, можно получить подобные результаты для еще более широкого класса многозначных отображений.

Пусть задано отображение F , действующее из топологического пространства Ω во множество $\text{clos}(X)$ всех непустых замкнутых подмножеств топологического пространства X . Напомним (см. [9]), что такое отображение называется *полунепрерывным сверху (снизу) в точке $\omega_0 \in \Omega$* , если для любого открытого множества $V \subset X$ такого, что $F(\omega_0) \subset V$ ($F(\omega_0) \cap V \neq \varnothing$), существует такая окрестность $\Xi_\Omega(\omega_0)$ точки ω_0 , что при любом $\omega \in \Xi_\Omega(\omega_0)$ выполнено $F(\omega) \subset V$ ($F(\omega) \cap V \neq \varnothing$). Отображение, полунепрерывное сверху и снизу в точке ω_0 , называют *непрерывным в этой точке*. Если F полунепрерывно сверху (полунепрерывно снизу, непрерывно) во всех точках множества $\Omega_0 \subset \Omega$, то его называют *полунепрерывным сверху (полунепрерывным снизу, непрерывным) на Ω_0* . Если $\Omega_0 = \Omega$, то слова “на Ω ” при использовании этих терминов будем опускать.

Для случая метрического пространства (X, ϱ_X) используются также следующие определения. Отображение $F: \Omega \rightarrow \text{clos}(X)$ называют *полунепрерывным сверху (снизу) по Хаусдорфу в точке $\omega_0 \in \Omega$* , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность $\Xi_\Omega(\omega_0)$ точки ω_0 такая, что для любого $\omega \in \Xi_\Omega(\omega_0)$ справедливо неравенство

$$d_X(F(\omega), F(\omega_0)) < \varepsilon \quad (d_X(F(\omega_0), F(\omega)) < \varepsilon). \quad (29)$$

Отображение F *непрерывно по Хаусдорфу в точке ω_0* , если оно полунепрерывно сверху и снизу по Хаусдорфу в этой точке, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $\Xi_\Omega(\omega_0)$ точки ω_0 такая, что для любого $\omega \in \Xi_\Omega(\omega_0)$ выполнено $\text{dist}_X(F(\omega), F(\omega_0)) < \varepsilon$. Если F полунепрерывно сверху (полунепрерывно снизу, непрерывно) по Хаусдорфу во всех точках множества $\Omega_0 \subset \Omega$, то его называют *полунепрерывным сверху (полунепрерывным снизу, непрерывным) по Хаусдорфу на Ω_0* . Если $\Omega_0 = \Omega$, то говорят просто о непрерывных (полунепрерывных) отображениях по Хаусдорфу.

Как известно (см., например, [9]), из полунепрерывности сверху в точке ω_0 отображения $F: \Omega \rightarrow \text{clos}(X)$ следует его полунепрерывность сверху по Хаусдорфу в этой точке, а из полунепрерывности снизу по Хаусдорфу в ω_0 следует полунепрерывность снизу в ω_0 . Если $F: \Omega \rightarrow \text{comp}(X)$, то соответствующие понятия совпадают.

Рассмотрим теперь отображение $F: \Omega \rightarrow \text{clos}_\varnothing(X)$, где Ω и (X, ϱ_X) – заданные топологическое и метрическое пространства соответственно. Приведенные выше определения формально можно распространить и на это отображение (здесь следует стандартно определить $\varrho_X(x, \varnothing) = \infty$ при любом $x \in X$, $d_X(\varnothing, F) = 0$, $d_X(F, \varnothing) = \infty$ при $F \neq \varnothing$ и $d_X(\varnothing, \varnothing) = 0$). Однако это распространение не дает сколько-нибудь значимых результатов по следующим причинам.

Если отображение $F: \Omega \rightarrow \text{clos}_\varnothing(X)$ в точке ω_0 является полунепрерывным сверху по Хаусдорфу и $F(\omega_0) = \varnothing$, то согласно (29) существует окрестность $\Xi_\Omega(\omega_0)$ точки ω_0 такая, что $F(\omega) = \varnothing$ для любого $\omega \in \Xi_\Omega(\omega_0)$. Также легко проверяется, что если отображение $F_0: \Omega_0 \rightarrow \text{clos}(X)$ полунепрерывно сверху по Хаусдорфу (полунепрерывно сверху) в точке $\omega_0 \in \Omega_0$ и топологическое пространство Ω_0 является подпространством топологического пространства Ω , то отображение $F: \Omega \rightarrow \text{clos}_\varnothing(X)$, совпадающее с F_0 на Ω_0 и принимающее значения $F(\omega) = \varnothing$ при $\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$, также будет полунепрерывным сверху по Хаусдорфу (полунепрерывным сверху) в точке ω_0 . Таким образом, $F: \Omega \rightarrow \text{clos}_\varnothing(X)$ полунепрерывно сверху по Хаусдорфу (полунепрерывно сверху) на всем Ω тогда и только тогда, когда его эффективное множество $\text{dom } F \doteq \{\omega \in \Omega : F(\omega) \neq \varnothing\}$ замкнуто и сужение отображения F на это множество – отображение $F|_{\text{dom } F}: \text{dom } F \rightarrow \text{clos}(X)$ – полунепрерывно сверху по Хаусдорфу (полунепрерывно сверху).

Аналогично, отображение $F: \Omega \rightarrow \text{clos}_\varnothing(X)$ полунепрерывно снизу (полунепрерывно снизу по Хаусдорфу) на Ω тогда и только тогда, когда его эффективное множество открыто и отображение $F|_{\text{dom } F}: \text{dom } F \rightarrow \text{clos}(X)$ полунепрерывно снизу (полунепрерывно снизу по Хаусдорфу).

Тривиальным следствием этих рассуждений является то, что у непрерывного (непрерывного по Хаусдорфу) отображения $F: \Omega \rightarrow \text{clos}_\varnothing(X)$ множество $\text{dom } F$ является одновременно и замкнутым, и открытым. В связном пространстве Ω это возможно только в двух случаях: когда $\text{dom } F = \Omega$ или $\text{dom } F = \varnothing$. Таким образом, определенное на связном пространстве Ω отображение, среди значений которого есть и непустые множества, и пустое множество, не может быть ни непрерывным, ни непрерывным по Хаусдорфу на всем Ω .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображение $F: \Omega \rightarrow \text{clos}_\varnothing(X)$ будем называть *полунепрерывным сверху (снизу) относительно метрики ρ_X^Ξ в точке $\omega_0 \in \Omega$* , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность $\Xi_\Omega(\omega_0)$ точки ω_0 , что для любого $\omega \in \Xi_\Omega(\omega_0)$ имеет место неравенство

$$d_X^\Xi(F(\omega), F(\omega_0)) < \varepsilon \quad (d_X^\Xi(F(\omega_0), F(\omega)) < \varepsilon).$$

Отображение F будем называть *непрерывным относительно метрики ρ_X^Ξ в точке ω_0* , если оно полунепрерывно и сверху, и снизу относительно ρ_X^Ξ в этой точке, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $\Xi_\Omega(\omega_0)$ точки ω_0 такая, что $\rho_X^\Xi(F(\omega), F(\omega_0)) < \varepsilon$ для любого $\omega \in \Xi_\Omega(\omega_0)$.

Как обычно, отображение F будем называть *полунепрерывным сверху (полунепрерывным снизу, непрерывным) относительно метрики ρ_X^Ξ на множестве $\Omega_0 \subset \Omega$* , если оно полунепрерывно сверху (полунепрерывно снизу, непрерывно) относительно этой метрики в каждой точке $\omega_0 \in \Omega_0$.

Имеет место следующий критерий полунепрерывности (непрерывности) многозначного отображения относительно метрики ρ_X^Ξ .

ТЕОРЕМА 5. *Отображение $F: \Omega \rightarrow \text{clos}_\varnothing(X)$ является полунепрерывным сверху (полунепрерывным снизу, непрерывным) относительно метрики ρ_X^Ξ в точке $\omega_0 \in \Omega$ тогда и только тогда, когда отображение $\mathfrak{S}_r F: \Omega \rightarrow \text{clos}(X)$ в этой точке полунепрерывно сверху (полунепрерывно снизу, непрерывно) по Хаусдорфу при любом $r > 0$.*

Доказательство следует из леммы 3 и п. 1) теоремы 4.

Связь между понятиями полунепрерывности, полунепрерывности по Хаусдорфу и полунепрерывности относительно метрики $\rho_X^\S$ многозначных отображений выражает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $F: \Omega \rightarrow \text{clos}_\varnothing(X)$. Имеют место импликации:

1) F полунепрерывно сверху в точке $\omega_0 \implies F$ полунепрерывно сверху по Хаусдорфу в точке $\omega_0 \implies F$ полунепрерывно сверху относительно метрики $\rho_X^\S$ в точке ω_0 ;

2) F полунепрерывно снизу по Хаусдорфу в точке $\omega_0 \implies F$ полунепрерывно снизу относительно метрики $\rho_X^\S$ в точке $\omega_0 \implies F$ полунепрерывно снизу в точке ω_0 .

Если же пространство X удовлетворяет условию:

(с) для любого $r > 0$ шар $B_X^o(r)$ есть вполне ограниченное множество, то отображение F полунепрерывно снизу относительно метрики $\rho_X^\S$ в точке ω_0 тогда и только тогда, когда оно полунепрерывно снизу в этой точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу оценки $d_X(F, G) \geq d_X^\S(F, G)$, которая имеет место для любых $F, G \in \text{clos}_\varnothing(X)$, из полунепрерывности сверху (снизу) по Хаусдорфу отображения $F: \Omega \rightarrow \text{clos}_\varnothing(X)$ в точке ω_0 следует его полунепрерывность сверху (снизу) в этой точке относительно $\rho_X^\S$. Таким образом, доказаны утверждение 1) и первая импликация в 2).

Докажем вторую импликацию в 2). Пусть отображение F полунепрерывно снизу относительно метрики $\rho_X^\S$ в точке ω_0 . Согласно теореме 5 это означает, что для любого $r > 0$ отображение $\mathfrak{S}_r F$ полунепрерывно снизу по Хаусдорфу, а следовательно, полунепрерывно снизу в точке ω_0 . Покажем, что отсюда следует полунепрерывность снизу отображения F в точке ω_0 . Пусть V – открытое множество в X и $F(\omega_0) \cap V \neq \varnothing$. Возьмем $y \in F(\omega_0) \cap V$; так как множество V открыто, то существует $\delta > 0$ такое, что $B_X^o(y, \delta) \subset V$. Положим $\bar{r} \doteq 2\rho_X(\theta, y) + \delta$. Из соотношения $\mathfrak{S}_{\bar{r}} F(\omega_0) \cap B_X^o(y, \delta) \neq \varnothing$ в силу полунепрерывности снизу отображения $\mathfrak{S}_{\bar{r}} F$ в точке ω_0 следует, что найдется окрестность $\Xi_\Omega(\omega_0)$ точки ω_0 такая, что $\mathfrak{S}_{\bar{r}} F(\omega) \cap B_X^o(y, \delta) \neq \varnothing$ для любого $\omega \in \Xi_\Omega(\omega_0)$. Отсюда, учитывая, что $\overline{B_X^o(\bar{r})} \cap B_X^o(y, \delta) = \varnothing$, получаем $F(\omega) \cap B_X^o(y, \delta) \neq \varnothing$. Таким образом, $F(\omega) \cap V \neq \varnothing$ и, следовательно, F полунепрерывно снизу в точке ω_0 .

Пусть теперь пространство X удовлетворяет условию (с), отображение $F: \Omega \rightarrow \text{clos}_\varnothing(X)$ полунепрерывно снизу в точке ω_0 . Докажем, что в этом случае F будет полунепрерывным снизу относительно метрики $\rho_X^\S$. Учитывая снова теорему 5, достаточно показать, что для любого $r > 0$ отображение $\mathfrak{S}_r F$ будет полунепрерывно снизу по Хаусдорфу в точке ω_0 .

Возьмем произвольные $r > 0$, $\varepsilon > 0$ и докажем, что существует окрестность точки ω_0 такая, что для любого ω из этой окрестности выполнено

$$d_X(\mathfrak{S}_r F(\omega_0), \mathfrak{S}_r F(\omega)) < \varepsilon. \quad (30)$$

Рассмотрим произвольный $y \in \mathfrak{S}_r F(\omega_0) = F(\omega_0) \cup \overline{B_X^o(r)}$. Если $y \in \overline{B_X^o(r)}$, то $y \in \mathfrak{S}_r F(\omega)$ для любого ω , и поэтому $\rho_X(y, \mathfrak{S}_r F(\omega)) = 0 < \varepsilon$ при всех ω . Пусть $y \in K \doteq F(\omega_0) \cap B_X^o(r)$. Согласно условию (с) множество K вполне ограничено, т.е. в X существует конечная $\varepsilon/2$ -сеть для множества K , обозначим ее $M_\varepsilon = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$. Не ограничивая общности, считаем, что $M_\varepsilon \subset K$. Для

любого y_i , $i = 1, \dots, k$, выполнено $F(\omega_0) \cap B_X^o(y_i, \varepsilon/2) \neq \varnothing$, и, значит, согласно полунепрерывности снизу отображения F в точке ω_0 для любого i существует окрестность $\Xi_\Omega^i(\omega_0)$ точки ω_0 такая, что для любого $\omega \in \Xi_\Omega^i(\omega_0)$ выполнено

$$F(\omega) \cap B_X^o\left(y_i, \frac{\varepsilon}{2}\right) \neq \varnothing, \quad i = 1, \dots, k. \quad (31)$$

Очевидно, соотношения (31) выполнены для любого $\omega \in \Xi_\Omega(\omega_0)$, где $\Xi_\Omega(\omega_0) \doteq \bigcap_{i=1}^k \Xi_\Omega^i(\omega_0)$. Далее, поскольку $y \in K$, то $\varrho_X(y, y_i) < \varepsilon/2$ для некоторого $y_i \in M_\varepsilon$, а из (31) следует, что для любого $\omega \in \Xi_\Omega(\omega_0)$ найдется такой $\tilde{y}_i \in \mathfrak{S}_r F(\omega)$, что $\varrho_X(y_i, \tilde{y}_i) < \varepsilon/2$. Таким образом, $\varrho_X(y, \tilde{y}_i) < \varepsilon$ и, следовательно, $\varrho_X(y, \mathfrak{S}_r F(\omega)) < \varepsilon$ для любого $\omega \in \Xi_\Omega(\omega_0)$. Так как эта оценка справедлива для всякого $y \in \mathfrak{S}_r F(\omega_0)$, то получаем, что для любого $\omega \in \Xi_\Omega(\omega_0)$ выполнено неравенство (30).

Приведем пример, подтверждающий существенность условия (с) теоремы 6 для равносильности понятий полунепрерывности снизу и полунепрерывности снизу относительно метрики $\rho_X^\mathfrak{S}$.

ПРИМЕР 2. Пусть $\Omega = [0, 1]$, X – произвольное бесконечномерное евклидово пространство со скалярным произведением $\langle x, y \rangle$, нормой $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ и метрикой, порожденной нормой. Так как пространство X бесконечномерное, то свойство (с), очевидно, не выполнено. Пусть, далее, $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ есть счетная ортонормированная система элементов в X . Рассмотрим отображение $F: \Omega \rightarrow X$, заданное равенством $F(\omega) = \{x_1(1 + \omega), x_2(1 + 2\omega), x_3(1 + 3\omega), \dots\}$. Покажем, что это отображение является полунепрерывным снизу в точке $\omega_0 = 0$. Имеем $F(0) = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Пусть V – открытое множество в X и $F(0) \cap V \neq \varnothing$. Тогда найдутся номер j и $\varepsilon > 0$ такие, что $x_j \in V$ и $B_X^o(x_j, \varepsilon) \subset V$. Положим $\delta = \varepsilon/j$. Для любого $\omega \in (0, \delta)$ имеем $x_j(1 + j\omega) \in F(\omega)$ и

$$\|x_j(1 + j\omega) - x_j\| = \|j\omega x_j\| = j\omega < \varepsilon.$$

Таким образом, $x_j(1 + j\omega) \in B_X^o(x_j, \varepsilon)$ и, следовательно, $F(\omega) \cap V \neq \varnothing$.

Отображение F , однако, в точке $\omega_0 = 0$ не является полунепрерывным снизу относительно метрики $\rho_X^\mathfrak{S}$. Чтобы проверить это, воспользуемся критерием полунепрерывности относительно метрики $\rho_X^\mathfrak{S}$; покажем, что при $r \geq 2$ отображение $\mathfrak{S}_r F$ не является полунепрерывным снизу по Хаусдорфу в нуле. Выберем последовательность $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty$, $\omega_i \rightarrow 0$ и, учитывая включение $x_i \in \mathfrak{S}_r F(0)$, оценим $\varrho_X(x_i, \mathfrak{S}_r F(\omega_i))$ для каждого $i = 1, 2, \dots$. Пусть $z \in \mathfrak{S}_r F(\omega_i) = F(\omega_i) \cup \overline{B_X^o(r)}$. Тогда если $z \in \overline{B_X^o(r)}$, то $\varrho_X(x_i, z) \geq \|z\| - \|x_i\| \geq 1$; если $z \in F(\omega_i)$, то либо $\varrho_X(x_i, z) = \|x_i - x_i(1 + \omega_i i)\| = 1$, либо $\varrho_X(x_i, z) = \|x_i - x_j(1 + \omega_i j)\| = \sqrt{1 + (1 + \omega_i j)^2} > \sqrt{2}$. Таким образом,

$$\varrho_X(x_i, \mathfrak{S}_r F(\omega_i)) = \inf_{z \in \mathfrak{S}_r F(\omega_i)} \varrho_X(x_i, z) = 1$$

и, следовательно, $d_X^\mathfrak{S}(\mathfrak{S}_r F(0), \mathfrak{S}_r F(\omega_i)) \geq 1$ для любого i , т.е. отображение $\mathfrak{S}_r F$ не является полунепрерывным снизу по Хаусдорфу в нуле.

Для полных метрических пространств свойство (с) означает, что любой замкнутый шар (конечного радиуса) является компактным множеством; такие

пространства называют *ограниченно компактными*. В ограниченно компактном пространстве X применение понятий непрерывности и полунепрерывности относительно метрики $\rho_X^\S$ позволяет на основании леммы 4 распространить некоторые утверждения о свойствах отображений со значениями в $\text{comp}(X)$ на отображения, имеющие значения в $\text{clos}_\varnothing(X)$. Например, известно, что если отображение $F_0: \Omega \rightarrow \text{clos}(X)$ замкнуто, отображение $F: \Omega \rightarrow \text{comp}(X)$ полунепрерывно сверху и их пересечение $(F \cap F_0)(x) = F(x) \cap F_0(x)$ непусто, то $F \cap F_0: \Omega \rightarrow \text{comp}(X)$ полунепрерывно сверху; этот результат неверен, если отображение F имеет некомпактные значения, отображение $F \cap F_0$ тогда может не являться полунепрерывным сверху (см. [1; теорема 1.3.3]). Но такое многозначное отображение, действующее в ограниченно компактном пространстве, будет полунепрерывным сверху относительно метрики $\rho_X^\S$. А именно, справедливо следующее утверждение.

Пусть пространство X ограниченно компактно, отображение $F_0: \Omega \rightarrow \text{clos}_\varnothing(X)$ замкнуто, отображение $F: \Omega \rightarrow \text{clos}_\varnothing(X)$ полунепрерывно сверху относительно метрики $\rho_X^\S$; тогда $F \cap F_0: \Omega \rightarrow \text{clos}_\varnothing(X)$ полунепрерывно сверху относительно метрики $\rho_X^\S$.

Для доказательства достаточно воспользоваться определением (27) полуотклонения $d_X^\S$ и заметить, что при любом $r > 0$ отображение $\mathfrak{C}_{R(r)}F_0: \Omega \rightarrow \text{comp}(X)$ замкнуто, отображение $\mathfrak{C}_{R(r)}F: \Omega \rightarrow \text{comp}(X)$ полунепрерывно сверху, поэтому отображение $\mathfrak{C}_{R(r)}(F \cap F_0): \Omega \rightarrow \text{comp}(X)$ полунепрерывно сверху, откуда в силу теоремы 5 получаем требуемое утверждение.

Пространство $\mathbb{R}$ действительных чисел, очевидно, обладает свойством ограниченной компактности, что позволяет пользоваться приведенным утверждением для следующих отображений.

ПРИМЕР 3. Пусть

$$\begin{aligned} F: [0, 1] &\rightarrow \text{clos}_\varnothing(\mathbb{R}), & F(\omega) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2x_1 \geq 1, x_1 > 0\}, \\ F_0: [0, 1] &\rightarrow \text{clos}_\varnothing(\mathbb{R}), & F_0(\omega) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \omega x_2 = x_1, x_1 \geq 0\}. \end{aligned}$$

Отображение F является постоянным, следовательно, и непрерывным, и непрерывным по Хаусдорфу, и непрерывным относительно метрики $\rho_\mathbb{R}^\S$; отображение F_0 замкнуто (более того, это отображение полунепрерывно сверху относительно метрики $\rho_\mathbb{R}^\S$). Пересечение этих отображений

$$\begin{aligned} F \cap F_0: [0, 1] &\rightarrow \text{clos}_\varnothing(\mathbb{R}), \\ F \cap F_0(\omega) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \omega x_2 = x_1, x_1 \geq \sqrt{\omega}\}, & \omega &\neq 0, \\ F \cap F_0(0) &= \varnothing, \end{aligned}$$

является полунепрерывным сверху относительно метрики $\rho_\mathbb{R}^\S$, но не является полунепрерывным сверху по Хаусдорфу и, тем более, полунепрерывным сверху.

Обсудим вытекающие из теоремы 6 результаты об условиях непрерывности отображений относительно метрики $\rho_X^\S$. Вначале заметим, что если отображение $F: \Omega \rightarrow \text{clos}_\varnothing(X)$ является непрерывным по Хаусдорфу в точке ω_0 , то в этой точке F непрерывно относительно метрики $\rho_X^\S$. Обратное, конечно, не верно; об этом свидетельствует пример 4, который будет приведен ниже. Но прежде сформулируем критерий непрерывности относительно метрики $\rho_X^\S$ отображений, образы которых для каждого аргумента состоят не более чем из одной

точки. Такие отображения представляют интерес в связи с задачами классического анализа, так как в ряде случаев их можно отождествить с “обычными” однозначными отображениями.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $F: \Omega \rightarrow \text{clos}_\emptyset(X)$ и для любого $\omega \in \Omega$ множество $F(\omega) \subset X$ либо пусто, либо состоит из одной точки. Тогда для $\omega_0 \in \Omega$:

- 1) если $F(\omega_0) \neq \emptyset$, то F непрерывно относительно метрики $\rho_X^\ominus$ в точке ω_0 тогда и только тогда, когда F непрерывно по Хаусдорфу в этой точке (т.е. непрерывно как однозначное отображение);
- 2) если $F(\omega_0) = \emptyset$, то F непрерывно относительно метрики $\rho_X^\ominus$ в точке ω_0 тогда и только тогда, когда

$$\forall R > 0 \quad \exists \Xi_\Omega(\omega_0) : \quad \forall \omega \in \Xi_\Omega(\omega_0) \quad F(\omega) = \emptyset \quad \text{или} \quad \varrho_X(\theta, F(\omega)) > R. \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Согласно теореме 6 из непрерывности по Хаусдорфу отображения F в точке ω_0 следует его непрерывность в точке ω_0 относительно метрики $\rho_X^\ominus$.

Обратно, пусть отображение F непрерывно в точке ω_0 относительно метрики $\rho_X^\ominus$ и $F(\omega_0) \neq \emptyset$. Сначала заметим, что в некоторой окрестности точки ω_0 отображение F не имеет пустых значений. Действительно, в противном случае в любой окрестности точки ω_0 есть элемент ω , образ которого пуст, и в силу (11) получаем следующую оценку, противоречащую непрерывности F относительно метрики $\rho_X^\ominus$:

$$\rho_X^\ominus(F(\omega_0), F(\omega)) = \rho_X^\ominus(F(\omega_0), \emptyset) \geq \frac{\sqrt{r_*^2 + 4} - r_*}{2}, \quad \text{где} \quad r_* = \varrho_X(\theta, F(\omega_0)).$$

Теперь покажем, что F непрерывно по Хаусдорфу в точке ω_0 . Учитывая, что согласно теореме 3 сходимость в пространстве $(\text{clos}_\emptyset(X), \rho_X^\ominus[\theta])$ не зависит от выбора θ , мы имеем право принять $\theta = F(\omega_0)$ (что позволит сократить следующие выкладки). Для любого положительного $\varepsilon < 1$ найдем такую окрестность $\Xi_\Omega(\omega_0)$ точки ω_0 , что

$$\rho_X^\ominus(F(\omega_0), F(\omega)) < \varepsilon \quad (33)$$

при всех $\omega \in \Xi_\Omega(\omega_0)$. Покажем, что тогда и $\text{dist}_X(F(\omega_0), F(\omega)) < \varepsilon$ при всех $\omega \in \Xi_\Omega(\omega_0)$.

Пусть при некотором $\tilde{\omega} \in \Xi_\Omega(\omega_0)$ выполнено $p \doteq \text{dist}_X(F(\omega_0), F(\tilde{\omega})) \geq \varepsilon$. Исходя из этого предположения оценим $\rho_X^\ominus(F(\omega_0), F(\tilde{\omega}))$, для чего воспользуемся равенством (12). Положим $\mathfrak{R}(r) \doteq \text{dist}_X(\mathfrak{S}_r F(\omega_0), \mathfrak{S}_r F(\tilde{\omega}))$. Имеем $\mathfrak{R}(r) \geq r$ при $r < p$ и $\mathfrak{R}(r) = p$ при $r \geq p$. Если $p \leq 1$, то $\mathfrak{R}(p) = p \leq 1/p$ и, следовательно, определяемое равенством (12) значение $\hat{r} \geq p$. В этом случае $\rho_X^\ominus(F(\omega_0), F(\tilde{\omega})) = 1/\hat{r} = \mathfrak{R}(\hat{r}) = p \geq \varepsilon$. Если же $p > 1$, то $\mathfrak{R}(p) = p > 1/p$. Тогда $\mathfrak{R}(1) \geq 1$; следовательно, $\hat{r} \leq 1$, $\rho_X^\ominus(F(\omega_0), F(\tilde{\omega})) = 1/\hat{r} \geq 1$. Получено противоречие с неравенством (33), таким образом, F непрерывно по Хаусдорфу в точке ω_0 .

2) Пусть теперь $F(\omega_0) = \emptyset$, и пусть F непрерывно в точке ω_0 относительно метрики $\rho_X^\ominus$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность точки ω_0 , что при всех ω из этой окрестности справедливо неравенство (33). Предположим, что свойство (32) не выполнено; тогда существует такое $R > 0$, что в любой окрестности точки ω_0 найдется элемент ω , для которого $F(\omega) \neq \emptyset$ и

$r_* \doteq \varrho_X(\theta, F(\omega)) \leq R$. А тогда, учитывая (11), получим

$$\begin{aligned} \rho_X^{\mathfrak{S}}(F(\omega), F(\omega_0)) &= \rho_X^{\mathfrak{S}}(F(\omega), \emptyset) \\ &\geq \frac{\sqrt{r_*^2 + 4} - r_*}{2} = \frac{2}{\sqrt{r_*^2 + 4} + r_*} \geq \frac{2}{\sqrt{R^2 + 4} + R}, \end{aligned}$$

что противоречит непрерывности по Хаусдорфу отображения F в точке ω_0 .

Обратно, пусть $F(\omega_0) = \emptyset$ и выполнено условие (32). Покажем, что F непрерывно в точке ω_0 относительно метрики $\rho_X^{\mathfrak{S}}$. Возьмем произвольные $R > 0$ и исходя из условия (32) найдем $\Xi_\Omega(\omega_0)$. Тогда для любого $\omega \in \Xi_\Omega(\omega_0)$, если $F(\omega) \neq \emptyset$, имеем

$$\rho_X^{\mathfrak{S}}(F(\omega), F(\omega_0)) = \rho_X^{\mathfrak{S}}(F(\omega), \emptyset) \leq \frac{1}{\varrho_X(\theta, F(\omega))} < \frac{1}{R};$$

если же $F(\omega) = \emptyset$, то $\rho_X^{\mathfrak{S}}(F(\omega), F(\omega_0)) = 0$.

ПРИМЕР 4. Отображение $F: \mathbb{R} \rightarrow \text{clos}_\emptyset(\mathbb{R})$,

$$F(x) = \begin{cases} \{\text{tg } x\}, & \text{если } x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \emptyset, & \text{если } x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

согласно следствию 2 является непрерывным относительно метрики $\rho_{\mathbb{R}}^{\mathfrak{S}}$ на всем пространстве $\mathbb{R}$. В то же время ни при каком определении значений $F(x)$ в точках $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, эта функция не станет непрерывной по Хаусдорфу или непрерывной относительно метрики $\rho_{\mathbb{R}}^{\text{cl}}$.

Стоит отметить, что для отображений, значениями которых являются множества, содержащие более одной точки, следствие 2 становится неверным. Например, отображение $G: \mathbb{R} \rightarrow \text{clos}_\emptyset(\mathbb{R})$,

$$G(x) = \begin{cases} \{\text{tg } x, 0\} & \text{если } x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ \{0\}, & \text{если } x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

также является непрерывным относительно метрики $\rho_{\mathbb{R}}^{\mathfrak{S}}$ на всем пространстве $\mathbb{R}$ и, более того, непрерывным относительно метрики $\rho_{\mathbb{R}}^{\text{cl}}$ на всем $\mathbb{R}$. Однако в точках $x = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, это отображение не является непрерывным по Хаусдорфу, хотя значение G в этих точках есть непустое одноточечное множество $\{0\}$.

§ 3. Суперпозиционная измеримость, лемма Филиппова и свойство Скорца–Драгони

В этом параграфе рассмотрим многозначные отображения, действующие в $\mathbb{R}^n$. Для вычисления $d_{\mathbb{R}^n}^{\mathfrak{S}}$ и $\rho_{\mathbb{R}^n}^{\mathfrak{S}}$ будем использовать формулы (27) и (28), где $\theta = 0$, $R(r) = r$ и оператор $\mathfrak{C}_r$ определен равенством (21). Пространство $\mathbb{R}^n$ является ограниченно компактным, поэтому согласно теореме 6 из полунепрерывности сверху (снизу) или полунепрерывности сверху (снизу) по Хаусдорфу

отображения F в некоторой точке следует его полунепрерывность сверху (снизу) в той же точке относительно метрики $\rho_{\mathbb{R}^n}^\mathfrak{S}$. Отметим также, что отображение $F: [a, b] \rightarrow \text{clos}_\emptyset(\mathbb{R}^n)$, среди значений которого есть и непустые множества, и пустое множество, не может быть ни непрерывным, ни непрерывным по Хаусдорфу (так как $[a, b]$ – связное пространство), но может обладать свойством непрерывности относительно метрики $\rho_{\mathbb{R}^n}^\mathfrak{S}$.

Пусть на $[a, b]$ задана мера Лебега μ . Обозначим через $\mathfrak{L}$ совокупность измеримых по Лебегу подмножеств этого отрезка, а через $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ – совокупность борелевых подмножеств $\mathbb{R}^n$. Под произведением $\mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ понимаем σ -алгебру на $[a, b] \times \mathbb{R}^n$, порожденную системой $\{E \times V : E \in \mathfrak{L}, V \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)\}$. Для измеримых множеств $E, \tilde{E} \subset [a, b]$ будем писать $E \stackrel{\mu}{=} \tilde{E}$, если мера их симметрической разности $\mu(E \triangle \tilde{E}) = 0$.

Говорят, что отображение $F: [a, b] \rightarrow \text{clos}_\emptyset(\mathbb{R}^n)$ *измеримо* (см., например, [10; п. 8.1.1]), если полный прообраз любого непустого открытого множества $V \subset \mathbb{R}^n$, определяемый как

$$F_-^{-1}(V) \doteq \{t \in [a, b] : F(t) \cap V \neq \emptyset\}, \quad (34)$$

есть измеримое (по Лебегу) множество. Так как $\text{dom } F = F_-^{-1}(\mathbb{R}^n)$, то эффективное множество измеримого отображения измеримо. Заметим, что для эквивалентных измеримых отображений $F, G: [a, b] \rightarrow \text{clos}_\emptyset(\mathbb{R}^n)$ (т.е. таких, что $F(t) = G(t)$ при п.в. $t \in [a, b]$) выполнено $\text{dom } F \stackrel{\mu}{=} \text{dom } G$. Далее, отображение $F|_{\text{dom } F}$, т.е. сужение F на множество $\text{dom } F$, имеет непустые образы, поэтому известные свойства измеримых отображений с непустыми замкнутыми значениями (см. [1], [9]–[11]) переносятся на отображения, действующие в $\text{clos}_\emptyset(\mathbb{R}^n)$. В частности, вместо приведенного определения измеримого отображения можно использовать (как и для отображений с непустыми образами) следующее равносильное определение: отображение $F: [a, b] \rightarrow \text{clos}_\emptyset(\mathbb{R}^n)$ *измеримо*, если полный прообраз (34) любого непустого замкнутого множества V измерим. Таким образом, $F: [a, b] \rightarrow \text{clos}_\emptyset(\mathbb{R}^n)$ измеримо тогда и только тогда, когда $F_-^{-1}(V) \in \mathfrak{L}$ для любого $V \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$.

Нам потребуется следующее утверждение.

ЛЕММА 5. *Отображение $F: [a, b] \rightarrow \text{clos}_\emptyset(\mathbb{R}^n)$ является измеримым тогда и только тогда, когда при любом $r > 0$ измеримо отображение*

$$\mathfrak{C}_r F: [a, b] \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n), \quad \mathfrak{C}_r F(t) \doteq F(t) \cap B_{\mathbb{R}^n}^o(r) \cup S_{\mathbb{R}^n}(r). \quad (35)$$

Доказательство в силу утверждений о свойствах измеримых отображений (см., например, [10; п. 8.1.2]) прямо следует из соотношений

$$\mathfrak{C}_r F(t) = F(t) \cap B_{\mathbb{R}^n}(r) \cup S_{\mathbb{R}^n}(r), \quad F(t) = \bigcup_{r=1,2,\dots} (\mathfrak{C}_{2r} F(t) \cap B_{\mathbb{R}^n}(r)).$$

Будем говорить, что отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{clos}_\emptyset(\mathbb{R}^n)$ *удовлетворяет верхнему (нижнему) условию $\mathbf{K}^\mathfrak{S}$* , если:

1) при каждом $x \in \mathbb{R}^m$ отображение $t \mapsto F(t, x)$ измеримо;

2) при п.в. $t \in [a, b]$ отображение $x \mapsto F(t, x)$ полунепрерывно сверху (снизу) относительно метрики $\rho_{\mathbb{R}^n}^\mathfrak{S}$;

и *удовлетворяет условию $\mathbf{K}^\mathfrak{S}$* , если выполнены верхнее и нижнее условия $\mathbf{K}^\mathfrak{S}$.

Из теоремы 5 и леммы 5 следует, что отображение F удовлетворяет условию $\mathbf{K}^\ominus$ (верхнему, нижнему условию $\mathbf{K}^\ominus$) тогда и только тогда, когда отображение $\mathfrak{C}_r F: [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, определяемое равенством

$$\mathfrak{C}_r F(t, x) \doteq F(t, x) \cap B_{\mathbb{R}^n}^o(r) \cup S_{\mathbb{R}^n}(r), \quad (36)$$

при любом $r > 0$ удовлетворяет условиям Каратеодори (верхним, нижним условиям Каратеодори), а именно измеримо по первому аргументу и непрерывно (полу непрерывно сверху, полу непрерывно снизу) по второму аргументу относительно метрики Хаусдорфа. Последнее требование вследствие компактности значений $\mathfrak{C}_r F(t, x)$ можно заменить равносильным требованием непрерывности (полу непрерывности сверху, полу непрерывности снизу) по второму аргументу.

Обсудим вопрос об условиях суперпозиционной измеримости отображения $F: [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{clos}_\varnothing(\mathbb{R}^n)$, т.е. измеримости композиции $t \mapsto F(t, U(t)) \doteq \bigcup_{u \in U(t)} F(t, u)$ для любой измеримой функции $U: [a, b] \rightarrow \text{clos}_\varnothing(\mathbb{R}^n)$. Наиболее общим предположением, обеспечивающим суперпозиционную измеримость, является (см., например, [12])

$$\forall V \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n) \quad F_-^{-1}(V) \doteq \{(t, x) : F(t, x) \cap V \neq \varnothing\} \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{B}(\mathbb{R}^m). \quad (37)$$

Для приложений часто используются (см., например, [1], [13]) условия Каратеодори или условия полу непрерывности сверху (снизу) по совокупности аргументов, а также некоторые их обобщения. Границы таких обобщений не столь велики, например односторонние условия Каратеодори уже не обеспечивают суперпозиционную измеримость [1; пример 1.5.20]. Использование метрики $\rho_{\mathbb{R}^n}^\ominus$ позволяет предложить способ получения новых условий суперпозиционной измеримости из известных результатов. Продемонстрируем эту методику в следующем утверждении, содержащем два признака суперпозиционной измеримости, первый из которых основан на замене условий Каратеодори условием $\mathbf{K}^\ominus$, а второй – на замене полу непрерывности сверху предположением полу непрерывности сверху относительно метрики $\rho_{\mathbb{R}^n}^\ominus$ (в силу теоремы 6 нельзя аналогичным образом ослабить условие полу непрерывности снизу, также гарантирующее суперпозиционную измеримость).

ТЕОРЕМА 7. Пусть отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{clos}_\varnothing(\mathbb{R}^n)$ либо удовлетворяет условию $\mathbf{K}^\ominus$, либо является полу непрерывным сверху относительно метрики $\rho_{\mathbb{R}^n}^\ominus$; отображения $\tilde{U}: [a, b] \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^m)$ и $U: [a, b] \rightarrow \text{clos}(\mathbb{R}^m)$ измеримы. Тогда:

1) отображение $\tilde{\Phi}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, определенное равенством $\tilde{\Phi}(t) \doteq F(t, \tilde{U}(t))$, имеет образы в $\text{clos}_\varnothing(\mathbb{R}^n)$ и является измеримым;

2) отображение $\Phi: [a, b] \rightarrow \text{clos}_\varnothing(\mathbb{R}^n)$, определенное равенством $\Phi(t) \doteq \text{cl}(F(t, U(t)))$, является измеримым.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть F удовлетворяет условию $\mathbf{K}^\ominus$.

1) Возьмем произвольное $t \in [a, b]$, для которого $\tilde{\Phi}(t) \neq \varnothing$, и покажем, что $\tilde{\Phi}(t)$ замкнуто. Рассмотрим последовательность $\{y_i\}_{i=1}^\infty \subset \tilde{\Phi}(t)$, которая сходится к некоторому y . Докажем, что $y \in \tilde{\Phi}(t)$. Согласно определению отображения $\tilde{\Phi}$ существует последовательность $\{u_i\}_{i=1}^\infty \subset \tilde{U}(t)$ такая, что $y_i \in F(t, u_i)$, $i = 1, 2, \dots$. Так как $\tilde{U}(t)$ есть компактное множество, то из последовательности $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ можно выделить подпоследовательность $\{u_{i_j}\}_{j=1}^\infty$, сходящуюся

к некоторому $u \in \tilde{U}(t)$. Далее, из сходимости последовательности $\{y_i\}_{i=1}^\infty$ следует существование такого $r_0 > 0$, что $\{y_{i_j}\}_{j=1}^\infty \subset B_{\mathbb{R}^n}^o(r_0)$ и $y \in B_{\mathbb{R}^n}^o(r_0)$. Так как отображение F непрерывно по второму аргументу относительно метрики $\rho_{\mathbb{R}^n}^\varnothing$, то в силу теоремы 3 отображение $u \mapsto \mathfrak{C}_r F(t, u)$ непрерывно по Хаусдорфу при любом $r > 0$. Тогда $\text{dist}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{C}_{r_0} F(t, u_{i_j}), \mathfrak{C}_{r_0} F(t, u)) \rightarrow 0$, а поскольку $y_{i_j} \in F(t, u_{i_j}) \cap B_{\mathbb{R}^n}^o(r_0)$ и $\varrho_{\mathbb{R}^n}(y_{i_j}, y) \rightarrow 0$, то из соотношения

$$\begin{aligned} \varrho_{\mathbb{R}^n}(y, \mathfrak{C}_{r_0} F(t, u)) &\leq \varrho_{\mathbb{R}^n}(y, y_{i_j}) + \varrho_{\mathbb{R}^n}(y_{i_j}, \mathfrak{C}_{r_0} F(t, u_{i_j})) \\ &\quad + \text{dist}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{C}_{r_0} F(t, u_{i_j}), \mathfrak{C}_{r_0} F(t, u)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

следует, что $y \in \mathfrak{C}_{r_0} F(t, u)$. Отсюда и из неравенства $|y| < r_0$ получаем, что $y \in F(t, u) \cap B_{\mathbb{R}^n}^o(r_0)$ и, значит, $y \in \tilde{\Phi}(t)$.

Докажем, что отображение $\tilde{\Phi}$ измеримо. Пусть $r > 0$; рассмотрим отображение $\tilde{\Phi}_r: [a, b] \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, определенное равенством $\tilde{\Phi}_r(t) \doteq \mathfrak{C}_r \tilde{\Phi}(t)$. Очевидно, что для любого $t \in [a, b]$

$$\tilde{\Phi}_r(t) = \mathfrak{C}_r \bigcup_{u \in \tilde{U}(t)} F(t, u) = \bigcup_{u \in \tilde{U}(t)} \mathfrak{C}_r F(t, u) = (\mathfrak{C}_r F)(t, \tilde{U}(t)). \quad (38)$$

Так как для любого $r > 0$ отображение $\mathfrak{C}_r F$ имеет непустые компактные образы и удовлетворяет условиям Каратеодори, то из (38) следует, что для любого $r > 0$ отображение $\tilde{\Phi}_r$ измеримо (см., например, [1]). Следовательно, согласно лемме 5 отображение $\tilde{\Phi}$ также является измеримым.

2) Определим функцию $r_*(t) \doteq \varrho_{\mathbb{R}^n}(0, U(t))$, $t \in [a, b]$. Эта функция измерима (см. [10]). Для произвольного $r > 0$ положим $U^r(t) \doteq U(t) \cap B_{\mathbb{R}^n}(r_*(t) + r)$. Так как отображение $U^r: [a, b] \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ измеримо, то согласно доказанному в п. 1) композиция $[a, b] \ni t \mapsto F(t, U^r(t)) \in \text{clos}_\varnothing(\mathbb{R}^n)$ является измеримым отображением. Отсюда и из равенства

$$\Phi(t) = \text{cl}(F(t, U(t))) = \text{cl}\left(\bigcup_{r=1}^\infty F(t, U^r(t))\right), \quad t \in [a, b],$$

следует измеримость отображения Φ .

В случае, когда отображение F является полунепрерывным сверху относительно метрики $\rho_{\mathbb{R}^n}^\varnothing$, доказательство суперпозиционной измеримости проводится аналогично.

Отметим, что в некоторых задачах отображение F не обязательно должно быть суперпозиционно измеримым, достаточно, чтобы это отображение было суперпозиционно селективируемым, т.е. чтобы композиция $t \mapsto F(t, U(t))$ имела измеримые сечения. Свойство суперпозиционной селективируемости исследовано в [14]. В [15], [16] получены условия существования у отображения F сечений, удовлетворяющих условиям Каратеодори; очевидно, в этом случае F также является суперпозиционно селективируемым. Вопросы суперпозиционной селективируемости в настоящей работе не рассматриваются, но отметим, что для получения новых признаков суперпозиционной селективируемости из известных утверждений может также использоваться метрика $\rho_{\mathbb{R}^n}^\varnothing$.

Теперь сформулируем и докажем аналог леммы Филиппова о неявной функции.

Лемма Филиппова о неявной функции по праву считается одним из фундаментальных результатов в теории управления и дифференциальных включений и имеет ряд приложений в других разделах математики. Приведем первоначальную формулировку этого утверждения (см. [17]).

Пусть вектор-функция $f(t, u_1, \dots, u_r)$, или, короче, $f(t, u)$, непрерывна; множество $Q(t)$ замкнуто, ограничено, полунепрерывно сверху относительно включения (по t); пусть, когда вектор $u = (u_1, \dots, u_r)$ пробегает множество $Q(t)$, вектор $f(t, u)$ пробегает множество $R(t)$, $y(t)$ – измеримая вектор-функция, $y(t) \in R(t)$. Тогда существуют такие измеримые функции $u_1(t), \dots, u_r(t)$, что при п.в. t $f(t, u_1(t), \dots, u_r(t)) \equiv y(t)$.

Этот результат обобщался А. Ф. Филипповым и многими другими авторами (см., например, [1], [9]–[11], [18]). Связь предлагаемого утверждения с ранее доказанными аналогами мы обсудим после доказательства теоремы 8 и вывода ее следствий.

Для формулировки аналога леммы Филиппова нам потребуется следующее определение. Обозначим через $\mathbb{R}_{\emptyset}^n$ подпространство пространства $\text{clos}_{\emptyset}(\mathbb{R}^n)$, элементами которого являются одноточечные подмножества $\mathbb{R}^n$ и пустое множество. Отображение $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\emptyset}^n$ назовем m -сечением отображения $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, если $\text{dom } f \stackrel{\mu}{=} \text{dom } F$ и $f(t) \subset F(t)$ при п.в. $t \in \text{dom } F$. В случае, когда $\text{dom } F \stackrel{\mu}{=} [a, b]$, приведенное определение равносильно классическому определению однозначного сечения отображения с непустыми образами (достаточно отождествить одноточечные подмножества $\mathbb{R}^n$ с их элементами). Отметим, что любое измеримое отображение $F: [a, b] \rightarrow \text{clos}_{\emptyset}(\mathbb{R}^n)$ имеет хотя бы одно измеримое m -сечение $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\emptyset}^n$, что следует из соответствующего свойства отображения $F|_{\text{dom } F}$. В дальнейшем, если h – единственный элемент множества H , т.е. $H = \{h\}$, мы будем писать $h = \{H\}$.

ТЕОРЕМА 8. Пусть отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{clos}_{\emptyset}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию $\mathbf{K}^{\mathfrak{S}}$, отображение $U: [a, b] \rightarrow \text{clos}(\mathbb{R}^m)$ измеримо и отображение $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\emptyset}^n$ является измеримым m -сечением отображения $[a, b] \ni t \mapsto F(t, U(t)) \subset \mathbb{R}^n$. Тогда существует такая измеримая функция $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, что $u(t) \in U(t)$ при п.в. $t \in [a, b]$ и g есть m -сечение отображения $[a, b] \ni t \mapsto F(t, u(t)) \in \text{clos}_{\emptyset}(\mathbb{R}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I. Сначала рассмотрим ситуацию, когда

$$U(t) \in \text{comp}(\mathbb{R}^m), \quad t \in [a, b].$$

Положим $\Phi(t) \doteq F(t, U(t))$ и для $r > 0$ определим $\Phi_r(t) \doteq \mathfrak{C}_r \Phi(t)$, $t \in [a, b]$. Рассмотрим возрастающую последовательность положительных чисел $\{r_i\}_{i=1}^{\infty}$, $r_i \rightarrow \infty$, и определим для каждого i множество

$$e_i \doteq \{t \in [a, b] : g(t) \neq \emptyset \text{ и } \{g(t)\} \in B_{\mathbb{R}^n}^o(r_i)\}. \quad (39)$$

Каждое такое множество, очевидно, измеримо и $\bigcup_{i=1}^{\infty} e_i = \text{dom } g = \text{dom } \Phi$. Далее, для каждого i построим измеримую функцию $h_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$h_i(t) \doteq \begin{cases} \{g(t)\}, & t \in e_i, \\ y_i(t), & t \notin e_i, \end{cases} \quad (40)$$

где y_i есть некоторое измеримое сечение отображения Φ_{r_i} на $[a, b] \setminus e_i$ (такое сечение существует, так как для любого i отображение $t \mapsto \Phi_{r_i}(t) = \mathfrak{C}_{r_i} F(t, U(t)) \in \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ измеримо). При п.в. $t \in [a, b]$ имеем $h_i(t) \in \Phi_{r_i}(t)$. Тогда согласно лемме Филиппова для любого i существует такая измеримая функция $u_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, что $u_i(t) \in U(t)$ и $h_i(t) \in \mathfrak{C}_{r_i} F(t, u_i(t))$ при п.в. $t \in [a, b]$, откуда следует, что $\}g(t)\{ \in F(t, u_i(t))$ при п.в. $t \in e_i$. Положим $E_1 \doteq e_1$, $E_i \doteq e_i \setminus e_{i-1}$, $i = 2, 3, \dots$, и определим последовательность функций $v_i: \text{dom } \Phi \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \dots$, равенствами

$$\begin{aligned} v_1(t) &\doteq \begin{cases} u_1(t), & t \in E_1, \\ 0, & t \in \text{dom } \Phi \setminus E_1, \end{cases} \\ v_i(t) &\doteq \begin{cases} u_i(t), & t \in E_i, \\ v_{i-1}(t), & t \in \text{dom } \Phi \setminus E_i, \end{cases} \quad i = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (41)$$

Согласно построению (41) для любого $t \in \text{dom } \Phi$ существует номер $I(t)$ такой, что для любого $i > I(t)$ выполнено $v_i(t) = v_{I(t)}(t)$. Таким образом, последовательность $\{v_i(t)\}_{i=1}^\infty$ сходится при всех t , ее предел обозначим через $v(t)$. Функция $v: \text{dom } \Phi \rightarrow \mathbb{R}^m$ определена равенством $v(t) = v_{I(t)}(t)$ и является измеримой. Очевидно, что $\}g(t)\{ \in F(t, v(t))$ при п.в. $t \in \text{dom } \Phi$.

Далее, поскольку для любого $t \in [a, b]$ имеем $\Phi(t) = \bigcup_{u \in U(t)} F(t, u)$, то для любого $t \in [a, b] \setminus \text{dom } \Phi$ получаем $F(t, u) = \emptyset$ при всех $u \in U(t)$. Пусть $\bar{v}: [a, b] \setminus \text{dom } \Phi \rightarrow \mathbb{R}^m$ есть произвольное сечение отображения $U|_{[a, b] \setminus \text{dom } \Phi}$. Тогда функция $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, определенная равенством

$$u(t) \doteq \begin{cases} v(t), & t \in \text{dom } \Phi, \\ \bar{v}(t), & t \in [a, b] \setminus \text{dom } \Phi, \end{cases}$$

является сечением отображения U на всем отрезке $[a, b]$, при этом g есть м-сечение отображения $t \mapsto F(t, u(t))$.

II. Пусть теперь $U(t) \in \text{clos}(\mathbb{R}^m)$, $t \in [a, b]$. Возьмем возрастающую последовательность положительных чисел $\{r_i\}_{i=1}^\infty$, $r_i \rightarrow \infty$, и рассмотрим измеримые отображения $U^{r_i}: [a, b] \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$, $U^{r_i}(t) \doteq U(t) \cap B_{\mathbb{R}^n}(r_*(t) + r_i)$, где $r_*(t) = \varrho_{\mathbb{R}^n}(0, U(t))$. Далее, для каждого i определим множество

$$\varkappa_i \doteq \{t \in [a, b] : g(t) = \emptyset \text{ или } \}g(t)\{ \in F(t, U^{r_i}(t))\}.$$

Множества $\varkappa_i$ измеримы (см. [10; п. 8.1.2, предложение 6]) и удовлетворяют соотношениям $\varkappa_i \subset \varkappa_{i+1}$, $\bigcup_{i=1}^\infty \varkappa_i = [a, b]$. Обозначим $\Phi^{r_i}(t) \doteq F(t, U^{r_i}(t))$, $t \in [a, b]$. Пусть z_i есть некоторое измеримое м-сечение отображения $t \mapsto \Phi^{r_i}(t) \in \text{clos}_\emptyset(\mathbb{R}^n)$ на интервале $[a, b] \setminus \varkappa_i$. Для каждого i построим функцию $g_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$,

$$g_i(t) \doteq \begin{cases} g(t), & t \in \varkappa_i, \\ z_i(t), & t \notin \varkappa_i. \end{cases}$$

Тогда g_i является измеримым м-сечением отображения Φ^{r_i} на всем отрезке $[a, b]$. Далее, согласно п. I существует измеримая функция $u_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ такая, что $u_i(t) \in U^{r_i}(t) \subset U(t)$ при п.в. $t \in [a, b]$ и g_i есть м-сечение отображения $t \mapsto F(t, u_i(t))$ на $[a, b]$. Таким образом, g есть м-сечение отображения $t \mapsto F(t, u_i(t))$

на множестве $\varkappa_i$. Положим $K_1 \doteq \varkappa_1$, $K_i \doteq \varkappa_i \setminus \varkappa_{i-1}$, $i = 2, 3, \dots$, и определим последовательность функций $v_i: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \dots$, равенствами

$$v_1(t) \doteq \begin{cases} u_1(t), & t \in K_1, \\ 0, & t \in [a, b] \setminus K_1, \end{cases}$$

$$v_i(t) \doteq \begin{cases} u_i(t), & t \in K_i, \\ v_{i-1}(t), & t \in [a, b] \setminus K_i, \end{cases} \quad i = 2, 3, \dots$$

Последовательность $\{v_i(t)\}_{i=1}^\infty$ сходится при каждом $t \in [a, b]$, ее предел обозначим через $u(t)$. Тогда функция $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ является искомым измеримым сечением отображения U .

Ранее уже отмечалось, что если для отображения $[a, b] \ni t \mapsto \Phi(t) \in \text{clos}_\emptyset(\mathbb{R}^n)$ выполнено $\text{dom } \Phi \stackrel{\mu}{=} [a, b]$, то любое m -сечение Φ есть его однозначное сечение (сечение в привычном классическом смысле). В связи с этим интересным представляется вопрос: при каких условиях эффективное множество рассмотренного в теореме 8 отображения $t \mapsto \Phi(t) = F(t, U(t))$ совпадает с отрезком $[a, b]$?

Для каждого $t \in [a, b]$ обозначим через $\Theta(t)$ множество всех $x \in \mathbb{R}^m$, не принадлежащих эффективному множеству отображения $x \mapsto F(t, x)$, т.е.

$$\Theta(t) \doteq \{x \in \mathbb{R}^m : F(t, x) = \emptyset\}. \quad (42)$$

Итак, $F(t, x) = \emptyset$ в том и только том случае, когда $x \in \Theta(t)$. Тогда если множество $U(t) \in \text{clos}(\mathbb{R}^m)$ не является подмножеством $\Theta(t)$, то $\Phi(t) = F(t, U(t)) = F(t, U(t) \setminus \Theta(t)) \neq \emptyset$. Верно и обратное: если $\Phi(t) \neq \emptyset$, то во множестве $U(t)$ есть хотя бы одна точка, которая не принадлежит $\Theta(t)$. Таким образом, композиция $F(t, U(t))$ обладает следующим свойством.

Равенство $\text{dom } \Phi \stackrel{\mu}{=} [a, b]$ справедливо тогда и только тогда, когда

$$U(t) \setminus \Theta(t) \neq \emptyset \quad \text{при п.в. } t \in [a, b].$$

Учитывая это свойство, из теоремы 8 получаем аналог леммы Филиппова для “обычных” сечений отображений, не удовлетворяющих условиям Каратеодори, но обладающих свойством $\mathbf{K}^\ominus$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{clos}_\emptyset(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию $\mathbf{K}^\ominus$, отображение $U: [a, b] \rightarrow \text{clos}(\mathbb{R}^m)$ измеримо и $U(t) \setminus \Theta(t) \neq \emptyset$ при п.в. $t \in [a, b]$, где $\Theta(t)$ определено равенством (42). Тогда для любого измеримого сечения g отображения $t \mapsto F(t, U(t))$ существуют такое измеримое сечение u отображения U , что $g(t) \in F(t, u(t))$, причем $u(t) \notin \Theta(t)$ при п.в. $t \in [a, b]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Следует отметить, что если отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{clos}_\emptyset(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию $\mathbf{K}^\ominus$, то отображение $\Theta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$, определенное равенством (42), имеет образы в $\text{clos}_\emptyset(\mathbb{R}^m)$ и является измеримым.

Чтобы показать это, рассмотрим отображение $[a, b] \ni t \mapsto \Theta_r(t) \subset \mathbb{R}^m$, для каждого $r > 0$ определенное равенством

$$\Theta_r(t) \doteq \{x \in \mathbb{R}^m : \varrho_{\mathbb{R}^m}(0, \mathfrak{C}_r F(t, x)) = r\}. \quad (43)$$

Так как F удовлетворяет условию $\mathbf{K}^\varnothing$, то для любого $r > 0$ отображение $\mathfrak{C}_r F$ удовлетворяет условиям Каратеодори, откуда следует, что этим условиям удовлетворяет уже как однозначное отображение функция

$$(t, x) \mapsto \varrho_{\mathbb{R}^m}(0, \mathfrak{C}_r F(t, x)).$$

Тогда согласно [10; п. 8.1.5, теорема 3] для любого $r > 0$ отображение Θ_r имеет замкнутые образы и измеримо.

Далее, для каждого $t \in [a, b]$ и любых $r_2 > r_1 > 0$ выполнено $\Theta_{r_2}(t) \subset \Theta_{r_1}(t)$. Действительно, если $x \in \Theta_{r_2}(t)$, то $\varrho_{\mathbb{R}^m}(0, \mathfrak{C}_{r_2} F(t, x)) = r_2$. Это означает, что $F(t, x) \cap B_{\mathbb{R}^m}^o(r_2) = \varnothing$, следовательно,

$$F(t, x) \cap B_{\mathbb{R}^m}^o(r_1) = \varnothing, \quad \varrho_{\mathbb{R}^m}(0, \mathfrak{C}_{r_1} F(t, x)) = r_1,$$

таким образом, $x \in \Theta_{r_1}(t)$.

Положим $r_i \doteq i, i = 1, 2, \dots$, и покажем, что $\Theta(t) = \bigcap_i \Theta_{r_i}(t)$. Пусть $x \in \Theta(t)$; тогда $F(t, x) = \varnothing$ и, следовательно, $\varrho_{\mathbb{R}^m}(0, \mathfrak{C}_{r_i} F(t, x)) = r_i$ для любого i , т.е. $x \in \bigcap_i \Theta_{r_i}(t)$. Если $x \notin \Theta(t)$, то $F(t, x) \neq \varnothing$, и для любого $r_i > \varrho_{\mathbb{R}^m}(0, F(t, x))$ выполнено $\varrho_{\mathbb{R}^m}(0, \mathfrak{C}_{r_i} F(t, x)) = \varrho_{\mathbb{R}^m}(0, F(t, x)) < r_i$, т.е. $x \notin \bigcap_i \Theta_{r_i}(t)$. Таким образом, получаем, что $\Theta = \bigcap_{i=1}^\infty \Theta_{r_i}$ и, значит, отображение Θ действует в $\text{clos}_\varnothing(\mathbb{R}^m)$ и является измеримым (см. [11; с. 312]).

В связи с задачами управления особый интерес представляет случай, когда отображение F однозначно. В этой ситуации теорема 8 также ослабляет предположения леммы Филиппова.

Будем говорить, что *отображение* $f: [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условию* $\mathbf{k}^\varnothing$, если:

- 1) при каждом $x \in \mathbb{R}^n$ отображение $t \mapsto f(t, x)$ измеримо;
- 2) при п.в. $t \in [a, b]$ существует множество $C(t) \subset \mathbb{R}^m$, в каждой точке которого отображение $x \mapsto f(t, x)$ непрерывно, а для любой точки $x_0 \notin C(t)$ выполнено

$$\forall R > 0 \quad \exists r > 0: \quad \forall x \in B_{\mathbb{R}^m}^o(x_0, r) \cap C(t) \quad |f(t, x)| > R. \quad (44)$$

Для отображения f , удовлетворяющего условию $\mathbf{k}^\varnothing$, определим при п.в. $t \in [a, b]$ множество $\Theta(t) \doteq \overline{C(t)}$ точек $x_0 \in \mathbb{R}^m$, удовлетворяющих соотношению (44). Далее, при п.в. $t \in [a, b]$ зададим отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ равенством

$$F(t, x) \doteq \begin{cases} \{f(t, x)\}, & x \in C(t), \\ \varnothing, & x \in \Theta(t). \end{cases} \quad (45)$$

Поскольку отображение f удовлетворяет условию $\mathbf{k}^\varnothing$, то согласно следствию 2 F удовлетворяет условию $\mathbf{K}^\varnothing$ (верно и обратное: если построенное согласно (45) отображение F удовлетворяет условию $\mathbf{K}^\varnothing$, то исходное отображение f удовлетворяет условию $\mathbf{k}^\varnothing$). Таким образом, к отображению F применимо следствие 3. Итак, для однозначных отображений получаем следующий аналог леммы Филиппова.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть отображение $f: [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию $\mathbf{k}^\varnothing$, отображение $U: [a, b] \rightarrow \text{clos}(\mathbb{R}^m)$ измеримо и при п.в. $t \in [a, b]$ выполнено $U(t) \setminus \Theta(t) \neq \varnothing$. Тогда для любого измеримого сечения $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ отображения $t \mapsto f(t, U(t))$ существует измеримое сечение $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ отображения U такое, что $g(t) = f(t, u(t))$ при п.в. $t \in [a, b]$.

Важным предположением в приведенном утверждении является условие: $U(t) \setminus \Theta(t) \neq \emptyset$ при п.в. $t \in [a, b]$. Рассмотрим одну распространенную ситуацию, в которой это условие выполняется.

Пусть отображение $f: [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ удовлетворяет условию $\mathbf{k}^\ominus$ и при п.в. $t \in [a, b]$ имеем

$$B_{\mathbb{R}^m}^o(x_0, r) \cap C(t) \neq \emptyset \quad \forall r > 0, \quad x_0 \in \Theta(t). \quad (46)$$

Тогда при п.в. $t \in [a, b]$ множество $\Theta(t)$ нигде не плотно. Покажем это.

Рассмотрим произвольный открытый шар $\mathcal{B}$ в $\mathbb{R}^m$ и докажем, что в $\mathcal{B}$ содержится другой шар, не имеющий ни одной общей точки с $\Theta(t)$, $t \in [a, b]$. Пусть точка $x_0 \in \mathcal{B}$ такая, что $x_0 \notin \Theta(t)$ (такая точка найдется в силу предположения (46)). Так как отображение $x \mapsto f(t, x)$ непрерывно в x_0 , то оно ограничено в некоторой окрестности $V(x_0)$ этой точки. Отсюда согласно предположению 2) условия $\mathbf{k}^\ominus$ получаем, что отображение $x \mapsto f(t, x)$ непрерывно в окрестности $V(x_0)$. Таким образом, $\Theta(t) \cap V(x_0) = \emptyset$ и, следовательно, $\Theta(t)$ нигде не плотно.

Далее, если при п.в. $t \in [a, b]$ множество $U(t) \in \text{clos}(\mathbb{R}^m)$ не является нигде не плотным (т.е. содержит некоторый замкнутый шар), то при п.в. $t \in [a, b]$ получим $U(t) \setminus \Theta(t) \neq \emptyset$.

Отметим, что любая элементарная функция, рассматриваемая на замыкании своей области определения (т.е. доопределенная в соответствующих граничных точках области определения любыми значениями), удовлетворяет предположению 2) условия $\mathbf{k}^\ominus$ и условию (46). Таким образом, если функция $x \mapsto f(t, x)$ элементарная, то можно применить рассмотренные выше результаты.

ПРИМЕР 5. Пусть функция $f: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, задана равенством

$$f(t, x) \doteq \begin{cases} \text{tg}(x - t), & x \neq t + \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x = t + \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Очевидно, что эта функция не удовлетворяет условиям Каратеодори, но удовлетворяет условию $\mathbf{k}^\ominus$ и условию (46). Тогда для любого измеримого отображения $U: [a, b] \rightarrow \text{clos}(\mathbb{R})$ такого, что при п.в. $t \in [a, b]$ выполнено

$$U(t) \setminus \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq t + \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \right\} \neq \emptyset,$$

имеет место утверждение следствия 4.

ПРИМЕР 6. Пусть заданы измеримые функции $\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющие п.в. на $[a, b]$ неравенству $\alpha(t) < \beta(t)$. Определим функцию $f: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ так, что при п.в. $t \in [a, b]$ и всех $x \in [\alpha(t), \beta(t)]$ функция $t \mapsto f(t, x)$ измерима, а функция $x \mapsto f(t, x)$ разрывна в каждой точке и

$$f(t, x) \doteq \begin{cases} (\alpha(t) - x)^{-1}, & x < \alpha(t), \quad t \in [a, b], \\ (\beta(t) - x)^{-1}, & x > \beta(t), \quad t \in [a, b]. \end{cases}$$

Такая функция f удовлетворяет условию $\mathbf{k}^\ominus$ и при этом не удовлетворяет условию (46), поскольку при п.в. $t \in [a, b]$ для любого $x_0 \in (\alpha(t), \beta(t))$ найдется $r > 0$

такое, что $B_{\mathbb{R}^m}^o(x_0, r) \cap C(t) = \varnothing$. Таким образом, следствие 4 будет справедливо для любого отображения $U: [a, b] \rightarrow \text{clos}(\mathbb{R})$, удовлетворяющего при п.в. $t \in [a, b]$ соотношению $U(t) \setminus [\alpha(t), \beta(t)] \neq \varnothing$.

Доказательство “классической” леммы Филиппова использует свойство Скорца–Драгони, которым обладает удовлетворяющее условиям Каратеодори отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$. Свойство Скорца–Драгони означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое замкнутое множество $E_\varepsilon \subset [a, b]$ меры $\mu(E_\varepsilon) > b - a - \varepsilon$, что сужение F на $E_\varepsilon \times \mathbb{R}^m$ является непрерывным. Отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{clos}_\varnothing(\mathbb{R}^n)$ в приведенном выше обобщении леммы Филиппова – теореме 8 – удовлетворяет условию $\mathbf{K}^\varnothing$, но может не обладать свойством Скорца–Драгони, об этом свидетельствует отображение (см. пример 5)

$$F(t, x) \doteq \begin{cases} \{\text{tg}(x - t)\}, & x \neq t + \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \varnothing, & x = t + \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Действительно, для произвольного множества $E \subset [a, b]$ при каждом $t \in E$ как отображение второго аргумента $F(t, \cdot)$ имеет разрывы в точках $x = t + \pi/2 + \pi n$. Тем не менее для такого отображения F выполнено условие $\mathbf{K}^\varnothing$ и имеет место “ослабленное” свойство Скорца–Драгони, определяемое в следующем утверждении.

ТЕОРЕМА 9. *Если отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{clos}_\varnothing(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию $\mathbf{K}^\varnothing$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое замкнутое множество $E_\varepsilon \subset [a, b]$ меры $\mu(E_\varepsilon) > b - a - \varepsilon$, что сужение F на $E_\varepsilon \times \mathbb{R}^m$ – отображение $F|_{E_\varepsilon \times \mathbb{R}^m}: E_\varepsilon \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{clos}_\varnothing(\mathbb{R}^n)$ – является непрерывным относительно метрики $\rho_{\mathbb{R}^n}^\varnothing$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показано выше, определенное равенством (36) отображение $\mathfrak{C}_r F: [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{comp}(\mathbb{R}^n)$ при любом $r > 0$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Возьмем произвольные $\varepsilon > 0$ и возрастающую последовательность положительных чисел $r_i \rightarrow \infty$, определим $\varepsilon_i = 2^{-i}\varepsilon$. В силу свойства Скорца–Драгони (см. [1; теорема 1.5.14]), найдется такое замкнутое множество $E_{\varepsilon_i} \subset [a, b]$ меры $\mu(E_{\varepsilon_i}) > b - a - \varepsilon_i$, что сужение отображения $\mathfrak{C}_{r_i} F$ на $E_{\varepsilon_i} \times \mathbb{R}^m$ является непрерывным.

Положим $\bar{E}_{\varepsilon_i} = [a, b] \setminus E_{\varepsilon_i}$, $\bar{E} = \bigcup_{i=1}^\infty \bar{E}_{\varepsilon_i}$; тогда $\mu(\bar{E}_{\varepsilon_i}) < \varepsilon_i$, $\mu(\bar{E}) < \sum_{i=1}^\infty \varepsilon_i = \varepsilon$. Теперь определим множество $E = \bigcap_{i=1}^\infty E_{\varepsilon_i} = [a, b] \setminus \bar{E}$; оно замкнуто, $\mu(E) > b - a - \varepsilon$. Так как $E \subset E_{\varepsilon_i}$, то при любом i отображение $\mathfrak{C}_{r_i} F|_{E \times \mathbb{R}^m}$ непрерывно. Согласно утверждению 1) леммы 1 отображение $\mathfrak{C}_r F|_{E \times \mathbb{R}^m}$ при любом $r > 0$ будет также непрерывным. Действительно, определим такой номер i , что $r < r_i$, и пусть последовательность $\{(t_j, x_j)\} \subset E \times \mathbb{R}^m$ сходится к (t, x) ; тогда

$$\text{dist}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{C}_r F(t_j, x_j), \mathfrak{C}_r F(t, x)) \leq \text{dist}_{\mathbb{R}^n}(\mathfrak{C}_{r_i} F(t_j, x_j), \mathfrak{C}_{r_i} F(t, x)) \rightarrow 0.$$

Из непрерывности при любом r отображения $\mathfrak{C}_r F|_{E \times \mathbb{R}^m}$ в силу теоремы 5 получаем, что отображение $F|_{E \times \mathbb{R}^m}$ непрерывно относительно метрики $\rho_{\mathbb{R}^n}^\varnothing$.

Отметим, что некоторые аналоги леммы Филиппова и связанные с ними утверждения (например, о существовании сечений, удовлетворяющих условиям Каратеодори) основаны на “обобщенном” свойстве Скорца–Драгони

(см. [16], [19], [20]): если для исходного отображения $F: [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{clos}_\emptyset(\mathbb{R}^n)$ выполнено условие (37) и по второму аргументу оно полунепрерывно или имеет замкнутый график, то существует замкнутое множество $E_\varepsilon \subset [a, b]$ такое, что $\mu(E_\varepsilon) > b - a - \varepsilon$ и отображение $F|_{E_\varepsilon \times \mathbb{R}^m}$ является полунепрерывным или, соответственно, замкнутым уже по совокупности аргументов (причем данные результаты доказаны не только для конечномерного пространства $\mathbb{R}^n$, но и для банаховых пространств). Теорема 9 и эти утверждения независимы, т.е. ни одно из них прямо не следует из другого. Используемая в теореме 9 (а также и во всех других утверждениях этого параграфа) идея перехода от отображения F к отображению $\mathfrak{C}_r F$ позволяет, очевидно, получить аналоги свойства Скорца–Драгоми и для отображений, полунепрерывных сверху относительно метрики $\rho_{\mathbb{R}^n}^\mathfrak{C}$.

В заключение обсудим возможности приложения полученных результатов к дифференциальным уравнениям, включениям и к задачам управления.

Прежде всего, нам кажется перспективным исследование дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t, x) \quad (47)$$

с отображением $F: [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{clos}_\emptyset(\mathbb{R}^n)$, не отвечающим условиям Каратеодори, но удовлетворяющим условию $\mathbf{K}^\mathfrak{C}$. Частным случаем такого включения является дифференциальное уравнение $\dot{x} = f(t, x)$, если предположить, что функция $f: [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию $\mathbf{k}^\mathfrak{C}$. Из этого предположения следует, что в точках разрыва функция $x \mapsto f(t, x)$ является бесконечно большой. К таким уравнениям относятся различные классы сингулярных уравнений, которые имеют важные приложения и активно изучаются последние 30–40 лет (см., например, [21]). Сингулярные дифференциальные включения в литературе практически не рассматривались. Кроме приведенных здесь утверждений, некоторые возможности исследований в этом направлении предоставляют результаты работы [4] о неподвижных точках отображений, действующих в $(\text{clos}_\emptyset(X), \rho_X^\mathfrak{C})$.

Помимо включений, в которых при некоторых значениях аргументов правая часть $F(t, x) = \emptyset$, приведенные результаты можно применить к включениям, правые части которых являются непустыми неограниченными множествами (если отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \text{clos}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет условию $\mathbf{K}^\mathfrak{C}$). Так, в работе [22] получены условия устойчивости по Лагранжу траекторий в пространстве многозначных функций со значениями в $\text{clos}(\mathbb{R}^n)$, непрерывных относительно метрики $\rho_{\mathbb{R}^n}^{\text{cl}}$. В силу теоремы 4 такие функции будут непрерывными и в метрике $\rho_{\mathbb{R}^n}^\mathfrak{C}$, что позволяет пользоваться при исследовании подобных динамических систем полученными выше утверждениями.

Далее, следует отметить, что стандартная запись управляемой системы с обратной связью

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad u \in U(t, x), \quad (48)$$

в виде включения (47) в случае неограниченных значений множества допустимых управлений оказывается малоэффективной, полученное включение плохо поддается исследованию классическими методами, поскольку соответствующее отображение $F: [a, b] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F(t, x) \doteq f(t, x, U(t, x))$, как правило, не удовлетворяет условиям Каратеодори. Возникают трудности даже при проверке равносильности полученного включения исходной управляемой системе, так как не выполнены предположения леммы Филиппова. Однако отображение F

может удовлетворять условию $\mathbf{K}^{\mathcal{S}}$, что открывает возможности применения к нему полученных в данной работе результатов. В частности, из теоремы 8 тогда будет следовать, что для любого решения x включения (47) найдется измеримая функция u такая, что пара (x, u) будет решением управляемой системы (48).

ПРИМЕР 7. Проиллюстрируем описанную выше ситуацию на примере управляемой системы для автономного скалярного дифференциального уравнения с постоянным множеством допустимых управлений

$$\dot{x} = x \cdot u, \quad u \in \{1, 2, 2^2, 2^3, \dots\}. \quad (49)$$

Этой системе соответствует дифференциальное включение

$$\dot{x} \in \{x, 2x, 2^2x, 2^3x, \dots\}. \quad (50)$$

Отображение $F: \mathbb{R} \rightarrow \text{clos}(\mathbb{R})$, $F(x) = \{x, 2x, 2^2x, 2^3x, \dots\}$, не является полунепрерывным сверху по Хаусдорфу (соответственно и полунепрерывным сверху) ни при каком $x \in \mathbb{R}$, более того, $d_{\mathbb{R}}(F(x_1), F(x_2)) = \infty$ при любых $x_1 \neq x_2$. Тем не менее это отображение непрерывно в метрике $\rho_{\mathbb{R}^n}^{\mathcal{S}}$. Соответственно из теоремы 8 прямо следует равносильность системы (49) и включения (50).

Список литературы

- [1] Ю.Г. Борисович, Б.Д. Гельман, А.Д. Мышкис, В.В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений*, Либроком, М., 2011, 224 с.
- [2] И.В. Шрагин, “Суперпозиционная измеримость”, *Изв. вузов. Матем.*, 1975, №1(152), 82–92.
- [3] Е.С. Жуковский, Е.А. Панасенко, “Об одной метрике в пространстве непустых замкнутых подмножеств пространства $\mathbb{R}^n$ ”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2012, №1, 15–25.
- [4] E. S. Zhukovskiy, E. A. Panasenکو, “On multi-valued maps with images in the space of closed subsets of a metric space”, *Fixed Point Theory Appl.*, 2013, №10, 21 pp.
- [5] E. Michael, “Topologies on spaces of subsets”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **71** (1951), 152–182.
- [6] Ж. Матерон, *Случайные множества и интегральная геометрия*, Мир, М., 1978, 318 с.; пер. с англ.: G. Matheron, *Random sets and integral geometry*, Wiley Ser. Probab. Math. Statist., Wiley, New York–London–Sydney, 1975, xxiii+261 pp.
- [7] Е.А. Панасенко, Е.Л. Тонков, “Распространение теорем Е.А. Барбашина и Н.Н. Красовского об устойчивости на управляемые динамические системы”, Тр. ИММ УрО РАН, **15**, 2009, 185–201; англ. пер.: E. A. Panasenکو, E. L. Tonkov, “Extension of E. A. Barbashin’s and N. N. Krasovskii’s stability theorems to controlled dynamical systems”, *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **268**:, suppl. 1 (2010), S204–S221.
- [8] М.В. Бебутов, “О динамических системах в пространстве непрерывных функций”, *Бюл. мех.-мат. факультета МГУ*, **5** (1941), 1–52.
- [9] K. Deimling, *Multivalued differential equations*, De Gruyter Ser. Nonlinear Anal. Appl., **1**, de Gruyter, Berlin, 1992, xii+260 pp.
- [10] А.Д. Иоффе, В.М. Тихомиров, *Теория экстремальных задач*, Наука, М., 1974, 479 с.; англ. пер.: A. D. Ioffe, V. M. Tihomirov, *Theory of extremal problems*, Stud. Math. Appl., **6**, North-Holland, Amsterdam–New York, 1979, xii+460 pp.

- [11] J.-P. Aubin, H. Frankowska, *Set-valued analysis*, Systems Control Found. Appl., **2**, Birkhäuser, Boston, MA, 1990, xx+461 pp.
- [12] В. З. Цалюк, “О суперпозиционной измеримости многозначных функций”, *Матем. заметки*, **43:1** (1988), 98–102; англ. пер.: V.Z. Tsalyuk, “Superposition measurability of multivalued functions”, *Math. Notes*, **43:1** (1988), 58–60.
- [13] J. Appell, E. De Pascale, P. P. Zabrejko, “Multivalued superposition operators”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **86(1991)** (1992), 213–231.
- [14] C. Castaing, “Sur les équations différentielles multivoques”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B*, **263** (1966), A63–A66.
- [15] A. Cellina, “A selection theorem”, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **55(1976)** (1977), 143–149.
- [16] Z. Artstein, K. Prikry, “Carathéodory selections and the Scorza–Dragoni property”, *J. Math. Anal. Appl.*, **127:2** (1987), 540–547.
- [17] А. Ф. Филиппов, “О некоторых вопросах теории оптимального регулирования”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 2. Матем. Мех. Астр. Физ. Хим.*, 1959, № 2, 25–32.
- [18] В. И. Благодатских, А. Ф. Филиппов, “Дифференциальные включения и оптимальное управление”, *Топология, обыкновенные дифференциальные уравнения, динамические системы*, Тр. МИАН СССР, **169**, 1985, 194–252; англ. пер.: V.I. Blagodatskikh, A.F. Filippov, “Differential inclusions and optimal control”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **169** (1986), 199–259.
- [19] A. Kucia, “Scorza–Dragoni type theorems”, *Fund. Math.*, **138:3** (1991), 197–203.
- [20] D. Aversa, “Lusin type theorems for multifunctions, Scorza Dragoni’s property and Carathéodory selections”, *Boll. Un. Mat. Ital. A (7)*, **8:2** (1994), 193–202.
- [21] И. Т. Кигурадзе, Б. Л. Шехтер, “Сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка”, *Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Нов. достиж.*, **30**, ВИНТИ, М., 1987, 105–201; англ. пер.: I. T. Kiguradze, B. L. Shekhter, “Singular boundary-value problems for second-order ordinary differential equations”, *J. Soviet Math.*, **43:2** (1988), 2340–2417.
- [22] Е. А. Панасенко, “Динамическая система сдвигов в пространстве многозначных функций с замкнутыми образами”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2012, № 2, 28–33.

Евгений Семенович Жуковский
(Evgeniy S. Zhukovskii)

Институт математики, физики и информатики
Тамбовского государственного университета
им. Г. Р. Державина
E-mail: zukovskys@mail.ru

Поступила в редакцию
16.04.2013 и 24.03.2014

Елена Александровна Панасенко
(Elena A. Panasenko)

Институт математики, физики и информатики
Тамбовского государственного университета
им. Г. Р. Державина
E-mail: panlena_t@mail.ru