Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. С. Славина, Топологическая классификация систем типа Ковалевской–Яхьи, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 1, 105–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8241>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.239.49.27

26 апреля 2023 г., 17:26:47

УДК 517.938.5

Н. С. Славина

Топологическая классификация систем типа Ковалевской–Яхьи

В случае задачи Ковалевской–Яхьи при всех некритических значениях параметров g , λ вычислены все инварианты Фоменко–Цишанга (с помощью построенных допустимых систем координат и определения взаимного расположения базисных циклов). Семейство систем Ковалевской–Яхьи содержит 29 попарно лиувиллево не эквивалентных слоений. Среди этих слоений есть те, которые эквивалентны уже известным слоениям, возникшим в случаях интегрируемости Ковалевской, Ковалевской–Яхьи при $g = 0$, в случае Жуковского, случае Горячева–Чаплыгина–Сретенского. Среди 29 слоений обнаружены 11 новых слоений в том смысле, что они лиувиллево не эквивалентны никаким ранее обнаруженным слоениям, возникшим в известных случаях интегрируемости твердого тела. Топологический тип слоения Лиувилля для семейства систем Ковалевской–Яхьи стабилизируется на больших значениях энергии H , причем эта “высоко-энергетическая” система грубо лиувиллево эквивалентна известному ранее случаю интегрируемости Горячева–Чаплыгина–Сретенского на одном из уровней энергии.

Библиография: 29 названий.

Ключевые слова: инварианты Фоменко–Цишанга, слоение Лиувилля, лиувиллево эквивалентные интегрируемые системы.

DOI: 10.4213/sm8241

§ 1. Введение

Случай интегрируемости Ковалевской–Яхьи – это обобщение классического волчка Ковалевской на задачу о движении тяжелого гиростата. В разное время исследованием классического случая Ковалевской занимались многие выдающиеся математики и физики-теоретики. Х. М. Яхья (см. [1], [2]) показал, что интеграл Ковалевской может быть обобщен на гиростат, распределение масс которого подчинено условиям Ковалевской, а гиростатический момент направлен по оси динамической симметрии.

В настоящей работе описывается топологическая классификация систем типа Ковалевской–Яхьи.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00664а) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1410.2012.1).

Напомним, что интегрируемая система с двумя степенями свободы определяет слоение Лиувилля на каждой трехмерной регулярной изоэнергетической поверхности. Две интегрируемые системы называются *лиувиллево эквивалентными*, если существует диффеоморфизм, переводящий слоение Лиувилля одной системы в слоение Лиувилля другой системы. Если торы Лиувилля на всюду плотном множестве являются замыканиями нерезонансных траекторий (как в большинстве классических случаев интегрируемости), то лиувиллева эквивалентность систем означает, что сравниваемые системы имеют “одинаковые” замыкания решений на трехмерных уровнях постоянной энергии (см. [3]). Топологический тип слоения Лиувилля полностью определяется инвариантом Фоменко–Цишанга, который является некоторым графом с числовыми метками (см. [4]). Поэтому классификация топологических типов систем Ковалевской–Яхьи сводится к подсчету инвариантов Фоменко–Цишанга, что и будет выполнено в настоящей работе.

Динамическая система типа Ковалевской–Яхьи является гамильтоновой на совместных поверхностях уровня M_g^4 геометрического интеграла и интеграла площадей (где g – постоянная площадей). Гамильтониан и интеграл Ковалевской–Яхьи определяют слоение Лиувилля на каждой поверхности M_g^4 , топология которого существенно зависит от параметров g и λ (λ – величина гиростатического момента). П. Е. Рябов и М. П. Харламов (см. [5]) построили кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(g, \lambda)$, разделяющие области с качественно различными видами бифуркационных диаграмм для отображения момента $M_g^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k)$, определяемого гамильтонианом и интегралом. Оказалось, что таких областей 18. В более поздней работе [6] был предложен новый взгляд на классификацию бифуркационных диаграмм. В ней было построено разделяющее множество на плоскости “энергия–гиростатический момент”, с помощью которого можно классифицировать бифуркационные диаграммы на изоэнергетических уровнях. В совместной работе И. И. Харламовой и П. Е. Рябова [7] было введено понятие электронного атласа и создана компьютерная система, которая удовлетворяет данному определению.

Важные результаты в исследовании топологии классического случая Ковалевской ($\lambda = 0$) были получены в работах М. П. Харламова [8], [9] (см. также [10]), где были построены бифуркационные диаграммы и вычислены перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения момента. Инварианты Фоменко (молекулы без меток) для классического случая Ковалевской были вычислены в работе А. А. Ошемкова [11] (см. также [12]). Более подробное изучение слоения Лиувилля для этого случая (в частности, вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга для изоэнергетических поверхностей и особых точек бифуркационной диаграммы) было проведено в работе А. В. Болсинова, П. Рихтера и А. Т. Фоменко [13].

Вычисление инвариантов Фоменко (молекул без меток) для случая Ковалевской–Яхьи с произвольными g и λ было начато в работах И. Н. Гашененко, П. Е. Рябова и М. П. Харламова (см. [14], [15], [5]). Полное описание грубой топологии приведено в работе [16]. В ней доказано, что для 29 камер на плоскости (g, h) имеется девять групп эквивалентных молекул (без меток), содержащих

22 устойчивых графа и шесть неустойчивых по отношению к количеству критических окружностей на критических уровнях (см. [16]).

П. Е. Рябов в [17] нашел критические точки рангов 0 и 1, а также указал способ определения их типов. В работе автора [18] дано описание слоения Лиувилля в окрестностях вырожденных одномерных орбит и невырожденных положений равновесия волчка Ковалевской–Яхьи с полулокальной точки зрения, т.е. не в малой окрестности особой точки, а в окрестности особого слоя. В [18] доказывается боттовость (теорема 5 настоящей работы) дополнительного интеграла на изоэнергетической поверхности и невырожденность положений равновесия (теоремы 7, 8). Точки ранга 0 также были исследованы М. П. Харламовым в [19], где он ввел понятие классов эквивалентности относительно определяющих параметров на множестве равномерных вращений гиростата, указал разделяющие значения этих параметров и доказал, что таких классов 13, если рассматривать полный прообраз точки, отвечающей относительно равновесию.

П. В. Морозов в [20] исследовал слоение Лиувилля системы Ковалевской–Яхьи для случая $g = 0$, а именно вычислил инварианты Фоменко–Цишанга для изоэнергетических поверхностей.

В настоящей работе с помощью построенных допустимых систем координат и определения взаимного расположения базисных циклов вычислены все матрицы склеек изоэнергетических молекул, а по матрицам склеек вычислены все числовые метки (теорема 12). В результате мы вычислили все инварианты Фоменко–Цишанга. Полный список инвариантов Фоменко–Цишанга в случае задачи Ковалевской–Яхьи при всех некритических значениях параметров g, λ приведен в табл. 4–6. Таким образом, полностью завершена тонкая лиувиллева классификация слоений семейства систем Ковалевской–Яхьи. Это семейство содержит 29 попарно лиувиллево не эквивалентных слоений (теорема 12).

Напомним, что два слоения Лиувилля *лиувиллево эквивалентны*, если и только если их меченые молекулы совпадают (см. [21], [22]). Оказалось, что среди этих слоений есть такие, что они эквивалентны уже известным слоениям, возникшим в случаях интегрируемости Ковалевской, Ковалевской–Яхьи при $g = 0$, в случае Жуковского, случае Горячева–Чаплыгина–Сретенского. Это означает, что перечисленные выше системы лиувиллево эквивалентны системе Ковалевской–Яхьи на некоторых соответствующих интервалах энергии (теоремы 13–15). Среди 29 слоений обнаружены 11 новых слоений в том смысле, что они лиувиллево не эквивалентны никаким ранее обнаруженным слоениям, возникшим в известных случаях интегрируемости твердого тела. В теореме 16 доказано, что топологический тип слоения Лиувилля для семейства систем Ковалевской–Яхьи стабилизируется при больших значениях энергии H . При этом оказалось, что эта “высокоэнергетическая” система грубо лиувиллево эквивалентна (см. [23]) уже известному случаю интегрируемости Горячева–Чаплыгина–Сретенского на одном из интервалов энергии. В то же время эти две системы тонко лиувиллево не эквивалентны.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю академику А. Т. Фоменко, а также профессору А. А. Ошемкову за внимание к работе, замечания и консультации.

Отдельную благодарность автор выражает профессору М. П. Харламову за ценные советы и замечания, которые в значительной мере помогли улучшить данную статью.

§ 2. Интегрируемый случай Ковалевской–Яхьи

Случай интегрируемости Ковалевской–Яхьи является обобщением классического волчка Ковалевской на задачу о движении тяжелого гиристора. *Гиростатом* называется твердое тело, в котором закреплен маховик. Приведем конкретный вид уравнений и первых интегралов этой системы.

Рассмотрим уравнения Эйлера–Пуассона произвольного твердого тела с закрепленной точкой в поле силы тяжести в системе координат, оси которой направлены вдоль осей инерции тела,

$$\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\mathbf{A}\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \times \boldsymbol{\omega} - \mathbf{a} \times \boldsymbol{\nu}, \quad \dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (2.1)$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости тела-носителя, $\boldsymbol{\nu}$ – единичный вертикальный вектор, $\mathbf{A}$ – диагональная матрица тензора инерции, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ – вектор, направленный из неподвижной точки к центру масс, длина которого равна произведению веса гиристора на расстояние от его центра масс до неподвижной точки, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – гиристорический момент.

В задаче Ковалевской–Яхьи на гиристор накладываются следующие условия: моменты инерции удовлетворяют соотношениям $A_1 = A_2 = 2A_3 = A$, центр масс находится в экваториальной плоскости эллипсоида инерции ($a_3 = 0$), а гиристорический момент направлен вдоль оси динамической симметрии ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \lambda \neq 0$).

В этих условиях уравнения движения (2.1) и интегралы будут зависеть от параметров A, a_1, a_2 , от которых можно избавиться при помощи известных замен (например, см. [24]).

В новых переменных гамильтониан и первые интегралы системы примут следующий вид:

$$H = \tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2 + \frac{\tilde{\omega}_3^2}{2} - \tilde{\nu}_1, \\ \Gamma = \tilde{\nu}_1^2 + \tilde{\nu}_2^2 + \tilde{\nu}_3^2, \quad G = \tilde{\omega}_1\tilde{\nu}_1 + \tilde{\omega}_2\tilde{\nu}_2 + \frac{(\tilde{\omega}_3 + \tilde{\lambda})\tilde{\nu}_3}{2}.$$

Х. М. Яхья в [1], [2] вывел, что система обладает дополнительным интегралом K четвертой степени:

$$K = (\tilde{\omega}_1^2 - \tilde{\omega}_2^2 + \tilde{\nu}_1)^2 + (2\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2 + \tilde{\nu}_2)^2 + 2\tilde{\lambda}(\tilde{\omega}_3 - \tilde{\lambda})(\tilde{\omega}_1^2 + \tilde{\omega}_2^2) + 4\tilde{\lambda}\tilde{\omega}_1\tilde{\nu}_3.$$

Наряду с координатами $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\nu})$ часто используются канонические координаты (s, r) на линейном сопряженном пространстве $e(3)^*$, где $e(3)$ – алгебра Ли группы Ли $E(3)$ движений трехмерного евклидова пространства.

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{s}_i = \{s_i, H\}, \quad \dot{r}_i = \{r_i, H\}, \quad (2.2)$$

где $H(s, r)$ – некоторая функция Гамильтона, а $\{\cdot, \cdot\}$ – стандартно определенная на $e(3)^*$ скобка Ли–Пуассона двух произвольных гладких функций (см. [4]).

Функции

$$f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2, \quad f_2 = s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3 \quad (2.3)$$

лежат в ядре скобки Ли–Пуассона (функции Казимира) и поэтому являются первыми интегралами уравнений (2.2). Ограничение системы (2.2) на совместные четырехмерные поверхности уровня функций f_1 и f_2

$$M_g^4 = \{f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, f_2 = s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3 = g\}$$

представляет собой гамильтонову систему с двумя степенями свободы (параметр g имеет физический смысл постоянной площадей). Эта система будет интегрируемой на поверхности M_g^4 , если на ней существует функционально независимая с H гладкая функция $K(s, r)$ такая, что $\{H, K\} = 0$.

Гамильтониан случая Ковалевской–Яхьи, дополнительные интегралы (функции Казимира) и дополнительный интеграл K в координатах $(\tilde{s}, \tilde{r})$, связанных линейными заменами с координатами (s, r) , примут следующий вид:

$$\begin{aligned} H &= \frac{\tilde{s}_1^2}{4} + \frac{\tilde{s}_2^2}{4} + \frac{(\tilde{s}_3 + \tilde{\lambda})^2}{2} - \tilde{r}_1, \\ f_1 &= \tilde{r}_1^2 + \tilde{r}_2^2 + \tilde{r}_3^2, \quad f_2 = \tilde{s}_1 \tilde{r}_1 + \tilde{s}_2 \tilde{r}_2 + \tilde{s}_3 \tilde{r}_3, \\ K &= \left(\frac{\tilde{s}_1^2 - \tilde{s}_2^2}{4} + \tilde{r}_1 \right)^2 + \left(\frac{\tilde{s}_1 \tilde{s}_2}{2} + \tilde{r}_2 \right)^2 - \frac{\tilde{\lambda}}{2} (\tilde{s}_3 + 2\tilde{\lambda}) (\tilde{s}_1^2 + \tilde{s}_2^2) - 2\tilde{\lambda} \tilde{r}_3 \tilde{s}_1. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Связь между системой, заданной в координатах (ω, ν) , и системой, заданной в координатах (s, r) , установлена в [11].

Всюду в дальнейшем мы будем использовать только координаты $(\tilde{s}, \tilde{r})$ и $(\tilde{\omega}, \tilde{\nu})$ и поэтому будем обозначать их через (s, r) и (ω, ν) соответственно.

§ 3. Бифуркационные диаграммы и разделяющее множество на плоскости $\mathbb{R}^2(g, \lambda)$

Рассмотрим отображение момента μ для нашей задачи

$$\mu = H \times K: M_g^4 \rightarrow \mathbb{R}^2(h, k). \quad (3.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Точка x из M_g^4 называется *критической точкой отображения момента* μ , если ранг $d\mu(x)$ меньше 2. Ее образ $\mu(x)$ в $\mathbb{R}^2(h, k)$ называется *критическим значением*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Образ всех критических точек при отображении момента называется *бифуркационной диаграммой* Σ .

Обычно бифуркационная диаграмма представляет собой набор гладких кривых, имеющих точки пересечения, касания и возврата.

В случае Ковалевской–Яхьи бифуркационная диаграмма $\Sigma = \Sigma(g, \lambda)$ будет зависеть от параметров g, λ . В [15] указаны кривые на плоскости $\mathbb{R}^2(g, \lambda)$, разделяющие области с различными типами бифуркационных диаграмм, а также найден явный вид бифуркационных кривых на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$.

Обозначим через $\Theta(g, \lambda)$ множество, которое состоит из тех значений $(g, \lambda) \in \mathbb{R}^2(g, \lambda)$, при переходе через которые меняется вид диаграммы $\Sigma(g, \lambda)$ (такие значения (g, λ) будем называть *бифуркационными*). Тогда это множество устроено следующим образом.

ТЕОРЕМА 1 (П. Е. Рябов; см. [15]). *Множество $\Theta(g, \lambda)$ является объединением кривых Γ_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$, где*

$$\begin{aligned}\Gamma_1 &= \{(g, \lambda) \mid 1 - 4\lambda g = 0\}, \\ \Gamma_2 &= \left\{ \left(-2t^3, \sqrt{-\frac{4t^4 - 1}{4t^2}} \right) \mid t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right] \right\}, \\ \Gamma_3 &= \left\{ \left(\sqrt{\frac{t^2 - 1}{4t}}, \sqrt{-t^3} \right) \mid t \in [-1, 0) \right\}, \\ \Gamma_4 &= \left\{ \left(\sqrt{-\frac{(3t^2 - 1)^2}{4t^3}}, \sqrt{\frac{(t^2 - 1)^3}{t^3}} \right) \mid t \in (-\infty, +\infty) \right\}, \\ \Gamma_5 &= \left\{ \left(\sqrt{\frac{(t^2 - 1)^3}{2t^3}}, \sqrt{-\frac{(3t^2 - 1)^2}{2t^3}} \right) \mid t \in [-1, 0) \right\}.\end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. П. Е. Рябов в [15] доказал, что при переходе через кривые Γ_i меняется тип бифуркационной диаграммы. Таким образом, плоскость $\mathbb{R}^2(g, \lambda)$ разбивается на 18 камер (рис. 1). Более того, при изменении значений параметров g, λ строго внутри каждой камеры тип бифуркационной диаграммы не меняется, т.е. внутри камер диаграммы гомеоморфны (см. [6], [7], [24]).

Рис. 1. Разделяющее множество

ТЕОРЕМА 2 (П. Е. Рябов; см. [15]). *Все критические значения отображения момента (3.1) в задаче Ковалевской–Яхьи принадлежат объединению кривых $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$, т.е. $\Sigma \subset \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, где*

$$\Sigma_1: \begin{cases} k = 1, \\ h \geq -1 \end{cases} \cup \begin{cases} k = 1 + \left(h - \frac{\lambda^2}{2}\right)^2, \\ h \geq \frac{\lambda^2}{2}, \end{cases} \quad g = 0, \quad \begin{cases} h = \omega_1^2 + \frac{\lambda^2}{2} - \frac{g}{\omega_1}, \\ k = 1 + \omega_1^4 + 2g\omega_1, \end{cases} \quad g \neq 0,$$

$$\Sigma_2: \begin{cases} h = 2g^2 - \frac{\lambda^2}{2} - s + \frac{\lambda^2}{2s^2}, \\ k = -4\lambda^2g^2 + (s + \lambda^2)^2 - \frac{\lambda^2(\lambda^2 + 2s^2)}{s^2}, \end{cases} \quad \lambda \neq 0, \quad \begin{cases} h \geq 0, \\ k = 0, \end{cases} \quad \lambda = 0.$$

П. Е. Рябов также показал, что включение, указанное в теореме 2, строгое, т.е. бифуркационная диаграмма Σ (в общем случае) не совпадает с $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$.

Таким образом, при ненулевых значениях параметров g и λ следует различать 18 типов диаграмм (рис. 2).

Рис. 2. 18 типов бифуркационных диаграмм

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для случая $\lambda = 0$ бифуркационные диаграммы и перестройки торов Лиувилля при критических значениях отображения момента были найдены в работах М. П. Харламова [8], [9]. Аналогичные результаты для $g = 0$ были получены П. Е. Рябовым в [15]. Инварианты Фоменко–Цишанга для случаев $\lambda = 0$ и $g = 0$ были вычислены в работах А. В. Болсинова, П. Рихтера и А. Т. Фоменко [13] и П. В. Морозова [20] соответственно.

§ 4. Семейства торов и их перестройки внутри 18 камер

При движении вдоль оси g (при $\lambda = 0$), т.е. проходя по нижней границе камер 1, 2, 6 и 7 (см. рис. 1), получаем четыре типа бифуркационных диаграмм случая Ковалевской (рис. 3). При движении вдоль оси λ (при $g = 0$), т.е. проходя по левой боковой границе камер 1, 2', 6', 7', также получаем четыре типа бифуркационных диаграмм.

В следующих двух теоремах полностью описаны перестройки и семейства торов на границах камер 1, 2, 2', 6, 6', 7, 7'.

ТЕОРЕМА 3 (М. П. Харламов, П. Е. Рябов; см. [5]). *При $g = 0$ в прообразах всех гладких дуг бифуркационных диаграмм лежат перестройки торов Лиувилля, которые описываются следующими 3-атомами:*

Дуги бифуркационных диаграмм	Тип 3-атома
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_9, \alpha_{10}, \alpha_{11}, \alpha_{12}$	A
$\alpha_3, \alpha_7, \alpha_8$	$2A$
δ_1, δ_2	A^*
$\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_5, \beta_6$	B
β_4	$2B$
γ	C_2

Регулярные точки отображения момента на $\mathbb{R}^2(h, k)$ являются образами некоторого количества торов Лиувилля. Эти торы естественным образом группируются в семейства. Они обозначены римскими цифрами I–VII (рис. 4). Число торов в каждом семействе указано в следующей таблице:

Семейство	Число торов Лиувилля
I	1
II	2
III	1
IV	1
V	1
VI	1
VII	2

Рис. 3. Бифуркационные диаграммы случая Ковалевской и случая Ковалевской-Яхьи внутри камер 1, 2, 6, 7

Рис. 4. Бифуркационные диаграммы случая Ковалевской-Яхьи при $g = 0$ и случая Ковалевской-Яхьи внутри камер 1, 2', 6', 7'

Следующая теорема доказана М. П. Харламовым в [8], [9]. Здесь она приводится в обозначениях, взятых из [13].

ТЕОРЕМА 4 (М. П. Харламов). *При $\lambda = 0$ в прообразах всех гладких дуг бифуркационных диаграмм лежат боттовские перестройки торов Лиувилля, которые описываются следующими 3-атомами:*

Дуги бифуркационных диаграмм	Тип 3-атома
$\alpha_1, \gamma_1, \gamma_4$	A
$\delta_1, \delta_2, \alpha_2, \gamma_7$	$2A$
γ_2	$2A^*$
$\beta_1, \gamma_3, \gamma_5$	B
β_3, γ_6	$2B$
β_2	C_2

Число торов Лиувилля в каждом семействе (1)–(5) (см. рис. 3) указано в следующей таблице:

Семейство	Число торов Лиувилля
(1)	1
(2)	2
(3)	2
(4)	1
(5)	2

Используя теоремы 3, 4, можно описать перестройки торов в камерах, близких к осям. В предположении боттовости можно осуществить переход внутрь камер 1, 2, 2', 6, 6', 7, 7' с границ и таким образом перенести перестройки и семейства торов.

ТЕОРЕМА 5 (Н. С. Славина; см. [18]). *В интегрируемом случае Ковалевской–Яхьи в прообразах всех гладких дуг бифуркационных диаграмм, за исключением конечного числа точек на них, лежат боттовские перестройки торов Лиувилля.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В интегрируемом случае Ковалевской–Яхьи боттовость явно не доказана. Но из невырожденности критических точек ранга 0 следует, что в окрестностях этих точек лежат боттовские перестройки. Эта идея лежит в основе доказательства предыдущей теоремы (более подробно см. [18]).

В камерах 1, 1'–9, 9' на рис. 5–13 гладкие дуги бифуркационных диаграмм обозначены малыми греческими буквами с индексами.

Рис. 5. Бифуркационные диаграммы в камерах 1, 1'

Рис. 6. Бифуркационные диаграммы в камерах 2, 2'

Рис. 7. Бифуркационные диаграммы в камерах 3, 3'

Рис. 8. Бифуркационные диаграммы в камерах 4, 4'

Рис. 9. Бифуркационные диаграммы в камерах 5, 5'

Рис. 10. Бифуркационные диаграммы в камерах 6, 6'

Рис. 11. Бифуркационные диаграммы в камерах 7, 7'

Рис. 12. Бифуркационные диаграммы в камерах 8, 8'

Рис. 13. Бифуркационные диаграммы в камерах 9, 9'

Таблица 1. Соответствие обозначений в случаях Ковалевской, Ковалевской–Яхьи и Ковалевской–Яхьи при $g = 0$

Случай $\lambda = 0$	Общий случай	Случай $g = 0$	Тип перестройки
α_1	α_1	α_1	A
γ_1	β_1	α_2	A
—	α_2	β_3	B
γ_5	β_2	—	B
—	α_3	α_4	A
γ_4	β_3	—	A
β_1	α_4	β_2	B
γ_3	β_4	β_1	B
β_2	α_5	γ	C_2
γ_2	β_5	δ_1, δ_2	$2A^*$
—	β_6	α_5, α_6	$2A$
—	α_7	β_4	$2B$
γ_6	β_7	—	$2B$
—	α_8	α_7	$2A$
γ_7	β_8	—	$2A$
β_3	α_9	—	$2B$
—	β_9	β_5, β_6	$2B$
α_2	α_{10}	—	$2A$
—	β_{10}	α_9, α_{10}	$2A$
δ_1, δ_2	α_{10}, γ_2	—	$4A$
—	β_{10}, δ_2	α_3, α_8	$4A$
δ_1	α_1, α_3	α_{11}, α_{12}	$2A$
γ_1, γ_4	β_1, β_3	α_3	$2A$
—	γ_1	—	A
—	δ_1	—	A
—	γ_2	—	$2A$
—	δ_2	—	$2A$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Внутри камеры 1 можно попасть с нижней границы ($\lambda = 0$) и с левой боковой границы ($g = 0$) (см. рис. 3 и рис. 4). Так как на этих границах обозначения не согласованы, то возникнут разные обозначения для одних и тех же дуг диаграммы и семейств торов (см. теоремы 3 и 4). Поэтому в [25] были введены единые обозначения во всех 18 камерах, т.е. дуги бифуркационных диаграмм, которые не перестраиваются при переходе из камеры в камеру,

обозначены одинаково. Таблица 1 (взятая из [25]) показывает соответствие разных обозначений (из теорем 3, 4 и общего случая) одних и тех же дуг бифуркационной диаграммы на границах камер и внутри них. С учетом теорем 3, 4, 6 в ней указан тип перестройки на дугах бифуркационных диаграмм.

ТЕОРЕМА 6 (Н. С. Славина). *В случае Ковалевской–Яхьи в камерах 1, 1'–9, 9' (см. рис. 5–13) в прообразах всех гладких дуг бифуркационных диаграмм лежат боттовские перестройки следующих типов:*

Дуги бифуркационных диаграмм	Тип 3-атома
$\alpha_1, \beta_1, \alpha_3, \beta_3, \gamma_1, \delta_1$	A
$\beta_6, \alpha_8, \beta_8, \alpha_{10}, \beta_{10}, \gamma_2, \delta_2$	$2A$
β_5	$2A^*$
$\alpha_2, \beta_2, \alpha_4, \beta_4$	B
$\alpha_7, \beta_7, \alpha_9, \beta_9$	$2B$
α_5	C_2

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что вертикальная левая граница камер 1, 2', 6', 7' соответствует случаю $g = 0$, а нижняя граница камер 1, 2, 6, 7 соответствует случаю $\lambda = 0$. На границах известны перестройки и количества торов (теоремы 3, 4). В предположении боттовости можно осуществить переход, продолжая перестройки и семейства торов с оси $g = 0$ (границы камер) внутрь камер 1, 2' и с оси $\lambda = 0$ (границы камер) внутрь камер 1, 2 (см. рис. 4 и рис. 3). В остальных камерах перестройки и семейства торов определяются путем перехода из соседних камер (см. рис. 1). Таким способом вычисляются перестройки на всех дугах бифуркационных диаграмм, кроме дуг $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ в камерах 1', 3, 3'–9, 9'. Соответствующие им перестройки будут определены в последующих параграфах (см. предложение 1). Здесь же их описание приводится для полноты.

Камеры 1, 2 и 2'. При переходе с вертикальной границы камер 1 и 2' внутрь дуга α_3 , которой соответствовала перестройка $2A$, распадается на две дуги с перестройками A . Обозначим эти дуги β_1 и β_3 . Точка z_1 переходит в точку возврата B_1 . Появляется новая точка касания U_1 , справа от которой отсекается часть кривой Σ_2 (см. [15]), а на кривой Σ_1 появляется новая перестройка. Обозначим дугу с новой перестройкой β_2 . При таком переходе остальная часть диаграммы не меняется, поэтому все перестройки переносятся.

При переходе с нижней границы камер 1 и 2 дуга δ_1 с перестройкой $2A$ распадается на две дуги α_1 и α_3 с перестройками A , точка e_1 переходит в точку возврата A_1 и появляется новая точка касания V_1 . Перестройки входящих и выходящих из нее дуг известны в силу перехода с оси $g = 0$. Остальная часть диаграммы не меняется при данном переходе, поэтому остальные перестройки переносятся. Таким образом, становится известна перестройка на дуге β_2 (см. рис. 3).

Камера 3. При переходе из камеры 2 в камеру 3 “клюв” с точкой возврата B_2 пересекает дугу α_3 . Обозначим через X_2 и X_3 точки пересечения “клюва”

с дугой α_3 , а новую точку возврата – через B_3 . На дугах X_2X_3 , B_3X_2 возникают неизвестные перестройки. Обозначим эти дуги γ_2 и δ_1 соответственно. Дуга B_3X_3 – продолжение дуги β_2 , поэтому перестройка на этой дуге известна и обозначение дуги сохранено. Остальные перестройки переносятся, так как другая часть бифуркационной диаграммы не меняется.

Камера 6. При переходе из камеры 3 в камеру 6 “клюв” с точкой возврата B_3 пересекает дугу α_1 . Обозначим через X_4 и X_5 точки пересечения “клюва” с дугой α_1 . На дуге X_4X_5 возникает неизвестная перестройка. Обозначим эту дугу α_{10} . Соответствующая ей перестройка будет определена ниже, в камере 7. Так как другая часть бифуркационной диаграммы не меняется, то другие перестройки автоматически переносятся.

Камера 7. При переходе из камеры 6 в камеру 7 точки X_1 и X_3 приближаются к точке A_1 , затем они исчезают и возникает новая точка возврата A_4 . В результате этого перехода не возникает новых дуг с неизвестными перестройками.

Также в камере 7 можно попасть с нижней границы ($\lambda = 0$). При таком переходе дуга δ_1 с перестройкой $2A$ распадается на дуги α_1 и α_3 с перестройками A . Точка e_2 переходит в точку возврата A_4 , возникают дуги δ_1 и γ_2 с неизвестными перестройками, появляется точка касания V_1 . Дуга α_2 переходит в дугу α_{10} , а значит, дуге α_{10} соответствует перестройка $2A$.

Камера 8. При переходе из камеры 7 в камеру 8 точки X_2 и U_2 приближаются к точке A_4 , затем они исчезают и возникают новая точка возврата A_3 , новая точка касания V_3 и новая точка пересечения Z_2 . Дуги V_3Z_2 и V_3A_3 – продолжение дуг β_6 и α_2 соответственно, поэтому перестройки на них известны и обозначение дуг сохранено. Еще одна неизвестная перестройка возникает на дуге A_3Z_2 . Обозначим эту дугу γ_1 . Остальные перестройки переносятся автоматически.

Камера 9. При переходе из камеры 8 в камеру 9 точки V_1 и V_3 приближаются друг к другу, затем они исчезают, пропадают соединяющие их дуги β_5 и α_3 . Остальная часть бифуркационной диаграммы не меняется, поэтому переносим перестройки.

Камера 4. При переходе из камеры 3 в камеру 4 точки X_1 и X_3 приближаются к точке A_1 , затем они исчезают и возникает новая точка возврата. Ее нужно обозначить A_4 , как и возникшую в камере 7 точку возврата. Камера 4 граничит с камерой 7 (см. рис. 1), поэтому можно осуществить переход из одной камеры в другую. При таком переходе из камеры 7 в камеру 4 часть бифуркационной диаграммы, содержащая точку возврата A_4 , не меняется, поэтому обозначение точки переносится в камеру 4.

Камера 5. При переходе из камеры 4 в камеру 5 точки X_2 и U_2 приближаются к точке A_4 , затем они исчезают и возникают новая точка возврата A_3 , новая точка касания V_3 и новая точка пересечения Z_2 . Дуги V_3Z_2 и V_3A_3 – продолжение дуг β_6 и α_2 соответственно, поэтому перестройки на них известны и обозначения дуг сохранены. Обозначения новых точек взяты из камеры 8, так как она граничит с камерой 5 (см. рис. 1). При переходе из камеры 8 в камеру 5 часть бифуркационной диаграммы, которая содержит точки A_3 , V_3 , Z_2 , не меняется, поэтому все обозначения сохраняются.

Камера 1'. При переходе из камеры 5 в камеру 1' точки V_1 и V_3 приближаются друг к другу, затем они исчезают, пропадают соединяющие их дуги β_5 и α_3 . Остальная часть бифуркационной диаграммы не меняется, поэтому переносим перестройки.

Камера 3'. При переходе из камеры 2' в камеру 3' "клов" с точкой возврата A_2 пересекает дугу β_3 . Обозначим через Y_2 и Y_3 точки пересечения "клова" с дугой β_3 . Неизвестную перестройку на дуге Y_2Y_3 обозначим через δ_2 . Новую точку возврата нужно обозначить через A_3 , а неизвестную перестройку на дуге A_3Y_2 обозначить γ_1 . Эти обозначения взяты из камеры 1', так как при последовательном переходе $1' \rightarrow 5' \rightarrow 4' \rightarrow 3'$ (см. рис. 1) часть бифуркационной диаграммы, содержащая точку возврата A_3 и дугу γ_1 , не меняется.

Дуга A_3Y_3 – продолжение дуги α_2 , поэтому перестройка на этой дуге известна и обозначение дуги сохранено. Остальные перестройки переносятся, так как другая часть бифуркационной диаграммы не меняется.

Камера 6'. При переходе из камеры 3' в камеру 6' "клов" с точкой возврата A_3 пересекает дугу β_1 . Обозначим через Y_4 и Y_5 точки пересечения "клова" с дугой β_1 . На дуге Y_4Y_5 возникает неизвестная перестройка. Обозначим эту дугу β_{10} . Соответствующая ей перестройка будет определена ниже, в камере 7'. Так как другая часть бифуркационной диаграммы не меняется, то другие перестройки автоматически переносятся.

Камера 7'. При переходе из камеры 6' в камеру 7' точки Y_1 и Y_3 приближаются к точке B_1 , затем они исчезают и возникает новая точка возврата B_4 . В результате этого перехода не возникает новых дуг с неизвестными перестройками.

Также в камеру 7' можно попасть с левой вертикальной границы ($g = 0$). При таком переходе дуга α_3 с перестройкой $2A$ распадается на дуги β_1 и β_3 с перестройками A . Точка z_6 переходит в точку возврата B_4 , возникают дуги γ_1 и δ_2 с неизвестными перестройками, появляется точка касания U_1 . Дуга α_9, α_{10} переходит в дугу β_{10} , а значит, дуге β_{10} соответствует перестройка $2A$.

Камера 8'. При переходе из камеры 7' в камеру 8' точки Y_2 и V_2 приближаются к точке B_4 , затем они исчезают и возникают новая точка возврата B_3 , новая точка касания U_3 и новая точка пересечения Z_2 . На дуге U_3Z_2 отсутствуют критические движения (см. [15]), поэтому она не является частью бифуркационной диаграммы. Дуга U_3B_3 – продолжение дуги β_2 , поэтому перестройка на ней известна и обозначение дуги сохранено. Еще одна неизвестная перестройка возникает на дуге B_3Z_2 . Обозначим эту дугу δ_1 . Остальные перестройки переносятся автоматически.

Для новой точки пересечения взято обозначение Z_2 , которое возникло в камере 5. Дело в том, что в камеру 8 можно попасть из камеры 5, двигаясь последовательно через камеры 1', 9' (см. рис. 1). При таком движении часть бифуркационной диаграммы, содержащая точку Z_2 , не меняется, поэтому обозначение переносится. По аналогичным причинам новая дуга обозначена через δ_1 .

Камера 9'. При переходе из камеры 8' в камеру 9' точки U_1 и U_3 приближаются друг к другу, затем они исчезают, пропадают соединяющие их дуги α_5

и β_3 . Остальная часть бифуркационной диаграммы не меняется, поэтому переносим перестройки.

Камера 4'. При переходе из камеры 3' в камеру 4' точки Y_1 и Y_3 приближаются к точке B_1 , затем они исчезают и возникает новая точка возврата. Ее нужно обозначить B_4 , как и возникшую в камере 7' точку возврата. Камера 4' граничит с камерой 7' (см. рис. 1), поэтому можно осуществить переход из одной камеры в другую. При таком переходе из камеры 7' в камеру 4' часть бифуркационной диаграммы, содержащая точку возврата B_4 , не меняется, поэтому обозначение точки переносится в камеру 4'.

Камера 5'. При переходе из камеры 4' в камеру 5' точки Y_2 и V_2 приближаются к точке B_4 , затем они исчезают и возникают новая точка возврата B_3 , новая точка касания U_3 и новая точка пересечения Z_2 . На дуге U_3Z_2 отсутствуют критические движения (см. [15]), поэтому она не является частью бифуркационной диаграммы. Дуга U_3B_3 – продолжение дуги β_2 , поэтому перестройка на ней известна и обозначение дуги сохранено. Обозначения новых точек взяты из камеры 8', так как она граничит с камерой 5' (см. рис. 1). При переходе из камеры 8' в камеру 5' часть бифуркационной диаграммы, которая содержит точки B_3 , U_3 , Z_2 , не меняется, поэтому все обозначения сохраняются.

Теорема 6 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В случае Ковалевской–Яхьи в камерах 1, 1'–9, 9' (см. рис. 5–13) в прообразах регулярных точек отображения момента лежит некоторое число торов Лиувилля, которые группируются в семейства. Число торов в каждом семействе I–VII равно одному. (Данный результат взят из работы П. П. Андреевского [25]. Для корректного определения семейств торов Лиувилля в общем случае он ввел новое, более мелкое разбиение торов на семейства.)

§ 5. Классификация невырожденных положений равновесия

Напомним, что $M_g^4 = \{f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, f_2 = s_1r_1 + s_2r_2 + s_3r_3 = g\}$, где f_1 и f_2 – функции, лежащие в ядре скобки Ли–Пуассона и являющиеся первыми интегралами уравнений (2.2).

Рассмотрим ограничения гамильтониана H и интеграла K на M_g^4 , обозначив их $H_{g\lambda}$ и $K_{g\lambda}$ соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Точка $x \in M_g^4$ называется *точкой ранга 0* (или *положением равновесия*), если $dH_{g\lambda}(x) = dK_{g\lambda}(x) = 0$.

ТЕОРЕМА 7 (Н. С. Славина; см. [18]). *В случае Ковалевской–Яхьи все точки ранга 0 на фазовом пространстве системы имеют следующие координаты:*

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \pm \sqrt{z^2 - 1} \frac{2gz - \lambda}{2z^2 - 1}, & \omega_2 &= 0, & \omega_3 &= \frac{2gz - \lambda}{2z^2 - 1}, \\ \nu_1 &= \pm \frac{\sqrt{z^2 - 1}}{z}, & \nu_2 &= 0, & \nu_3 &= \frac{1}{z}, \end{aligned}$$

где z – любой действительный корень уравнения

$$z(z^2 - 1) \frac{(2gz - \lambda)^2}{(2z^2 - 1)^2} - \lambda z(z^2 - 1) \frac{2gz - \lambda}{2z^2 - 1} \pm \sqrt{z^2 - 1} = 0. \quad (5.1)$$

Других критических точек у гамильтонианов $H(g, \lambda)$ на фазовом пространстве M_g^4 нет.

Особые точки бифуркационной диаграммы Σ – это точки пересечения, касания, излома гладких дуг диаграммы или же изолированные точки, которые этим дугам вообще не принадлежат. Другими словами, это те точки, в которых Σ не является гладкой кривой (см. [4; т. 1, гл. 9]). В случае Ковалевской–Яхьи изолированных точек нет (см. [15]), особыми точками бифуркационной диаграммы являются точки пересечения, касания и возврата.

Пусть на (M^4, Ω) задана система с гамильтонианом H и дополнительным интегралом K . Пусть точка $x \in M^4$ – точка ранга 0, т.е. x – неподвижная точка пуассонова действия группы $\mathbb{R}^2$. Эта группа естественно действует на касательной плоскости $T_x M$ к многообразию M в точке x . Так как группа сохраняет форму Ω , то она индуцирует симплектическое преобразование в $T_x M$. Тогда на $T_x M$ корректно определены два оператора, $A_H = \Omega^{-1} d^2 H$ и $A_K = \Omega^{-1} d^2 K$, порождающие в алгебре Ли $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$ некоторую коммутативную подалгебру $\mathfrak{h}(H, K)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Положение равновесия x называется *невыврожденным*, если подалгебра $\mathfrak{h}(H, K)$ является картановской подалгеброй в алгебре Ли $\mathfrak{sp}(4, \mathbb{R})$.

Невырожденные положения равновесия обладают многими замечательными свойствами. В частности, их окрестности в M^4 представимы в виде почти прямого произведения 2-атомов (см. [4; т. 1, гл. 9]).

Напомним, как определяется структура почти прямого произведения в случае двух степеней свободы.

Пусть V_1 и V_2 – два атома со своими симплектическими структурами и функциями Морса f_1 и f_2 . Пусть на каждом атоме симплектически действует одна и та же конечная группа G , сохраняющая функции f_1 и f_2 (см. [26]). Тогда на прямом произведении $V_1 \times V_2$ определена симплектическая структура как сумма двух структур атомов. Определена также структура лиувиллева слоения, задаваемое парой коммутирующих функций f_1, f_2 . Определено действие группы G , заданное формулой $\varphi(g)(x_1, x_2) = (\varphi_1(g)(x_1), \varphi_2(g)(x_2))$, где φ_i – действие G на атоме V_i . Действие φ симплектическое и сохраняет структуру слоения Лиувилля. Можно рассмотреть фактормногообразие $(V_1 \times V_2)/G$. Оно симплектическое, имеет естественную структуру слоения Лиувилля и является четырехмерной окрестностью связного особого слоя.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Описанная выше четырехмерная особенность называется *особенностью типа почти прямого произведения*.

Это, а также другие важные свойства невырожденных особенностей подробно обсуждаются в [4; т. 1, гл. 9].

ТЕОРЕМА 8 (Н. С. Славина; см. [18]). *В случае Ковалевской–Яхьи при небифуркационных значениях параметров g и λ все положения равновесия невырождены, причем в прообразе каждой точки пересечения бифуркационных кривых лежит ровно одна критическая точка ранга 0.*

ЗАМЕЧАНИЕ 6. В работе П. Е. Рябова [17] описаны критические точки ранга 0 и указан способ определения их типов. Однако окончательной классификации в виде таблицы с полным описанием типов невырожденных особых точек ранга 0 и с представлением их окрестностей в виде почти прямого произведения в [17] получено не было. Поскольку знание топологии необходимо для вычисления меток изоэнергетических молекул, то данная классификация была проведена нами до конца в [18].

Переформулируем теорему 10 из [18] в новых обозначениях, единых для всех 18 камер.

ТЕОРЕМА 9 (Н. С. Славина; см. [18]). *В прообразе каждой из 13 точек пересечения дуг бифуркационных диаграмм, а именно точек $M, Z_1, Z_2, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5$ (см. рис. 5–13), лежит ровно по одной критической точке ранга 0. Представление соответствующих 13 особенностей в виде почти прямого произведения указано в следующей таблице:*

Точка	Тип	Почти прямое произведение
M	центр-центр	$A \times A$
Z_2	центр-центр	$A \times A$
X_2	центр-центр	$A \times A$
Y_2	центр-центр	$A \times A$
X_4	центр-центр	$A \times A$
Y_4	центр-центр	$A \times A$
X_3	центр-седло	$A \times B$
Y_3	центр-седло	$A \times B$
X_5	центр-седло	$A \times B$
Y_5	центр-седло	$A \times B$
Z_1	седло-седло	$(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$
X_1	седло-седло	$B \times B$
Y_1	седло-седло	$B \times B$

ЗАМЕЧАНИЕ 7. В формулировке теоремы 10 работы [18] допущена опечатка, а именно пропущена точка N_4 , которая обозначена на рисунках в [18]. В прообразе этой точки лежит невырожденное положение равновесия, окрестность которого имеет тип почти прямого произведения атомов A . В обозначениях настоящей работы это точка Z_2 (см. теорему 9 и бифуркационные диаграммы на рис. 5–13, в камерах $1', 5, 5', 8, 8', 9, 9'$).

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Зная тип особенности невырожденной точки ранга 0, можно однозначно построить для этой точки круговую молекулу с метками (см. [4; т. 1, гл. 9]). В табл. 2 приведены круговые молекулы с r -метками для всех 13 точек из теоремы 9, где римскими цифрами обозначены соответствующие семейства

Таблица 2. Круговые молекулы невырожденных положений равновесия

M	$A_{\alpha_1} \frac{\text{I}}{r=0} A_{\beta_1}$	Z_2	$A_{\gamma_1} \frac{\text{V}}{r=0} A_{\beta_6}$
X_2	$A_{\beta_8} \frac{\text{VII}}{r=0} A_{\gamma_2}$	Y_2	$A_{\alpha_8} \frac{\text{VI}}{r=0} A_{\delta_2}$
X_4	$A_{\delta_1} \frac{\text{IV}}{r=0} A_{\alpha_{10}}$	Y_4	$A_{\gamma_1} \frac{\text{V}}{r=0} A_{\beta_{10}}$
X_3	<div>$\begin{array}{c} A_{\gamma_2} \xrightarrow{\text{II}} \\ A_{\gamma_2} \xrightarrow{\text{VII}} \end{array} B_{\beta_7} \xrightarrow{\text{II}} A_{\alpha_3}$<p>BCE $r = \infty$</p></div>	Y_3	<div>$A_{\beta_3} \xrightarrow{\text{III}} B_{\alpha_7} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{III}} A_{\delta_2} \\ \xrightarrow{\text{VI}} A_{\delta_2} \end{array}$<p>BCE $r = \infty$</p></div>
X_5	<div>$\begin{array}{c} A_{\alpha_{10}} \xrightarrow{\text{I}} \\ A_{\alpha_{10}} \xrightarrow{\text{IV}} \end{array} B_{\beta_{2(7)}} \xrightarrow{\text{I}} A_{\alpha_1}$<p>BCE $r = \infty$</p></div>	Y_5	<div>$A_{\beta_1} \xrightarrow{\text{I}} B_{\alpha_{2(7)}} \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{I}} A_{\beta_{10}} \\ \xrightarrow{\text{V}} A_{\beta_{10}} \end{array}$<p>BCE $r = \infty$</p></div>
X_1	<div> <p>BCE $r = 0$</p></div>	Y_1	<div> <p>BCE $r = 0$</p></div>
Z_1	<div> </div>		

торов. Рядом с перестройками греческими буквами с индексами обозначены дуги диаграмм, на которых данные перестройки происходят. Для точек X_1, Y_1 возникают две возможности расстановки семейств торов (второй вариант указан римскими цифрами в скобках). Далее (в предложении 4) эта неопределенность будет устранена, а именно будет показано, что на самом деле вариант в скобках не реализуется. Круговые молекулы нужны нам для дальнейших вычислений, а именно для построения допустимых систем координат и для определения взаимного расположения базисных циклов в семействах торов.

ЗАМЕЧАНИЕ 9. Круговые молекулы без меток точек $Z_2, X_2, Y_2, X_3, Y_3, X_4, Y_4$ были построены автором совместно с П. П. Андреяновым при помощи программы по визуализации перестроек торов, написанной на языке Wolfram Mathematica 6.0 по алгоритму из работы [15]. Прообраз этих точек состоит из нескольких компонент связности, одна из которых содержит невырожденное положение равновесия, а другие компоненты связности содержат точки ранга 1 или 2. Круговые молекулы в табл. 2 указаны для тех компонент связности, которые содержат точки ранга 0.

В работе М. П. Харламова [19] было введено понятие классов эквивалентности относительно определяющих параметров на множестве точек ранга 0. Оказалось, что таких классов 13, если рассматривать полный прообраз точки, отвечающей относительно равновесию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. В случае Ковалевской–Яхьи в камерах $1', 3, 3'-9, 9'$ в прообразах гладких дуг $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$ бифуркационных диаграмм (см. рис. 5–13) лежат боттовские перестройки следующих типов:

Дуги бифуркационных диаграмм	Тип 3-атома
γ_1, δ_1	A
γ_2, δ_2	2A

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 9 известно, что точкам пересечения X_4, Y_4 бифуркационных кривых соответствуют невырожденные положения равновесия, окрестность которых представима в виде почти прямого произведения атомов $A \times A$. При переходе через дуги γ_1, δ_1 (см. рис. 10) появляются торы семейств V, IV соответственно (см. замечание 5). Из вышесказанного следует, что на дугах бифуркационных диаграмм γ_1, δ_1 происходят перестройки типа A.

Рассмотрим прообразы точек X_2, Y_2 . Каждый из них состоит из четырех компонент связности и лишь одна компонента связности содержит точку ранга 0, окрестность которой представима в виде почти прямого произведения атомов $A \times A$ (теорема 9). Для наглядности покажем это на рис. 14.

При переходе через дугу γ_2 рождаются два тора семейств II и VII, а при переходе через дугу δ_2 – два тора семейств III и VI (см. замечание 5). Из этого следует, что на дугах γ_2, δ_2 происходят перестройки типа 2A.

Предложение доказано.

Рис. 14. Полный прообраз точек X_2 , Y_2

ЗАМЕЧАНИЕ 10. В работе [16] приведены формулы для показателей Морса–Ботта, из которых также могут быть определены перестройки на дугах γ_1 , γ_2 , δ_1 , δ_2 .

§ 6. Круговые молекулы вырожденных одномерных орбит

Теперь будем рассматривать на бифуркационной диаграмме точки возврата A_i , B_i , $i = 1, 2, 3, 4$, и касания U_j , V_j , $j = 1, 2, 3$. В прообразах этих точек лежат одномерные вырожденные орбиты, поскольку бифуркационная диаграмма для невырожденной одномерной орбиты выглядит как дуга гладкой кривой (это следует из теоремы Элиассона; см. [4], [27]).

Для вычисления круговых молекул вырожденных одномерных орбит воспользуемся следующими двумя предложениями, доказанными П. В. Морозовым.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 (П. В. Морозов; см. [20]). *На ребрах, соединяющих два седловых атома круговой молекулы вырожденной одномерной орбиты, r -метки равны ∞ . На ребрах, соединяющих атом A с седловым, r -метки конечны. В обоих случаях метки ε равны 1.*

Обозначим через B – A ребро круговой молекулы вырожденной орбиты, которое соединяет бифуркацию B с бифуркацией A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (П. В. Морозов; см. [20]). *Пусть бифуркационная диаграмма представляет собой кривую с точкой возврата v , причем 3-атомы, соответствующие двум дугам, примыкающим к точке v , имеют типы B и A . Тогда на ребрах круговой молекулы B – A метки r равны 0.*

Далее через $r[x-y]$ будем обозначать r -метку на ребре молекулы, которое соединяет атомы, соответствующие бифуркациям x и y . Напомним *правило сложения меток* (см. [4; т. 2]): пусть для ребер, относящихся к некоторому семейству торов, известны метки $r[x-y] = r_0$ и $r[y-z] = \infty$; тогда $r[x-z] = r_0$ в том же семействе.

ТАБЛИЦА 3. Круговые молекулы вырожденных одномерных орбит

A_1	$A_{\alpha_3} \frac{\text{II}}{r=0} B_{\alpha_4}$ $r = \infty$ все $\varepsilon = 1$	B_1	$A_{\beta_3} \frac{\text{III}}{r=0} B_{\beta_4}$ $r = \infty$ все $\varepsilon = 1$
A_2	$A_{\alpha_8} \frac{\text{V}}{r=0} B_{\alpha_7} \cup A_{\alpha_8} \frac{\text{VI}}{r=0} B_{\alpha_7}$ $r = \infty$ все $\varepsilon = 1$	B_2	$A_{\beta_8} \frac{\text{IV}}{r=0} B_{\beta_7} \cup A_{\beta_8} \frac{\text{VII}}{r=0} B_{\beta_7}$ $r = \infty$ все $\varepsilon = 1$
A_3	$A_{\gamma_1} \frac{\text{V}}{r=0} B_{\alpha_2}$ $r = \infty$ все $\varepsilon = 1$	B_3	$A_{\delta_1} \frac{\text{IV}}{r=0} B_{\beta_2}$ $r = \infty$ все $\varepsilon = 1$
A_4	$A_{\gamma_2} \frac{\text{VII}}{r=0} B_{\alpha_9} \cup A_{\gamma_2} \frac{\text{II}}{r=0} B_{\alpha_9}$ $r = \infty$ все $\varepsilon = 1$	B_4	$A_{\delta_2} \frac{\text{III}}{r=0} B_{\beta_9} \cup A_{\delta_2} \frac{\text{VI}}{r=0} B_{\beta_9}$ $r = \infty$ все $\varepsilon = 1$
V_1	$A_{\alpha_3} \frac{\text{II}}{r=0} A_{\beta_5}^* \frac{\text{IV}}{r=1/2} A_{\beta_6}$ $\cup A_{\beta_6} \frac{\text{V}}{r=1/2} B_{\alpha_2}$ $r = \infty$ все $\varepsilon = 1$	V_3	$A_{\alpha_3} \frac{\text{II}}{r=0} A_{\beta_5}^* \frac{\text{IV}}{r=1/2} A_{\beta_6}$ $\cup A_{\beta_6} \frac{\text{V}}{r=1/2} B_{\alpha_2}$ $r = \infty$ все $\varepsilon = 1$
U_1	$A_{\beta_3} \frac{\text{III}}{r=0} C_{2\alpha_5} \frac{\text{I}}{r=\infty} B_{\beta_2}$ $r = \infty$ все $\varepsilon = 1$	U_3	$A_{\beta_3} \frac{\text{III}}{r=0} C_{2\alpha_5} \frac{\text{I}}{r=\infty} B_{\beta_2}$ $r = \infty$ все $\varepsilon = 1$
U_2	$A_{\beta_8} \frac{\text{IV}}{r=1/2} B_{\alpha_9} \frac{\text{IV}}{r=\infty} A_{\beta_5}^*$ $\cup A_{\beta_8} \frac{\text{VII}}{r=1/2} B_{\alpha_9} \frac{\text{I}}{r=\infty} A_{\beta_5}^*$ все $\varepsilon = 1$	V_2	$A_{\beta_6} \frac{\text{V}}{r=0} B_{\beta_9} \frac{\text{VI}}{r=0} A_{\alpha_8}$ $\cup A_{\beta_6} \frac{\text{IV}}{r=0} C_{2\alpha_5} \frac{\text{I}}{r=\infty} B_{\beta_9}$ все $\varepsilon = 1$

В статье [18] описаны вырожденные одномерные орбиты, соответствующие точкам возврата бифуркационных кривых в камерах 1, 2, 2', 6, 6', 7, 7'. Пользуясь идеей доказательства теоремы 13 из [18], полностью опишем круговые молекулы всех вырожденных одномерных орбит.

ЗАМЕЧАНИЕ 11. Напомним, что в случае Ковалевской–Яхьи возникла необходимость ввести более мелкое разбиение торов на семейства (см. замечание 5) по сравнению с разбиением в классическом случае Ковалевской и в случае Ковалевской–Яхьи при $g = 0$ (см. теоремы 3, 4). Приведем полное доказательство следующей теоремы, чтобы фиксировать новые семейства торов. Это необходимо для определения взаимного расположения базисных циклов в семействах торов, что будет проделано далее.

ТЕОРЕМА 10 (Н. С. Славина). *Круговые молекулы с r - и ε -метками для точек бифуркационной диаграммы $A_i, B_i, i = 1, 2, 3, 4, U_j, V_j, j = 1, 2, 3$, прообразы которых содержат вырожденные одномерные орбиты, приведены в табл. 3.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Прообразы точек возврата A_1, B_1, A_3, B_3 и точек касания U_1, U_3 состоят из одной компоненты связности. Прообразы точек возврата A_2, B_2, A_4, B_4 и точек касания V_1, V_2, V_3, U_2 состоят из двух компонент связности. В табл. 3 указаны полные прообразы всех вышеперечисленных вырожденных одномерных орбит.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Круговые молекулы точек возврата A_1, B_1, A_3, B_3 и точек касания U_1, U_3 можно построить очевидным образом, используя определения атомов A, B, C_2 и зная, какие семейства торов перестраиваются в окрестностях этих точек. Оказалось, что круговые молекулы этих точек состоят из одной компоненты связности.

Рассмотрим точку A_2 . На рис. 15 указаны возможности построения круговой молекулы.

Рис. 15. Варианты круговых молекул для точки A_2

Первый вариант круговой молекулы состоит из двух компонент связности, а второй и третий – из одной.

Дуге α_7 соответствует перестройка типа $2B$. Из круговой молекулы точки Y_1 , в прообразе которой лежит невырожденное положение равновесия типа

седло-седло, следует, что торы семейств V и VI, родившиеся на дуге α_8 , при подходе к дуге α_7 не перестраиваются в один тор, а относятся к разным атомам B. Поэтому второй вариант круговой молекулы, состоящий из одной компоненты связности, невозможен. Третий вариант тоже невозможен, так как при подходе к дуге α_7 с перестройкой 2B справа торы семейств I, V сливаются в один тор семейства I, а торы семейств III, VI – в один тор семейства III.

Для точки B_2 проводим те же рассуждения, но при доказательстве используем значения числовых меток круговой молекулы точки X_1 на дуге β_7 .

Рассмотрим точки касания V_1, V_3 . Так как они являются точками касания дуги α_5 с дугой $\beta_2\beta_3$ бифуркационных кривых и в их окрестностях испытывают перестройки торы из одних и тех же семейств (см. рис. 12), то круговые молекулы этих точек полностью совпадают. Поэтому проведем все рассуждения для точки V_1 . Круговую молекулу можно построить двумя способами (рис. 16).

Рис. 16. Варианты круговых молекул для точки V_1

Рис. 17. Варианты круговых молекул для точки U_2

Заметим, что первая круговая молекула состоит из двух компонент связности, а вторая – из одной. Дуге β_5 соответствует перестройка типа $2A^*$. Из круговой молекулы точки Z_1 , в прообразе которой лежит невырожденное положение равновесия, следует, что при перестройке тора семейства II на дуге β_5

получается тор семейства IV, а при перестройке тора семейства I на дуге β_5 получается тор семейства I.

Поэтому для точки V_1 выбираем первую круговую молекулу.

Точки U_2 , V_2 возникают в классическом случае Ковалевской и в случае Ковалевской–Яхьи при $g = 0$. На рис. 17, 18 указаны варианты построения круговых молекул для этих точек.

Рис. 18. Варианты круговых молекул для точки V_2

В [13] и [20] выбор первого варианта круговой молекулы для этих точек явно не доказывается. Со слов авторов, круговые молекулы этих точек были построены с помощью компьютерного эксперимента. Будем использовать этот результат в настоящей работе.

Зная круговые молекулы точек U_2 , V_2 , можно убрать неопределенность, возникшую при расстановке семейств торов в круговых молекулах точек X_1 , Y_1 ; неподходящий вариант расстановки семейств указан в скобках (см. рис. 19, а также табл. 2).

Рис. 19. Круговые молекулы для точек X_1 , Y_1

При построении круговых молекул точек возврата A_4 , B_4 возникают аналогичные возможности, что и при построении круговых молекул точек A_2 , B_2 . При выборе подходящей круговой молекулы для точки B_4 пользуемся круговой молекулой точки Y_1 , рассматривая перестройки торов семейств I, III, V, VI

на дуге β_9 . Для точки A_4 проводим те же рассуждения, но при доказательстве используем значения числовых меток круговой молекулы точки X_1 на дуге α_9 .

Предложение 4 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 10. Для точек A_1, A_3, B_1, B_3 на ребре круговой молекулы $B-A$ метка r равна 0 в силу предложения 3. Для точек A_2, B_2, A_4, B_4 с учетом предложения 2 нам остается вычислить метки r на ребрах, ведущих в атомы A .

Рассмотрим ребро круговой молекулы точки A_2 , относящееся к семейству VI. Оно соединяет бифуркации α_8 и α_7 . Для круговой молекулы точки Y_2 имеем $r[\alpha_8-\delta_2] = 0$, а для точки Y_3 имеем $r[\delta_2-\alpha_7] = \infty$. Следовательно, по правилу сложения меток $r[\alpha_8-\alpha_7] = 0$. Теперь рассмотрим ребро круговой молекулы точки A_2 , относящееся к семейству V. Оно соединяет бифуркации α_8 и α_7 . Для точки Y_2 (см. рис. 14) имеем $r[\alpha_8-\gamma_1] = \infty$, для круговой молекулы точки Y_4 имеем $r[\gamma_1-\beta_{10}] = 0$, для круговой молекулы точки Y_5 имеем $r[\beta_{10}-\alpha_7] = \infty$. Следовательно, по правилу сложения меток $r[\alpha_8-\alpha_7] = 0$.

Рассмотрим ребро круговой молекулы точки B_2 , относящееся к семейству VII. Оно соединяет бифуркации β_8 и β_7 . Для круговой молекулы точки X_2 имеем $r[\beta_8-\gamma_2] = 0$, для точки X_3 имеем $r[\gamma_2-\beta_7] = \infty$. Следовательно, по правилу сложения меток $r[\beta_8-\beta_7] = 0$. Теперь рассмотрим ребро круговой молекулы точки B_2 , относящееся к семейству IV. Оно соединяет бифуркации β_8 и β_7 . Для точки X_2 (см. рис. 14) имеем $r[\beta_8-\delta_1] = \infty$, для круговой молекулы точки X_4 имеем $r[\delta_1-\alpha_{10}] = 0$, для круговой молекулы точки X_5 имеем $r[\alpha_{10}-\beta_7] = \infty$. Следовательно, по правилу сложения меток $r[\beta_8-\beta_7] = 0$. Аналогично получаем следующие формулы для вычисления метки r .

Для точки A_4 (рассматривая круговые молекулы точек X_1, X_3):

– для семейства VII

$$r[\alpha_9-\beta_7] = 0, \quad r[\beta_7-\gamma_2] = \infty \implies r[\alpha_9-\gamma_2] = 0;$$

– для семейства II

$$r[\alpha_9-\beta_7] = 0, \quad r[\beta_7-\gamma_2] = \infty \implies r[\alpha_9-\gamma_2] = 0.$$

Для точки B_4 (рассматривая круговые молекулы точек Y_1, Y_3):

– для семейства VI

$$r[\beta_9-\alpha_7] = 0, \quad r[\alpha_7-\delta_2] = \infty \implies r[\beta_9-\delta_2] = 0;$$

– для семейства III

$$r[\beta_9-\alpha_7] = 0, \quad r[\alpha_7-\delta_2] = \infty \implies r[\beta_9-\delta_2] = 0.$$

Рассмотрим круговые молекулы точек $U_j, V_j, j = 1, 2, 3$. С учетом предложения 3 на ребрах, соединяющих два седловых атома, метки r равны ∞ . Недостающие метки в молекулах точек $U_j, V_j, j = 1, 2, 3$, нельзя вычислить, пользуясь лишь правилом сложения меток. Поэтому доказательство теоремы будет продолжено в последующих параграфах и недостающие метки будут определены по формулам Топалова.

Чтобы применять формулы Топалова, необходимо знать топологию “круговой” трехмерной поверхности Q , так как топологические инварианты Q (группы гомологий, фундаментальная группа) являются функциями от меток молекулы. Как показал П. И. Топалов в [28], эти функции можно явно выписать во многих случаях. В реальных примерах многообразие Q обычно устроено несложно. Поэтому, зная топологию Q , можно получить некоторые соотношения между числовыми метками молекулы, которые позволят вычислить недостающие метки r, ε, n .

В следующей таблице приведены топологические типы круговых многообразий для основных 3-атомов:

3-атом	Тип кругового многообразия
Регулярная точка	$\mathbb{T}^3$
A	$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$
A^*	$\mathbb{H}^3$
B	$\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^2 + 2g)$
C_2	$\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^2 + 3g)$

Здесь $\mathbb{S}^2 + Ng$ – сфера с N ручками, $\mathbb{H}^3$ – расслоение Зейферта со слоем окружность и базой $\mathbb{T}^2$ с двумя особыми точками типа $(2, 1)$.

В следующей теореме определим топологические типы круговых многообразий Q_τ^3 всех вырожденных одномерных орбит в интегрируемом случае Ковалевской–Яхьи. Для точек $A_1, B_1, A_2, B_2, U_1, V_1, U_2, V_2$ типы круговых многообразий были определены ранее, так как эти точки возникали в классическом случае Ковалевской и в случае Ковалевской–Яхьи при $g = 0$. Так как в [13] для этих точек доказательство не приводится, приведем его здесь для полноты изложения.

ТЕОРЕМА 11. *Круговые многообразия, лежащие в прообразах окрестностей особых точек $A_i, B_i, i = 1, 2, 3, 4, U_j, V_j, j = 1, 2, 3$, имеют следующие топологические типы:*

Точка	Топологический тип кругового многообразия
A_1	$\mathbb{T}^3$
B_1	$\mathbb{T}^3$
A_2	$2\mathbb{T}^3$
B_2	$2\mathbb{T}^3$
A_3	$\mathbb{T}^3$
B_3	$\mathbb{T}^3$
A_4	$2\mathbb{T}^3$
B_4	$2\mathbb{T}^3$

Точка	Топологический тип кругового многообразия
U_1	$\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^2 + 2g)$
U_2	$2\mathbb{H}^3$
U_3	$\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^2 + 2g)$
V_1	$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \cup \mathbb{H}^3$
V_2	$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \cup \mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^2 + 2g)$
V_3	$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \cup \mathbb{H}^3$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим точку A_1 . Бифуркационная диаграмма в окрестности этой точки изображена на рис. 20.

Возьмем контур ABC_0D_0 и произведем его деформацию в контур ABC_1D_1 . Звенья AC_0 , BD_0 испытывают гладкую изотопию, не встречая точек бифуркаций. Прообраз отрезка C_iD_i , $i = 0, 1$, определяется в M^4 уравнениями $H = \text{const}$. Еще мы знаем из теоремы 7, что в окрестности точки A_1 нет критических точек гамильтониана H . Поэтому топологический тип многообразия в прообразе контура не изменится при деформации. Итак, круговое многообразие рассматриваемой особенности точки A_1 , лежащее в прообразе контура ABC_0D_0 , топологически является тором $\mathbb{T}^3$, так как контур ABC_1D_1 определяет круговую молекулу регулярной точки бифуркационной диаграммы.

Аналогично определяем, что круговые многообразия, соответствующие особым точкам B_1 , A_3 , B_3 , также являются торами $\mathbb{T}^3$, а круговые многообразия, соответствующие особым точкам U_1 , U_3 , являются прямыми произведениями окружности на двумерную сферу с g ручками $\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^2 + 2g)$.

Теперь рассмотрим особую точку A_2 . Этой точке отвечают две несвязные особенности (предложение 4), которые отображением момента спроецированы в одну точку бифуркационной диаграммы. Этим объясняется наличие для нее двух круговых молекул. На рис. 20 изображены бифуркационные диаграммы в окрестности данной особенности. Произведем деформации контуров ABC_0D_0 и EFG_0H_0 в контуры ABC_1D_1 и EFG_1H_1 соответственно. При этом топологический тип многообразия в прообразе контура не изменится: прообразы отрезков C_iD_i и G_iH_i , $i = 0, 1$, определяются в M_4^g уравнениями $H = \text{const}$, а из теоремы 7 известно, что критических точек гамильтониана H в окрестности A_2 нет. Остальные звенья контура испытывают гладкую изотопию, не встречая точек бифуркаций. Контуры ABC_1D_1 и EFG_1H_1 определяют круговые молекулы регулярных точек бифуркационных диаграмм. Значит, круговые многообразия рассматриваемых особенностей точки A_2 , лежащие в прообразах контуров ABC_0D_0 и EFG_0H_0 , топологически являются торами $\mathbb{T}^3$.

Аналогично определяем, что круговое многообразие, соответствующее особой точке B_2 , также является несвязным объединением двух торов $\mathbb{T}^3$.

Рассмотрим бифуркационную диаграмму в окрестности точки U_2 (см. рис. 20). Этой точке отвечают две несвязные особенности (предложение 4). Рассмотрим контуры ABC_0D_0 и EFG_0H_0 и произведем их деформации в контуры ABC_1D_1 и EFG_1H_1 соответственно. Звенья AC_0 , BD_0 , EG_0 , FH_0 испытывают гладкую изотопию, прообразы отрезков C_iD_i и G_iH_i , $i = 0, 1$,

Рис. 20. Бифуркационные диаграммы в окрестностях вырожденных одномерных орбит

определяются в M_4^g уравнениями $H = \text{const}$, и в окрестности U_2 критических точек гамильтониан H не имеет (см. теорему 7). Контур ABC_1D_1 и EFG_1H_1 определяют круговые молекулы 3-атома A^* кривой β_5 . Значит, круговые многообразия рассматриваемых особенностей точки U_2 , лежащие в прообразах контуров ABC_0D_0 и EFG_0H_0 , топологически являются расслоениями Зейферта $\mathbb{H}^3$ со слоем окружность и базой $\mathbb{T}^2$ с двумя особыми точками типа $(2, 1)$.

Заметим, что прообразы окрестностей особых точек V_1 и V_3 представлены одинаковыми круговыми молекулами. Поэтому рассуждения для определения топологических типов круговых многообразий аналогичные. Приведем их для окрестности точки V_1 . Этой точке отвечают две несвязные особенности (предложение 4). На рис. 20 изображены бифуркационные диаграммы в окрестности данной точки.

Произведем деформации контуров ABC_0D_0 и EFG_0H_0 в контуры ABC_1D_1 и EFG_1H_1 соответственно. При этом топологический тип многообразия в прообразе контура не изменится: прообразы отрезков C_iD_i и G_iH_i , $i = 0, 1$, определяются в M_4^g уравнениями $H = \text{const}$, а из теоремы 7 известно, что критических точек гамильтониана H в окрестности V_1 нет. Остальные звенья контура испытывают гладкую изотопию, не встречая точек бифуркаций.

Контур ABC_1D_1 определяет круговую молекулу неособой точки бифуркационной диаграммы (более точно – круговую молекулу 3-атома A кривой β_6), контур EFG_1H_1 определяет круговую молекулу 3-атома A^* кривой β_5 .

Значит, круговое многообразие рассматриваемой особой точки V_1 , лежащее в прообразе контура ABC_0D_0 , топологически является прямым произведением окружности на двумерную сферу $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, а круговое многообразие, лежащее в прообразе контура EFG_0H_0 , топологически является расслоением Зейферта $\mathbb{H}^3$ со слоем окружность и базой $\mathbb{T}^2$ с двумя особыми точками типа $(2, 1)$.

Осталось рассмотреть особую точку V_2 . Бифуркационная диаграмма в окрестности этой точки изображена на рис. 20. Точке V_2 отвечают две несвязные особенности. Поэтому для прообраза точки V_2 построены две круговые молекулы.

Рассмотрим контуры ABC_0D_0 и EFG_0H_0 и произведем их деформации в контуры ABC_1D_1 и EFG_1H_1 соответственно. Звенья AC_0 , BD_0 , EG_0 , FH_0 испытывают гладкую изотопию, прообразы отрезков C_iD_i и G_iH_i , $i = 0, 1$, определяются в M_4^g уравнениями $H = \text{const}$, и в окрестности V_2 гамильтониан H не имеет критических точек (см. теорему 7). Контур ABC_1D_1 определяет круговую молекулу 3-атома A кривой β_6 , контур EFG_1H_1 определяет круговую молекулу 3-атома B кривой β_9 .

Значит, круговое многообразие рассматриваемой особой точки V_2 , лежащее в прообразе контура ABC_0D_0 , топологически является прямым произведением окружности на двумерную сферу $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, а круговое многообразие, лежащее в прообразе контура EFG_0H_0 , является прямым произведением окружности на двумерную сферу с g ручками $\mathbb{S}^1 \times (\mathbb{S}^2 + 2g)$.

Теорема 11 доказана.

§ 7. Построение допустимых систем координат

Каждый из гладких участков бифуркационной диаграммы соответствует некоторой бифуркации торов Лиувилля. Рассмотрим прообраз гладкого отрезка, трансверсально пересекающего бифуркационную диаграмму Σ . Этот прообраз с топологической точки зрения является трехмерным многообразием, граница которого состоит из торов Лиувилля. Такое многообразие называется *3-атомом*. На каждом из граничных торов можно задать специальным образом (см. [4]) пару базисных циклов (λ, μ) , которые образуют допустимую систему координат на границе 3-атома.

Первый базисный цикл λ всегда определен однозначно. В случае бифуркаций A^* , B , C_2 гиперболического типа цикл λ может рассматриваться как седловая критическая окружность, сдвинутая на тор Лиувилля. Если бифуркация имеет тип A , то λ – это цикл, сжимающийся в точку при подходе к критической эллиптической окружности. Цикл μ может определяться многими способами (см. [4]).

Допустимые системы координат на седловых атомах выберем исходя из представления в виде почти прямого произведения точек X_1 , Y_1 , Z_1 типа седло-седло. Такая процедура проделана в [13] для классического случая Ковалевской, где особенности типа седло-седло в точности такие же.

Рассмотрим точку Z_1 . Она имеет тип почти прямого произведения $(B \times C_2)/\mathbb{Z}_2$. Используя результаты из [13], получаем

$$\begin{array}{c}
 \left(\lambda_{\beta_5}, \frac{\lambda_{\beta_5} + \lambda_{\alpha_4}}{2} \right) \xrightarrow{(I)} A_{\beta_5}^* \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\beta_5}, -\lambda_{\alpha_5}), \\
 \left(\lambda_{\beta_5}, \frac{\lambda_{\beta_5} + \lambda_{\alpha_4}}{2} \right) \xrightarrow{(II)} A_{\beta_5}^* \xrightarrow{(IV)} (\lambda_{\beta_5}, -\lambda_{\alpha_5}), \\
 \begin{array}{ccc}
 (\lambda_{\alpha_5}, -\lambda_{\beta_5}) & \xrightarrow{(I)} & \\
 (\lambda_{\alpha_5}, -\lambda_{\beta_5}) & \xrightarrow{(IV)} & C_{2\alpha_5} \xrightarrow{(III)} (\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_4}), \\
 & & \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_4})
 \end{array} \\
 \left(\lambda_{\alpha_4}, -\frac{\lambda_{\alpha_4} + \lambda_{\beta_5}}{2} \right) \xrightarrow{(I)} \\
 \left(\lambda_{\alpha_4}, -\frac{\lambda_{\alpha_4} + \lambda_{\beta_5}}{2} \right) \xrightarrow{(II)} B_{\alpha_4} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\alpha_4} + \lambda_{\beta_4}), \\
 \begin{array}{ccc}
 (\lambda_{\beta_4}, \lambda_{\alpha_4}) & \xrightarrow{(I)} & B_{\beta_4} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\beta_4}, -\lambda_{\alpha_5}), \\
 & & \xrightarrow{(III)} (\lambda_{\beta_4}, -\lambda_{\alpha_5}).
 \end{array}
 \end{array}$$

Стрелки на ребрах указывают направление возрастания интеграла K . Римские цифры над ребрами показывают номера семейств торов Лиувилля, а индексы у циклов λ и обозначений атомов соответствуют дуге бифуркационной диаграммы.

Рассмотрим особую точку X_1 . Ей соответствует особенность типа седло-седло, которая может быть представлена как прямое произведение двух седловых бифуркаций $B \times B$:

$$\begin{array}{ccc}
 (\lambda_{\beta_7}, -\lambda_{\alpha_9}) & \xrightarrow{(I)} & \\
 (\lambda_{\beta_7}, -\lambda_{\alpha_9}) & \xrightarrow{(IV)} & B_{\beta_7} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\beta_7}, \lambda_{\alpha_4}), \\
 & & \\
 (\lambda_{\beta_7}, -\lambda_{\alpha_9}) & \xrightarrow{(II)} & \\
 (\lambda_{\beta_7}, -\lambda_{\alpha_9}) & \xrightarrow{(VII)} & B_{\beta_7} \xrightarrow{(II)} (\lambda_{\beta_7}, \lambda_{\alpha_4}), \\
 & & \\
 (\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_7}) & \xrightarrow{(I)} & \\
 (\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_7}) & \xrightarrow{(II)} & B_{\alpha_4} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_4}, -\lambda_{\beta_2}), \\
 & & \\
 (\lambda_{\beta_2}, -\lambda_{\alpha_9}) & \xrightarrow{(I)} & \\
 (\lambda_{\beta_2}, -\lambda_{\alpha_9}) & \xrightarrow{(IV)} & B_{\beta_2} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\alpha_4}), \\
 & & \\
 (\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_7}) & \xrightarrow{(I)} & \\
 (\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_7}) & \xrightarrow{(VII)} & B_{\alpha_9} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_9}, -\lambda_{\beta_2}), \\
 & & \\
 (\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_7}) & \xrightarrow{(II)} & \\
 (\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_7}) & \xrightarrow{(IV)} & B_{\alpha_9} \xrightarrow{(IV)} (\lambda_{\alpha_9}, -\lambda_{\beta_2}).
 \end{array}$$

Рассмотрим особую точку Y_1 с представлением $B \times B$, аналогично получаем

$$\begin{array}{ccc}
 (\lambda_{\beta_4}, -\lambda_{\alpha_2}) & \xrightarrow{(I)} & B_{\beta_4} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\beta_4}, \lambda_{\alpha_7}) \\
 & & \xrightarrow{(III)} (\lambda_{\beta_4}, \lambda_{\alpha_7}), \\
 & & \\
 (\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_4}) & \xrightarrow{(I)} & B_{\alpha_2} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_2}, -\lambda_{\beta_9}) \\
 & & \xrightarrow{(V)} (\lambda_{\alpha_2}, -\lambda_{\beta_9}), \\
 & & \\
 (\lambda_{\alpha_7}, \lambda_{\beta_4}) & \xrightarrow{(I)} & B_{\alpha_7} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_7}, -\lambda_{\beta_9}) \\
 & & \xrightarrow{(V)} (\lambda_{\alpha_7}, -\lambda_{\beta_9}),
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
(\lambda_{\alpha_7}, \lambda_{\beta_4}) & \xrightarrow{\text{(III)}} & B_{\alpha_7} \xrightarrow{\text{(III)}} (\lambda_{\alpha_7}, -\lambda_{\beta_9}) \\
& & \xrightarrow{\text{(VI)}} (\lambda_{\alpha_7}, -\lambda_{\beta_9}), \\
(\lambda_{\beta_9}, -\lambda_{\alpha_2}) & \xrightarrow{\text{(I)}} & B_{\beta_9} \xrightarrow{\text{(I)}} (\lambda_{\beta_9}, \lambda_{\alpha_7}) \\
& & \xrightarrow{\text{(III)}} (\lambda_{\beta_9}, \lambda_{\alpha_7}), \\
(\lambda_{\beta_9}, -\lambda_{\alpha_2}) & \xrightarrow{\text{(V)}} & B_{\beta_9} \xrightarrow{\text{(V)}} (\lambda_{\beta_9}, \lambda_{\alpha_7}) \\
& & \xrightarrow{\text{(VI)}} (\lambda_{\beta_9}, \lambda_{\alpha_7}).
\end{array}$$

Заметим, что для атомов B_{α_4} и B_{β_4} получены две различные допустимые системы координат. Далее будут использованы вторые системы координат, возникшие из точек X_1 и Y_1 соответственно.

Итак, пока определены допустимые системы координат, относящиеся к 10 гиперболическим бифуркациям $\alpha_2, \beta_2, \alpha_4, \beta_4, \alpha_5, \beta_5, \alpha_7, \beta_7, \alpha_9, \beta_9$.

Осталось построить допустимые системы координат, относящиеся к бифуркациям $\alpha_1, \beta_1, \alpha_3, \beta_3, \beta_6, \alpha_8, \beta_8, \alpha_{10}, \beta_{10}, \gamma_1, \delta_1, \gamma_2, \delta_2$, которые имеют эллиптический тип A .

На ребре круговой молекулы точки A_1 , соответствующем семейству Π , имеем $r[\alpha_3 - \alpha_4] = 0$. Следовательно, циклы λ_{α_3} и λ_{α_4} имеют индекс пересечения 1 и образуют базис. Второй цикл имеет ориентацию, заданную гамильтоновым потоком, поэтому базис является допустимым для рассматриваемого атома A_{α_3} . Рассуждая аналогично, получаем допустимые базисы для остальных бифуркаций (исключением является атом A_{β_6} ; для него нельзя указать второй базисный цикл, так как пока не известны соответствующие r -метки круговых молекул):

$$A_{\alpha_3} \xrightarrow{\text{(II)}} (\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\alpha_4}).$$

Из круговой молекулы точки B_1 получаем

$$(\lambda_{\beta_3}, \lambda_{\beta_4}) \xrightarrow{\text{(III)}} A_{\beta_3};$$

из круговой молекулы точки A_2 –

$$(\lambda_{\alpha_8}, \lambda_{\alpha_7}) \xrightarrow{\text{(VI)}} A_{\alpha_8},$$

$$(\lambda_{\alpha_8}, \lambda_{\alpha_7}) \xrightarrow{\text{(V)}} A_{\alpha_8};$$

из круговой молекулы точки B_2 –

$$A_{\beta_8} \xrightarrow{\text{(IV)}} (\lambda_{\beta_8}, \lambda_{\beta_7}),$$

$$A_{\beta_8} \xrightarrow{\text{(VII)}} (\lambda_{\beta_8}, \lambda_{\beta_7});$$

из круговой молекулы точки A_3 –

$$(\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\alpha_2}) \xrightarrow{(V)} A_{\gamma_1};$$

из круговой молекулы точки B_3 –

$$A_{\delta_1} \xrightarrow{(IV)} (\lambda_{\delta_1}, \lambda_{\beta_2});$$

из круговой молекулы точки A_4 –

$$A_{\gamma_2} \xrightarrow{(II)} (\lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\alpha_9}),$$

$$A_{\gamma_2} \xrightarrow{(VII)} (\lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\alpha_9});$$

из круговой молекулы точки B_4 –

$$(\lambda_{\delta_2}, \lambda_{\beta_9}) \xrightarrow{(III)} A_{\delta_2},$$

$$(\lambda_{\delta_2}, \lambda_{\beta_9}) \xrightarrow{(VI)} A_{\delta_2}.$$

Из круговых молекул точек S_0, e_1 , которые возникают в случае $g = 0, \lambda = 0$ (см. [13], а также рис. 3 и 4), в единых обозначениях (см. табл. 1) получаем

$$(\lambda_{\beta_1}, \lambda_{\beta_4}) \xrightarrow{(I)} A_{\beta_1},$$

$$A_{\alpha_1} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_4}).$$

Из круговой молекулы точки e_2 , которая возникает в случае $\lambda = 0$ (см. [13], а также рис. 3), в единых обозначениях (см. табл. 1) получаем

$$A_{\alpha_{10}} \xrightarrow{(I)} (\lambda_{\alpha_{10}}, \lambda_{\alpha_9}),$$

$$A_{\alpha_{10}} \xrightarrow{(IV)} (\lambda_{\alpha_{10}}, \lambda_{\alpha_9}).$$

Из круговой молекулы точки z_6 , которая возникает в случае $g = 0$ (см. [20], а также рис. 4), в единых обозначениях (см. табл. 1) получаем

$$(\lambda_{\beta_{10}}, \lambda_{\beta_9}) \xrightarrow{(I)} A_{\beta_{10}},$$

$$(\lambda_{\beta_{10}}, \lambda_{\beta_9}) \xrightarrow{(V)} A_{\beta_{10}}.$$

§ 8. Определение взаимного расположения базисных циклов

Рассмотрим ребро молекулы и два цикла λ^+ и λ^- , которые являются однозначно определенными базисными циклами на атомах, соединенных данным

ребром. Правило, устанавливающее связь между r -метками на ребрах молекулы и индексами пересечения соответствующих циклов, формулируется следующим образом:

- 1) если $r = 0$, то λ^+ и λ^- имеют индекс пересечения 1;
- 2) если $r = \infty$, то λ^+ и λ^- имеют индекс пересечения 0, т.е. гомологичны;
- 3) если $r = 1/2$, то λ^+ и λ^- имеют индекс пересечения 2.

Будем анализировать каждое семейство отдельно.

Семейство I. Бифуркации, относящиеся к этому семейству, – это

$$A_{\beta_5}^*, C_{2\alpha_5}, B_{\alpha_4}, B_{\beta_4}, B_{\beta_7}, B_{\beta_2}, B_{\alpha_9}, B_{\alpha_2}, B_{\alpha_7}, B_{\beta_9}, A_{\alpha_1}, A_{\beta_1}, 2A_{\alpha_{10}}, 2A_{\beta_{10}}.$$

Особые точки, относящиеся к этому семейству, – это

$$M, Z_1, X_1, X_5, Y_1, Y_5, A_1, B_1, V_1, U_1, B_2, U_2, A_2, V_2, A_4, B_4, A_3, B_3, V_3, U_3.$$

Информация, которую можно извлечь из круговых молекул, такова:

Точка	Пара циклов	Индекс пересечения
M	$\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\beta_1}$	1
Z_1	$\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_5}$	2
Z_1	$\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_5}$	1
Z_1	$\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_4}$	1
Z_1	$\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_4}$	1
X_1	$\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_7}$	1
X_1	$\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_2}$	1
X_1	$\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_2}$	1
X_1	$\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_7}$	1
X_5	$\lambda_{\alpha_{10}}, \lambda_{\beta_2}$	0
X_5	$\lambda_{\alpha_{10}}, \lambda_{\beta_7}$	0
X_5	$\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\beta_2}$	0
Y_1	$\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_9}$	1
Y_1	$\lambda_{\alpha_7}, \lambda_{\beta_9}$	1
Y_1	$\lambda_{\alpha_7}, \lambda_{\beta_4}$	1
Y_1	$\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_4}$	1
Y_5	$\lambda_{\beta_1}, \lambda_{\alpha_2}$	0
Y_5	$\lambda_{\beta_{10}}, \lambda_{\alpha_2}$	0
Y_5	$\lambda_{\beta_{10}}, \lambda_{\alpha_7}$	0
V_1	$\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_5}$	0
U_1	$\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_2}$	0
U_2	$\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_5}$	0
V_2	$\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_9}$	0

Базисы на положительных и отрицательных границах 3-атомов должны иметь разные ориентации. Это значит, что если две бифуркации расположены обе слева (или обе справа) по отношению к области I, то ориентации соответствующих допустимых систем координат совпадают. Таким образом, базисы

$$\left(\lambda_{\beta_5}, \frac{\lambda_{\beta_5} + \lambda_{\alpha_4}}{2} \right), \quad (\lambda_{\alpha_5}, -\lambda_{\beta_5}), \quad (\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_7}), \quad (\lambda_{\beta_2}, -\lambda_{\alpha_9}),$$

$$(\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_7}), \quad (\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_4}), \quad (\lambda_{\alpha_7}, \lambda_{\beta_4}), \quad (\lambda_{\beta_9}, -\lambda_{\alpha_2}), \quad (\lambda_{\beta_1}, \lambda_{\beta_4})$$

имеют одну ориентацию, а базисы

$$(\lambda_{\beta_5}, -\lambda_{\alpha_5}), \quad (\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_4}), \quad (\lambda_{\beta_7}, \lambda_{\alpha_4}), \quad (\lambda_{\beta_2}, \lambda_{\alpha_4}), \quad (\lambda_{\alpha_9}, -\lambda_{\beta_2}),$$

$$(\lambda_{\beta_4}, \lambda_{\alpha_7}), \quad (\lambda_{\alpha_2}, -\lambda_{\beta_9}), \quad (\lambda_{\beta_9}, \lambda_{\alpha_7}), \quad (\lambda_{\alpha_1}, \lambda_{\alpha_4})$$

– им противоположную.

Перечисленные выше условия позволяют однозначно определить взаимное расположение всех циклов, относящихся к семейству I. Результат показан на рис. 21. Циклы λ показаны здесь как элементы целочисленной решетки Γ , отвечающей тору Лиувилля. Сам тор рассматривается как факторпространство $\mathbb{R}^2/\Gamma$.

Семейство II. Бифуркации, относящиеся к этому семейству, – это

$$A_{\beta_5}^*, B_{\alpha_4}, B_{\beta_7}, B_{\alpha_4}, B_{\alpha_9}, A_{\alpha_3}, A_{\gamma_2}.$$

Особые точки, относящиеся к этому семейству, – это

$$Z_1, X_1, X_3, A_1, V_1, B_2, U_2, A_4, V_3.$$

Из круговых молекул можно извлечь следующую информацию:

Точка	Пара циклов	Индекс пересечения
Z_1	$\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_5}$	2
X_1	$\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_7}$	1
X_1	$\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_7}$	1
X_3	$\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\beta_7}$	0
X_3	$\lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\beta_7}$	0
A_1	$\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\alpha_4}$	1
U_2	$\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_5}$	0
A_4	$\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\gamma_2}$	1

В этом семействе базисы

$$\left(\lambda_{\beta_5}, \frac{\lambda_{\beta_5} + \lambda_{\alpha_4}}{2} \right), \quad (\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_7}), \quad (\lambda_{\alpha_4}, \lambda_{\beta_7})$$

имеют одну ориентацию, и она противоположна ориентации базисов

$$(\lambda_{\beta_7}, \lambda_{\alpha_4}), \quad (\lambda_{\alpha_3}, \lambda_{\alpha_4}), \quad (\lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\alpha_9}).$$

Результат показан на рис. 21.

Рис. 21. Взаимное расположение базисных циклов в семействах торов

Семейство III. Бифуркации, относящиеся к этому семейству, – это

$$C_{2\alpha_5}, B_{\beta_4}, B_{\beta_9}, A_{\beta_3}, A_{\delta_2}.$$

Особые точки, относящиеся к этому семейству, – это

$$Z_1, Y_1, Y_3, B_1, U_1, A_2, V_2, B_4, U_3.$$

Информация, которую можно извлечь из соответствующих круговых молекул, такова:

Точка	Пара циклов	Индекс пересечения
Z_1	$\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_4}$	1
Y_1	$\lambda_{\alpha_7}, \lambda_{\beta_9}$	1
Y_1	$\lambda_{\alpha_7}, \lambda_{\beta_4}$	1
Y_3	$\lambda_{\beta_3}, \lambda_{\alpha_7}$	0
Y_3	$\lambda_{\delta_2}, \lambda_{\alpha_7}$	0
B_1	$\lambda_{\beta_3}, \lambda_{\beta_4}$	1
V_2	$\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_9}$	0
B_4	$\lambda_{\delta_2}, \lambda_{\beta_9}$	1

В этом семействе базисы

$$(\lambda_{\beta_3}, \lambda_{\beta_4}), (\lambda_{\delta_2}, \lambda_{\beta_9})$$

имеют одинаковую ориентацию, а ориентация базисов

$$(\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_4}), (\lambda_{\beta_4}, \lambda_{\alpha_7}), (\lambda_{\beta_9}, \lambda_{\alpha_7})$$

ей противоположна. Результат показан на рис. 21.

Семейство IV. Бифуркации, относящиеся к этому семейству, – это

$$A_{\beta_5}^*, C_{2\alpha_5}, B_{\beta_7}, B_{\beta_2}, B_{\alpha_9}, A_{\beta_8}, A_{\delta_1}, A_{\beta_6}, 2A_{\alpha_{10}}.$$

Особые точки, относящиеся к этому семейству, – это

$$Z_1, Z_2, X_1, X_4, X_5, V_1, U_1, B_2, U_2, V_2, A_4, B_3, V_3, U_3.$$

Из круговых молекул можно извлечь следующую информацию:

Точка	Пара циклов	Индекс пересечения
Z_1	$\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_5}$	1
Z_2	$\lambda_{\delta_1}, \lambda_{\beta_6}$	0
X_1	$\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_2}$	1
X_1	$\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_7}$	1

Точка	Пара циклов	Индекс пересечения
X_4	$\lambda_{\alpha_{10}}, \lambda_{\delta_1}$	1
X_5	$\lambda_{\alpha_{10}}, \lambda_{\beta_2}$	0
X_5	$\lambda_{\alpha_{10}}, \lambda_{\beta_7}$	0
U_1	$\lambda_{\alpha_5}, \lambda_{\beta_2}$	0
B_2	$\lambda_{\beta_8}, \lambda_{\beta_7}$	1
U_2	$\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_5}$	0
B_3	$\lambda_{\delta_1}, \lambda_{\beta_2}$	1

Так как на дуге γ_2 тор из семейства IV не испытывает перестройки (см. X_2 на рис. 14), то $r[\delta_1 - \beta_8] = \infty$, а значит, λ_{δ_1} и λ_{β_8} имеют индекс пересечения 0. Также из круговой молекулы точки Z_2 следует, что $r[\delta_1 - \beta_6] = \infty$, а значит, λ_{δ_1} и λ_{β_6} имеют индекс пересечения 0.

Ориентация базисов

$$(\lambda_{\alpha_5}, -\lambda_{\beta_5}), \quad (\lambda_{\beta_7}, -\lambda_{\alpha_9}), \quad (\lambda_{\beta_2}, -\lambda_{\alpha_9})$$

противоположна ориентации базисов

$$(\lambda_{\alpha_{10}}, \lambda_{\alpha_9}), \quad (\lambda_{\beta_8}, \lambda_{\beta_7}), \quad (\lambda_{\delta_1}, \lambda_{\beta_2}).$$

Результат показан на рис. 21.

Семейство V. Бифуркации, относящиеся к этому семейству, – это

$$B_{\alpha_2}, B_{\alpha_7}, B_{\beta_9}, A_{\alpha_8}, A_{\gamma_1}, A_{\beta_6}, 2A_{\beta_{10}}.$$

Особые точки, относящиеся к этому семейству, – это

$$Y_1, Y_4, Y_5, Z_2, V_1, A_2, V_2, B_4, A_3, V_3.$$

Информация, которую можно извлечь из соответствующих круговых молекул, такова:

Точка	Пара циклов	Индекс пересечения
Y_1	$\lambda_{\alpha_2}, \lambda_{\beta_9}$	1
Y_1	$\lambda_{\alpha_7}, \lambda_{\beta_9}$	1
Y_4	$\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\beta_{10}}$	1
Y_5	$\lambda_{\beta_{10}}, \lambda_{\alpha_2}$	0
Y_5	$\lambda_{\beta_{10}}, \lambda_{\alpha_7}$	0
Z_2	$\lambda_{\beta_6}, \lambda_{\gamma_1}$	1
A_2	$\lambda_{\alpha_8}, \lambda_{\alpha_7}$	1
A_3	$\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\alpha_2}$	1

Так как на дуге δ_2 тор из семейства V не испытывает перестройки (см. Y_2 на рис. 14), то $r[\gamma_1 - \alpha_8] = \infty$, а значит, λ_{γ_1} и λ_{α_8} имеют индекс пересечения 0.

Ориентация базисов

$$(\lambda_{\alpha_8}, \lambda_{\alpha_7}), \quad (\lambda_{\gamma_1}, \lambda_{\alpha_2})$$

противоположна ориентации базисов

$$(\lambda_{\alpha_2}, -\lambda_{\beta_9}), \quad (\lambda_{\beta_9}, \lambda_{\alpha_7}).$$

Результат показан на рис. 21.

Семейство VI. Бифуркации, относящиеся к этому семейству, – это

$$B_{\beta_9}, A_{\alpha_8}, A_{\delta_2}.$$

Особые точки, относящиеся к этому семейству, – это

$$Y_1, Y_2, Y_3, A_2, V_2, B_4.$$

Из круговых молекул можно извлечь следующую информацию:

Точка	Пара циклов	Индекс пересечения
Y_1	$\lambda_{\alpha_7}, \lambda_{\beta_9}$	1
Y_2	$\lambda_{\alpha_8}, \lambda_{\delta_2}$	1
Y_3	$\lambda_{\alpha_7}, \lambda_{\delta_2}$	0
A_2	$\lambda_{\alpha_8}, \lambda_{\alpha_7}$	1
B_4	$\lambda_{\delta_2}, \lambda_{\beta_9}$	1

Ориентация базиса

$$(\lambda_{\beta_9}, \lambda_{\alpha_7})$$

противоположна ориентации базисов

$$(\lambda_{\alpha_8}, \lambda_{\alpha_7}), \quad (\lambda_{\delta_2}, \lambda_{\beta_9}).$$

Результат показан на рис. 21.

Семейство VII. Бифуркации, относящиеся к этому семейству, – это

$$B_{\beta_7}, B_{\alpha_9}, A_{\beta_8}, A_{\gamma_2}.$$

Особые точки, относящиеся к этому семейству, – это

$$X_1, X_2, X_3, B_2, U_2, A_4.$$

Информация, которую можно извлечь из соответствующих круговых молекул, такова:

Точка	Пара циклов	Индекс пересечения
X_1	$\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_7}$	1
Y_2	$\lambda_{\beta_8}, \lambda_{\gamma_2}$	1

Точка	Пара циклов	Индекс пересечения
Y_3	$\lambda_{\beta_7}, \lambda_{\gamma_2}$	0
B_2	$\lambda_{\beta_8}, \lambda_{\beta_7}$	1
A_4	$\lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\alpha_9}$	1

Ориентация базиса

$$(\lambda_{\alpha_9}, \lambda_{\beta_7})$$

противоположна ориентации базисов

$$(\lambda_{\beta_8}, \lambda_{\beta_7}), \quad (\lambda_{\gamma_2}, \lambda_{\alpha_9}).$$

Результат показан на рис. 21.

ЗАМЕЧАНИЕ 12. На рис. 21 положение циклов λ_{β_6} в семействах IV, V, циклов λ_{α_8} в семействе VI и циклов λ_{β_8} в семействе VII указан штриховой линией. Это связано с тем, что пока не известны некоторые r -метки на ребрах круговых молекул точек U_2, V_2 . Далее эти метки будут найдены при завершении доказательства теоремы 10, что позволит однозначно определить положение этих циклов в указанных семействах. На рис. 21 положения циклов приведены для полноты изложения.

§ 9. Применение формул Топалова

В этом параграфе будет завершено доказательство теоремы 10 о метках на ребрах круговых молекул вырожденных одномерных орбит, а также будет выбран второй базисный цикл для атома A_{β_6} .

Формулы Топалова (см. [28]) связывают метки молекул с топологическим типом соответствующей поверхности. Они являются одним из наиболее эффективных средств для вычисления инвариантов Фоменко–Цишанга. Конкретный вид формул Топалова зависит от структуры молекулы и получается в соответствии с алгоритмом, приведенным в [28]. Приведем формулу для простого, наиболее часто встречающегося случая.

Пусть некоторая молекула W^* не содержит семей из более чем одного атома и после стирания внутренних ребер семей принимает вид дерева. Пусть также все атомы W^* имеют род 0. (Атомы A, A^*, B, C_2 относятся к этой категории.) Тогда энергия молекулы $N(W^*)$, введенная П. И. Топаловым, определяется формулой

$$N(W^*) = \begin{cases} 0, & \text{если } \operatorname{rk} H_1(Q^3) > 0, \\ |\operatorname{Tor} H_1(Q^3)|, & \text{если } \operatorname{rk} H_1(Q^3) = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $N(W^*)$ полностью определяется топологией многообразия.

Определим для каждой семьи число $\tilde{n} = n + \sum r_i + p/2$, где n – ее n -метка, r_i – метки на ее внешних ребрах, а p – число звездочек данной семьи (см. [4], [28]).

Укажем конкретный вид формулы Топалова для молекулы, которая состоит из одной семьи F с p звездочками, из которой исходят ребра $e_1, \dots, e_n$ вида $F \xrightarrow{e_i} A$:

$$N(W^*) = \pm 2^p b_1 \cdots b_n \tilde{n}(F). \quad (9.1)$$

Здесь через b_i обозначен элемент c_{12}^i матрицы склейки C^i на ребре e_i . Предполагается, что все ребра e_i конечны, т.е. $b_i \neq 0$. Под количеством звездочек семьи понимается суммарное количество особых слоев соответствующего расслоения Зейферта. Стрелка на ребре указывает, допустимый базис какого атома мы получим, умножив базис второго атома на матрицу склейки.

ЗАМЕЧАНИЕ 13. Недостающие метки круговых молекул точек V_1, U_1, V_2, U_2 можно выписать и без применения формул Топалова, так как они появляются в классическом случае Ковалевской и в случае Ковалевской–Яхьи при $g = 0$. В работе [13] приведен ответ, но не указан способ нахождения этих меток. Для вычисления изоэнергетических молекул осталось только выбрать второй базисный цикл для атома A_{β_6} , а также определить положения циклов $\lambda_{\alpha_8}, \lambda_{\beta_8}$ в семействах торов VI, VII соответственно. Это можно сделать, зная r -метки круговой молекулы точки V_1 . Поэтому для полноты изложения приведем способ нахождения всех недостающих меток круговых молекул точек $V_1, U_1, V_2, U_2, V_3, U_3$, с помощью которого получим соотношение на допустимые системы координат, определяющее положение цикла λ_{β_6} в семействах IV, V, и выберем второй базисный цикл для атома A_{β_6} .

Итак, вернемся к доказательству теоремы 10.

Применим формулу Топалова (9.1) для подсчета недостающих r -меток.

Точка V_1 . Рассмотрим круговую молекулу точки V_1 , имеющую вид $A-A^*-A$ (см. табл. 3). Находим матрицу склейки на ребре, относящемся к семейству II:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\beta_5} \\ \frac{\lambda_{\beta_5} + \lambda_{\alpha_4}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_3} \\ \lambda_{\alpha_4} \end{pmatrix}.$$

Значит, метка r равна нулю. Вторую матрицу склейки определим из уравнения Топалова. Топологический тип многообразия – это $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$, поэтому $H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2) = \mathbb{Z}$, а значит, $N(W^*) = 0$. В силу предложения 1 имеем $\varepsilon = 1$, а следовательно, в матрице склейки $b > 0$. Итак,

$$\tilde{n} = n + \sum r_i + \frac{p}{2} = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor - 1 + \left\{ \frac{a}{b} \right\} + \frac{1}{2} = \frac{a}{b} - \frac{1}{2},$$

где через $[x]$ и $\{x\}$ обозначены целая и дробная части числа x соответственно.

По формуле Топалова получим

$$b \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{2} \right) = 0 \implies 2a = b \implies a = 1, b = 2 \implies r = \frac{1}{2}.$$

Заметим, что мы получили соотношение на допустимые системы координат, определяющее положение цикла λ_{β_6} в семействе IV:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\beta_6} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ k & 2k-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_5} \\ -\lambda_{\alpha_5} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Вторая строка матрицы задает множество для выбора второго элемента допустимой системы координат для β_6 . Для определенности зафиксируем вариант, соответствующий $k = 0$:

$$A_{\beta_6} \xrightarrow{(IV)} (\lambda_{\beta_6}, \lambda_{\alpha_5}).$$

Рассмотрим ребро круговой молекулы точки V_1 , соединяющее бифуркации A_{β_6} и B_{α_2} (табл. 3). Топологический тип многообразия есть $\mathbb{H}^3$, поэтому $N(W^*) = 0$. В матрице склейки $b > 0$, так как $\varepsilon = 1$ по предложению 1:

$$\tilde{n} = n + \sum r_i + \frac{p}{2} = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \left\{ \frac{a}{b} \right\} + \frac{1}{2} = \frac{a}{b} + \frac{1}{2}.$$

По формуле Топалова получим

$$b \left(\frac{a}{b} + \frac{1}{2} \right) = 0 \implies 2a = -b \implies a = -1, b = 2 \implies r = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, получаем соотношение на допустимые системы координат, определяющее положение цикла λ_{β_6} в семействе V:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\beta_6} \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ k & 2k+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_2} \\ \lambda_{\beta_9} \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Зафиксируем вариант при $k = 0$:

$$(\lambda_{\beta_6}, \lambda_{\beta_9}) \xrightarrow{(V)} A_{\beta_6}.$$

Точка U_1 . Рассмотрим ребро круговой молекулы точки U_1 с неизвестной конечной меткой r (см. табл. 3). Матрица склейки на ребре, относящемся к семейству III:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_5} \\ -\lambda_{\beta_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_{\beta_3} \\ \lambda_{\beta_4} \end{pmatrix} \implies r = 0.$$

Точки V_3, U_3 . Круговые молекулы точек V_3 и U_3 полностью совпадают с круговыми молекулами точек V_1 и U_1 (ребра молекул соединяют те же бифуркации и относятся к таким же семействам торов). Поэтому соответствующие r -метки равны.

Теперь мы знаем положение цикла λ_{β_6} и второй цикл, дополняющий его до базиса. Поэтому далее все неизвестные метки можно подсчитать без применения формулы Топалова.

Точка V_2 . Подсчитаем матрицу склейки на ребре круговой молекулы точки V_2 , которое соединяет бифуркации A_{β_6} и B_{β_9} и относится к семейству V":

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\beta_9} \\ -\lambda_{\alpha_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda_{\beta_6} \\ \lambda_{\beta_9} \end{pmatrix} \implies r = 0.$$

Рассмотрим ребро, соединяющее бифуркации A_{α_8} и B_{β_9} и относящееся к семейству V. Получаем

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_8} \\ \lambda_{\alpha_7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_9} \\ \lambda_{\alpha_7} \end{pmatrix} \implies r = 0.$$

Рассмотрим ребро, соединяющее бифуркации A_{α_8} и B_{β_9} и относящееся к семейству VI:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_8} \\ \lambda_{\alpha_7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_9} \\ \lambda_{\alpha_7} \end{pmatrix} \implies r = 0.$$

Теперь рассмотрим ребро, соединяющее бифуркации A_{β_6} и $C_{2_{\alpha_5}}$ и относящееся к семейству IV:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_5} \\ -\lambda_{\beta_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_6} \\ \lambda_{\alpha_5} \end{pmatrix} \implies r = 0.$$

Точка U_2 . Найдем матрицу склейки на ребре, соединяющем бифуркации A_{β_8} и B_{α_9} и относящемся к семейству IV:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_9} \\ \lambda_{\beta_7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_8} \\ \lambda_{\beta_7} \end{pmatrix} \implies r = \frac{1}{2}.$$

Подсчитаем матрицу склейки на ребре, соединяющем бифуркации A_{β_8} и B_{α_9} и относящемся к семейству VII:

$$\begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_9} \\ \lambda_{\beta_7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_8} \\ \lambda_{\beta_7} \end{pmatrix} \implies r = \frac{1}{2}.$$

Итак, подсчет меток на ребрах круговых молекул вырожденных одномерных орбит завершен.

Теорема 10 полностью доказана.

§ 10. Основные теоремы. Полный перечень инвариантов Фоменко–Цишанга для интегрируемого случая Ковалевской–Яхьи

Теперь мы можем вычислить все изоэнергетические молекулы в интегрируемом случае Ковалевской–Яхьи.

Напомним, что кривая τ без самопересечений в плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$ называется *допустимой*, если она пересекает бифуркационную диаграмму Σ трансверсально и не проходит через особые точки Σ .

Полный прообраз $Q_\tau = \mu^{-1}(\tau)$ кривой τ в M^4 – это трехмерное гладкое многообразие со структурой лиувиллева слоения, все особенности которого являются боттовскими. На Q_τ возникает инвариант этого слоения – меченая молекула $W^*(\tau)$, которая не меняется при гладкой изотопии τ в классе допустимых кривых. В качестве кривой τ можно рассмотреть окружность малого радиуса с центром в некоторой изолированной особой точке бифуркационной диаграммы Σ . Такая молекула $W^*(\tau)$ называется *круговой молекулой* особой точки. В [13] описан алгоритм, позволяющий из кусочков круговых молекул особых точек бифуркационной диаграммы склеить меченую молекулу W^* для любой допустимой кривой на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$. На рис. 5–13 кривые $\tau = \{H = h_0\}$, где H – это гамильтониан или интеграл энергии, обозначены большими латинскими буквами.

ТАБЛИЦА 4. Изоэнергетические молекулы

h_1	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$		$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A^* \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=-1} A$ $A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A^* \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=-1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$
h_2	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$	h_8	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A^* \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=-1} A$ $A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A^* \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=-1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$
h_3	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A^* \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=-1} A$ $A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A^* \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=-1} C_2 \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$	h_9	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$
h_4	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$	h_{10}	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$
h_5	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$	h_{11}	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$
h_6	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$	h_{12}	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$
h_7	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$	h_{13}	$A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$ $A \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} B \xrightarrow[r=0]{\varepsilon=1} A$

Таблица 5. Изоэнергетические молекулы (продолжение)

h_{14}		h_{20}	
h_{15}		h_{21}	
h_{16}		h_{22}	
h_{17}		h_{23}	
h_{18}		h_{24}	
h_{19}		h_{25}	

ТАБЛИЦА 6. Изоэнергетические молекулы (продолжение)

h_{26}		h_{28}	
h_{27}		h_{29}	

Итак, после завершения вычислений круговых молекул, выбора допустимых систем координат и определения взаимного расположения базисных циклов процедура вычисления изоэнергетических молекул осуществляется по алгоритму, описанному в [13]. С помощью построенных допустимых систем координат и взаимного расположения базисных циклов были вычислены матрицы склеек изоэнергетических молекул. Результат приведен в табл. 4–6. По матрицам склеек были вычислены числовые метки.

Итоговые результаты сформулированы в следующих четырех теоремах.

ТЕОРЕМА 12 (Н. С. Славина). *Интегрируемая система Ковалевской–Яхьи в зависимости от значений гиростатического момента λ , интеграла площадей g и уровня энергии H ливуиллево эквивалентно одному из 29 слоений Ливуилля, которые попарно ливуиллево не эквивалентны. Полный список инвариантов Фоменко–Цишанга для случая интегрируемости Ковалевской–Яхьи при небифуркационных значениях параметров g, λ , классифицирующий все эти 29 слоений, приведен в табл. 4–6.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В предыдущих параграфах были построены допустимые системы координат и определено взаимное расположение базисных циклов. Применяя алгоритм, описанный в [13], можно вычислить все матрицы склеек на ребрах 29 изоэнергетических молекул.

Для примера рассмотрим на рис. 22 изоэнергетическую молекулу, возникшую на интервале энергии h_{21} (см. камеру 5' на рис. 9).

Построим матрицы склеек для каждого из шести ребер данной изоэнергетической молекулы. Каждое ребро обозначено римской цифрой, которая показывает, к какому семейству торов данное ребро относится. Зная базисные

Рис. 22. Изоэнергетическая молекула h_{21}

циклы на всех дугах бифуркационных диаграмм, извлекаем всю необходимую информацию из рис. 21, а именно

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_2} \\ \lambda_{\beta_4} \end{pmatrix} &= C_{\alpha_2, \alpha_1} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_1} \\ \lambda_{\alpha_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_1} \\ \lambda_{\alpha_4} \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_6} \\ \lambda_{\beta_9} \end{pmatrix} &= C_{\beta_6, \alpha_2} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_2} \\ -\lambda_{\beta_9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_2} \\ -\lambda_{\beta_9} \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_5} \\ -\lambda_{\beta_5} \end{pmatrix} &= C_{\alpha_5, \alpha_2} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_2} \\ -\lambda_{\beta_9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_2} \\ -\lambda_{\beta_9} \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_5} \\ -\lambda_{\beta_5} \end{pmatrix} &= C_{\alpha_5, \beta_6} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_6} \\ \lambda_{\alpha_5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_6} \\ \lambda_{\alpha_5} \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_3} \\ \lambda_{\beta_4} \end{pmatrix} &= C_{\beta_3, \alpha_5} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_5} \\ \lambda_{\beta_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_5} \\ \lambda_{\beta_4} \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} \lambda_{\beta_1} \\ \lambda_{\beta_4} \end{pmatrix} &= C_{\beta_1, \alpha_5} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_5} \\ \lambda_{\beta_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_5} \\ \lambda_{\beta_4} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Аналогичные вычисления проделаны для всех возможных 29 слоений Лиувилля, по матрицам склеек подсчитаны все r -, ε - и n -метки. Результат представлен в табл. 4–6. Оказывается, что все перечисленные меченые молекулы попарно не изоморфны, а следовательно, по теореме Фоменко–Цишанга соответствующие слоения Лиувилля не эквивалентны.

Теорема 12 доказана.

Таким образом, полностью завершена тонкая лиувиллева классификация слоений семейства систем Ковалевской–Яхьи (имеется в виду двухпараметрическое семейство на M_g^4 , зависящее от параметров g, λ). Проводя сравнительную характеристику, видим, что среди этих слоений есть слоения, которые эквивалентны уже известным слоениям, возникшим в других случаях интегрируемости твердого тела. Лиувиллева эквивалентность слоений означает лиувиллеву эквивалентность интегрируемых гамильтоновых систем на каких-то интервалах энергии. Из лиувиллевой эквивалентности гамильтоновых систем следует, что замыкания интегральных траекторий обеих систем на множестве полной меры совпадают (см. [29]). Далее будем формулировать теоремы в терминах лиувиллевой эквивалентности гамильтоновых систем.

При доказательстве следующих трех теорем были использованы табл. 4–6 настоящей работы, таблицы из работ [13], [20], а также [4; т. 2, табл. 5.1–5.4].

ТЕОРЕМА 13. *Интегрируемые системы типа Ковалевской–Яхьи на 10 интервалах энергии $h_1, h_2, h_3, h_5, h_6, h_7, h_8, h_{14}, h_{16}, h_{17}$ (соответствующие слоения Лиувилля заданы мечеными молекулами в табл. 4, 5) лиувиллево эквивалентны интегрируемым системам типа Ковалевской на 10 интервалах энергии $A, C, D, B, J, H, E, I, F, G$ соответственно.*

Последние 10 молекул и их обозначения взяты из [13].

ТЕОРЕМА 14. *Интегрируемые системы типа Ковалевской–Яхьи на 10 интервалах энергии $h_1, h_2, h_3, h_{18}, h_{19}, h_{20}, h_{21}, h_{26}, h_{28}, h_{29}$ (соответствующие слоения Лиувилля заданы мечеными молекулами в табл. 4–6) лиувиллево эквивалентны серии интегрируемых систем Ковалевской–Яхьи при $g = 0$ на 10 интервалах энергии $A, C, D, B, F, G, E, H, J, I$ соответственно.*

Последние 10 молекул и их обозначения взяты из [20].

Соответствие эквивалентных слоений в случае Ковалевской–Яхьи, в случае Ковалевской ($\lambda = 0$) и в случае Ковалевской–Яхьи при $g = 0$ показывает следующая таблица:

Случай Ковалевской	Случай Ковалевской–Яхьи	Случай Ковалевской–Яхьи при $g = 0$
A	h_1	A
C	h_2	C
D	h_3	D
B	h_5	—
J	h_6	—
H	h_7	—
E	h_8	—
I	h_{14}	—
F	h_{16}	—
G	h_{17}	—
—	h_{18}	B
—	h_{19}	F
—	h_{20}	G
—	h_{21}	E
—	h_{26}	H
—	h_{28}	J
—	h_{29}	I

ТЕОРЕМА 15. *Интегрируемые системы типа Ковалевской–Яхьи на трех интервалах энергии h_1, h_{23}, h_{28} (соответствующие слоения Лиувилля заданы мечеными молекулами в табл. 4–6) лиувиллево эквивалентны интегрируемым системам случая Жуковского на трех интервалах энергии 7, 9, 2 соответственно, на двух интервалах энергии h_1 и h_{28} лиувиллево эквивалентны интегрируемым системам случая Горячева–Чаплыгина–Сретенского на двух уровнях энергии 1 и 4 соответственно.*

Молекулы, возникшие в случаях интегрируемости Жуковского и Горячева–Чаплыгина–Сретенского, и их обозначения взяты из [4; т. 2, табл. 5.4, 5.6].

Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$ двухпараметрическое семейство бифуркационных диаграмм $\Sigma(g, \lambda)$ (см. рис. 2). Было обнаружено, что в области значений $H \geq H_0$ части диаграмм, попавшие в полуплоскость $\{h \geq H_0\}$, гомеоморфны. Обозначим через

$$\Sigma_{g, \lambda}^{H_0} = \Sigma(g, \lambda) \cap \{h \geq H_0\}$$

часть бифуркационной диаграммы, попавшей в полуплоскость $\{h \geq H_0\}$.

В дальнейшем мы будем рассматривать большие значения энергии H , поэтому назовем множество $\Sigma_{g, \lambda}^{H_0}$ “высокоэнергетической” бифуркационной диаграммой. Это множество изображено на рис. 23. Тогда верна следующая теорема.

Рис. 23. “Высокоэнергетическая” бифуркационная диаграмма

ТЕОРЕМА 16 (Н. С. Славина). *При любых ненулевых значениях параметров g, λ существует конечное значение энергии $H = H_0$ такое, что при всех значениях H , больших H_0 , “высокоэнергетические” бифуркационные диаграммы на плоскости $\mathbb{R}^2(h, k)$ случая Ковалевской–Яхьи изоморфны друг другу в следующем смысле: существует диффеоморфизм полуплоскостей, совмещающий эти “высокоэнергетические” бифуркационные диаграммы (см. рис. 2). При больших значениях энергии H семейство систем Ковалевской–Яхьи лиувиллево эквивалентно одной системе на интервале h_4 ; иными словами, топологический тип интегрируемой системы стабилизируется при больших значениях энергии H .*

ЗАМЕЧАНИЕ 14. В случае интегрируемости Ковалевской–Яхьи молекула на интервале h_4 встречается в каждой из 18 камер при значениях энергии $H \geq H_0$. Эта “высокоэнергетическая” молекула оказывается грубо лиувиллево эквивалентна молекуле, обнаруженной ранее в интегрируемой системе Горячева–Чаплыгина–Сретенского (см. меченую молекулу 7 из [4; т. 2, табл. 5.6]). Однако

эти системы Лиувиллево не эквивалентны, так как числовые метки различны. Таким образом, это “высокоэнергетическое” слоение Лиувилля оказывается новым в том смысле, что оно не встречается в других интегрируемых системах, исследованных ранее.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 16. Рассмотрим на рис. 2 бифуркационные диаграммы случая Ковалевской–Яхьи. Все они на полуплоскости $\{h \geq H_0\}$ изоморфны одной диаграмме с перестройками атомов, указанными на рис. 23.

Рис. 24. “Высокоэнергетическое” слоение

Это значит, что если сравнивать любые две изоэнергетические молекулы при больших значениях энергии для различных значений параметров g , λ , то ребра этих молекул, соединяющие соответствующие бифуркации, относятся к одноименным дугам бифуркационных диаграмм и соответствуют одинаковым семействам торов. Поэтому молекулы и метки полностью совпадают. Соответствующая “общая” меченая молекула при $H = H_0$ имеет вид, указанный на рис. 24. Теорема доказана.

Список литературы

- [1] Н. Yehia, “New integrable cases in the dynamics of rigid bodies”, *Mech. Res. Comm.*, **13:3** (1986), 169–172.
- [2] Х. М. Яхья, “Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **4** (1987), 88–90.
- [3] Нгуен Тьен Зунг, А. Т. Фоменко, “Топологическая классификация интегрируемых невырожденных гамильтонианов на изоэнергетической трехмерной сфере”, *УМН*, **45:6(276)** (1990), 91–111; англ. пер.: Nguyen Tien Zung, A. T. Fomenko, “Topological classification of integrable non-degenerate Hamiltonians on a constant energy three-dimensional sphere”, *Russian Math. Surveys*, **45:6** (1990), 109–135.
- [4] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, 2, Удмурт. ун-т, Ижевск, 1999, 444 с.; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004, xvi+730 pp.
- [5] П. Е. Рябов, М. П. Харламов, “Бифуркации первых интегралов в случае Ковалевской–Яхьи”, *Регулярная и хаотическая динамика*, **2:2** (1997), 25–40.
- [6] М. П. Харламов, И. И. Харламова, Е. Г. Шведов, “Бифуркационные диаграммы на изоэнергетических уровнях гиростата Ковалевской–Яхьи”, *Механика твердого тела*, **40** (2010), 77–90.

- [7] И. И. Харламова, П. Е. Рябов, “Электронный атлас бифуркационных диаграмм гиристора Ковалевской–Яхьи”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2011, № 2, 147–162.
- [8] М. П. Харламов, “Бифуркации совместных уровней первых интегралов в случае Ковалевской”, *Прикл. матем. мех.*, **47**:6 (1983), 922–930; англ. пер.: М. Р. Kharlamov, “Bifurcation of common levels of first integrals of the Kovalevskaya problem”, *J. Appl. Math. Mech.*, **47** (1983):6 (1985), 737–743.
- [9] М. П. Харламов, “Топологический анализ классических интегрируемых систем в динамике твердого тела”, *Докл. АН СССР*, **273**:6 (1983), 1322–1325; англ. пер.: М. Р. Kharlamov, “Topological analysis of classical integrable systems in the dynamics of a rigid body”, *Soviet Math. Dokl.*, **28**:3 (1983), 802–805.
- [10] М. П. Харламов, *Топологический анализ интегрируемых задач динамики твердого тела*, Ленинградский ун-т, Ленинград, 1988, 200 с.
- [11] А. А. Ошемков, “Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела”, *Тр. сем. по вект. и тенз. анализу*, **25**:2 (1993), 23–109.
- [12] А. А. Oshemkov, “Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations”, *Topological classification of integrable systems*, Adv. Soviet Math., **6**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 67–146.
- [13] А. В. Болсинов, П. Рихтер, А. Т. Фоменко, “Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской”, *Матем. сб.*, **191**:2 (2000), 3–42; англ. пер.: A. V. Bolsinov, P. H. Richter, A. T. Fomenko, “The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top”, *Sb. Math.*, **191**:2 (2000), 151–188.
- [14] И. Н. Гапененко, “Интегральные многообразия и топологические инварианты одного случая движения гиристора”, *Механика твердого тела*, **29** (1997), 1–7.
- [15] П. Е. Рябов, *Бифуркационное множество задачи о движении твердого тела вокруг неподвижной точки в случае Ковалевской–Яхьи*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1997.
- [16] М. П. Харламов, П. Е. Рябов, “Диаграммы Смейла–Фоменко и грубые инварианты случая Ковалевской–Яхьи”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2011, № 4, 40–59.
- [17] П. Е. Рябов, “Аналитическая классификация особенностей интегрируемого случая Ковалевской–Яхьи”, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2010, № 4, 25–30.
- [18] Н. С. Логачева, “Классификация невырожденных положений равновесия и вырожденных одномерных орбит интегрируемой системы Ковалевской–Яхьи”, *Матем. сб.*, **203**:1 (2012), 31–60; англ. пер.: N. S. Logacheva, “Classification of nondegenerate equilibria and degenerate 1-dimensional orbits of the Kovalevskaya–Yehia integrable system”, *Sb. Math.*, **203**:1 (2012), 28–59.
- [19] М. П. Харламов, “Аналитическая классификация равномерных вращений гиристора Ковалевской–Яхьи”, *Механика твердого тела*, **42** (2012), 46–60.
- [20] П. В. Морозов, “Вычисление инвариантов Фоменко–Цишанга в интегрируемом случае Ковалевской–Яхьи”, *Матем. сб.*, **198**:8 (2007), 59–82; англ. пер.: P. V. Morozov, “Calculation of the Fomenko–Zieschang invariants in the Kovalevskaya–Yehia integrable case”, *Sb. Math.*, **198**:8 (2007), 1119–1143.
- [21] А. Т. Фоменко, “Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных интегрируемых систем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:4 (1991), 747–779; англ. пер.: A. T. Fomenko, “A bordism theory for integrable nondegenerate Hamiltonian systems with two degrees of freedom. A new topological invariant of higher-dimensional integrable systems”, *Math. USSR-Izv.*, **39**:1 (1992), 731–759.

- [22] А. В. Болсинов, В. С. Матвеев, А. Т. Фоменко, “Двумерные римановы метрики с интегрируемым геодезическим потоком. Локальная и глобальная геометрия”, *Матем. сб.*, **189**:10 (1998), 5–32; англ. пер.: A. V. Bolsinov, V. S. Matveev, A. T. Fomenko, “Two-dimensional Riemannian metrics with integrable geodesic flows. Local and global geometry”, *Sb. Math.*, **189**:10 (1998), 1441–1466.
- [23] А. Т. Фоменко, “Топологический инвариант, грубо классифицирующий интегрируемые строго невырожденные гамильтонианы на четырехмерных симплектических многообразиях”, *Функц. анализ и его прил.*, **25**:4 (1991), 23–35; англ. пер.: A. T. Fomenko, “A topological invariant which roughly classifies integrable strictly nondegenerate Hamiltonians on four-dimensional symplectic manifolds”, *Funct. Anal. Appl.*, **25**:4 (1991), 262–272.
- [24] П. П. Андреянов, К. Е. Душин, “Бифуркационные множества в задаче Ковалевской–Яхьи”, *Матем. сб.*, **203**:4 (2012), 3–46; англ. пер.: P. P. Andreyanov, K. E. Dushin, “Bifurcation sets in the Kovalevskaya–Yehia problem”, *Sb. Math.*, **203**:4 (2012), 459–499.
- [25] П. П. Андреянов, *Лиувиллева классификация интегрируемого случая Ковалевской–Яхьи задачи о движении твердого тела*, Дипл. работа, 2010.
- [26] Е. А. Кудрявцева, И. М. Никонов, А. Т. Фоменко, “Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия”, *Матем. сб.*, **199**:9 (2008), 3–96; англ. пер.: E. A. Kudryavtseva, I. M. Nikonov, A. T. Fomenko, “Maximally symmetric cell decompositions of surfaces and their coverings”, *Sb. Math.*, **199**:9 (2008), 1263–1353.
- [27] А. А. Ошемков, “Классификация гиперболических особенностей ранга нуль интегрируемых гамильтоновых систем”, *Матем. сб.*, **201**:8 (2010), 63–102; англ. пер.: A. A. Oshemkov, “Classification of hyperbolic singularities of rank zero of integrable Hamiltonian systems”, *Sb. Math.*, **201**:8 (2010), 1153–1191.
- [28] П. И. Топалов, “Вычисление тонкого инварианта Фоменко–Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твердого тела”, *Матем. сб.*, **187**:3 (1996), 143–160; англ. пер.: P. I. Topalov, “Computation of the fine Fomenko–Zieschang invariant for the main integrable cases of rigid body motion”, *Sb. Math.*, **187**:3 (1996), 451–468.
- [29] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, “О размерности пространства интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, *Динамические системы и смежные вопросы*, Сборник статей. К 60-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова, Тр. МИАН, **216**, Наука, М., 1997, 45–69; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, “On the dimension of the space of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **216** (1997), 38–62.

Нина Сергеевна Славина
(Nina S. Slavina)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: SlavinaNina@list.ru

Поступила в редакцию
22.04.2013