Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Темляков, Некогерентные системы и покрытия
в конечномерных банаховых пространствах, *Матем. сб.*,
2014, том 205, номер 5, 97–116

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8242>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 18:02:42

УДК 514.174.3+517.982.22

В. Н. Темляков

Некогерентные системы и покрытия в конечномерных банаховых пространствах

Обсуждаются способы построения покрытий единичного шара конечномерного банахова пространства. Хорошо известная техника, основанная на сравнении объемов, дает оценки сверху и снизу на число покрытий, однако при этом невозможно получить конструкцию хороших покрытий. В работе изучаются некогерентные системы и рассматривается их применение для построения хороших покрытий. Используется следующий подход. На первом этапе строится хорошее покрытие шарами с радиусом, близким к 1. Далее конструкция итерируется для получения хорошего покрытия шарами любого радиуса. Основное внимание уделяется первому этапу данного подхода.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: некогерентные системы, покрытие шаров, банахово пространство, модуль гладкости, явные конструкции.

DOI: 10.4213/sm8242

§ 1. Введение

Везде в статье X – банахово пространство $\mathbb{R}^d$ с нормой $\|\cdot\|$, $B := B_X$ – замкнутый единичный шар пространства X :

$$B := B_X := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 1\}. \quad (1.1)$$

Открытый единичный шар обозначается через $B^o := B_X^o$:

$$B^o := B_X^o := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| < 1\}. \quad (1.2)$$

Далее, $B(x, r) := B_X(x, r)$ и $B^o(x, r) := B_X^o(x, r)$ – соответственно замкнутый и открытый шары с центром x и радиусом r . В случае $r = 1$ мы полагаем для краткости $B^o(x) := B^o(x, 1)$.

Пусть A – компактное множество в X и ε – положительное число. Число покрытия $N_\varepsilon(A)$ определяется следующим образом:

$$N_\varepsilon(A) := N_\varepsilon(A, X) := \min \left\{ n \mid \exists x^1, \dots, x^n : A \subseteq \bigcup_{j=1}^n B_X(x^j, \varepsilon) \right\}.$$

Следующее утверждение хорошо известно.

Работа выполнена при поддержке National Science Foundation (грант № DMS-1160841).

© В. Н. Темляков, 2014

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. Пусть X – d -мерное банахово пространство. Тогда

$$\varepsilon^{-d} \leq N_\varepsilon(B_X, X) \leq \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^d.$$

Из данной оценки видно поведение величины $N_\varepsilon(B_X, X)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. В настоящей работе особое внимание будет уделено случаю, когда ε близко к 1. В частности, мы рассматриваем следующую задачу: какое количество открытых единичных шаров $B^o(x^j)$ необходимо для покрытия шара B ? Иными словами, требуется определить величину

$$N(d, X) := \min \left\{ n \mid \exists x^1, \dots, x^n : B_X \subset \bigcup_{j=1}^n B_X^o(x^j) \right\}. \quad (1.3)$$

Данная задача связана с известной гипотезой Борсука, который в работе [1] поставил следующий вопрос.

ПРОБЛЕМА В. Верно ли, что произвольное множество диаметра 1, расположенное в $\mathbb{R}^d$, может быть разбито на $d + 1$ частей меньшего диаметра?

Постановки с *диаметром* (проблема В) и *покрытием* (1.3) связаны, но различны. Ясно, что если A покрыто n шарами $B(x^j, r)$, $j = 1, \dots, n$, то A можно разбить на n частей диаметра $\leq 2r$. С другой стороны, известно (см., например, [2]), что не всякое множество A диаметра $2r$ может быть покрыто одним шаром $B(x^0, r)$. Д. Кан и Г. Калаи в [3] построили пример, показывающий, что проблема В имеет отрицательное решение при всех достаточно больших d (см. [4] по поводу дальнейших обсуждений и [5] о современном состоянии проблемы). Проблему В, сформулированную в терминах диаметра множества, характеризующего его размер, можно переформулировать в терминах (чебышёвского) радиуса, который определяется следующим образом:

$$r(A) := \inf \{ r \mid \exists x : A \subset B(x, r) \}.$$

ПРОБЛЕМА В_r. Верно ли, что произвольное множество чебышёвского радиуса 1, расположенное в d -мерном банаховом пространстве, может быть разбито на $d + 1$ частей меньшего чебышёвского радиуса?

Проблема В_r имеет следующую эквивалентную формулировку: верно ли, что $N(d, X) = d + 1$? Для d -мерного евклидова пространства ℓ_2^d эта проблема представляет собой классический вопрос дискретной геометрии. Хорошо известно, что в этом случае $N(d, X) = d + 1$. Данный результат, относящийся к “фольклору” дискретной геометрии, был сообщен автору М. Л. Громовым в 1997 г. в Бразилии на конференции по основаниям вычислительной математики.

Мы покажем, что если X – равномерно гладкое d -мерное банахово пространство, то $N(d, X) = d + 1$. Таким образом, в отличие от проблемы В ее аналог (проблема В_r) имеет положительное решение в достаточно общей ситуации. Отталкиваясь от данного результата, мы рассмотрим следующий вопрос: при

каком наименьшем ε выполнено $N_\varepsilon(B) = d + 1$? Первое неравенство в предложении 1.1 дает нижнюю оценку для таких ε , а именно $\varepsilon \geq 1 - \ln(d + 1)/d$. В дискретной геометрии известно (см., например, [6]), что $\varepsilon \leq 1 - Cd^{-2}$ для евклидова пространства ℓ_2^d . В §3 мы даем простую аналитическую конструкцию соответствующего покрытия (предложения 3.1 и 3.2). Предложение 3.1 дается с подробным доказательством, поскольку используемая в нем конструкция будет использована в общих банаховых пространствах (предложение 3.3).

В приложениях важное значение имеют простые явные аналитические конструкции покрытий. В §6 мы показываем, как явные конструкции покрытий шарами радиуса, близкого к 1, могут быть использованы для построения покрытий шарами произвольно малого радиуса (примеры 6.5, 6.6). Имея в виду важность простых аналитических конструкций, мы представляем в §3 конструкцию, основанную на матрицах Адамара. Мы подробно останавливаемся на свойствах хорошо известных матриц Адамара, поскольку с их помощью удастся получить простую конструкцию, для которой векторы соответствующей ε -сети обладают хорошим свойством: все их координаты равны по модулю. С помощью такой конструкции мы также получаем оценку сверху $\varepsilon \leq 1 - Cd^{-2}$ для тех d , для которых существует матрица Адамара.

Далее, в §3 мы показываем, что наилучшая известная оценка сверху $\varepsilon \leq 1 - Cd^{-2}$ вытекает из двух различных конструкций, приведенных в предложениях 3.2 и 3.4. В обеих конструкциях мы рассматриваем систему векторов $\mathcal{D} := \{g^j\}_{j=1}^{d+1}$ и строим покрытие B_2 вида $\bigcup_{j=1}^{d+1} B_2^o(ag^j, r)$ с подходящим r . В §4 мы применяем данную идею к некогерентной системе $\mathcal{D}$ для построения покрытий в евклидовом пространстве ℓ_2^d . В §5 некогерентные системы применяются для нахождения хороших покрытий шара B_X гладкого банахова пространства X . Для $x \neq 0$ пусть F_x – нормирующий функционал элемента x , т.е. $\|F_x\|_{X^*} = 1$ и $F_x(x) = \|x\|$. Существование такого функционала гарантируется теоремой Хана–Банаха.

Пусть $\mathcal{D}$ – нормированная система векторов банахова пространства X . Параметр когерентности системы $\mathcal{D}$ определяется следующим образом (см. [7]):

$$M(\mathcal{D}) := M(\mathcal{D}, X) := \sup_{g \neq h; g, h \in \mathcal{D}} \sup_{F_g} |F_g(h)|,$$

где F_g – нормирующий функционал для g . Понятно, что в общем случае нормирующий функционал F_g не единствен. Именно по этой причине мы берем верхнюю грань $\sup_{F_g}$ по всем нормирующим функционалам для g в определении $M(\mathcal{D})$. При этом, если для каждого $g \in \mathcal{D}$ нормирующий функционал $F_g \in X^*$ единствен, верхнюю грань $\sup_{F_g}$ брать не требуется. В §5 также обсуждаются следующие характеристики:

$$N(d, \mu, X) := \sup\{N \mid \exists \text{ система } \mathcal{D} \text{ такая, что } \#\mathcal{D} \geq N, M(\mathcal{D}, X) \leq \mu\}.$$

В следующей теореме дается оценка сверху на $N(d, \mu, X)$, которую мы докажем ниже в §5. Для случая евклидова пространства эта оценка была известна ранее (см., например, [8; §5.7]).

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть X – банахово пространство $\mathbb{R}^d$ с нормой $\|\cdot\|$. Тогда

$$N(d, \mu, X) \leq \max\left(C_2 d, \exp\left(C_2 d \mu^2 \ln \frac{2}{\mu}\right)\right). \quad (1.4)$$

Мы воспользуемся теоремой 1.1 для нахождения оценки сверху величины $N_r(B_X)$ (см. (1.5) ниже). Пусть $\rho(u)$ – модуль гладкости пространства X (определение дается в § 3) и $a(\mu)$ – решение (в действительности единственное) уравнения

$$a\mu = 4\rho(2a).$$

Мы доказываем следующую оценку в следствии 5.1. Пусть $r = 1 - (1/2)\mu a(\mu)$, $\mu \leq 1/2$. Тогда

$$N_r(B_X) \leq 2 \max\left(C_2 d, \exp\left(C_2 d \mu^2 \ln \frac{2}{\mu}\right)\right). \quad (1.5)$$

Интересно отметить (см. § 6), что в случае $X := \ell_p^d$, $p \in [2, \infty)$, мы имеем $1 - r = (1/2)\mu a(\mu) \asymp \mu^2$, как и для пространства $X = \ell_2^d$.

В § 6 рассматриваются конкретные примеры пространств и делается вывод, что подход, основанный на экстремальных некогерентных системах, хорошо работает и дает оптимальные или близкие к оптимальным оценки по порядку $\ln N_\varepsilon(B_X)$.

§ 2. Оценки снизу

Результаты настоящего параграфа известны и приведены с короткими доказательствами для полноты. Имеет место следующая оценка.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть X – банахово пространство $\mathbb{R}^d$ с нормой $\|\cdot\|$. Тогда

$$N(d, X) \geq d + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы покажем, что любой набор из d шаров $B^o(x^j)$, $j = 1, \dots, d$, радиуса 1 не покрывает шар B . Действительно, для заданного набора $\{B^o(x^j)\}_{j=1}^d$ рассмотрим аффинное подпространство M , проходящее через точки $x^1, \dots, x^d$:

$$M := \{x : x = x^1 + t_1(x^2 - x^1) + \dots + t_{d-1}(x^d - x^1), t_j \in \mathbb{R}\}.$$

Ясно, что размерность M не превосходит $d - 1$. Из приводимой ниже леммы 2.1 следует, что найдется точка $z \in B$, $\|z\| = 1$, такая, что $\|z - x\| \geq 1$ при любом $x \in M$. Как следствие, $z \in B$ не содержится в объединении $\bigcup_{j=1}^d B_X^o(x^j)$.

ЛЕММА 2.1. Пусть X – банахово пространство $\mathbb{R}^d$ с нормой $\|\cdot\|$. Тогда для любого аффинного гиперподпространства M

$$d(B_X, M) := \sup_{y \in B_X} \inf_{x \in M} \|y - x\| \geq 1. \quad (2.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы покажем, что, не ограничивая общности, можно считать, что M – подпространство. Действительно, полагая

$$M^- := \{x : -x \in M\},$$

мы имеем $d(B_X, M) = d(B_X, M^-)$ в силу симметричности шара B_X . Рассмотрим представление M в виде

$$M = \{x : x = x^0 + t_1 u^1 + \dots + t_{d-1} u^{d-1}, t_j \in \mathbb{R}\}$$

и определим подпространство

$$M^0 := \{x : x = t_1 u^1 + \dots + t_{d-1} u^{d-1}, t_j \in \mathbb{R}\}.$$

Тогда $d(B_X, M^0) \leq d(B_X, M)$, поскольку для каждой точки $y \in B_X$ найдутся такие точки $x^+ \in M$ и $x^- \in M^-$, что

$$\|y - x^+\| \leq d(B_X, M), \quad \|y - x^-\| \leq d(B_X, M^-) = d(B_X, M).$$

Положим $x^0 := (x^+ + x^-)/2 \in M^0$. Тогда

$$\|y - x^0\| \leq \frac{\|y - x^+\|}{2} + \frac{\|y - x^-\|}{2} \leq d(B_X, M).$$

Итак, мы можем считать, что M – подпространство. Стандартным подходом при доказательстве утверждений типа леммы 2.1 является использование теоремы Борсука об антиподах (см., например, [9; с. 405]). Мы же воспользуемся одной идеей из функционального анализа. Пусть w – такой функционал, что $\|w\|_{X^*} = 1$ и $w(x) = 0$ при $x \in M$. Рассмотрим нормирующий функционал F_w для w . Поскольку пространство X рефлексивно, то $F_w \in B_X$. Окончательно для любого $x \in M$ имеем

$$\|F_w - x\| \geq |w(F_w - x)| = 1,$$

что завершает доказательство леммы 2.1.

§ 3. Оценки сверху

Начнем со случая евклидовой нормы $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$. Пусть $\{e^j\}_{j=1}^d$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^d$: $e_i^j = 0$, если $i \neq j$ и $e_j^j = 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть

$$x^j := \frac{1}{2d} e^j, \quad j = 1, \dots, d, \quad x^{d+1} := -\frac{1}{2d} \sum_{j=1}^d e^j.$$

Тогда

$$B_2 \subset \bigcup_{j=1}^{d+1} B_2^o(x^j).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с описания множества, не покрываемого шарами $B_2^o(x^k)$, $k \in [1, d]$. Рассмотрим любую точку $y \in B_2$. Тогда $\sum_{j=1}^d y_j^2 \leq 1$. Полагая $a := 1/(2d)$, имеем

$$\|y - x^k\|^2 = \sum_{j \neq k} y_j^2 + (y_k - a)^2.$$

Если $(y_k - a)^2 < y_k^2$, то $y \in B^o(x^k)$. Значит, для тех y_k , которые не попадают в $B^o(x^k)$, выполняется неравенство $(y_k - a)^2 \geq y_k^2$, откуда $y_k \leq a/2$. Следовательно,

$$B_2 \setminus \bigcup_{k=1}^d B_2^o(x^k) \subset C := \left\{ y : y \in B_2, y_k \leq \frac{a}{2} \right\}.$$

Теперь покажем, что $C \subset B_2^o(x^{d+1})$. Действительно, для любого $y \in C$ имеем

$$b := \sum_{k=1}^d (y_k + a)^2 = \sum_{k=1}^d y_k^2 + 2a \sum_{k=1}^d y_k + da^2.$$

Из неравенства $y_k \leq a/2$ вытекает, что $y_k \leq -|y_k| + a$ и

$$b \leq \sum_{k=1}^d y_k^2 - 2a \sum_{k=1}^d |y_k| + 3da^2.$$

Так как

$$\sum_{k=1}^d |y_k| \geq \sum_{k=1}^d y_k^2,$$

то мы получаем

$$b \leq (1 - 2a) \sum_{k=1}^d y_k^2 + 3da^2 \leq 1 - 2a + 3da^2 \leq 1 - \frac{1}{4d}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Пусть

$$a := \frac{2}{5d+1}, \quad x^j := ae^j, \quad j = 1, \dots, d, \quad x^{d+1} := -a \sum_{j=1}^d e^j.$$

Тогда

$$B_2 \subset \bigcup_{j=1}^{d+1} B_2^o(x^j, r) \quad \text{при } r > (1 - a^2)^{1/2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем те же приемы, что и при доказательстве предложения 3.1. Укажем отличия. Для начала отметим, что если $y_k > a$, то $y_k^2 - (y_k - a)^2 > a^2$. Как следствие, в этом случае $y \in B_2^o(x^k, r)$. Имеем

$$B_2 \setminus \bigcup_{k=1}^d B_2^o(x^k, r) \subset C' := \{y : y \in B_2, y_k \leq a\}.$$

Аналогично предыдущему

$$b \leq (1 - 2a) \sum_{k=1}^d y_k^2 + 5da^2 \leq 1 - 2a + 5da^2 = 1 - a^2 < r^2,$$

и окончательно имеем $C' \subset B_2^o(x^{d+1}, r)$.

Банахово пространство X называется *гладким*, если норма пространства X дифференцируема по Гато в любой точке $g \in X$, $g \neq 0$, т.е.

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\|g + uy\| + \|g - uy\| - 2\|g\|}{u} = 0$$

при любом $y \in X$.

Модуль гладкости банахова пространства X определяется следующим образом:

$$\rho(u) := \sup_{\|x\|=\|y\|=1} \left(\frac{1}{2} (\|x + uy\| + \|x - uy\|) - 1 \right).$$

По определению банахово пространство называется *равномерно гладким*, если

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\rho(u)}{u} = 0.$$

Известно, что гладкое конечномерное банахово пространство является равномерно гладким.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть X – гладкое d -мерное банахово пространство. Тогда существует $a > 0$ такое, что

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{d+1} B^o(x^j), \quad (3.1)$$

где $x^j := ae^j$, $j = 1, \dots, d$, и $x^{d+1} := -a \sum_{j=1}^d e^j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вложение (3.1) эквивалентно тому, что для каждого $y \in B$ выполняется хотя бы одно из следующих $d + 1$ неравенств:

$$\|y - ae^j\| < 1, \quad j \in [1, d]; \quad (3.2)$$

$$\left\| y + a \sum_{j=1}^d e^j \right\| < 1. \quad (3.3)$$

В доказательстве число a будет малым. Предположим, что $a < 1/2$. Тогда если точка y такова, что $\|y\| \leq 1/2$, то все неравенства (3.2) удовлетворяются. Поэтому ниже достаточно рассматривать те y , для которых $1/2 < \|y\| \leq 1$.

Отметим следующее неравенство, вытекающее из определения модуля гладкости (см., например, [8; с. 336]).

ЛЕММА 3.1. Пусть $x \neq 0$. Тогда

$$0 \leq \|x + uy\| - \|x\| - uF_x(y) \leq 2\|x\|\rho\left(\frac{u\|y\|}{\|x\|}\right),$$

где F_x – нормирующий функционал для x .

Из леммы 3.1 вытекают следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \|y - ae^j\| &\leq \|y\| - aF_y(e^j) + 2\|y\|\rho\left(\frac{a}{\|y\|}\right) \\ &\leq \|y\| - aF_y(e^j) + 2\|y\|\rho(2a), \quad j \in [1, d]; \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\left\|y + a \sum_{j=1}^d e^j\right\| \leq \|y\| + aF_y\left(\sum_{j=1}^d e^j\right) + 2\rho(2da). \quad (3.5)$$

Здесь F_y – нормирующий функционал для y .

Для начала отметим, что величина $|F_y(e^k)|$ является достаточно большой при некотором k . Действительно, положим $y = \sum_{j=1}^d y_j e^j$. Тогда

$$|y_j| \leq C_1(d)\|y\|, \quad j = 1, \dots, d.$$

Далее,

$$\|y\| = F_y(y) = \sum_{j=1}^d y_j F_y(e^j) \leq C_1(d)\|y\| \sum_{j=1}^d |F_y(e^j)|,$$

откуда следует, что при некотором $k \in [1, d]$

$$|F_y(e^k)| \geq (dC_1(d))^{-1} =: c_1. \quad (3.6)$$

Положим $b := c_1/2$ и рассмотрим три случая:

$$F_y\left(\sum_{j=1}^d e^j\right) \leq -b, \quad (3.7)$$

$$F_y\left(\sum_{j=1}^d e^j\right) \geq b, \quad (3.8)$$

$$\left|F_y\left(\sum_{j=1}^d e^j\right)\right| < b. \quad (3.9)$$

В случае (3.7) из неравенства (3.5) вытекает (3.3), если $a := a(b, \rho, d)$ достаточно мало (напомним, что из предположения о гладкости вытекает, что $\rho(u)/u \rightarrow 0$ при $u \rightarrow 0$). В случае (3.8) мы имеем, что $F_y(e^k) \geq b/d$ при некотором $k \in [1, d]$, а это достаточно для вывода (3.2) при $j = k$ из (3.4) с малым a .

Рассмотрим случай (3.9). Из неравенства (3.6) имеем, что или $F_y(e^k) \geq c_1$, или $-F_y(e^k) \geq c_1$. В случае $F_y(e^k) \geq c_1$ доказательство завершается, как и в случае (3.8). Если же $-F_y(e^k) \geq c_1$, то из (3.9) вытекает, что

$$\sum_{j=1}^d F_y(e^j) > -b$$

и, значит,

$$\sum_{j \neq k}^d F_y(e^j) > -b - F_y(e^k) \geq -b + c_1 = \frac{c_1}{2}.$$

Следовательно, при некотором m

$$F_y(e^m) \geq \frac{c_1}{2(d-1)},$$

и дальнейшее доказательство аналогично случаю (3.8).

Далее мы обсудим другой подход к построению покрытий мощности $d+1$ евклидового шара. Данный подход основан на конструкциях жестких фреймов. Начнем со следующего условного утверждения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть $\Phi := \{\varphi^j\}_{j=1}^{d+1}$ – нормированная система векторов, $\|\varphi^j\|_2 = 1$, $j = 1, \dots, d+1$, удовлетворяющая условию

$$\langle \varphi^i, \varphi^j \rangle = -\frac{1}{d}, \quad 1 \leq i \neq j \leq d+1.$$

Тогда найдется $a > 0$, для которого

$$B_2 \subset \bigcup_{j=1}^{d+1} B_2^o(a\varphi^j).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В наших рассуждениях a будет малым числом. Пусть $a < 1/2$. Тогда для любого x , $\|x\|_2 \leq 1/2$, и любого $k \in [1, d+1]$

$$\|x - a\varphi_k\|_2 < 1.$$

Таким образом, достаточно рассмотреть элементы x , для которых $1/2 \leq \|x\|_2 \leq 1$. Для каждого k имеем

$$\|x - a\varphi^k\|_2^2 = \|x\|_2^2 + a^2 - 2a\langle x, \varphi^k \rangle. \quad (3.10)$$

Оценим $\langle x, \varphi^k \rangle$ снизу. Легко проверяется, что из наших предположений на систему Φ имеем

$$x = \frac{d}{d+1} \sum_{i=1}^{d+1} \langle x, \varphi^i \rangle \varphi^i, \quad (3.11)$$

$$\sum_{i=1}^{d+1} \varphi^i = 0, \quad (3.12)$$

$$\|x\|_2^2 = \frac{d}{d+1} \sum_{i=1}^{d+1} \langle x, \varphi^i \rangle^2. \quad (3.13)$$

Далее нам потребуется следующий простой технический результат.

ЛЕММА 3.2. Пусть $y \in \mathbb{R}^N$, $\sum_{i=1}^N y_i = 0$. Тогда при некотором k

$$y_k \geq \frac{\|y\|_2}{2(N-1)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждаем от противного. Предположим, что

$$y_j < \frac{\|y\|_2}{2(N-1)}$$

при всех j . Рассмотрим

$$E^+ := \{j : y_j > 0\}, \quad E^- := \{j : y_j < 0\}.$$

Тогда из нашего предположения вытекает, что

$$\sum_{j \in E^+} y_j < \frac{\|y\|_2}{2}$$

(заметим, что $|E^+| \leq N-1$), и мы приходим к противоречию:

$$\|y\|_1 = \sum_{j=1}^N |y_j| = 2 \sum_{j \in E^+} y_j < \|y\|_2.$$

Применим лемму 3.2 при $N := d+1$, $y_j := \langle x, \varphi^j \rangle$. Условие $\sum_{i=1}^N y_i = 0$ вытекает из (3.12). Воспользуемся (3.13) с учетом того, что $\|x\|_2 \geq 1/2$. Тогда из леммы 3.2 следует, что при некотором k

$$\langle x, \varphi^k \rangle \geq (2d)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{d+1} \langle x, \varphi^i \rangle^2 \right)^{1/2} \geq \frac{1}{4d}.$$

Для такого k из (3.10) вытекает, что

$$\|x - a\varphi^k\|_2^2 \leq 1 + a^2 - \frac{a}{4d}.$$

Полагая $a = 1/(8d)$, имеем

$$\|x - a\varphi^k\|_2^2 \leq 1 - \frac{1}{64d^2}.$$

Существование системы, удовлетворяющей условиям предложения 3.4, обеспечивается хорошо известным результатом о существовании правильных d -симплексов. Мы дадим один пример такой конструкции, основанной на использовании матриц Адамара. Матрицы Адамара находят широкое применение как в теоретических, так и в прикладных задачах. В частности, они весьма востребованы в теории кодов, исправляющих ошибки.

Напомним, что *матрицей Адамара* порядка n называется матрица H_n размера $n \times n$, состоящая из 1 и -1 и такая, что

$$H_n^T H_n = nI_n,$$

где I_n – единичная матрица. Ясно, что любые два столбца или две строки матрицы Адамара H_n взаимно ортогональны. Такая ортогональность сохраняется при перестановке строк или столбцов, а также при их умножении на -1 . Следовательно, по данной матрице Адамара, умножая некоторые столбцы на -1 , мы

можем построить новую матрицу Адамара, у которой первая строка составлена только из единиц. Также отметим, что матрицы Адамара существуют только для некоторых порядков n .

Следующая хорошо известная лемма и замечание взяты из монографии [10].

ЛЕММА 3.3. *Если H_n – матрица Адамара порядка n , то $n = 1$, $n = 2$ или $n \equiv 0 \pmod{4}$.*

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Известная гипотеза в теории комбинаторных схем состоит в том, что матрица Адамара порядка n существует для любого $n \equiv 0 \pmod{4}$. В настоящее время мы далеки от получения ответа на эту гипотезу. Наименьший порядок n , для которого матрица Адамара пока¹ не сконструирована, равен 428.

В настоящее время известно, что число 428 из замечания 3.1 можно заменить на 668, т.е. наименьший порядок, для которого матрица Адамара до сих пор не сконструирована, равен 668.

Имеется много методов построения матриц Адамара. При одном из способов построения матрица Адамара строится из так называемых *конференц-матриц* (см. [10]), но мы на нем не будем останавливаться. Для иллюстрации укажем очень простой рекурсивный способ построения матрицы Адамара порядка 2^k , $k = 0, 1, 2, \dots$. Имеет место следующий результат.

ЛЕММА 3.4. *Пусть $k = 0, 1, 2, \dots$. Тогда матрицы вида*

$$H_1 = [1], \quad H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad H_{2^{k+1}} = \begin{bmatrix} H_{2^k} & H_{2^k} \\ H_{2^k} & -H_{2^k} \end{bmatrix}$$

являются адамаровыми.

Также матрицы Адамара больших порядков можно строить из матриц Адамара меньшего порядка с использованием произведений Кронекера.

Матрицы Адамара были использованы в [11] для построения систем из предложения 3.4. Такие системы называются в [11] абсолютно равноугольными жесткими фреймами.

ТЕОРЕМА 3.1. *Пусть H_m – матрица Адамара, у которой в первой строке стоят одни единицы, и пусть $m = n + 1$. Тогда столбцы матрицы Φ , полученной удалением первой строки матрицы H_m и делением на $\sqrt{n}$, представляют собой абсолютно равноугольный жесткий фрейм.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все столбцы H_m взаимно ортогональны. Иными словами, если $1 \leq i \neq j \leq m$, то для векторов-столбцов h_i и h_j матрицы H_m имеет место равенство $\langle h_i, h_j \rangle = 0$.

Поскольку первые элементы у h_i и h_j равны 1, то для соответствующих столбцов φ_i и φ_j матрицы Φ выполнено

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \frac{1}{n} (\langle h_i, h_j \rangle - 1) = \frac{1}{n} (0 - 1) = -\frac{1}{n}$$

при всех $1 \leq i \neq j \leq m$.

¹То есть на 2001 г.

§ 4. Построение покрытий с использованием некогерентных систем

Предложение 3.4 демонстрирует применение техники специальных систем для построения покрытий. В настоящем параграфе мы обсуждаем приложения некогерентных систем в случае евклидовых пространств. Пусть $\mathcal{D} = \{g^k\}_{k=1}^N$ – нормированная ($\|g^k\| = 1$, $k = 1, \dots, N$) система из векторов из пространства $\mathbb{R}^d$ с евклидовой нормой. Определим параметр когерентности системы $\mathcal{D}$ следующим образом:

$$M(\mathcal{D}) := \sup_{k \neq l} |\langle g^k, g^l \rangle|.$$

Рассмотрим следующую характеристику:

$$N(d, \mu) := \sup \{N : \exists \text{ система } \mathcal{D} \text{ такая, что } \#\mathcal{D} \geq N, M(\mathcal{D}) \leq \mu\}.$$

Задача изучения $N(d, \mu)$ эквивалентна фундаментальной проблеме построения оптимальных сферических кодов в теории информации. *Сферическим кодом* $\mathcal{S}(d, N, \mu)$ называется любое N -точечное подмножество (кодových слов) d -мерной единичной сферы такое, что модуль скалярного произведения любой пары различных кодových слов не превосходит μ . Задачей является нахождение наибольшего N^* , для которого существует сферический код $\mathcal{S}(d, N^*, \mu)$. Ясно, что $N^* = N(d, \mu)$. Через $\mathcal{D}(\mu)$ обозначим такую систему, что $M(\mathcal{D}(\mu)) \leq \mu$ и $|\mathcal{D}(\mu)| = N(d, \mu)$. Мы будем называть $\mathcal{D}(\mu)$ *экстремальной системой* для заданного μ .

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть $\mathcal{D}(\mu) := \{g^k\}_{k=1}^{N(d, \mu)}$ – экстремальная система для заданного $\mu \leq (1/2)^{1/2}$. Тогда

$$B_2 \subset \left(\bigcup_{j=1}^{N(d, \mu)} B_2^o(\mu g^j, r) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N(d, \mu)} B_2^o(-\mu g^j, r) \right), \quad r^2 = 1 - \mu^2.$$

Таким образом, $N_r(B_2) \leq 2N(d, \mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\mathcal{D}(\mu)$ – экстремальная система для μ , то для любого $x \in B_2$ существует $g^k \in \mathcal{D}(\mu)$ такое, что $|\langle x/\|x\|_2, g^k \rangle| > \mu$. Предположим, что $\langle x/\|x\|_2, g^k \rangle > \mu$. Оставшийся случай $\langle x/\|x\|_2, -g^k \rangle > \mu$ рассматривается аналогично. Тогда

$$\|x - \mu g^k\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \mu^2 - 2\mu \langle x, g^k \rangle < \|x\|_2^2 + \mu^2 - 2\mu^2 \|x\|_2 \leq 1 - \mu^2.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Из доказательства теоремы 4.1 следует, что предположение об экстремальности системы $\mathcal{D}(\mu, X)$ в теореме 4.1 можно заменить на предположение, что $\mathcal{D}(\mu, X)$ удовлетворяет следующему свойству: для любого $x \in B_2$ существует $g^k \in \mathcal{D}(\mu, X)$ такое, что $|\langle x/\|x\|, g^k \rangle| > \mu$.

Задача об оценке $N(d, \mu)$ хорошо изучена (см., например, [8; § 5.7, с. 314]). Известно (см. [8; с. 315]), что если $\mathcal{D}$ – система мощности $\geq 2d$, то $M(\mathcal{D}) \geq (2d)^{-1/2}$. Таким образом, естественным интервалом изменения μ является отрезок $[(2d)^{-1/2}, 1]$. Известна следующая оценка (см. [8; с. 315]):

$$N(d, \mu) \leq \exp \left(C_1 d \mu^2 \ln \frac{2}{\mu} \right), \quad \mu \in \left[(2d)^{-1/2}, \frac{1}{2} \right]. \quad (4.1)$$

Из (4.1) и теоремы 4.1 вытекает следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Пусть $r = (1 - \mu^2)^{1/2}$, $\mu \in [(2d)^{-1/2}, 1/2]$. Тогда

$$N_r(B_2) \leq 2 \exp\left(C_1 d \mu^2 \ln \frac{2}{\mu}\right). \quad (4.2)$$

Сравним оценку (4.2) с известными результатами. Из классического результата К. Роджерса (см. [12; теорема 3]) вытекает следующая оценка:

$$N_r(B_2) \leq C d^{5/2} r^{-d} \leq C_1 \exp(C_2 (\ln d + d \mu^2)). \quad (4.3)$$

Эта оценка была незначительно улучшена в [13] и [14]. Однако для наших целей нам вполне достаточно оценки (4.3). Оценка (4.3) лучше, чем (4.2), однако оценка (4.3) неконструктивна. Замечание 4.1 и следствие 4.1 дают путь к построению покрытия, реализующего оценку (4.2). Такая конструкция рассмотрена в приведенном ниже примере 6.5.

Оценка (4.2) вытекает из неравенства

$$N_r(B_2) \leq 2N(d, \mu), \quad r^2 = 1 - \mu^2, \quad (4.4)$$

и известных оценок для $N(d, \mu)$. Отметим, что неравенство (4.4) не является точным. Действительно, рассмотрим $\mu^2 = \ln d/d$. Тогда, с одной стороны, из (4.3) вытекает полиномиальная оценка

$$N_r(B_2) \leq C_3 d^{C_4}.$$

С другой стороны,

$$N(d, \mu) \geq \exp(\mu d^{1/2} \ln d) = \exp((\ln d)^{3/2})$$

(см., например, [8; § 5.7]), что возрастает быстрее любой полиномиальной функции.

Проблема нахождения правильных зависимостей $N_r(B_2)$ от r , d и $N(d, \mu)$ от d , μ является важнейшей нерешенной проблемой.

§ 5. Покрытия в банаховых пространствах с использованием некогерентных систем

Мы начнем с доказательства теоремы 1.1, сформулированной во введении. Пусть $\mathcal{D} := \{g^j\}_{j=1}^N$ – нормированная система из векторов пространства X , которое мы отождествим с банаховым пространством $\mathbb{R}^d$ с нормой $\|\cdot\|$. Далее, пусть $g^j = (g_1^j, \dots, g_d^j)^T$. Посредством

$$\Phi := [g^1, \dots, g^N]$$

обозначим матрицу размера $d \times N$, составленную из векторов-столбцов $\{g^j\}$. Предположим для простоты, что для каждого g^j имеется единственный нормирующий функционал $F_{g^j} \in X^*$. Каждому функционалу $F_{g^j} \in X^*$ сопоставим

вектор $w^j \in \mathbb{R}^d$ таким образом, что $w_i^j = F_{g^j}(e^i)$, $i = 1, \dots, d$. Тогда

$$F_{g^j}(g^k) = \sum_{i=1}^d g_i^k F_{g^j}(e^i) = \sum_{i=1}^d g_i^k w_i^j = \langle w^j, g^k \rangle.$$

Рассмотрим матрицу

$$W := [w^1, \dots, w^N]$$

размера $d \times N$, составленную из векторов-столбцов $\{w^j\}$, и рассмотрим транспонированную матрицу W^T , состоящую из векторов-строк $(w_1^j, \dots, w_d^j)$, $j = 1, \dots, N$, или, что то же самое, из векторов-столбцов $h_i := (w_i^1, \dots, w_i^N)^T$, $i = 1, \dots, d$.

По определению *когерентной матрицей* системы $\mathcal{D}$ называется матрица

$$C(\mathcal{D}) := W^T \Phi.$$

Для когерентной матрицы $C(\mathcal{D})$ системы $\mathcal{D} = \{g^j\}_{j=1}^N$ выполнено следующее неравенство для ранга: $\text{rank } C(\mathcal{D}) \leq d$. Действительно, столбцы $C(\mathcal{D})$ представляют собой линейные комбинации d столбцов h_i , $i = 1, \dots, d$. Ясно, что когерентная матрица $C(\mathcal{D}) = \|c_{i,j}\|_{i=1,j=1}^N$, $c_{i,j} = F_{g^j}(g^i)$, имеет единицы на диагонали, а для внедиагональных элементов выполнено $|c_{i,j}| \leq M(\mathcal{D})$.

Воспользуемся следующим фундаментальным результатом Алона (см., например, [8; с. 317]) для вывода оценки сверху для $N(n, \mu, X)$ из неравенства на ранг $\text{rank } C(\mathcal{D}) \leq d$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $A := \|a_{i,j}\|_{i,j=1}^N$ – квадратная матрица такая, что $a_{i,i} = 1$, $i = 1, \dots, N$, $|a_{i,j}| \leq \varepsilon < 1/2$, $i \neq j$. Тогда

$$\min \left(N, (\ln N) \left(\varepsilon^2 \ln \frac{2}{\varepsilon} \right)^{-1} \right) \leq C_2 \text{rank } A, \quad (5.1)$$

где C_2 – абсолютная константа.

Мы применим эту теорему при $A = C(\mathcal{D})$ и $\varepsilon = \mu$.

Если $N \leq (\ln N)(\mu^2 \ln(2/\mu))^{-1}$, то из (5.1) вытекает, что

$$N \leq C_2 d.$$

Если же $N \geq (\ln N)(\mu^2 \ln(2/\mu))^{-1}$, то из (5.1) мы получаем

$$(\ln N) \left(\mu^2 \ln \frac{2}{\mu} \right)^{-1} \leq C_2 d$$

и

$$N \leq \exp \left(C_2 d \mu^2 \ln \frac{2}{\mu} \right). \quad (5.2)$$

Таким образом,

$$N \leq \max \left(C_2 d, \exp \left(C_2 d \mu^2 \ln \frac{2}{\mu} \right) \right),$$

что доказывает теорему 1.1.

Пусть X – гладкое банахово пространство с модулем гладкости $\rho(u)$. Через $a(\mu)$ обозначим (единственное) решение уравнения

$$a\mu = 4\rho(2a),$$

если оно существует, иначе положим $a(\mu) = 1$. Тогда $4\rho(2a(\mu)) \leq a(\mu)\mu$. Далее, пусть $\mathcal{D}(\mu, X)$ – такая система, что $M(\mathcal{D}(\mu, X)) \leq \mu$ и $|\mathcal{D}(\mu, X)| = N(d, \mu, X)$. Мы будем называть такую систему $\mathcal{D}(\mu, X)$ *экстремальной системой* в пространстве X для заданного μ .

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $\mathcal{D}(\mu, X) := \{g^k\}_{k=1}^{N(d, \mu, X)}$ – экстремальная система для заданного μ в пространстве X . Тогда

$$B_X \subset \left(\bigcup_{j=1}^{N(d, \mu, X)} B_X^o(a(\mu)g^j, r) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{N(d, \mu, X)} B_X^o(-a(\mu)g^j, r) \right), \quad r = 1 - \frac{1}{2}\mu a(\mu).$$

Таким образом, $N_r(B) \leq 2N(d, \mu, X)$ при $r = 1 - (1/2)\mu a(\mu)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из того что $\mathcal{D}(\mu, X)$ – экстремальная система для μ в пространстве X , вытекает, что для любого $x \in B_X$ найдется $g^k \in \mathcal{D}(\mu, X)$, для которого $|F_x(g^k)| > \mu$. Предположим, что $F_x(g^k) > \mu$. (Случай $F_x(-g^k) > \mu$ рассматривается полностью аналогично.) Без ограничения общности предположим, что $\|x\| \geq 1/2$. Окончательно по лемме 3.1 получаем

$$\begin{aligned} \|x - a(\mu)g^k\| &\leq \|x\| - a(\mu)F_x(g^k) + 2\|x\|\rho(2a(\mu)) \\ &< 1 - \mu a(\mu) + 2\rho(2a(\mu)) \leq 1 - \frac{1}{2}\mu a(\mu). \end{aligned}$$

Из теорем 1.1 и 5.2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Пусть $r = 1 - (1/2)\mu a(\mu)$, $\mu \leq 1/2$. Тогда

$$N_r(B_X) \leq 2 \max \left(C_2 d, \exp \left(C_2 d \mu^2 \ln \frac{2}{\mu} \right) \right).$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Пусть $\omega(u)$ – непрерывная мажоранта для $\rho(u)$, $u \in [0, \infty)$, такая, что $\omega(u)/u$ монотонно убывает к 0 при $u \rightarrow 0$ (иными словами, $\omega(u)/u$ возрастает на $(0, \infty)$ и $\lim_{u \rightarrow 0} \omega(u)/u = 0$). Через $a(\omega, \mu)$ обозначим решение уравнения

$$a\mu = 4\omega(2a), \tag{5.3}$$

если оно существует, иначе положим $a(\omega, \mu) = 1$.

Отметим, что теорема 5.2 и следствие 5.1 остаются верными, если заменить $a(\mu)$ на $a(\omega, \mu)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. Из доказательства теоремы 5.2 следует, что предположение об экстремальности системы $\mathcal{D}(\mu, X)$ в ней можно заменить на предположение, что $\mathcal{D}(\mu, X)$ удовлетворяет следующему свойству: для любого $x \in B_X$ существует $g^k \in \mathcal{D}(\mu, X)$ такое, что $|F_x(g^k)| > \mu$.

§ 6. Некоторые примеры

В настоящем параграфе мы обсуждаем полученные результаты и показываем их силу на ряде конкретных примеров.

ПРИМЕР 6.1. Пусть X – равномерно гладкое d -мерное банахово пространство со степенным модулем гладкости, т.е. $\rho(u) \leq \gamma u^q$, $q \in (1, 2]$. Полагая $\omega(u) := \gamma u^q$, мы имеем

$$a(\omega, \mu) = \left(\frac{\mu}{\gamma 2^{q+2}} \right)^{1/(q-1)}.$$

Из замечания 5.1 и следствия 5.1 вытекает, что

$$N_r(B_X) \leq 2 \max \left(C_2 d, \exp \left(C_2 d \mu^2 \ln \frac{2}{\mu} \right) \right)$$

при $r = 1 - (1/2)\mu a(\omega, \mu)$ и $\mu \leq 1/2$. Иными словами, полагая $\delta := 1 - r$ и $q' := q/(q-1)$, имеем

$$N_{1-\delta}(B_X) \leq 2 \max \left(C_2 d, \exp \left(C_2(q, \gamma) d \delta^{2/q'} \ln \frac{2}{\delta} \right) \right). \quad (6.1)$$

В частности, если $q = 2$ и $\delta = A_1/d$, то мы получаем полиномиальную оценку

$$N_{1-A_1/d}(B_X) \leq A_2 d^{A_3}.$$

В случае $q \in (1, 2]$ величина $N_{1-\delta}(B_X)$ также оценивается полиномиально при $\delta \asymp d^{-q'/2}$.

ПРИМЕР 6.2. Пусть $X := \ell_p^d$, $p \in (1, \infty)$. Известно, что

$$\rho(u) \leq \frac{u^p}{p}, \quad \text{если } 1 \leq p \leq 2, \quad (6.2)$$

$$\rho(u) \leq \frac{p-1}{2} u^2, \quad \text{если } 2 \leq p < \infty. \quad (6.3)$$

Начнем со случая $2 \leq p < \infty$. Положим $\omega(u) := (p/2)u^2$. Тогда

$$a(\omega, \mu) = \frac{\mu}{8p}, \quad \delta := \frac{1}{2} \mu a(\omega, \mu) = \frac{\mu^2}{16p}, \quad \mu = 4p^{1/2} \delta^{1/2}.$$

Согласно замечанию 5.1 и следствию 5.1 имеем

$$N_{1-\delta}(B_p^d) \leq 2 \max \left(C_2 d, \exp \left(8C_2 dp \delta \ln \frac{1}{4p\delta} \right) \right) \quad (6.4)$$

при $r = 1 - (1/2)\mu a(\omega, \mu)$ и $\mu \leq 1/2$.

Таким образом, $N_{1-\delta}(B_p^d)$ оценивается полиномиально в случае $2 \leq p < \infty$ при $\delta \asymp 1/(pd)$.

В случае $p \in (1, 2)$ положим $\omega(u) := u^p/p$. Тогда

$$a(\omega, \mu) = \left(\frac{p\mu}{2^{p+2}} \right)^{1/(p-1)}, \quad \delta := \frac{1}{2}\mu a(\omega, \mu) = C(p)\mu^{p'}, \quad \mu \asymp \delta^{1/p'}.$$

Как и выше, из замечания 5.1 и следствия 5.1 получаем при $p \in (1, 2)$

$$N_{1-\delta}(B_p^d) \leq 2 \max \left(C_2 d, \exp \left(C_2(p) d \delta^{2/p'} \ln \frac{2}{\delta} \right) \right), \quad (6.5)$$

что дает полиномиальную оценку для $N_{1-\delta}(B_p^d)$ при $1 < p < 2$ и $\delta \asymp (1/d)^{p'/2}$.

ПРИМЕР 6.3. Пусть X – d -мерное подпространство пространства L_p , $1 < p < \infty$. Как и в примере 6.2, имеем

$$\rho(u) \leq \frac{u^p}{p}, \quad \text{если } 1 \leq p \leq 2, \quad (6.6)$$

$$\rho(u) \leq \frac{p-1}{2} u^2, \quad \text{если } 2 \leq p < \infty. \quad (6.7)$$

Как следствие, оценки (6.4) и (6.5) также выполнены.

ПРИМЕР 6.4. Пусть $X := \ell_\infty^d$. Предложение 1.1 показывает, что при любом $r \in [1/2, 1)$ имеет место экспоненциальная оценка

$$N_r(B_X) \leq C^d$$

для любого d -мерного пространства X независимо от его гладкости. Легко проверить, что

$$N(d, \ell_\infty^d) = 2^d$$

и, как следствие, при всех $r \in [1/2, 1)$

$$N_r(B_\infty^d) \geq 2^d.$$

Данный пример показывает важность предположения о гладкости пространства для избавления от экспоненциальности в оценке для $N_r(B_X)$.

Из первого неравенства предложения 1.1 вытекает, что в классе всех d -мерных банаховых пространств X число покрытия $N_{1-\delta}(B_X)$ может иметь полиномиальный рост по d , только если $\delta \ll \ln d/d$. Примеры 6.1–6.3 показывают, что наш подход с использованием экстремальных μ -когерентных систем позволяет для гладких пространств X строить покрытия шара B_X с полиномиальной по d оценкой числа покрытия при $r = 1 - \delta$, $\delta \gg 1/d$.

ПРИМЕР 6.5. Пусть $X := \ell_2^d$. Определим систему $\mathcal{D} := \{\pm e^j\}_{j=1}^d$. Положим $a := 1/(4d^{1/2})$ и рассмотрим покрытие

$$\left(\bigcup_{j=1}^d B_2(ae^j, r) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^d B_2(-ae^j, r) \right).$$

Мы покажем, что существует $c > 0$ такое, что шар B_2 покрывается данным объединением шаров при $r \geq 1 - c/d$.

Действительно, если $x \in X$ и $\|x\|_2 \geq 1/2$, то для некоторого k выполнено $|x_k| \geq 1/(2d^{1/2})$. Предположим, что $x_k \geq 1/(2d^{1/2})$. Тогда

$$x_k^2 - (x_k - a)^2 = 2x_k a - a^2 \geq \frac{3}{16d}.$$

Отсюда вытекает, что явно указанное выше объединение $2d$ шаров радиуса $r \geq 1 - c/d$ покрывает шар B_2 . Мы воспользуемся этим покрытием для построения явного покрытия с меньшим r . Для этого m раз проитерлируем данное покрытие с $r = 1 - c/d$. Радиус получившегося покрытия будет $r = (1 - c/d)^m$, а общее число шаров в покрытии будет не более, чем $(2d)^m$. Полагая $\delta := 1 - r$, мы получаем при малых δ

$$(2d)^m \leq \exp(Cd\delta \ln(2d)).$$

ПРИМЕР 6.6. Пусть X – равномерно гладкое d -мерное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и базисом $\Psi := \{\psi^j\}_{j=1}^d$. Тогда любой элемент x единственным образом представим в виде

$$x = \sum_{j=1}^d x_j \psi^j, \quad |x_j| \leq K\|x\|, \quad j = 1, \dots, d.$$

Пусть $\omega(u)$ – непрерывная мажоранта для $\rho(u)$, $u \in [0, \infty)$, такая, что $\omega(u)/u$ монотонно убывает к 0 при $u \rightarrow 0$. Пусть $a := a(\omega, 1/(Kd))$ – решение уравнения (5.3) с $\mu := 1/(Kd)$. Рассмотрим систему $\mathcal{D} := \{\pm\psi^j\}_{j=1}^d$ и покрытие

$$\left(\bigcup_{j=1}^d B_X(a\psi^j, r) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^d B_X(-a\psi^j, r) \right).$$

Покажем, что шар B_X покрывается данным объединением шаров радиуса $r \geq 1 - (1/2)a\mu$. Имеем

$$\|x\| = F_x(x) = \sum_{j=1}^d x_j F_x(\psi^j) \leq K\|x\| \sum_{j=1}^d |F_x(\psi^j)|,$$

откуда при некотором $k \in [1, d]$ получаем

$$|F_x(\psi^k)| \geq (Kd)^{-1} =: \mu. \quad (6.8)$$

Предположим, что $F_x(\psi^k) \geq (Kd)^{-1}$. Тогда по лемме 3.1

$$\|x - a\psi^k\| \leq \|x\| - aF_x(\psi^k) + 2\|x\|\rho(2a) < 1 - a\mu + 2\rho(2a) \leq 1 - \frac{1}{2}a\mu.$$

Отсюда следует, что такое явно указанное объединение $2d$ шаров радиуса $r \geq 1 - (1/2)a\mu$ покрывает шар B_X . Такое покрытие может быть использовано для построения явного покрытия с меньшим r . Как и в примере 6.5, проитерлируем m раз данное покрытие с $r = 1 - (1/2)a\mu$. Радиус шаров получившегося покрытия будет $r = (1 - (1/2)a\mu)^m$, а общее число шаров в покрытии будет не более, чем $(2d)^m$.

Примеры 6.5 и 6.6 показывают, как простые конструкции покрытий шарами радиуса $r < 1$ могут быть использованы для получения ε -покрытий (т.е. покрытий шарами радиуса ε). Предположим, что мы умеем строить r -покрытие с полиномиальной оценкой $N_r(B_X) \leq d^{A_4}$ при $r = 1 - A_5/d$. Тогда, предполагая, что X имеет модуль гладкости порядка u^2 , как в примере 6.5, и итерируя покрытие m раз, мы получаем $(1 - \delta)$ -покрытие, для которого

$$N_{1-\delta}(B_X) \leq \exp(Cd\delta \ln d), \quad \delta \geq \frac{A_5}{d}.$$

Данная оценка имеет дополнительный множитель $\ln d$ в показателе экспоненты по сравнению с оптимальной оценкой из предложения 1.1. Однако конструкция экстремальной системы дает

$$N_{r_0}(B_X) \leq \exp(C(c_0)d), \quad r_0 = r_0(c_0) < 1,$$

при некотором фиксированном $\mu_0 \geq c_0 > 0$. Итерируя данную конструкцию, получаем

$$N_\varepsilon(B_X) \leq \exp\left(Cd \ln \frac{1}{\varepsilon}\right),$$

что является оптимальной оценкой по порядку показателя экспоненты.

Из оценки Роджерса (4.3) с $\mu^2 = \ln d/d$ следует, что для евклидового шара существует покрытие мощности $\leq C_1 d^{C_2}$ с радиусом r_1 , $r_1^2 = 1 - \mu^2$. Как и выше, итерируя данную конструкцию m раз, мы получаем покрытие мощности $\leq (C_1 d^{C_2})^m$ шарами радиуса $r_m = r_1^m$. Легко убедиться, что

$$(C_1 d^{C_2})^m \leq r_m^{-C_3 d},$$

а это является оптимальной оценкой по порядку показателя экспоненты.

Автор выражает благодарность Б. С. Кашину за указание на связь результатов настоящей работы с гипотезой Борсука. Автор также благодарен рецензенту за конструктивные и содержательные замечания, позволившие существенно улучшить изложение работы.

Список литературы

- [1] K. Borsuk, “Drei Sätze über die n -dimensionale euclidische Sphäre”, *Fund. Math.*, **20** (1933), 177–190.
- [2] J. Bourgain, J. Lindenstrauss, “On covering a set in $\mathbb{R}^N$ by balls of the same diameter”, *Geometric aspects of functional analysis* (1989–90), Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 1991, 138–144.
- [3] J. Kahn, G. Kalai, “A counterexample to Borsuk’s conjecture”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **29**:1 (1993), 60–72.
- [4] N. Alon, “Discrete mathematics: methods and challenges”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, v.I (Beijing, 2002), Higher Ed. Press, Beijing, 2002, 119–135.
- [5] A. Bondarenko, *On Borsuk’s conjecture for two-distance sets*, 2013, 9 pp., [arXiv: 1305.2584v3](https://arxiv.org/abs/1305.2584v3).

- [6] А. М. Райгородский, *Гипотеза Кнезера и топологический метод в комбинаторике*, МЦНМО, М., 2011, 28 с.
- [7] V. N. Temlyakov, “Greedy approximations”, *Foundations of computational mathematics* (Santander 2005), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **331**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006, 371–394.
- [8] V. N. Temlyakov, *Greedy approximation*, Cambridge Monogr. Appl. Comput. Math., **20**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011, xiv+418 pp.
- [9] G. G. Lorentz, M. v. Golitschek, Yu. Makovoz, *Constructive approximation. Advanced problems*, Grundlehren Math. Wiss., **304**, Springer-Verlag, Berlin, 1996, xii+649 pp.
- [10] J. H. van Lint, R. M. Wilson, *A course in combinatorics*, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001, xiv+602 pp.
- [11] Xiteng Liu, *Sparse signal representation in redundant systems*, Ph. D. Dissertation, University of South Carolina, 2006, 75 pp.
- [12] C. A. Rogers, “Covering a sphere with spheres”, *Mathematika*, **10**:2 (1963), 157–164.
- [13] J.-L. Verger-Gaugry, “Covering a ball with smaller equal balls in $\mathbb{R}^n$ ”, *Discrete Comput. Geom.*, **33**:1 (2005), 143–155.
- [14] I. Dumer, “Covering spheres with spheres”, *Discrete Comput. Geom.*, **38**:4 (2007), 665–679.

Владимир Николаевич Темляков
(Vladimir N. Temlyakov)

University of South Carolina, Columbia, SC, USA;
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: temlyak@math.sc.edu

Поступила в редакцию
23.04.2013 и 20.11.2013