Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Кожевникова, А. А. Леонтьев, О решениях анизотропных параболических уравнений высокого порядка в неограниченных областях, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 1, 9–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8243>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.91.87.62

26 апреля 2023 г., 13:01:58

УДК 517.956.4

Л. М. Кожевникова, А. А. Леонтьев

О решениях анизотропных параболических уравнений высокого порядка в неограниченных областях

Работа посвящена некоторому классу анизотропных параболических уравнений высокого порядка с двойной нелинейностью. Методом галёркинских приближений доказывается существование сильного решения первой смешанной задачи в цилиндрической области $D = (0, \infty) \times \Omega$ с неограниченной областью $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, и с однородным краевым условием Дирихле. В случае финитной начальной функции установлена максимально возможная скорость убывания построенного решения при $t \rightarrow \infty$. Доказана оценка сверху, характеризующая убывание решения по времени, которая для достаточно “узких” областей близка к оценке снизу. Ранее авторами эти результаты были установлены для анизотропных параболических уравнений второго порядка.

Библиография: 29 названий.

Ключевые слова: анизотропное уравнение высокого порядка, параболическое уравнение с двойной нелинейностью, существование решения, скорость убывания решения.

DOI: 10.4213/sm8243

Введение

Пусть Ω – неограниченная область пространства $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n \geq 3$. В цилиндрической области $D = \{t > 0\} \times \Omega$ для анизотропного параболического уравнения высокого порядка рассматривается первая смешанная задача

$$(|u|^{k-2}u)_t = \sum_{\alpha=1}^n (-1)^{m_\alpha-1} D_{x_\alpha}^{m_\alpha} [a_\alpha ((D_{x_\alpha}^{m_\alpha} u)^2) D_{x_\alpha}^{m_\alpha} u], \quad (0.1)$$

$$(t, \mathbf{x}) \in D, \quad k > 1, \quad m_\alpha \in \mathbb{N}, \quad \alpha = \overline{1, n},$$

$$D_{x_\alpha}^j u(t, \mathbf{x})|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega, \quad j = \overline{0, m_\alpha - 1}, \quad \alpha = \overline{1, n}, \quad (0.2)$$

$$u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}), \quad \varphi(\mathbf{x}) \in L_k(\Omega), \quad D_{x_\alpha}^{m_\alpha} \varphi(\mathbf{x}) \in L_{p_\alpha}(\Omega), \quad \alpha = \overline{1, n}. \quad (0.3)$$

Предполагается, что неотрицательные функции $a_\alpha(s)$, $s \geq 0$, $\alpha = \overline{1, n}$, подчиняются следующим условиям: $a_\alpha(s) \in C^1[0, \infty)$,

$$\bar{a}s^{(p_\alpha-2)/2} \leq a_\alpha(s) \leq \hat{a}s^{(p_\alpha-2)/2}, \quad (0.4)$$

$$\frac{p_1}{2} a_\alpha(s) \leq a_\alpha(s) + a'_\alpha(s)s \leq \hat{b}a_\alpha(s), \quad (0.5)$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00081-а).

с положительными константами $\hat{a} \geq \bar{a}$, $2\hat{b} \geq p_1 > k$, $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$. Например, $a_\alpha(s) = s^{(p_\alpha-2)/2}$, $\alpha = \overline{1, n}$, $\hat{b} = p_n/2$.

Работа посвящена изучению скорости стабилизации при $t \rightarrow \infty$ решения задачи (0.1)–(0.3) с финитной начальной функцией $\varphi(\mathbf{x})$. Поведение решений смешанных задач для линейных и квазилинейных параболических уравнений второго и высокого порядков при $t \rightarrow \infty$ исследовалось А. К. Гуциным, В. И. Ушаковым, Ф. Х. Мукминовым, А. Ф. Тедеевым, Л. М. Кожевниковой, Р. Х. Каримовым, В. Ф. Гишлиминой и другими. Здесь мы не приводим соответствующие результаты, поскольку подробный обзор можно найти в недавней работе [1], а также в более ранних работах [2]–[4].

Локальные оценки решения задачи Коши с растущей начальной функцией для параболического вырождающегося уравнения второго порядка с анизотропным p -лапласианом и двойной нелинейностью при $k \in (1, 2)$ установлены в работе С. П. Дегтярева и А. Ф. Тедеева [5].

Наличие в уравнении двойной нелинейности приводит к существенным проблемам в обосновании корректности постановки рассматриваемой задачи. Начало теории разрешимости уравнений с двойной нелинейностью было положено в работах [6], [7]. Существование сильного решения в случае ограниченной области Ω для модельного уравнения второго порядка было установлено П. А. Равьяртом (см. [7]) путем замены эволюционной производной разностным отношением. Г. У. Ульт и С. Люкхаус в [8] существенно расширили класс рассматриваемых уравнений.

Изучение уравнений с двойным вырождением активизировалось после обзорной статьи [9] А. С. Калашникова, в которой освещены разнообразные приложения таких уравнений. Ф. Бернис в [10] доказал существование слабого решения уравнения высокого порядка в неограниченной области Ω предельным переходом от решений, построенных для ограниченных областей O . Гранжем и Ф. Мигнотом (см. [11]). Слабое решение задачи Коши для анизотропного уравнения второго порядка при $k = 2$ было построено М. Бендахманом и К. Э. Карлсеном в [12]. В работе [13] А. Бамберже установил единственность сильного положительного решения первой смешанной задачи для изотропного уравнения второго порядка с двойной нелинейностью в случае ограниченной области Ω . В [14], [15] предложены условия, обеспечивающие существование регулярного неотрицательного решения. Г. И. Лаптевым доказано существование слабого решения первой начально-краевой задачи в случае ограниченной области на конечном промежутке времени $[0, T]$ с произвольным $T > 0$ для квазилинейного параболического уравнения с двойным вырождением второго (см. [16], [17]) и высокого (см. [18]) порядков соответственно. Однако для получения оценки снизу скорости убывания решения при $t \rightarrow \infty$ нужна его дополнительная гладкость.

Ф. Х. Мукминов и Э. Р. Андриянова в [1] предложили обычный способ построения сильного глобального решения для модельного изотропного параболического уравнения второго порядка с двойной нелинейностью

$$(|u|^{k-2}u)_t = \sum_{\alpha=1}^n (|u_{x_\alpha}|^{p-2}u_{x_\alpha})_{x_\alpha} \quad (0.6)$$

сразу в неограниченной области и на всем промежутке времени $[0, \infty)$ на основе галёркинских приближений, которые в случаях $k \in (1, 2)$ и $k \geq 2$ строятся различными способами. На ограниченном промежутке $[0, T]$ такое решение было построено в [19] при любом $T > 0$. В работах [20], [21] этот метод адаптирован на некоторый класс анизотропных параболических уравнений второго порядка. Этот же метод лежит в основе доказательства существования решения задачи (0.1)–(0.3). Вопрос единственности решения задачи (0.1)–(0.3) остается открытым, поэтому все оценки получены только для построенного в теореме существования решения.

В настоящей работе будем рассматривать области, расположенные вдоль выделенной оси Ox_s , $s \in \overline{2, n-1}$ (область Ω лежит в полупространстве $\mathbb{R}_+^n[s] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_s > 0\}$, сечение $\gamma_r[s] = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid x_s = r\}$ не пусто и ограничено при любом $r > 0$). Ниже будет использовано обозначение $\Omega_a^b[s] = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid a < x_s < b\}$, при этом значения $a = 0$, $b = \infty$ опускаются. Положим $q_\alpha = m_\alpha p_\alpha$, $\alpha = \overline{1, n}$.

Предполагается, что начальная функция имеет ограниченный носитель, так что

$$\text{supp } \varphi \subset \Omega^{z_0}, \quad z_0 > 0. \quad (0.7)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнено условие (0.7). Тогда существуют положительное число $C(\varphi, k, p_1, \hat{a}, \hat{b})$ и решение $u(t, \mathbf{x})$ задачи (0.1)–(0.3) такие, что при всех $t > 0$ выполнено неравенство

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \geq \|\varphi\|_{L_k(\Omega)} (Ct + 1)^{-1/(p_1-k)}. \quad (0.8)$$

В статье [1] Ф. Х. Мукминовым и Э. Р. Андрияновой для решения уравнения (0.6) была установлена оценка

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \geq \|\varphi\|_{L_k(\Omega)} (Ct + 1)^{-1/(p-k)}, \quad t > 0. \quad (0.9)$$

Ранее оценка (0.9) для решения изотропного квазилинейного параболического уравнения высокого порядка при $k = 2$ была получена А. Ф. Тедеевым (см. [22]) для первой смешанной задачи и Н. Д. Аликакосом и Р. Ростамияном (см. [23]) для задачи Коши.

Для решения уравнения (0.6) в [1], в частности, доказана следующая оценка сверху:

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leq Mt^{-(1-\varepsilon)/(p-k)}, \quad \varepsilon \in (0, 1), \quad t > 0. \quad (0.10)$$

При этом предполагается, что неограниченная область Ω удовлетворяет условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln r} \int_1^r \nu(\rho) d\rho = \infty,$$

в котором $\nu(r) = \inf\{\|\nabla g\|_{L_p(\gamma(r))} \mid g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \|g\|_{L_p(\gamma(r))} = 1\}$, $\gamma(r) = \{\mathbf{x} \in \Omega \mid |\mathbf{x}| = r\}$, $r > 0$.

Аналогичные оценки для квазилинейного уравнения второго порядка при $k = 2$ в изотропном случае ($p \geq 2$) и в анизотропной ситуации ($p_1 > 2$) установлены в работах [4], [24] соответственно.

В настоящей работе для получения оценок сверху будем применять понятие λ -последовательности, которое является обобщением ранее использованного понятия для линейных уравнений высокого порядка (см. [3]), изотропных

квазилинейных уравнений второго порядка (см. [4]), а также псевдодифференциальных параболических уравнений (см. [25]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{z_J\}_{J=0}^\infty$ будем называть $\lambda[s]$ -последовательностью области Ω , расположенной вдоль оси Ox_s , $s = \overline{2, n-1}$, если существует число $\theta > 0$ такое, что выполняются неравенства

$$1 \leq \theta \lambda(z_J, z_{J+1}) \Delta_J^{q_s}, \quad \Delta_J = z_{J+1} - z_J, \quad J = \overline{0, \infty}, \quad (0.11)$$

$$\lambda(r_1, r_2) = \min\{\lambda_1^{p_1}(r_1, r_2), \lambda_n^{p_n}(r_1, r_2)\},$$

$$\lambda_\alpha(r_1, r_2) = \inf\{\|D_{x_\alpha}^{m_\alpha} g\|_{L_{p_\alpha}(\Omega_{r_1}^{r_2})} \mid g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \|g\|_{L_{p_\alpha}(\Omega_{r_1}^{r_2})} = 1\}, \quad \alpha = 1, n. \quad (0.12)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть существует λ -последовательность $\{z_N\}_{N=0}^\infty$ и выполнено условие (0.7). Тогда найдутся положительные числа $\kappa(p_s, m_s, k, \bar{a}, \hat{a})$, $\overline{\mathcal{M}}(p_s, m_s, k, \bar{a}, \hat{a})$ и решение $u(t, \mathbf{x})$ задачи (0.1)–(0.3) такие, что при всех $t \geq 0$, $N \geq 0$ справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega_{z_N})} \leq \overline{\mathcal{M}} \exp(-\kappa N) \|\varphi\|_{L_k(\Omega)}. \quad (0.13)$$

Для $N = \overline{0, \infty}$ определим последовательность

$$\mu_1(N) = \inf\{\|D_{x_1}^{m_1} g\|_{L_{p_1}(\Omega_{z_N}^{z_N})} \mid g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \|g\|_{L_k(\Omega_{z_N}^{z_N})} = 1\}. \quad (0.14)$$

Будем исследовать убывание в областях, для которых выполнено условие

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_1(N) = 0. \quad (0.15)$$

Если это условие не выполнено, то достигается максимальная скорость убывания решения, т.е. справедлива оценка

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leq M t^{-1/(p_1-k)}, \quad t > 0 \quad (0.16)$$

(см. следствие 1).

Пусть $N(t)$ – произвольная положительная функция, удовлетворяющая неравенству

$$(\mu_1^{p_1}(N(t))t)^{-1/(p_1-k)} \exp(\kappa N(t)) \geq 1, \quad t > 0. \quad (0.17)$$

Существование такой функции следует из (0.15). Кроме того, из (0.17), (0.15) следует, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \infty.$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть существует λ -последовательность $\{z_N\}_{N=0}^\infty$ и выполнены условия (0.7), (0.15). Тогда найдутся положительное число $M(p_s, p_1, m_s, k, \bar{a}, \hat{a}, \|\varphi\|_{L_k(\Omega)})$ и решение $u(t, \mathbf{x})$ задачи (0.1)–(0.3) такие, что выполняется неравенство

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leq M (\mu_1^{p_1}(N(t))t)^{-1/(p_1-k)}, \quad t > 0. \quad (0.18)$$

Если выполнено условие (0.15) и

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln \mu_1(N)}{N} = 0, \quad (0.19)$$

то можно выбрать

$$\exp(N(t)) = t^{1/(\kappa(p_1-k))}, \quad t > 0, \quad (0.20)$$

и оценка (0.18) примет вид

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega)} \leq Mt^{-(1-\varepsilon)/(p_1-k)}, \quad t > 0, \quad (0.21)$$

где ε любое из интервала $(0, 1)$. Выбор функции $N(t)$ формулой (0.20) является оптимальным, поскольку оценка (0.21) имеет показатель степени, близкий к показателю $-1/(p_1 - k)$ оценки снизу (0.8).

Рассмотрим область вращения

$$\Omega(f)[s] = \{\mathbf{x} = (\mathbf{x}'_s, x_s) \in \mathbb{R}^n \mid x_s > 0, |\mathbf{x}'_s| < f(x_s)\}, \quad s \in \overline{2, n-1}, \quad (0.22)$$

$\mathbf{x}'_s = (x_1, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_n)$, с положительной функцией $f(x_s) < \infty$. От функции f требуется только, чтобы множество $\Omega(f)[s]$ было областью.

Для областей вращения вида (0.22) выразим оценки (0.13), (0.18) через функцию $f(x)$, с этой целью введем понятие П-последовательности.

Для неотрицательных ρ положим

$$\rho^{[c,d]} = \begin{cases} \rho^c, & \rho < 1, \\ \rho^d, & \rho \geq 1, \end{cases} \quad c, d > 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Неограниченную возрастающую последовательность положительных чисел $\{z_N\}_{N=0}^\infty$ определим равенствами

$$z_0 = 1, \quad z_N = \sup \left\{ r > z_{N-1} \mid \inf_{[z_{N-1}, r)} f^{[q_n, q_1]}(x) \geq (r - z_{N-1})^{q_s} \right\}, \quad (0.23)$$

где $N = \overline{1, \infty}$, и назовем П-последовательностью функции $f(x)$.

Если существует постоянная $\omega \geq 1$ такая, что

$$\sup \{ f(z) \mid z \in [x - f^{[q_n, q_1]/q_s}(x), x + f^{[q_n, q_1]/q_s}(x)] \} \leq \omega f(x), \quad x \geq 1, \quad (0.24)$$

то П-последовательность $\{z_N\}_{N=0}^\infty$ является λ -последовательностью для $\Omega(f)[s]$ (см. предложение 1).

Несложным следствием теоремы 2 для областей вращения является следующая оценка решения задачи (0.1)–(0.3):

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega_r)} \leq \widetilde{\mathcal{M}} \exp \left(-\kappa \int_1^r \frac{dx}{f^{[q_n, q_1]/q_s}(x)} \right) \|\varphi\|_{L_k(\Omega)}, \quad (0.25)$$

для $t \geq 0$, $r \geq 1$ (см. утверждение 1).

Предположим далее, что функция f удовлетворяет условию

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln r} \int_1^r \frac{dx}{f^{[q_n, q_1]/q_s}(x)} = \infty. \quad (0.26)$$

Очевидно, что требование

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f^{[q_n, q_1]/q_s}(r)}{r} = 0 \quad (0.27)$$

является достаточным для выполнения (0.26). Для областей вращения, удовлетворяющих условиям (0.24), (0.27), справедливо соотношение (0.19) (см. предложение 2).

Таким образом, для областей вращения, удовлетворяющих условиям (0.24), (0.27), выбор функции $N(t)$ формулой (0.20) оправдан и справедлива оценка (0.21). Однако для областей вращения можно получить более тонкие оценки.

Следствием теоремы 3 для областей вращения вида (0.22) является следующая оценка (см. утверждение 2):

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega(f))} \leq \widetilde{M} t^{-1/(p_1-k)} \widetilde{g}(t), \quad t \geq t_1, \quad (0.28)$$

причем для областей, удовлетворяющих условию

$$f(x) \leq C x^b, \quad b > 0, \quad x \geq r_1, \quad (0.29)$$

функция $\widetilde{g}(t)$ растет медленнее любой степенной функции t^γ , $\gamma > 0$.

В области $\Omega(f_a)$ с функцией $f_a(x) = x^a$, $0 \leq a < q_s/q_1$, $x > 0$, для решения задачи (0.1)–(0.3) оценка (0.28) принимает вид (см. пример 1)

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{L_k(\Omega(f))} &\leq \widetilde{M} t^{-1/(p_1-k)} (\ln t)^{\chi/(1-aq_1/q_s)}, \quad t \geq e, \\ \chi &= a \frac{q_1}{p_1-k} + a \frac{n-1}{k} + \frac{1}{k}. \end{aligned} \quad (0.30)$$

В области $\Omega(f)$ с функцией $f(x) = e$, $0 < x < e$, $f(x) = (x/\ln x)^{q_s/q_1}$, $x \geq e$, для решения задачи (0.1)–(0.3) оценка (0.28) принимает вид (см. пример 2)

$$\|u(t)\|_{L_k(\Omega(f))} \leq \widetilde{M} t^{-1/(p_1-k)} \exp(\varrho(\ln t)^{1/2}), \quad t \geq e, \quad \varrho > 0. \quad (0.31)$$

§ 1. Формулировка теоремы существования

Пусть $\|\cdot\|_{p,Q}$ – норма в $L_p(Q)$, $p \geq 1$, $(\cdot, \cdot)_Q$ – скалярное произведение в $L_2(Q)$, причем значения $p = 2$, $Q = \Omega$ опускаются. Через $D_a^b = (a, b) \times \Omega$ обозначим цилиндр, значения $a = 0$ и $b = \infty$ могут отсутствовать. Положим $\mathbf{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$.

Банахово пространство $\mathring{W}_{k,\mathbf{p}}^{\mathbf{m}}(\Omega)$ определим как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|u\|_{W_{k,\mathbf{p}}^{\mathbf{m}}(\Omega)} = \sum_{\alpha=1}^n \|\{u\}_\alpha\|_{p_\alpha} + \|u\|_k,$$

где $\{u\}_\alpha = D_{x_\alpha}^{m_\alpha} u$. В частности, для $m_\alpha = 1$, $\alpha = \overline{1, n}$, через $\mathring{W}_{k,\mathbf{p}}^1(\Omega)$ будем обозначать пространство с нормой

$$\|u\|_{W_{k,\mathbf{p}}^1(\Omega)} = \sum_{\alpha=1}^n \|D_{x_\alpha} u\|_{p_\alpha} + \|u\|_k.$$

Банаховы пространства $\dot{W}_{k,\mathbf{p}}^{0,\mathbf{m}}(D^T)$, $\dot{W}_{k,\mathbf{p}}^{1,\mathbf{m}}(D^T)$ определим как пополнения пространства $C_0^\infty(D_{-1}^{T+1})$ соответственно по нормам

$$\|u\|_{W_{k,\mathbf{p}}^{0,\mathbf{m}}(D^T)} = \|u\|_{k,D^T} + \sum_{\alpha=1}^n \|\{u\}_\alpha\|_{p_\alpha,D^T},$$

$$\|u\|_{W_{k,\mathbf{p}}^{1,\mathbf{m}}(D^T)} = \|u\|_{k,D^T} + \|u_t\|_{k,D^T} + \sum_{\alpha=1}^n \|\{u\}_\alpha\|_{p_\alpha,D^T}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Обобщенным решением задачи (0.1)–(0.3) назовем функцию $u(t, \mathbf{x})$ такую, что при всех $T > 0$ она принадлежит пространству $\dot{W}_{k,\mathbf{p}}^{0,\mathbf{m}}(D^T)$ и удовлетворяет интегральному тождеству*

$$\int_{D^T} \left(-|u|^{k-2} u v_t + \sum_{\alpha=1}^n a_\alpha(\{u\}_\alpha^2) \{u\}_\alpha \{v\}_\alpha \right) d\mathbf{x} dt = \int_{\Omega} |\varphi(\mathbf{x})|^{k-2} \varphi(\mathbf{x}) v(0, \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1.1)$$

для любой функции $v(t, \mathbf{x}) \in \dot{W}_{k,\mathbf{p}}^{1,\mathbf{m}}(D^T)$, $v(T, \mathbf{x}) = 0$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть $\varphi(\mathbf{x}) \in \dot{W}_{k,\mathbf{p}}^{\mathbf{m}}(\Omega)$, $p_1 \geq k$, $k > 1$. Тогда существует обобщенное решение $u(t, \mathbf{x})$ задачи (0.1)–(0.3), удовлетворяющее условиям*

$$u \in L_\infty((0, \infty), \dot{W}_{k,\mathbf{p}}^{\mathbf{m}}(\Omega)), \quad (1.2)$$

$$|u|^{(k-2)/2} u_t \in L_{2,\text{loc}}((0, \infty), L_2(\Omega)), \quad k > 1, \quad (1.3)$$

$$u_t \in L_{k,\text{loc}}((0, \infty), L_k(\Omega)), \quad u \in C([0, \infty), L_k(\Omega)), \quad k \in (1, 2), \quad (1.4)$$

$$|u|^{k-2} u_t \in L_{k',\text{loc}}((0, \infty), L_{k'}(\Omega)), \quad |u|^{k-2} u \in C([0, \infty), L_{k'}(\Omega)), \quad k \geq 2, \quad (1.5)$$

где $k' = k/(k-1)$. При этом справедливы неравенства

$$(k-1) \|u(t)\|_k^k + k\bar{a} \sum_{\alpha=1}^n \int_0^t \|\{u(\tau)\}_\alpha\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} d\tau \leq (k-1) \|\varphi\|_k^k, \quad t \geq 0, \quad (1.6)$$

$$(k-1) \frac{d}{dt} \|u(t)\|_k^k + k\bar{a} \sum_{\alpha=1}^n \|\{u(t)\}_\alpha\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} \leq 0, \quad t > 0. \quad (1.7)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если выполнено условие*

$$\mu_1 = \inf \{ \|\{g\}_1\|_{p_1} \mid g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \|g\|_k = 1 \} > 0$$

и решение задачи (0.1)–(0.3) подчиняется неравенству (1.7), то справедлива оценка (0.16).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (1.7) следует неравенство

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_k^k \leq -\bar{a} \frac{k}{k-1} \|\{u\}_1\|_{p_1}^{p_1} \leq -\bar{a} \frac{k}{k-1} \mu_1^{p_1} \|u\|_k^{p_1}.$$

Решая это дифференциальное неравенство, получим оценку

$$\|u(t)\|_k^k \leq C t^{-k/(p_1-k)}, \quad t > 0,$$

из которой следует (0.16).

§ 2. Предварительные леммы

В этом параграфе будут приведены леммы, которые используются при доказательстве теоремы 4.

ЛЕММА 1. *Любое ограниченное множество рефлексивного банахова пространства слабо компактно (см. [26; гл. V, § 19.7, теорема 1]).*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пространства $\dot{W}_{k,p}^{\mathbf{m}}(\Omega)$, $\dot{W}_{k,p}^{0,\mathbf{m}}(D^T)$, $\dot{W}_{k,p}^{1,\mathbf{m}}(D^T)$ являются рефлексивными сепарабельными банаховыми пространствами.

Действительно, например, пространство $\dot{W}_{k,p}^{0,\mathbf{m}}(D^T)$ является замыканием образа отображения

$$I: v(t, \mathbf{x}) \in C_0^\infty(D_{-1}^{T+1}) \mapsto (v, \{v\}_1, \dots, \{v\}_n) \in L_k(D^T) \oplus L_{p_1}(D^T) \oplus \dots \oplus L_{p_n}(D^T).$$

Поскольку пространства $L_k(D^T)$, $L_{p_1}(D^T)$, $\dots$, $L_{p_n}(D^T)$ рефлексивны, то подпространство $\dot{W}_{k,p}^{0,\mathbf{m}}(D^T)$ рефлексивного пространства $L_k(D^T) \oplus L_{p_1}(D^T) \oplus \dots \oplus L_{p_n}(D^T)$ также является рефлексивным.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В дальнейшем, чтобы избежать громоздкости в рассуждениях, вместо утверждения типа “из последовательности u^M можно выделить подпоследовательность u^{M_i} , сходящуюся в $L_2(\Omega)$ при $i \rightarrow \infty$ ”, будем говорить просто “последовательность u^M выборочно сходится в $L_2(\Omega)$ при $M \rightarrow \infty$ ”. Соответственно, будем использовать термин “выборочно слабо сходится” и т.п.

ЛЕММА 2. *Пусть $g^M(\mathbf{x})$, $M = \overline{1, \infty}$, $g(\mathbf{x})$ – такие функции из $L_p(Q)$, $1 < p < \infty$, что*

$$\|g^M\|_{p,Q} \leq C, \quad g^M \rightarrow g \text{ при } M \rightarrow \infty \text{ почти всюду в } Q.$$

Тогда g^M слабо сходится к g в $L_p(Q)$ при $M \rightarrow \infty$ (см. [6; гл. I, § 1.4, лемма 1.3]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Лемма 2 сформулирована в [6] для ограниченной области Q , однако она справедлива и для произвольной неограниченной области. Будем применять лемму 2 для $Q = \Omega$ и для $Q = (0, T) \times \Omega$.

ЛЕММА 3. *Пусть система функций $\psi_i(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$, $i = \overline{1, \infty}$, линейно независима и ее линейная оболочка является всюду плотным множеством в пространстве $\dot{W}_{k,p}^{\mathbf{m}}(\Omega)$. Совокупность функций $\sum_{i=1}^L d_i(t) \psi_i(\mathbf{x})$, где $d_i(t) \in C^\infty[0, T]$, обозначим через P_L . Тогда множество $P = \bigcup_{L=1}^\infty P_L$ плотно в пространствах $C([0, T], \dot{W}_{k,p}^{\mathbf{m}}(\Omega))$, $\dot{W}_{k,p}^{0,\mathbf{m}}(D^T)$, $\dot{W}_{k,p}^{1,\mathbf{m}}(D^T)$.*

Доказательство проводится аналогично случаю $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 1$ (см. [21; лемма 3]).

ЛЕММА 4. *Пространство $\dot{W}_{k,p}^{\mathbf{m}}(\Omega)$ вложено в $\dot{W}_{k,p}^1(\Omega)$, и для $g(\mathbf{x}) \in \dot{W}_{k,p}^{\mathbf{m}}(\Omega)$ справедливо неравенство*

$$\sum_{\alpha=1}^n \|D_{x_\alpha} g\|_{p_\alpha} \leq C \left(\|g\|_k + \sum_{\alpha=1}^n \|\{g\}_\alpha\|_{p_\alpha} \right). \quad (2.1)$$

Существование производных $D_{x\alpha}g$, $\alpha = \overline{1, n}$, установлено в [27; гл. II, § 6.4], а неравенство (2.1) является следствием неравенства (12) из [27; гл. III, § 15.8].

ЛЕММА 5. Пусть последовательность $w^M(t, \mathbf{x}) \in C([0, \infty), L_p(\Omega))$, $p \geq 1$, $M = \overline{1, \infty}$, удовлетворяет условиям:

- 1) существует счетное плотное множество $\{t_j\}_{j=1}^\infty \subset [0, \infty)$ такое, что $\{w^M(t_j, \mathbf{x})\}_{M=1}^\infty$ сходится в $L_p(Q)$ в ограниченной области $Q \subset \Omega$ при каждом t_j , $j = \overline{1, \infty}$;
- 2) для любого $T > 0$ последовательность $\{w_t^M(t, \mathbf{x})\}_{M=1}^\infty$ ограничена в пространстве $L_p(D^T)$;
- 3) последовательность $\{w^M(t, \mathbf{x})\}_{M=1}^\infty$ равномерно по $t \in [0, \infty)$ ограничена в пространстве $L_p(\Omega)$.

Тогда $w^M(t, \mathbf{x})$ выборочно сходится в пространстве $C([0, T], L_p(Q))$ и почти всюду в $(0, T) \times Q$ при любом $T > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя Ж.-Л. Лионсу (см. [6; гл. I, § 12.2]), докажем выборочную сильную сходимость последовательности w^M в пространстве $C([0, T], L_p(Q))$. Сначала, применяя условие 2), установим равностепенную непрерывность по t последовательности w^M в $L_p(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \|w^M(t_2) - w^M(t_1)\|_p &= \left\| \int_{t_1}^{t_2} w_t^M(t) dt \right\|_p \leq \int_{t_1}^{t_2} \|w_t^M(t)\|_p dt \\ &\leq |t_2 - t_1|^{1/p'} \left(\int_{t_1}^{t_2} \|w_t^M(t)\|^p dt \right)^{1/p} \leq C_1 |t_2 - t_1|^{1/p'}, \quad (2.2) \\ t_1, t_2 &\in [0, T], \quad M = \overline{1, \infty}. \end{aligned}$$

Для ограниченной области Q из (2.2) нетрудно установить равномерную фундаментальность последовательности $w^M(t, \mathbf{x})$ по норме $L_p(Q)$:

$$\begin{aligned} \|w^N(t) - w^M(t)\|_{p,Q} &= \|w^N(t) - w^N(t_{ji}) + w^N(t_{ji}) - w^M(t_{ji}) + w^M(t_{ji}) - w^M(t)\|_{p,Q} \\ &\leq 2C_1 |t - t_{ji}|^{1/p'} + \|w^N(t_{ji}) - w^M(t_{ji})\|_{p,Q}. \end{aligned}$$

Выбрав конечный набор чисел t_{ji} с малым шагом и затем увеличивая N, M , добиваемся равномерной по t малости правой части.

Итак, установлена выборочная сильная сходимость $w^M \rightarrow w$ в $C([0, T], L_p(Q))$. Сходимость будет также и в $L_p((0, T) \times Q)$, поэтому w^M выборочно сходится к w почти всюду в $(0, T) \times Q$.

Положим $A_\alpha(s) = \int_0^s a_\alpha(\tau) d\tau$; тогда, пользуясь условиями (0.5), выводим неравенства

$$\frac{p_1}{2} A_\alpha(s) \leq a_\alpha(s)s \leq \widehat{b} A_\alpha(s), \quad s \geq 0, \quad \alpha = \overline{1, n}. \quad (2.3)$$

Кроме того, из условий (0.5) следуют неравенства

$$(p_1 - 1)a_\alpha(s) \leq a_\alpha(s) + 2a'_\alpha(s)s \leq \widehat{c}a_\alpha(s), \quad \widehat{c} = 2\widehat{b} - 1, \quad s \geq 0, \quad \alpha = \overline{1, n},$$

которые можно переписать в виде

$$0 \leq (a_\alpha(z^2)z)' \leq \widehat{c}a_\alpha(z^2), \quad z \in \mathbb{R}, \quad \alpha = \overline{1, n}. \quad (2.4)$$

Обозначим через V , V' банахово пространство и сопряженное к нему. Далее потребуются два определения (см. [6; гл. II, § 1.2]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Оператор $\Phi: V \rightarrow V'$ такой, что для любых $u, v, w \in V$ функция

$$\int_{\Omega} \Phi(u + \lambda v)w \, d\mathbf{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

является непрерывной функцией аргумента λ , называется *сепинепрерывным*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Оператор $\Phi: V \rightarrow V'$ такой, что для любых $u, v \in V$ справедливо неравенство

$$(\Phi(u) - \Phi(v))(u - v) \geq 0,$$

называется *монотонным*.

ЛЕММА 6. Если выпуклый функционал $J: V \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируем по Гато на V , то отображение $J': V \rightarrow V'$ монотонно и сепинепрерывно (см. [6; гл. II, § 1.2, предложение 1.1]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В силу (2.4) функционалы

$$J_\alpha(u) = \int_{\Omega} A_\alpha(\{u\}_\alpha^2) \, d\mathbf{x}, \quad \alpha = \overline{1, n},$$

где $A_\alpha(s) = \int_0^s a_\alpha(\tau) \, d\tau$, являются выпуклыми в пространстве $\dot{W}_{k,p}^m(\Omega)$.

Производная по Гато определяется равенством

$$J'_\alpha(u)v = 2 \int_{\Omega} a_\alpha(\{u\}_\alpha^2) \{u\}_\alpha \{v\}_\alpha \, d\mathbf{x}, \quad u, v \in \dot{W}_{k,p}^m(\Omega).$$

Согласно лемме 6 она сепинепрерывна и монотонна, поэтому для любых функций $u, v \in \dot{W}_{k,p}^m(\Omega)$ справедливы соотношения

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (a_\alpha(\{u + \varepsilon v\}_\alpha^2) \{u + \varepsilon v\}_\alpha, \{v\}_\alpha) \rightarrow 0, \quad (2.5)$$

$$(a_\alpha(\{u\}_\alpha^2) \{u\}_\alpha - a_\alpha(\{v\}_\alpha^2) \{v\}_\alpha, \{u - v\}_\alpha) \geq 0. \quad (2.6)$$

§ 3. Доказательство теоремы существования

Выберем линейно независимую систему функций $\psi_i(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$, $i = \overline{1, \infty}$, такую, что ее линейная оболочка является всюду плотным множеством в пространстве $\dot{W}_{k,p}^m(\Omega)$. Будем считать, что эта система является ортонормированной в $L_2(\Omega)$.

Приближенные решения $u^M(t, \mathbf{x})$ задачи (0.1)–(0.3) будем искать в виде $u^M(t, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M c_i^M(t) \psi_i(\mathbf{x})$, $M = \overline{1, \infty}$. При этом функции $c_i^M(t)$, $t \in [0, \infty)$, определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений и начальных условий

$$c_i^M(0) = c_i^M, \quad i = \overline{1, M}, \quad (3.1)$$

подобранных так, что

$$u^M(0, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^M c_i^M \psi_i(\mathbf{x}) \rightarrow \varphi(\mathbf{x}) \quad \text{в } \mathring{W}_{k, \mathbf{p}}^m(\Omega) \quad \text{при } M \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Отсюда сразу следует, что

$$\|u^M(0)\|_{W_{k, \mathbf{p}}^m(\Omega)} \leq E_1(\|\varphi\|_{W_{k, \mathbf{p}}^m(\Omega)}), \quad M = \overline{1, \infty}. \quad (3.3)$$

Здесь и ниже постоянные E_i зависят только от $\widehat{a}$, $\bar{a}$, $\widehat{b}$, $\mathbf{p}$, $\|\varphi\|_{W_{k, \mathbf{p}}^m(\Omega)}$.

Системы уравнений для $k \in (1, 2)$ и $k \geq 2$ строятся по-разному.

3.1. Случай $k \in (1, 2)$. Функции $c_i^M(t)$, $t \in [0, \infty)$, определяются из системы

$$\begin{aligned} ((\omega^M)^{k/2-1} u^M)_t, \psi_j) + \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{u^M\}_\alpha^2) \{u^M\}_\alpha, \{\psi_j\}_\alpha) &= 0, \\ \omega^M &= (u^M)^2 + \frac{k}{2} \varepsilon^M, \quad j = \overline{1, M} \end{aligned} \quad (3.4)$$

(числа $\varepsilon^M > 0$ выберем позже).

Убедимся, что уравнения (3.4) разрешимы относительно $\frac{d}{dt} c_i^M(t)$. Очевидно, что уравнения (3.4) имеют вид

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M A_{ji}(c_1^M(t), \dots, c_M^M(t)) \frac{d}{dt} c_i^M(t) &= F_j(c_1^M(t), \dots, c_M^M(t)), \\ A_{ji}(c_1, \dots, c_M) &= \left(\left(\varepsilon^M \frac{k}{2} + (k-1) \left(\sum_{l=1}^M c_l \psi_l \right)^2 \right) (\omega^M)^{k/2-2} \psi_i, \psi_j \right) = (\psi_i, \psi_j)_M, \\ F_j(c_1, \dots, c_M) &= - \sum_{\alpha=1}^n \sum_{i=1}^M c_i \left(a_\alpha \left(\left(\sum_{l=1}^M c_l \{\psi_l\}_\alpha \right)^2 \right) \{\psi_i\}_\alpha, \{\psi_j\}_\alpha \right), \\ &\quad i, j = \overline{1, M}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Нетрудно проверить, что $(g, h)_M$, $g, h \in C_0^\infty(\Omega)$, является скалярным произведением. Следовательно, матрица коэффициентов $A_{ji}(c_1^M(t), \dots, c_M^M(t))$ при каждом t является матрицей Грама системы линейно независимых векторов ψ_i , $i = \overline{1, M}$, и имеет обратную. Поэтому систему (3.5) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} c_i^M(t) = \sum_{j=1}^M A_{ij}^{-1}(c_1^M(t), \dots, c_M^M(t)) F_j(c_1^M(t), \dots, c_M^M(t)), \quad i = \overline{1, M}. \quad (3.6)$$

Положим $I^M = \bigcup_{i=1}^M \text{supp } \psi_i(\mathbf{x})$, $M_j = \max_{\mathbf{x} \in I^M} |\psi_j(\mathbf{x})|$. Установим теперь оценки для галёркинских приближений. Умножим j -е уравнение (3.4) на $c_j^M(t)$ и затем все уравнения просуммируем по j от 1 до M , в результате получим равенства

$$(((\omega^M)^{k/2-1} u^M)_t, u^M) + \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{u^M\}_\alpha^2) \{u^M\}_\alpha, \{u^M\}_\alpha) = 0,$$

где $M = \overline{1, \infty}$, которые можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{k-1}{k} \int_{I^M} (\omega^M)^{k/2} d\mathbf{x} - \varepsilon^M \frac{k}{2} \int_{I^M} (\omega^M)^{k/2-1} d\mathbf{x} \right) \\ + \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha (\{u^M\}_\alpha^2) \{u^M\}_\alpha, \{u^M\}_\alpha) = 0, \quad M = \overline{1, \infty}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

После интегрирования от 0 до t будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{k-1}{k} \|(\omega^M)^{1/2}(t)\|_{k, I^M}^k - \varepsilon^M \frac{k}{2} \int_{I^M} (\omega^M(t, \mathbf{x}))^{k/2-1} d\mathbf{x} \\ + \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha (\{u^M\}_\alpha^2) \{u^M\}_\alpha, \{u^M\}_\alpha)_{D^t} = \frac{k-1}{k} \|(\omega^M)^{1/2}(0)\|_{k, I^M}^k \\ - \varepsilon^M \frac{k}{2} \int_{I^M} (\omega^M(0, \mathbf{x}))^{k/2-1} d\mathbf{x}, \quad M = \overline{1, \infty}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Выберем числа $\varepsilon^M \leq 1/M$ так, чтобы были справедливы неравенства

$$\text{mes } I^M \leq (\varepsilon^M)^{-k/4}, \quad M = \overline{1, \infty}. \quad (3.9)$$

Применяя (3.9), (3.3), выводим неравенства

$$\begin{aligned} \|(\omega^M)^{1/2}(0)\|_{k, I^M} \leq \left\| |u^M(0)| + \left(\frac{k}{2} \varepsilon^M \right)^{1/2} \right\|_{k, I^M} \leq \|u^M(0)\|_k \\ + \left(\frac{k}{2} \varepsilon^M \right)^{1/2} (\text{mes } I^M)^{1/k} \leq E_1 + \left(\frac{k}{2} \right)^{1/2} (\varepsilon^M)^{1/4} \leq E_1 + \left(\frac{k}{2} \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\frac{k}{2} \varepsilon^M \int_{I^M} (\omega^M(t, \mathbf{x}))^{k/2-1} d\mathbf{x} \leq \left(\frac{k}{2} \varepsilon^M \right)^{k/2} \text{mes } I^M \leq \left(\frac{k}{2} \right)^{k/2} (\varepsilon^M)^{k/4}. \quad (3.11)$$

Соединяя (3.10), (3.11) и применяя (0.4), из (3.8) для $t \geq 0$ выводим неравенства

$$\|(\omega^M)^{1/2}(t)\|_k^k + \sum_{\alpha=1}^n \|\{u^M\}_\alpha\|_{p_\alpha, D^t}^{p_\alpha} \leq E_2, \quad M = \overline{1, \infty}. \quad (3.12)$$

Кроме того, неравенства (0.4), (3.12) позволяют установить оценки

$$\sum_{\alpha=1}^n \|a_\alpha (\{u^M\}_\alpha^2) \{u^M\}_\alpha\|_{p_\alpha/(p_\alpha-1), D^t} \leq \hat{a} \sum_{\alpha=1}^n \|\{u^M\}_\alpha\|_{p_\alpha, D^t}^{p_\alpha-1} \leq E_3, \quad M = \overline{1, \infty}. \quad (3.13)$$

Покажем, что все возможные решения задачи (3.1), (3.6) равномерно ограничены при $t \geq 0$. Действительно, пользуясь (3.12), для $t \geq 0$ выводим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^M |c_j^M(t)|^2 = \|u^M(t)\|^2 = \int_{\Omega} |u^M(t)|^k |u^M(t)|^{2-k} d\mathbf{x} \\ \leq \|u^M(t)\|_k^k \max_{\mathbf{x} \in I^M} \left| \sum_{j=1}^M c_j^M(t) \psi_j(\mathbf{x}) \right|^{2-k} \leq E_2 \left(\sum_{j=1}^M |c_j^M(t)|^2 \right)^{(2-k)/2} \left(\sum_{j=1}^M M_j^2 \right)^{(2-k)/2}, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$|c_i^M(t)|^k \leq \left(\sum_{j=1}^M |c_j^M(t)|^2 \right)^{k/2} \leq E_2 \left(\sum_{j=1}^M M_j^2 \right)^{(2-k)/2}, \quad i = \overline{1, M}.$$

Ввиду непрерывности правой части уравнений (3.6) существуют абсолютно непрерывные функции $c_i^M(t)$, $t \in [0, \infty)$, $i = \overline{1, M}$, которые почти всюду удовлетворяют системе (3.6) и начальному условию (3.1) (см. [28; гл. VIII, § 8, теорема Каратеодори]).

Теперь умножим j -е уравнение (3.4) на $\frac{d}{dt} c_j^M(t)$ и затем все уравнения просуммируем по j от 1 до M , в результате получим равенства

$$(((\omega^M)^{k/2-1} u^M)_t, u_t^M) + \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{u^M\}_\alpha^2) \{u^M\}_\alpha, \{u_t^M\}_\alpha) = 0, \quad M = \overline{1, \infty},$$

которые можно переписать в виде

$$(k-1) \|(\omega^M)^{k/4-1} u_t^M u^M\|^2 + \varepsilon^M \frac{k}{2} \|(\omega^M)^{k/4-1} u_t^M\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} A_\alpha(\{u^M\}_\alpha^2) d\mathbf{x} = 0, \quad M = \overline{1, \infty}. \quad (3.14)$$

После интегрирования от 0 до t , используя (2.3), будем иметь

$$(k-1) \|(\omega^M)^{k/4-1} u_t^M u^M\|_{D^t}^2 + \varepsilon^M \frac{k}{2} \|(\omega^M)^{k/4-1} u_t^M\|_{D^t}^2 + \frac{1}{2b} \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{u^M(t)\}_\alpha^2) \{u^M(t)\}_\alpha, \{u^M(t)\}_\alpha) \leq \frac{1}{p_1} \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{u^M(0)\}_\alpha^2) \{u^M(0)\}_\alpha, \{u^M(0)\}_\alpha), \quad M = \overline{1, \infty}.$$

Далее, в силу справедливости неравенств $(k-1)(u^M)^2 + \varepsilon^M \frac{k}{2} \geq (k-1)\omega^M$, применяя (0.4) и используя (3.3), выводим

$$\|(\omega^M)^{(k-2)/4} u_t^M\|_{D^t}^2 + \sum_{\alpha=1}^n \|\{u^M(t)\}_\alpha\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} \leq E_4, \quad M = \overline{1, \infty}. \quad (3.15)$$

Пусть T – произвольное положительное число. Из неравенств (3.12), (3.15) следует ограниченность $\{(\omega^M)^{1/2}\}_{M=1}^\infty$ в $L_k(D^T)$, $C([0, \infty), L_k(\Omega))$, $\{u^M\}_{M=1}^\infty$ в $\dot{W}_{k,p}^{0,m}(D^T)$, $C([0, \infty), \dot{W}_{k,p}^m(\Omega))$ и $\{(\omega^M)^{(k-2)/4} u_t^M\}_{M=1}^\infty$ в $L_2(D^T)$. Кроме того, из неравенств (3.13) следует ограниченность последовательностей $\{a_\alpha(\{u^M\}_\alpha^2) \{u^M\}_\alpha\}_{M=1}^\infty$ в пространствах $L_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}(D^T)$, $\alpha = \overline{1, n}$. Установленные факты обеспечивают выборочную слабую сходимость указанных последовательностей при $M \rightarrow \infty$ в соответствующих пространствах:

$$u^M \rightharpoonup u \quad \text{в } \dot{W}_{k,p}^{0,m}(D^T), \quad (3.16)$$

$$a_\alpha(\{u^M\}_\alpha^2) \{u^M\}_\alpha \rightharpoonup b_\alpha \quad \text{в } L_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}(D^T), \quad \alpha = \overline{1, n}. \quad (3.17)$$

Кроме того, рассмотрим последовательность $v^M = (\omega^M)^{(k-2)/4} u^M$, $M = \overline{1, \infty}$, и последовательность ее производных $v_t^M = (\omega^M)^{(k-6)/4} u_t^M \left(\frac{k-2}{2} u^2 + \omega^M \right)$, $M = \overline{1, \infty}$. Очевидно, из (3.15) следуют неравенства

$$\|v_t^M\|_{D^t} \leq \frac{k}{2} \|(\omega^M)^{(k-2)/4} u_t^M\|_{D^t} \leq E_5, \quad M = \overline{1, \infty}, \quad (3.18)$$

которые обеспечивают выборочную слабую сходимость

$$v_t^M \rightharpoonup g \quad \text{в } L_2(D^T).$$

Ниже докажем, что u^M выборочно почти всюду в D сходится к u ; это позволит установить, что $g = (|u|^{(k-2)/2} u)_t$.

Последовательность $\{u^M\}_{M=1}^\infty$ ограничена в пространстве $C([0, \infty), \dot{W}_{k,p}^m(\Omega))$. Согласно (2.1) эта последовательность $\{u^M\}_{M=1}^\infty$ ограничена и в пространстве $C([0, \infty), \dot{W}_{k,p}^1(\Omega))$. Кроме того, для каждой ограниченной области $Q \subset \Omega$ последовательность $\{u^M\}_{M=1}^\infty$ ограничена в пространстве $W_k^1(Q)$ при $k \leq p_1$. Для любой ограниченной области $Q \subset \Omega$ с гладкой границей имеем компактность вложения $L_k(Q) \subset W_k^1(Q)$. Поэтому диагональным процессом можно установить выборочную сильную сходимость $u^M(t_j, \mathbf{x}) \rightarrow h_j(\mathbf{x})$ в $L_k(Q)$ на счетном плотном множестве $\{t_j\}_{j=1}^\infty \subset [0, \infty)$. Можно также считать, что $u^M(t_j, \mathbf{x}) \rightarrow h_j(\mathbf{x})$ выборочно почти всюду в Q при каждом t_j , $j = \overline{1, \infty}$.

Покажем, что последовательность u_t^M , $M = \overline{1, \infty}$, ограничена в $L_k(D^T)$. В самом деле, из (3.12), (3.15) следует

$$\begin{aligned} \|u_t^M\|_{k,D^T} &= \left(\int_{D^T} (\omega^M)^{k(k-2)/4} |u_t^M|^k (\omega^M)^{(2-k)k/4} d\mathbf{x} dt \right)^{1/k} \\ &\leq \|(\omega^M)^{(k-2)/4} u_t^M\|_{2,D^T} \|(\omega^M)^{1/2}\|_{k,D^T}^{(2-k)/2} \leq E_6. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Таким образом, все условия леммы 5 для u^M , $M = \overline{1, \infty}$, выполнены. Тогда согласно лемме 5 $u^M \rightarrow h$ выборочно в пространстве $C([0, T], L_k(Q))$ и почти всюду в $(0, T) \times Q$ при любых $T > 0$ и $Q \subset \Omega$. В силу произвольности Q последовательность u^M выборочно сходится к h почти всюду в D^T . Выбирая $T = 1, 2, \dots$, диагональным процессом можно выделить подпоследовательность u^M (обозначим ее так же), сходящуюся к h почти всюду в D при $M \rightarrow \infty$. Согласно лемме 2 $u^M(t, \mathbf{x}) \rightarrow h(t, \mathbf{x})$ в $L_k(D^T)$ при любом $T > 0$ в силу единственности предела $h(t, \mathbf{x}) = u(t, \mathbf{x})$ почти всюду в D . Для фиксированного $t \in [0, T]$ из сходимости $u^M(t, \mathbf{x}) \rightarrow u(t, \mathbf{x})$ в $L_k(Q)$ следует, что $u^M(t, \mathbf{x}) \rightarrow u(t, \mathbf{x})$ выборочно почти всюду в Ω . В частности, можно добиться такой сходимости при $t = 0, T$.

Следствием неравенств (3.12), (3.15) является оценка

$$\|u^M(T)\|_{\dot{W}_{k,p}^m(\Omega)} \leq E_7, \quad M = \overline{1, \infty}, \quad (3.20)$$

из которой вытекает выборочная слабая сходимость $u^M(T, \mathbf{x}) \rightharpoonup u(T, \mathbf{x})$ в $\dot{W}_{k,p}^m(\Omega)$ при $M \rightarrow \infty$. Выполняя предельный переход в (3.20) при $M \rightarrow \infty$, получаем неравенство

$$\|u(T)\|_{\dot{W}_{k,p}^m(\Omega)} \leq E_7.$$

Отсюда в силу произвольности T получаем свойство (1.2).

Последовательность $v^M = (\omega^M)^{(k-2)/4} u^M$ выборочно сходится к $v = |u|^{(k-2)/2} u$ почти всюду в D . Из неравенств (3.12) заключаем равномерную по $t \in [0, \infty)$ ограниченность последовательности $v^M(t, \mathbf{x})$ в $L_2(\Omega)$:

$$\|v^M(t)\| = \|(\omega^M)^{(k-2)/4} u^M(t)\| \leq \|(\omega^M)^{k/4}\| = \|(\omega^M)^{1/2}\|_k^{k/2} \leq E_2^{1/2},$$

$$M = \overline{1, \infty}.$$

Согласно лемме 2 последовательность v^M слабо сходится к v в $L_2(D^T)$ при любом $T > 0$ и $M \rightarrow \infty$. Далее, $(v_t^M, w)_{D^T} = -(v^M, w_t)_{D^T}$ для любой функции $w \in C_0^\infty(D^T)$; переходя к пределу при $M \rightarrow \infty$, получим

$$(g, w)_{D^T} = -(v, w_t)_{D^T}.$$

Отсюда следует, что $g = v_t = (|u|^{(k-2)/2} u)_t$. Отметим, что $v, v_t \in L_2(D^T)$ влечет $v \in C([0, \infty), L_2(\Omega))$.

Из оценки (3.19) следует, что $u_t^M \rightharpoonup b$ в $L_k(D^T)$. Тогда $(u_t^M, w)_{D^T} = -(u^M, w_t)_{D^T}$ для любой функции $w \in C_0^\infty(D^T)$; переходя к пределу при $M \rightarrow \infty$, получим

$$(b, w)_{D^T} = -(u, w_t)_{D^T},$$

значит, $b = u_t$. Тогда можно считать, что $u_t^M \rightharpoonup u_t$ слабо в $L_k(D^T)$. Из $u, u_t \in L_k(D^T)$ следует $u \in C([0, \infty), L_k(\Omega))$.

С одной стороны, из оценки (3.3) и сходимости $u^M(0, \mathbf{x}) \rightarrow u(0, \mathbf{x})$ почти всюду при $M \rightarrow \infty$ согласно лемме 2 следует слабая сходимость $u^M(0, \mathbf{x}) \rightharpoonup u(0, \mathbf{x})$ в $L_k(\Omega)$ при $M \rightarrow \infty$. С другой стороны, согласно выбору (3.2) $u^K(0, \mathbf{x})$ сильно сходится к $\varphi(\mathbf{x})$ в $L_k(\Omega)$. В силу единственности слабого предела $u(0, \mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ для почти всех $\mathbf{x} \in \Omega$.

Докажем, что функция $u(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет интегральному тождеству (1.1). Из (3.4) следуют равенства

$$(((\omega^M)^{(k-2)/2} u^M)_t, w)_{D^T} + \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha \{u^M\}_\alpha^2 \{u^M\}_\alpha, \{w\}_\alpha)_{D^T} = 0,$$

$$M = \overline{1, \infty}, \quad (3.21)$$

справедливые для любой функции $w(\tau, \mathbf{x}) \in P = \bigcup_{L=1}^\infty P_L$. Первое слагаемое проинтегрируем по частям; получим

$$((\omega^M)^{(k-2)/2} u^M, w) \Big|_{t=0}^{t=T} - ((\omega^M)^{(k-2)/2} u^M, w_t)_{D^T} + \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha \{u^M\}_\alpha^2 \{u^M\}_\alpha, \{w\}_\alpha)_{D^T} = 0, \quad M = \overline{1, \infty}. \quad (3.22)$$

В силу плотности P в пространстве $\dot{W}_{k, \mathbf{p}}^{1, \mathbf{m}}(D^T)$ (лемма 3) тождество (3.22) справедливо для произвольной $w \in \dot{W}_{k, \mathbf{p}}^{1, \mathbf{m}}(D^T)$.

Заметим, что справедливы соотношения $(\omega^M)^{(k-2)/2} |u^M| \leq (\omega^M)^{(k-1)/2}$ и $\|(\omega^M)^{(k-1)/2}\|_{k'} = \|(\omega^M)^{1/2}\|_k^{k-1}$; тогда согласно оценке (3.12) последовательность $(\omega^M)^{(k-2)/2} u^M \in C([0, \infty), L_{k'}(\Omega))$ ограничена в этом пространстве. Следовательно, по лемме 2 $(\omega^M)^{(k-2)/2} u^M$ выборочно слабо сходится к $|u|^{k-2} u$

в $L_{k'}(D^T)$ и $(\omega^M(T))^{(k-2)/2}u^M(T) \rightharpoonup |u(T)|^{k-2}u(T)$, $(\omega^M(0))^{(k-2)/2}u^M(0) \rightharpoonup |u(0)|^{k-2}u(0)$ в $L_{k'}(\Omega)$. Также можно утверждать, что $(\omega^M(T))^{1/2} \rightharpoonup |u(T)|$, $(\omega^M(0))^{1/2} \rightharpoonup |u(0)|$ в $L_k(\Omega)$. То, что предельные функции будут именно такими, обосновывается установленной выше сходимостью последовательности u^M почти всюду в D , а также почти всюду в Ω при $t = 0, T$.

В (3.22) можно перейти к пределу при $M \rightarrow \infty$, в результате придем к тождеству

$$(|u|^{k-2}u, w)\Big|_{t=0}^{t=T} - (|u|^{k-2}u, w_t)_{D^T} + \sum_{\alpha=1}^n (b_\alpha, \{w\}_\alpha)_{D^T} = 0, \quad (3.23)$$

которое справедливо для любой функции $w \in \dot{W}_{k,\mathbf{p}}^{1,\mathbf{m}}(D^T)$. В частности, для $w = u$, применяя равенство

$$\int_0^T (|u|^{k-2}u, u_t) dt = \frac{1}{k} \|u(t)\|_k^k \Big|_{t=0}^{t=T}, \quad (3.24)$$

из (3.23) выводим

$$\frac{k-1}{k} \|u(t)\|_k^k \Big|_{t=0}^{t=T} + \sum_{\alpha=1}^n (b_\alpha, \{u\}_\alpha)_{D^T} = 0. \quad (3.25)$$

Докажем, что для любой функции $v \in \dot{W}_{k,\mathbf{p}}^{1,\mathbf{m}}(D^T)$ справедливо равенство

$$\sum_{\alpha=1}^n (b_\alpha, \{v\}_\alpha)_{D^T} = \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{u\}_\alpha^2) \{u\}_\alpha, \{v\}_\alpha)_{D^T}. \quad (3.26)$$

Вычтем из (3.8) при $t = T$ равенства (3.22), для $w \in \dot{W}_{k,\mathbf{p}}^{1,\mathbf{m}}(D^T)$ получим соотношения

$$\begin{aligned} & -((\omega^M)^{(k-2)/2}u^M, w)\Big|_{t=0}^{t=T} + ((\omega^M)^{(k-2)/2}u^M, w_t)_{D^T} \\ & + \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{u^M\}_\alpha^2) \{u^M\}_\alpha, \{u^M - w\}_\alpha)_{D^T} + \frac{k-1}{k} \|(\omega^M)^{1/2}(t)\|_k^k \Big|_{t=0}^{t=T} \\ & - \varepsilon^M \frac{k}{2} \int_{I^M} (\omega^M(t, \mathbf{x}))^{k/2-1} d\mathbf{x} \Big|_{t=0}^{t=T} = 0, \quad M = \overline{1, \infty}, \end{aligned}$$

из которых, используя (2.6), (3.11), выводим неравенства

$$\begin{aligned} & -((\omega^M)^{(k-2)/2}u^M, w)\Big|_{t=0}^{t=T} + ((\omega^M)^{(k-2)/2}u^M, w_t)_{D^T} \\ & + \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{w\}_\alpha^2) \{w\}_\alpha, \{u^M - w\}_\alpha)_{D^T} + \frac{k-1}{k} \|(\omega^M)^{1/2}(t)\|_k^k \Big|_{t=0}^{t=T} \\ & - (\varepsilon^M)^{k/4} \left(\frac{k}{2}\right)^{k/2} \leq 0, \quad M = \overline{1, \infty}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Из слабой сходимости $(\omega^M(T, \mathbf{x}))^{1/2} \rightharpoonup |u(T, \mathbf{x})|$ в $L_k(\Omega)$ при $M \rightarrow \infty$ следует неравенство $\liminf_{M \rightarrow \infty} \|(\omega^M)^{1/2}(T)\|_k \geq \|u(T)\|_k$. Из сходимости $u^M(0, \mathbf{x}) \rightarrow \varphi(\mathbf{x})$

в $L_k(\Omega)$ при $M \rightarrow \infty$ следует сходимость $w^M(0, \mathbf{x}) \rightarrow \varphi^2(\mathbf{x})$ в $L_{k/2}(\Omega)$. Действительно, используя (3.9), (3.3), (3.2), выводим

$$\begin{aligned} \|w^M(0) - \varphi^2\|_{k/2} &\leq \|(u^M)^2(0) - \varphi^2\|_{k/2} + \frac{k}{2}\varepsilon^M(\text{mes } I^M)^{2/k} \\ &\leq \|u^M(0) - \varphi\|_k \|u^M(0) + \varphi\|_k + \frac{k}{2}(\varepsilon^M)^{1/2} \\ &\leq E_8 \|u^M(0) - \varphi\|_k + \frac{k}{2}(\varepsilon^M)^{1/2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $M \rightarrow \infty$. Тогда $\|(w^M)^{1/2}(0)\|_k \rightarrow \|\varphi\|_k$ при $M \rightarrow \infty$.

Далее, перейдем к пределу в (3.27) по $M \rightarrow \infty$ для фиксированного w , при этом используем установленную выше сходимость. Таким образом, для произвольной $w \in \dot{W}_{k,\mathbf{p}}^{1,\mathbf{m}}(D^T)$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} -(|u|^{k-2}u, w)\Big|_{t=0}^{t=T} + (|u|^{k-2}u, w_t)_{DT} \\ + \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{w\}_\alpha^2)\{w\}_\alpha, \{u-w\}_\alpha)_{DT} + \frac{k-1}{k}\|u(t)\|_k^k\Big|_{t=0}^{t=T} \leq 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Из (3.28) вычтем (3.25) и прибавим (3.23), в результате выводим неравенство

$$\sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{w\}_\alpha^2)\{w\}_\alpha - b_\alpha, \{u-w\}_\alpha)_{DT} \leq 0, \quad (3.29)$$

справедливое для любого $w \in \dot{W}_{k,\mathbf{p}}^{1,\mathbf{m}}(D^T)$. В (3.29) положим $w = u + \varepsilon v$, $\varepsilon > 0$, где $v \in \dot{W}_{k,\mathbf{p}}^{1,\mathbf{m}}(D^T)$; получим

$$\sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{u + \varepsilon v\}_\alpha^2)\{u + \varepsilon v\}_\alpha - b_\alpha, \{v\}_\alpha)_{DT} \geq 0.$$

Согласно (2.5) из последнего неравенства при $\varepsilon \rightarrow 0$ следует соотношение

$$\sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{u\}_\alpha^2)\{u\}_\alpha - b_\alpha, \{v\}_\alpha)_{DT} \geq 0,$$

из которого в силу произвольности v получим равенство (3.26). Из (3.23) и (3.26) для $v \in \dot{W}_{k,\mathbf{p}}^{1,\mathbf{m}}(D^T)$ заключаем справедливость тождества

$$-(|u|^{k-2}u, v_t)_{DT} + \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{u\}_\alpha^2)\{u\}_\alpha, \{v\}_\alpha)_{DT} + (|u|^{k-2}u, v)\Big|_{t=0}^{t=T} = 0. \quad (3.30)$$

Таким образом, (1.1) установлено.

Из (3.25), (3.26) следует тождество

$$\frac{k-1}{k}\|u(t)\|_k^k + \sum_{\alpha=1}^n \int_0^t (a_\alpha(\{u\}_\alpha^2)\{u\}_\alpha, \{u\}_\alpha) d\tau = \frac{k-1}{k}\|\varphi\|_k^k, \quad t \geq 0, \quad (3.31)$$

дифференцируя которое по t , выводим

$$\frac{k-1}{k} \frac{d}{dt} \|u(t)\|_k^k + \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{u\}_\alpha^2)\{u\}_\alpha, \{u\}_\alpha) = 0, \quad t > 0. \quad (3.32)$$

Далее, применяя (0.4), из (3.31), (3.32) получаем (1.6), (1.7).

3.2. Случай $k \geq 2$. Схема доказательства в этом случае та же, что и в п. 3.1. Подробно остановимся лишь на тех моментах, которые отличаются существенным образом.

Функции $c_i^M(t)$, $t \in [0, \infty)$, определяются из системы

$$\left(\left(\frac{u^M}{b^M} + |u^M|^{k-2} u^M \right)_t, \psi_j \right) + \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{u^M\}_\alpha^2) \{u^M\}_\alpha, \{\psi_j\}_\alpha) = 0, \quad j = \overline{1, M} \quad (3.33)$$

(числа $b^M > 0$ выберем позже). Очевидно, что уравнения (3.33) имеют вид (3.5) с функциями

$$A_{ji}(c_1, \dots, c_M) = \left(\left(\frac{1}{b^M} + (k-1) \left| \sum_{l=1}^M c_l \psi_l \right|^{k-2} \right) \psi_i, \psi_j \right) = (\psi_i, \psi_j)_M, \\ i, j = \overline{1, M}.$$

Далее, повторяя рассуждения п. 3.1, приходим к системе (3.6), разрешенной относительно $\frac{d}{dt} c_i^M(t)$.

Установим теперь оценки для галёркинских приближений. Умножим j -е уравнение (3.33) на $c_j^M(t)$ и затем все уравнения просуммируем по j от 1 до M ; в результате получим равенства

$$\left(\left(\frac{u^M}{b^M} + |u^M|^{k-2} u^M \right)_t, u^M \right) + \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{u^M\}_\alpha^2) \{u^M\}_\alpha, \{u^M\}_\alpha) = 0, \\ M = \overline{1, \infty},$$

которые можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{k-1}{k} \|u^M(t)\|_k^k + \frac{1}{2b^M} \|u^M(t)\|^2 \right) + \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{u^M\}_\alpha^2) \{u^M\}_\alpha, \{u^M\}_\alpha) = 0, \quad M = \overline{1, \infty}. \quad (3.34)$$

После интегрирования от 0 до t будем иметь

$$\frac{1}{2b^M} \|u^M(t)\|^2 + \frac{k-1}{k} \|u^M(t)\|_k^k + \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{u^M\}_\alpha^2) \{u^M\}_\alpha, \{u^M\}_\alpha)_{D^t} \\ = \frac{1}{2b^M} \|u^M(0)\|^2 + \frac{k-1}{k} \|u^M(0)\|_k^k, \quad M = \overline{1, \infty}. \quad (3.35)$$

Учитывая (0.4), полагая $b^M = M \|u^M(0)\|^2$ и соединяя (3.35) и (3.3), выводим неравенства

$$\frac{1}{b^M} \|u^M(t)\|^2 + \|u^M(t)\|_k^k + \sum_{\alpha=1}^n \|\{u^M\}_\alpha\|_{p_\alpha, D^t}^{p_\alpha} d\tau \leq E_9, \quad M = \overline{1, \infty}. \quad (3.36)$$

Неравенства (0.4), (3.36) позволяют установить оценки (3.13).

Покажем, что все возможные решения задачи (3.1), (3.6) равномерно ограничены при $t \geq 0$. Действительно, пользуясь (3.36), выводим

$$|c_i^M(t)|^2 \leq \sum_{j=1}^M |c_j^M(t)|^2 = \|u^M(t)\|^2 \leq E_9 b^M, \quad i = \overline{1, M}.$$

Отсюда следует разрешимость задачи (3.1), (3.6) на $[0, \infty)$ (см. [28; гл. VIII, § 8, теорема Каратеодори]).

Умножим теперь j -е уравнение (3.33) на $\frac{d}{dt} c_j^M(t)$ и затем все уравнения просуммируем по j от 1 до M ; в результате получим равенства

$$\left(\left(\frac{u^M}{b^M} + |u^M|^{k-2} u^M \right)_t, u_t^M \right) + \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{u^M\}_\alpha^2) \{u^M\}_\alpha, \{u_t^M\}_\alpha) = 0, \quad M = \overline{1, \infty},$$

которые можно переписать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b^M} \|u_t^M\|^2 + (k-1) \| |u^M|^{(k-2)/2} u_t^M \|^2 \\ & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} A_\alpha(\{u^M(t)\}_\alpha^2) d\mathbf{x} = 0, \quad M = \overline{1, \infty}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

После интегрирования от 0 до t , пользуясь (2.3), будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b^M} \|u_t^M\|_{D^t}^2 + (k-1) \| |u^M|^{(k-2)/2} u_t^M \|^2_{D^t} \\ & + \frac{1}{2b} \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{u^M(t)\}_\alpha^2) \{u^M(t)\}_\alpha, \{u^M(t)\}_\alpha) \\ & \leq \frac{1}{p_1} \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{u^M(0)\}_\alpha^2) \{u^M(0)\}_\alpha, \{u^M(0)\}_\alpha), \quad M = \overline{1, \infty}. \end{aligned}$$

Применяя (0.4) и используя (3.3), выводим

$$\| |u^M|^{(k-2)/2} u_t^M \|^2_{D^t} + \sum_{\alpha=1}^n \|\{u^M\}_\alpha\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} \leq E_{10}, \quad M = \overline{1, \infty}. \quad (3.38)$$

Из неравенств (3.36), (3.38) следует ограниченность последовательности u^M , $M = \overline{1, \infty}$, в пространствах $C([0, \infty), \dot{W}_{k, \mathbf{p}}^{\mathbf{m}}(\Omega))$, $\dot{W}_{k, \mathbf{p}}^{0, \mathbf{m}}(D^T)$ и последовательности $|u^M|^{(k-2)/2} u_t^M$, $M = \overline{1, \infty}$, в $L_2(D^T)$. Кроме того, из неравенств (3.13) следует ограниченность функций $a_\alpha(\{u^M\}_\alpha^2) \{u^M\}_\alpha$, $M = \overline{1, \infty}$, в пространствах $L_{p_\alpha/(p_\alpha-1)}(D^T)$, $\alpha = \overline{1, n}$. Установленные факты обеспечивают выборочную слабую сходимость указанных последовательностей при $M \rightarrow \infty$ в соответствующих пространствах: выполняются сходимости (3.16), (3.17) и, кроме того,

$$v_t^M = (|u^M|^{(k-2)/2} u_t^M)_t = \frac{k}{2} |u^M|^{(k-2)/2} u_t^M \rightharpoonup g \quad \text{в } L_2(D^T).$$

Аналогично случаю $k \in (1, 2)$ доказывается, что последовательность $\{u^M\}$ выборочно почти всюду в D сходится к u . Действительно, повторяя рассуждения п. 3.1, устанавливаем выборочную сильную сходимость $u^M(t_j, \mathbf{x}) \rightarrow h_j(\mathbf{x})$

в $L_k(Q)$ на счетном плотном множестве $\{t_j\}_{j=1}^\infty \subset [0, \infty)$. Ввиду справедливости равенств $\|v^M(t)\|_2 = \|u^M\|_k^{k/2}$, пользуясь оценкой (3.36), заключаем ограниченность последовательности v^M в $C([0, \infty), L_2(\Omega))$. Кроме того, применяя (3.36), выводим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \|(v^M - v^N)(t)\|_2 &\leq \frac{k}{2} \|(u^M - u^N)(t)\|_k (\|u^M(t)\|_k + \|u^N(t)\|_k)^{(k-2)/2} \\ &\leq E_{11} \|(u^M - u^N)(t)\|_k, \quad M, N = \overline{1, \infty}, \end{aligned}$$

из которой следует выборочная сильная сходимость $v^M(t_j, \mathbf{x})$ в $L_2(Q)$ на множестве $\{t_j\}_{j=1}^\infty$. Можно также считать, что $v^M(t_j, \mathbf{x})$ выборочно сходится почти всюду в Q при каждом t_j , $j = \overline{1, \infty}$.

Таким образом, все условия леммы 5 для v^M , $M = \overline{1, \infty}$, выполнены. Тогда согласно лемме 5 $v^M \rightarrow v$ в пространстве $C([0, T], L_2(Q))$ при любых $T > 0$ и $Q \subset \Omega$ и почти всюду в D . Тогда и последовательность $u^M(t, \mathbf{x})$ выборочно сходится к $h(t, \mathbf{x})$ почти всюду в D . Согласно лемме 2 $u^M(t, \mathbf{x}) \rightharpoonup h(t, \mathbf{x})$ в $L_k(D^T)$ при любом $T > 0$ в силу единственности предела $h(t, \mathbf{x}) = u(t, \mathbf{x})$ почти всюду в D . Таким образом, v^M выборочно сходится к $v = |u|^{(k-2)/2}u$ сильно в пространстве $C([0, T], L_2(Q))$ и почти всюду в D . Кроме того, $v^M(t, \mathbf{x}) \rightarrow v(t, \mathbf{x})$ почти всюду в Ω при $t = 0, T$, а следовательно, и $u^M(t, \mathbf{x}) \rightarrow u(t, \mathbf{x})$ почти всюду в Ω при $t = 0, T$ и $M \rightarrow \infty$.

Далее, пользуясь леммой 2, устанавливается, что $v^M \rightharpoonup v$ в $L_2(D^T)$ и $v_t^M \rightharpoonup g = v_t = (|u|^{(k-2)/2}u)_t$.

Покажем, что последовательность $(|u^M|^{k-2}u^M)_t = (k-1)|u^M|^{k-2}u_t^M$, $M = \overline{1, \infty}$, ограничена в $L_{k'}(D^T)$. В самом деле, из (3.36), (3.38) следует

$$\begin{aligned} &\| |u^M|^{k-2}u_t^M \|_{k', D^T} \\ &= \left(\int_{D^T} |u^M|^{k(k-2)/(2(k-1))} (|u^M|^{(k-2)/2} |u_t^M|)^{k/(k-1)} d\mathbf{x} dt \right)^{(k-1)/k} \\ &\leq \frac{2}{k} \|u^M\|_{k, D^T}^{(k-2)/2} \|v_t^M\|_{2, D^T} \leq E_{12}. \end{aligned}$$

Из ограниченности $\| |u^M|^{k-2}u_t^M \|_{k', D^T}$ следует, что $(|u^M|^{k-2}u^M)_t \rightharpoonup b$ в $L_{k'}(D^T)$. Согласно лемме 2 $u^M(t, \mathbf{x}) \rightharpoonup h(t, \mathbf{x})$ в $L_k(D^T)$ при любом $T > 0$. В силу единственности предела $h(t, \mathbf{x}) = u(t, \mathbf{x})$ почти всюду в D . Переходя к пределу в равенстве $((|u^M|^{k-2}u^M)_t, w)_{D^T} = -(|u^M|^{k-2}u^M, w_t)_{D^T}$ для любой функции $w \in C_0^\infty(D^T)$ при $M \rightarrow \infty$, получим

$$(b, w)_{D^T} = -(|u|^{k-2}u, w_t)_{D^T},$$

значит, $b = (|u|^{k-2}u)_t$. Тогда можно считать, что $(|u^M|^{k-2}u^M)_t \rightharpoonup (|u|^{k-2}u)_t$ слабо в $L_{k'}(D^T)$. Из $|u|^{k-2}u, (|u|^{k-2}u)_t \in L_{k'}(D^T)$ следует $|u|^{k-2}u \in (C[0, \infty), L_{k'}(\Omega))$.

Докажем, что функция $u(t, \mathbf{x})$ удовлетворяет интегральному тождеству (1.1). Из (3.33) следуют тождества

$$\begin{aligned} &\left(\left(\frac{u^M}{b^M} + |u^M|^{k-2}u^M \right)_t, w \right)_{D^T} + \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{u^M\}_\alpha^2) \{u^M\}_\alpha, \{w\}_\alpha)_{D^T} = 0, \\ &M = \overline{1, \infty}, \end{aligned} \tag{3.39}$$

справедливые для любой функции $w(\tau, \mathbf{x}) \in P$ (см. определение пространства P в лемме 3). Отметим, что при $M \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{b_M}(u_t^M, w)_{D^T} = \frac{1}{b_M}\{- (u^M, w_t)_{D^t} + (u^M(T), w(T)) - (u^M(0), w(0))\} \rightarrow 0$$

в силу ограниченности u^M в $C([0, \infty), L_k(\Omega))$ и того, что $b^M \rightarrow \infty$ при $M \rightarrow \infty$.

В (3.39) можно перейти к пределу при $M \rightarrow \infty$, в результате придем к тождеству

$$((|u|^{k-2}u)_t, w)_{D^T} + \sum_{\alpha=1}^n (b_\alpha, \{w\}_\alpha)_{D^T} = 0, \quad (3.40)$$

которое справедливо для любой функции $w \in P$. Ввиду плотности P в пространстве $\dot{W}_{k,\mathbf{p}}^{0,\mathbf{m}}(D^T)$ (лемма 3) тождество (3.40) справедливо для произвольной $w \in \dot{W}_{k,\mathbf{p}}^{0,\mathbf{m}}(D^T)$. В частности, для $w = u$, воспользовавшись равенством

$$\int_0^T ((|u|^{k-2}u)_t, u) dt = \frac{k-1}{k} \int_0^T \frac{d}{dt} \|v(t)\|_2^2 dt = \frac{k-1}{k} \|u(t)\|_k^k \Big|_{t=0}^{t=T}, \quad (3.41)$$

из (3.40) выводим

$$\frac{k-1}{k} \|u(t)\|_k^k \Big|_{t=0}^{t=T} + \sum_{\alpha=1}^n (b_\alpha, \{u\}_\alpha)_{D^T} = 0. \quad (3.42)$$

Докажем, что для любой функции $v \in \dot{W}_{k,\mathbf{p}}^{0,\mathbf{m}}(D^T)$ справедливо равенство (3.26). Перепишем (3.35) при $t = T$ для $w \in \dot{W}_{k,\mathbf{p}}^{0,\mathbf{m}}(D^T)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{u^M\}_\alpha^2) \{u^M\}_\alpha, \{w\}_\alpha)_{D^T} + \frac{k-1}{k} \|u^M(t)\|_k^k \Big|_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{2b^M} \|u^M(t)\|^2 \Big|_{t=0}^{t=T} \\ & + \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{u^M\}_\alpha^2) \{u^M\}_\alpha, \{u^M - w\}_\alpha)_{D^T} = 0, \quad M = \overline{1, \infty}, \end{aligned}$$

из которых, используя неравенство (2.6), выводим неравенства

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{u^M\}_\alpha^2) \{u^M\}_\alpha, \{w\}_\alpha)_{D^T} + \frac{k-1}{k} \|u^M(t)\|_k^k \Big|_{t=0}^{t=T} + \frac{1}{2b^M} \|u^M(t)\|^2 \Big|_{t=0}^{t=T} \\ & + \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{w\}_\alpha^2) \{w\}_\alpha, \{u^M - w\}_\alpha)_{D^T} \leq 0, \quad M = \overline{1, \infty}. \end{aligned}$$

Заметим, что из оценки (3.36) и сходимости $u^M(T, \mathbf{x}) \rightarrow u(T, \mathbf{x})$ почти всюду при $M \rightarrow \infty$ согласно лемме 2 следует слабая сходимость $u^M(T, \mathbf{x}) \rightharpoonup u(T, \mathbf{x})$ в $L_k(\Omega)$ при $M \rightarrow \infty$. В результате получаем неравенство $\liminf_{M \rightarrow \infty} \|u^M(T)\|_k \geq \|u(T)\|_k$. Далее, перейдем к пределу по $M \rightarrow \infty$ для фиксированного $w \in \dot{W}_{k,\mathbf{p}}^{0,\mathbf{m}}(D^T)$, при этом используем установленную выше сходимость.

Таким образом, для произвольной $w \in \dot{W}_{k,\mathbf{p}}^{0,\mathbf{m}}(D^T)$ справедливо неравенство

$$\frac{k-1}{k} \|u(t)\|_k^k \Big|_{t=0}^{t=T} + \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{w\}_\alpha^2) \{w\}_\alpha, \{u - w\}_\alpha)_{D^T} + \sum_{\alpha=1}^n (b_\alpha, \{w\}_\alpha)_{D^T} \leq 0. \quad (3.43)$$

Из (3.43) вычтем (3.42), в результате выводим неравенство (3.29), из которого, как показано в п. 3.1, следует (3.26). Из (3.40) и (3.26) для $v \in W_{k,p}^{0,m}(D^T)$ получаем тождество

$$((|u|^{k-2}u)_t, v)_{D^T} + \sum_{\alpha=1}^n (a_\alpha(\{u\}_\alpha^2)\{u\}_\alpha, \{v\}_\alpha)_{D^T} = 0. \quad (3.44)$$

Интегрируя по частям первое слагаемое, приходим к равенству (3.30).

Из равенств (3.42), (3.26) следуют тождества (3.31), (3.32), из которых, применяя (0.4), выводим (1.6), (1.7).

§ 4. Допустимая скорость убывания решения

В этом параграфе будет доказана теорема 1. Сначала предположим, что область Ω является ограниченной, и докажем оценку (0.8) для галёркинских приближений.

4.1. Случай $k \in (1, 2)$. Введем обозначения

$$G^M(t) = \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} a_\alpha(\{u^M\}_\alpha^2)\{u^M\}_\alpha^2 d\mathbf{x}, \quad H^M(t) = \sum_{\alpha=1}^n \int_{\Omega} A_\alpha(\{u^M\}_\alpha^2) d\mathbf{x},$$

$$E^M(t) = \int_{IM} \left(\frac{k-1}{k} (\omega^M(t))^{k/2} - \varepsilon^M \frac{k}{2} (\omega^M(t))^{(k-2)/2} \right) d\mathbf{x} + \left(\frac{2}{k} \right)^{1/2} (\varepsilon^M)^{k/4}.$$

Пользуясь (2.3), получим неравенства

$$\frac{p_1}{2} H^M(t) \leq G^M(t) \leq \widehat{b} H^M(t), \quad t \geq 0. \quad (4.1)$$

Перепишем равенства (3.7), (3.14) в виде

$$\frac{dE^M(t)}{dt} + G^M(t) = 0, \quad t > 0, \quad (4.2)$$

$$\int_{IM} \left((k-1)(u^M)^2 + \frac{k}{2} \varepsilon^M \right) (\omega^M)^{(k-4)/2} (u_t^M)^2 d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \frac{dH^M(t)}{dt} = 0, \quad t > 0. \quad (4.3)$$

Применяя интегральное неравенство Коши–Буняковского, устанавливаем соотношения

$$\left(\frac{dE^M(t)}{dt} \right)^2 = \left(\int_{IM} \left((k-1)(\omega^M)^{(k-2)/2} + \varepsilon^M \frac{k}{2} (2-k)(\omega^M)^{(k-4)/2} \right) u^M u_t^M d\mathbf{x} \right)^2$$

$$\leq \left((k-1) \left(\int_{IM} (\omega^M)^{(k-4)/2} (u^M)^2 (u_t^M)^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(\int_{IM} (\omega^M)^{k/2} d\mathbf{x} \right)^{1/2} \right.$$

$$\left. + \varepsilon^M \frac{k}{2} \left(\int_{IM} (\omega^M)^{(k-4)/2} (u_t^M)^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2} \left(\int_{IM} (2-k)(\omega^M)^{(k-2)/2} d\mathbf{x} \right)^{1/2} \right)^2.$$

Используя неравенство Коши–Буняковского для сумм, согласно (4.3), (3.11) выводим

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{dE^M(t)}{dt} \right)^2 &\leq \int_{I^M} \left((k-1)(u^M)^2 + \varepsilon^M \frac{k}{2} \right) (\omega^M)^{(k-4)/2} (u_t^M)^2 d\mathbf{x} \\
 &\quad \times \int_{I^M} \left((k-1)(\omega^M)^{k/2} + (2-k)\varepsilon^M \frac{k}{2} (\omega^M)^{(k-2)/2} \right) d\mathbf{x} \\
 &\leq -\frac{1}{2} \frac{dH^M(t)}{dt} \left\{ \int_{I^M} \left((k-1)(\omega^M)^{k/2} - \varepsilon^M \frac{k^2}{2} (\omega^M)^{(k-2)/2} \right) d\mathbf{x} \right. \\
 &\quad \left. + k \left(\frac{2}{k} \right)^{1/2} (\varepsilon^M)^{k/4} \right\} = -\frac{k}{2} \frac{dH^M(t)}{dt} E(t). \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

Из (4.4), (4.2), (4.1) следуют неравенства

$$\frac{k}{2} E^M(t) \frac{dH^M(t)}{dt} \leq \frac{dE^M(t)}{dt} G^M(t) \leq \frac{p_1}{2} \frac{dE^M(t)}{dt} H^M(t),$$

которые перепишем в виде

$$\frac{dH^M(t)}{dt} \frac{1}{H^M(t)} \leq \frac{p_1}{k} \frac{dE^M(t)}{dt} \frac{1}{E^M(t)}.$$

Решая дифференциальное неравенство и применяя (4.1), получаем оценки

$$\frac{1}{\widehat{b}} G^M(t) \leq H^M(t) \leq H^M(0) \frac{(E^M(t))^{p_1/k}}{(E^M(0))^{p_1/k}}, \quad t > 0. \tag{4.5}$$

Далее, соединяя (4.2), (4.5), (4.1), выводим соотношения

$$\frac{dE^M(t)}{dt} \geq -\widehat{b} H^M(0) \frac{(E^M(t))^{p_1/k}}{(E^M(0))^{p_1/k}} \geq -\frac{2\widehat{b}}{p_1} G^M(0) \frac{(E^M(t))^{p_1/k}}{(E^M(0))^{p_1/k}},$$

которые перепишем в виде

$$\frac{dE^M(t)}{dt} \frac{1}{(E^M(t))^{p_1/k}} \geq -\frac{2\widehat{b}}{p_1} \frac{G^M(0)}{(E^M(0))^{p_1/k}}.$$

Решая дифференциальное неравенство, получаем оценку

$$E^M(t) \geq E^M(0) \left(t \frac{2(p_1-k)\widehat{b}}{kp_1} \frac{G^M(0)}{E^M(0)} + 1 \right)^{-k/(p_1-k)}, \quad t > 0. \tag{4.6}$$

Для фиксированного $t > 0$ при $k \leq p_1$ в случае ограниченной области Ω последовательность $u^M(t, \mathbf{x})$ выборочно сильно сходится при $M \rightarrow \infty$ к $u(t, \mathbf{x})$ в пространстве $L_k(\Omega)$. Очевидно,

$$E^M(t) \leq \frac{k-1}{k} \|(\omega^M)^{1/2}(t)\|_k^k + \left(\frac{2}{k} \right)^{1/2} (\varepsilon^M)^{k/4}, \quad M = \overline{1, \infty},$$

и согласно (3.9) выполнено неравенство

$$\lim_{M \rightarrow \infty} E^M(t) \leq \frac{k-1}{k} \|u(t)\|_k^k = E(t).$$

Кроме того, в силу (3.11) справедливы неравенства

$$\lim_{M \rightarrow \infty} E^M(0) \geq \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\frac{k-1}{k} \|u^M(0)\|_k^k + \left(\frac{2}{k} \right)^{1/2} \frac{2-k}{2} (\varepsilon^M)^{k/4} \right) = \frac{k-1}{k} \|\varphi\|_k^k,$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} G^M(0) \leq \lim_{M \rightarrow \infty} \hat{a} \sum_{\alpha=1}^n \|\{u^M\}_\alpha\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} = \hat{a} \sum_{\alpha=1}^n \|\{\varphi\}_\alpha\|_{p_\alpha}^{p_\alpha}.$$

После предельного перехода в (4.6) при $M \rightarrow \infty$ получим

$$\|u(t)\|_k^k \geq \|\varphi\|_k^k (1 + C(\|\varphi\|_{W_{k,p}(\Omega)})t)^{-k/(p_1-k)}. \quad (4.7)$$

4.2. Случай $k \geq 2$. Положим

$$E^M(t) = \frac{k-1}{k} \|u^M(t)\|_k^k + \frac{1}{2b^M} \|u^M(t)\|^2.$$

Перепишем равенства (3.34), (3.37) в виде (4.2):

$$(k-1) \| |u^M|^{(k-2)/2} u_t^M(t) \|^2 + \frac{1}{b^M} \|u_t^M(t)\|^2 + \frac{1}{2} \frac{dH^M(t)}{dt} = 0, \quad t > 0. \quad (4.8)$$

Применяя интегральное неравенство Коши–Буняковского, устанавливаем соотношение

$$\left(\frac{dE^M(t)}{dt} \right)^2 = \left(\int_{\Omega} \left(\frac{1}{b^M} + (k-1) |u^M|^{k-2} \right) u^M u_t^M d\mathbf{x} \right)^2$$

$$\leq \left(\frac{1}{b^M} \|u^M(t)\| \|u_t^M(t)\| + (k-1) \|u^M(t)\|_k^{k/2} \| |u^M|^{(k-2)/2} u_t^M(t) \| \right)^2.$$

Используя неравенство Коши–Буняковского для сумм, согласно (4.8) выводим

$$\left(\frac{dE^M(t)}{dt} \right)^2 \leq \left(\frac{1}{b^M} \|u^M(t)\|^2 + (k-1) \|u^M(t)\|_k^k \right)$$

$$\times \left(\frac{1}{b^M} \|u_t^M(t)\|^2 + (k-1) \| |u^M|^{(k-2)/2} u_t^M(t) \|^2 \right)$$

$$\leq -\frac{k}{2} \frac{dH^M(t)}{dt} \left(\frac{1}{2b^M} \|u^M(t)\|^2 + \frac{k-1}{k} \|u^M(t)\|_k^k \right) = -\frac{k}{2} \frac{dH^M(t)}{dt} E^M(t).$$

Далее, повторяя рассуждения п. 4.1, получаем неравенство (4.6).

Положим $b^M = M \max\{\|u^M(0)\|^2, \text{mes}^{(k-2)/2} \Omega\}$; тогда справедливы неравенства

$$E^M(t) \leq \frac{k-1}{k} \|u^M(t)\|_k^k + \frac{\text{mes}^{(k-2)/2} \Omega}{2b^M} \|u^M(t)\|^2$$

$$\leq \frac{k-1}{k} \|u^M(t)\|_k^k + \frac{1}{2M} \|u^M(t)\|^2, \quad M = \overline{1, \infty}.$$

Пользуясь сильной сходимостью $|u^M|^{(k-2)/2} u^M \rightarrow |u|^{(k-2)/2} u$ в $L_2(\Omega)$ для фиксированного $t > 0$ при $k \leq p_1$ в случае ограниченной области Ω , устанавливаем сходимость $\|u^M(t)\|_k \rightarrow \|u(t)\|_k$. Отсюда получаем

$$\lim_{M \rightarrow \infty} E^M(t) \leq \frac{k-1}{k} \|u(t)\|_k^k.$$

Кроме того, справедливо неравенство

$$\lim_{M \rightarrow \infty} E^M(0) \geq \frac{k-1}{k} \lim_{M \rightarrow \infty} \|u^M(0)\|_k^k = \frac{k-1}{k} \|\varphi\|_k^k.$$

После предельного перехода в (4.6) при $M \rightarrow \infty$ получим (4.7).

4.3. Неограниченная область Ω . Установим теперь оценку (4.7) для решения задачи (0.1)–(0.3) в неограниченной области Ω . Пусть $\Omega^{(l)} \subset \Omega$ – ограниченные подобласти такие, что $\Omega^{(l)} \subset \Omega^{(l+1)}$, $l = \overline{1, \infty}$, $\bigcup_{l=1}^{\infty} \Omega^{(l)} = \Omega$. Через $u^{(l)}$ обозначим решения в $\Omega^{(l)}$ с финитной начальной функцией $\text{supp } \varphi \subset \Omega^{(1)}$; можно считать эти решения продолженными нулем вне $\Omega^{(l)}$.

Свойство (1.2) обеспечивает оценку

$$\|u^{(l)}(t)\|_{W_{k,p}^{\mathbf{m}}(\Omega)} \leq C, \quad t > 0, \quad l = \overline{1, \infty}. \quad (4.9)$$

Свойства (1.2)–(1.5) решений $u^{(l)}(t, \mathbf{x})$ позволяют установить выборочную слабую сходимость $u^{(l)}(t, \mathbf{x}) \rightharpoonup u(t, \mathbf{x})$ в $\dot{W}_{k,p}^{0,\mathbf{m}}(D^T)$ при $l \rightarrow \infty$ для всех $T > 0$ и доказать, что $u(t, \mathbf{x})$ является обобщенным решением задачи (0.1)–(0.3). В силу (4.9) и леммы 4 можно считать, что при фиксированном $t > 0$ имеет место сходимость $u^{(l)}(t, \mathbf{x}) \rightarrow u(t, \mathbf{x})$ в $\dot{W}_k^1(\Omega^r)$ при $l \rightarrow \infty$.

Пользуясь компактностью вложения $W_k^1(\Omega^r) \subset L_k(\Omega^r)$ и повторяя рассуждения пп. 3.1, 3.2, устанавливаем сильную сходимость $u^{(l)}(t, \mathbf{x}) \rightarrow u(t, \mathbf{x})$ в $L_k(\Omega^r)$ для $k \in (1, 2)$ и $|u^{(l)}|^{(k-2)/2} u^{(l)}(t, \mathbf{x}) \rightarrow |u|^{(k-2)/2} u(t, \mathbf{x})$ в $L_2(\Omega^r)$ для $k \geq 2$ при $l \rightarrow \infty$ для любого $r > 0$. Тогда при $k > 1$ для фиксированного $t > 0$ $\|u^{(l)}(t)\|_{k,\Omega^r} \rightarrow \|u(t)\|_{k,\Omega^r}$ при $l \rightarrow \infty$.

В силу оценки (0.13) для любого ε существует N такое, что справедливо неравенство

$$\|u^{(l)}(t)\|_{k,\Omega_{z_N}}^k \leq \varepsilon.$$

Для $u^{(l)}$ справедлива оценка (4.7); тогда

$$\|u^{(l)}(t)\|_{k,\Omega_{z_N}}^k \geq \|\varphi\|_k^k (1 + C(\|\varphi\|_{W_{k,p}^{\mathbf{m}}(\Omega)})t)^{-k/(p_1-k)} - \varepsilon.$$

Далее, переходим к пределу при $l \rightarrow \infty$, затем при $N \rightarrow \infty$ ($\varepsilon \rightarrow 0$). Таким образом, оценка (0.8) установлена в неограниченной области Ω .

§ 5. Вспомогательные неравенства

ЛЕММА 7. Для любой функции $g(x) \in C^\infty[a, b]$ и любого $\varepsilon \leq (b-a)^p$, $p \geq 1$, справедливы неравенства

$$\int_a^b |g^{(j)}|^p dx \leq \varepsilon^{-j} \int_a^b [\varepsilon^m |g^{(m)}|^p + G_m |g|^p] dx, \quad j = \overline{0, m}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (5.1)$$

где $g^{(j)}$ – производная j -го порядка, $G_m \geq 1$ – постоянная, зависящая от m , $G_{m+1} \geq G_m$.

Неравенство (5.1) при $p = 2$ установлено в [3; лемма 1]. При $p \neq 2$ доказательство проводится по той же схеме с использованием неравенства Ниренберга–Гальярдо (см. [29]).

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $\Delta = b - a$, $\Pi_a^b[s] = \{\mathbf{x}'_s \in \mathbb{R}^{n-1}, a < x_s < b\}$, $m \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$. Тогда существует положительная постоянная G_m такая, что для любой функции $g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ при любом $\epsilon \in (0, 1]$ справедливы неравенства

$$\frac{\|D_{x_s}^j g\|_{p, \Pi_a^b}^p}{\Delta^{p(m-j)}} \leq \epsilon \|D_{x_s}^m g\|_{p, \Pi_a^b}^p + \frac{G_m \epsilon \|g\|_{p, \Pi_a^b}^p}{\epsilon^{m/(m-j)} \Delta^{pm}}, \quad j = \overline{0, m-1}, \quad s = \overline{1, n}. \quad (5.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (5.1) при $\varepsilon = \hat{\epsilon} \Delta^p$, $\hat{\epsilon} \in (0, 1]$, следуют неравенства

$$\int_a^b \frac{|D_{x_s}^j g|^p}{\Delta^{p(m-j)}} dx_s \leq \hat{\epsilon}^{m-j} \int_a^b |D_{x_s}^m g|^p dx_s + \frac{G_m}{\hat{\epsilon}^j \Delta^{pm}} \int_a^b |g|^p dx_s, \quad j = \overline{0, m}.$$

Делая в них замену $\epsilon = \hat{\epsilon}^{m-j}$, $\epsilon \in (0, 1]$, выводим неравенства

$$\int_a^b \frac{|D_{x_s}^j g|^p}{\Delta^{p(m-j)}} dx_s \leq \epsilon \int_a^b |D_{x_s}^m g|^p dx_s + \frac{\epsilon G_m}{\epsilon^{m/(m-j)} \Delta^{pm}} \int_a^b |g|^p dx_s, \quad j = \overline{0, m-1}. \quad (5.3)$$

Проинтегрировав их по $\mathbf{x}'_s \in \mathbb{R}^{n-1}$, устанавливаем неравенства (5.2).

§ 6. Оценки сверху

В этом параграфе будут доказаны теоремы 2, 3. Сначала введем некоторые обозначения.

Обозначим

$$\omega_{z,a,b,c}(x) = \varpi\left(\frac{x-z}{a-z}\right) - \varpi\left(\frac{x-b}{c-b}\right),$$

где $z < a \leq b < c$, $\varpi(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ – неубывающая функция, равная 0 и 1 при $x \leq 0$ и $x \geq 1$ соответственно, постоянная в окрестности 0 и 1.

Пусть

$$\hat{a}_j = \max_{x \in [0,1]} |\varpi^{(j)}(x)|, \quad j = \overline{0, \infty}, \quad (6.1)$$

где $\varpi^{(j)}$ – производная j -го порядка. Из теоремы Лагранжа следует, что $\hat{a}_{j+1} \geq \hat{a}_j$ и при этом справедливы неравенства

$$\left| \varpi^{(j)}\left(\frac{x-a}{b-a}\right) \right| \leq \frac{\hat{a}_j}{(b-a)^j}, \quad x \in (a, b), \quad j = \overline{0, \infty}. \quad (6.2)$$

Известно, что для произвольной гладкой функции $\eta(x)$ справедливы равенства

$$(\eta^p)^{(j)} = \sum_{l=1}^j B_{lj}^{j_0 j_1 \dots j_l} \prod_{\substack{j_1 + \dots + j_l = j \\ j_0 + j_1 + \dots + j_l = p}} \eta^{j_0} (\eta')^{j_1} \dots (\eta^{(l)})^{j_l}, \quad j = \overline{1, p}. \quad (6.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $e_* > 1$ – число, которое определим позднее. Зафиксируем натуральное число $N \geq 2$. Рассмотрим кусочно-постоянную функцию $\beta(x)$, $x \in \mathbb{R}$, такую, что $\beta(x) = \delta_J$, $x \in [z_J, z_{J+1})$, причем $\delta_J^{-1} = e_* \Delta_J$, $J = \overline{0, N-1}$ и $\beta(x) = 0$ при $x \notin [z_0, z_N)$. Условимся, что $\delta_{-1} = \delta_N = 0$.

Построим функцию $\alpha(x) \leq \beta(x)$, сглаживая функцию $\beta(x)$ по следующему правилу. Если $\delta_J < \delta_{J+1}$, то на отрезке $[z_{J+1}, z_{J+1} + \Delta_{J+1}/3]$ функция $\alpha(x)$ определяется так:

$$\alpha(x) = \delta_J + (\delta_{J+1} - \delta_J) \varpi\left(\frac{x - z_{J+1}}{\Delta_{J+1}/3}\right).$$

Если же $\delta_J > \delta_{J+1}$, то на отрезке $[z_{J+1} - \Delta_J/3, z_{J+1}]$ полагаем

$$\alpha(x) = \delta_J - (\delta_J - \delta_{J+1}) \varpi\left(\frac{x - z_{J+1} + \Delta_J/3}{\Delta_J/3}\right).$$

В оставшихся точках полагаем $\alpha(x) = \beta(x)$.

Установим оценки интеграла $\int_{z_J}^{z_{J+1}} \alpha(t) dt$, $J = \overline{0, N-1}$:

$$\frac{1}{3e_*} = \frac{\delta_J \Delta_J}{3} = \int_{z_J + \Delta_J/3}^{z_J + 2\Delta_J/3} \delta_J dt \leq \int_{z_J}^{z_{J+1}} \alpha(t) dt \leq \int_{z_J}^{z_{J+1}} \delta_J dt = \delta_J \Delta_J = \frac{1}{e_*}. \quad (6.4)$$

В силу (6.2) производные функции $\alpha(x)$ подчиняются оценкам

$$|\alpha^{(j)}(x)| \leq \frac{a_j \delta_J}{\Delta_J^j} = \frac{a_j}{e_* \Delta_J^{j+1}}, \quad a_j = 3^j \hat{a}_j, \quad (6.5)$$

при $x \in [z_J, z_{J+1}]$, $J = \overline{0, N-1}$, $j \in \mathbb{N}$.

Определим дифференциальные полиномы $P_j(\alpha)$ от гладкой функции $\alpha(x)$ условиями $P_0(\alpha) = 1$, $P_j(\alpha) = (D + \alpha)P_{j-1}$. Тогда для $j = \overline{1, \infty}$ имеем

$$P_j(\alpha) = (D + \alpha)^{j-1} \alpha = \sum_{l=1}^j A_{lj}^{j_1 j_2 \dots j_l} \prod_{j_1 + 2j_2 + \dots + lj_l = j} \alpha^{j_1} (\alpha')^{j_2} \dots (\alpha^{(l-1)})^{j_l}, \quad (6.6)$$

где $A_{lj}^{j_1 j_2 \dots j_l}$ – целые неотрицательные числа.

Положим

$$A_j = \sum_{l=1}^j A_{lj}^{j_1 j_2 \dots j_l} \prod_{j_1 + 2j_2 + \dots + lj_l = j} a_0^{j_1} a_1^{j_2} \dots a_{l-1}^{j_l}; \quad (6.7)$$

очевидно, $A_{j+1} \geq A_j$.

Следовательно, согласно (6.5) полиномы $P_j(\alpha)$ удовлетворяют неравенствам

$$|P_j(\alpha)| \leq \sum_{l=1}^j A_{lj}^{j_1 j_2 \dots j_l} \prod_{j_1 + 2j_2 + \dots + lj_l = j} \left(\frac{a_0}{e_* \Delta_J}\right)^{j_1} \dots \left(\frac{a_{l-1}}{e_* \Delta_J^l}\right)^{j_l} \leq \frac{A_j}{e_* \Delta_J^j}, \quad (6.8)$$

$$x \in [z_J, z_{J+1}], \quad J = \overline{0, N-1}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Определим неубывающую гладкую срезающую функцию $\xi(x_s)$ на $\mathbb{R}$ условиями

$$\xi(x_s) = \begin{cases} 0, & x_s \leq z_0, \\ \xi(z_1) \varpi\left(\frac{x - z_0}{z_1 - z_0}\right), & z_0 \leq x_s \leq z_1, \\ \exp\left(-\int_{x_s}^{z_N} \alpha(t) dt\right), & z_1 \leq x_s \leq z_N, \\ 1, & x_s \geq z_N. \end{cases}$$

На промежутке $[z_1, z_N]$, очевидно, $\xi' = \alpha\xi$ и в силу (6.4) справедливы неравенства

$$\exp\left(\frac{1}{3e_*}\right) \leq \frac{\xi(z_{J+1})}{\xi(z_J)} \leq \exp\left(\frac{1}{e_*}\right), \quad J = \overline{1, N-1}. \quad (6.9)$$

Перемножая эти неравенства, находим, что $\exp\left(\frac{N-1}{3e_*}\right) \leq \frac{\xi(z_N)}{\xi(z_1)}$ и

$$\xi(z_1) \leq \exp\left(-\frac{N-1}{3e_*}\right). \quad (6.10)$$

Воспользовавшись равенствами (6.3), нетрудно доказать, что на промежутке $[z_1, z_N]$ справедливы соотношения

$$\xi^{(j)} = \xi P_j(\alpha),$$

$$(\xi^{q_s})^{(j)} = \xi^{q_s} \sum_{l=1}^j B_{lj}^{j_0 j_1 \dots j_l} \prod_{\substack{j_1 + \dots + j_l = j \\ j_0 + j_1 + \dots + j_l = q_s}} (P_0(\alpha))^{j_0} (P_1(\alpha))^{j_1} \dots (P_l(\alpha))^{j_l},$$

$j = \overline{1, q_s}$. Далее, используя (6.8), выводим

$$|\xi^{(j)}(x_s)| \leq \xi(x_s) \frac{A_j}{e_* \Delta_j^j}, \quad |(\xi^{q_s})^{(j)}(x_s)| \leq \xi^{q_s}(x_s) \frac{\tilde{A}_j}{e_* \Delta_j^j}, \quad (6.11)$$

где $x_s \in [z_J, z_{J+1}]$, $J = \overline{1, N-1}$, $j = \overline{1, q_s}$.

Оценим производные $\xi^{(j)}$, $(\xi^{q_s})^{(j)}$, $j = \overline{1, q_s}$, на отрезке $[z_0, z_1]$. В силу (6.2), (6.3) имеем

$$|\xi^{(j)}(x_s)| \leq \xi(z_1) \frac{\hat{a}_j}{\Delta_0^j}, \quad |(\xi^{q_s})^{(j)}(x_s)| \leq \xi^{q_s}(z_1) \frac{B_j}{\Delta_0^j}, \quad (6.12)$$

где $x_s \in [z_0, z_1]$, $j = \overline{1, q_s}$.

Из определения $\lambda(r_1, r_2)$ (0.12) для функции $g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$ следуют неравенства

$$\begin{aligned} \|g\|_{P_s, \Omega_{r_1}^{r_2}}^{p_s} &= \int_{\Omega_{r_1}^{r_2}} |g|^{p_s} d\mathbf{x} \leq \int_{\Omega_{r_1}^{r_2}} |g|^{p_1} d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{r_1}^{r_2}} |g|^{p_n} d\mathbf{x} \\ &\leq \lambda_1^{-p_1} \|\{g\}_1\|_{p_1, \Omega_{r_1}^{r_2}}^{p_1} + \lambda_n^{-p_n} \|\{g\}_n\|_{p_n, \Omega_{r_1}^{r_2}}^{p_n} \leq \lambda^{-1} (\|\{g\}_1\|_{p_1, \Omega_{r_1}^{r_2}}^{p_1} + \|\{g\}_n\|_{p_n, \Omega_{r_1}^{r_2}}^{p_n}). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Для $k \in (1, 2)$ в (3.30) можно взять $v = u\xi^{q_s}$; тогда, пользуясь равенством (3.24), получим тождество

$$\frac{k-1}{k} \int_{\Omega} |u|^k \xi^{q_s} \Big|_{\tau=0}^{\tau=t} d\mathbf{x} + \sum_{\alpha=1}^n \int_{D^t} a_{\alpha} ((\{u\}_{\alpha})^2) \{u\}_{\alpha} \{u\xi^{q_s}\}_{\alpha} d\mathbf{x} d\tau = 0. \quad (6.14)$$

Для $k \geq 2$ положим в (3.44) $v = u\xi^{q_s}$; учитывая (3.41), выводим (6.14).

Далее, применяя (0.4), получаем (с учетом того, что $\xi^{q_s} \varphi = 0$)

$$\begin{aligned} & \frac{k-1}{k} \int_{\Omega} |u(t, \mathbf{x})|^k \xi^{q_s}(x_s) d\mathbf{x} + \bar{a} \sum_{\alpha=1}^n \int_{D^t} \xi^{q_s} |\{u\}_{\alpha}|^{p_{\alpha}} d\mathbf{x} d\tau \\ & \leq \hat{a} \int_{D^t} \sum_{j=1}^{m_s} C_{m_s}^j |\{u\}_s|^{p_s-1} |D_{x_s}^{m_s-j} u| |(\xi^{q_s})^{(j)}| d\mathbf{x} d\tau \equiv I^t. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Используя оценки (6.11) и (6.12) и неравенство Юнга, оценим интеграл I^t :

$$\begin{aligned} I^t & \leq \frac{C_1}{e_*} \sum_{J=1}^{N-1} \int_0^t \int_{z_J}^{z_{J+1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{j=1}^{m_s} \frac{\xi^{q_s}}{\Delta_J^j} |\{u\}_s|^{p_s-1} |D_{x_s}^{m_s-j} u| d\mathbf{x}'_s d\tau dx_s \\ & \quad + C_2 \int_0^t \int_{z_0}^{z_1} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \sum_{j=1}^{m_s} \frac{\xi^{q_s}(z_1)}{\Delta_0^j} |\{u\}_s|^{p_s-1} |D_{x_s}^{m_s-j} u| d\mathbf{x}'_s d\tau dx_s \\ & \leq C_3 \sum_{J=1}^{N-1} \int_0^t \int_{z_J}^{z_{J+1}} \xi^{q_s}(x_s) \sum_{j=1}^{m_s} \left(\mu \|\{u\}_s\|_{p_s, \mathbb{R}^{n-1}}^{p_s} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{e_*^{p_s} \mu^{p_s-1}} \|D_{x_s}^{m_s-j} u\|_{p_s, \mathbb{R}^{n-1}}^{p_s} \frac{1}{\Delta_J^{jp_s}} \right) d\tau dx_s \\ & \quad + C_4 \xi^{q_s}(z_1) \int_0^t \int_{z_0}^{z_1} \sum_{j=1}^{m_s} \left(\|\{u\}_s\|_{p_s, \mathbb{R}^{n-1}}^{p_s} + \|D_{x_s}^{m_s-j} u\|_{p_s, \mathbb{R}^{n-1}}^{p_s} \frac{1}{\Delta_0^{jp_s}} \right) d\tau dx_s. \end{aligned}$$

Далее, применяя неравенство (5.2), для $J = \overline{0, N-1}$, $j = \overline{1, m_s}$ получим оценки

$$\|D_{x_s}^{m_s-j} u\|_{p_s, \Pi_{z_J}^{z_{J+1}}}^{p_s} \frac{1}{\Delta_J^{jp_s}} \leq \|\{u\}_s\|_{p_s, \Pi_{z_J}^{z_{J+1}}}^{p_s} + \frac{G_m \|u\|_{p_s, \Pi_{z_J}^{z_{J+1}}}^{p_s}}{\Delta_J^{q_s}}. \quad (6.16)$$

Применяя определение λ -последовательности (0.11) и оценки (6.13), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\|u\|_{p_s, \Pi_{z_J}^{z_{J+1}}}^{p_s}}{\Delta_J^{q_s}} & \leq \theta \lambda(z_J, z_{J+1}) \|u\|_{p_s, \Pi_{z_J}^{z_{J+1}}}^{p_s} \leq \theta (\|\{u\}_1\|_{p_1, \Pi_{z_J}^{z_{J+1}}}^{p_1} + \|\{u\}_n\|_{p_n, \Pi_{z_J}^{z_{J+1}}}^{p_n}), \\ J & = \overline{0, \infty}. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Соединив (6.17) с (6.16), выводим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta_J^{jp_s}} \|D_{x_s}^{m_s-j} u\|_{p_s, \Pi_{z_J}^{z_{J+1}}}^{p_s} & \leq \|\{u\}_s\|_{p_s, \Pi_{z_J}^{z_{J+1}}}^{p_s} + \theta G_m (\|\{u\}_1\|_{p_1, \Pi_{z_J}^{z_{J+1}}}^{p_1} + \|\{u\}_n\|_{p_n, \Pi_{z_J}^{z_{J+1}}}^{p_n}) \\ & \leq C_5 \sum_{\alpha=1}^n \|\{u\}_{\alpha}\|_{p_{\alpha}, \Pi_{z_J}^{z_{J+1}}}^{p_{\alpha}}, \quad J = \overline{0, N-1}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Из (6.18) в силу (6.9) для $J = \overline{1, N-1}$ следует

$$\begin{aligned} & \int_{z_J}^{z_{J+1}} \|D_{x_s}^{m_s-j} u\|_{p_s, \mathbb{R}^{n-1}}^{p_s} \frac{\xi^{q_s}(x_s)}{\Delta_J^{jp_s}} dx_s \\ & \leq C_5 \exp\left(\frac{q_s}{e_*}\right) \int_{z_J}^{z_{J+1}} \xi^{q_s}(x_s) \sum_{\alpha=1}^n \|\{u\}_{\alpha}\|_{p_{\alpha}, \mathbb{R}^{n-1}}^{p_{\alpha}} dx_s. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Применив (6.18), (6.19) к оценке I^t и выбирая $\mu = 1/e_*$, получим

$$\begin{aligned} I^t &\leq \frac{1}{e_*} C_6 \exp\left(\frac{q_s}{e_*}\right) \int_0^t \int_{z_1}^{z_N} \xi^{q_s} \sum_{\alpha=1}^n \|\{u\}_\alpha\|_{p_\alpha, \mathbb{R}^{n-1}}^{p_\alpha} d\tau dx_s \\ &\quad + C_7 \xi^{q_s}(z_1) \int_0^t \int_{z_0}^{z_1} \sum_{\alpha=1}^n \|\{u\}_\alpha\|_{p_\alpha, \mathbb{R}^{n-1}}^{p_\alpha} d\tau dx_s. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Соединяя (6.15) с (6.20), имеем

$$\begin{aligned} &\frac{k-1}{k} \int_{\Omega} |u(t, \mathbf{x})|^k \xi^{q_s}(x_s) d\mathbf{x} + \bar{a} \sum_{\alpha=1}^n \int_{D^t} \xi^{q_s} |\{u\}_\alpha|^{p_\alpha} d\mathbf{x} d\tau \\ &\leq \frac{1}{e_*} C_6 \exp\left(\frac{q_s}{e_*}\right) \int_0^t \int_{\Omega_{z_1}^{z_N}} \xi^{q_s} \sum_{\alpha=1}^n |\{u\}_\alpha|^{p_\alpha} d\tau d\mathbf{x} \\ &\quad + C_7 \xi^{q_s}(z_1) \int_0^t \int_{\Omega_{z_0}^{z_1}} \sum_{\alpha=1}^n |\{u\}_\alpha|^{p_\alpha} d\tau d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Выбирая e_* так, чтобы выполнялось неравенство $C_6 \exp(q_s/e_*) < \bar{a}e_*$, полагаем

$$\frac{k-1}{k} \int_{\Omega_{z_N}} |u(t, \mathbf{x})|^k d\mathbf{x} \leq C_7 \xi^{q_s}(z_1) \int_0^t \int_{\Omega_{z_0}^{z_1}} \sum_{\alpha=1}^n |\{u\}_\alpha|^{p_\alpha} d\tau d\mathbf{x}. \quad (6.21)$$

Применяя к последнему неравенству (6.10) и (1.6), выводим

$$\|u(t)\|_{k, \Omega_{z_N}}^k \leq C_8 \exp\left(\frac{-Nq_s}{3e_*}\right) \|\varphi\|_k^k. \quad (6.22)$$

Обозначив $\kappa = q_s/(3e_*k)$, получим искомую оценку (0.13).

Отметим, что при $N = 0, 1$ оценка (0.13) также имеет место. Она следует из неравенства (1.6) и получается подбором постоянной $\overline{\mathcal{M}}$.

Теорема 2 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Выберем произвольное целое неотрицательное число N . Согласно теореме 2, обозначив $\varepsilon(N) = \overline{\mathcal{M}}^k \exp(-k\kappa N) \|\varphi\|_k^k$, имеем соотношение

$$\|u(t)\|_k^k \leq \|u(t)\|_{k, \Omega_{z_N}}^k + \varepsilon(N), \quad t \geq 0.$$

Из определения (0.14) последовательности $\mu_1(N)$ следует, что

$$\|u(t)\|_k^k \leq (\mu_1^{-p_1}(N) \|\{u\}_1\|_{p_1, \Omega_{z_N}}^{p_1})^{k/p_1} + \varepsilon(N), \quad t \geq 0. \quad (6.23)$$

Обозначим через t_N точку интервала $[0, \infty)$ такую, что $\mathcal{E}(t_N) = \|u(t_N)\|_k^k = \varepsilon(N)$. В случае, если $\mathcal{E}(t) > \varepsilon(N)$ при любом $t \geq 0$, считаем, что $t_N = \infty$. Очевидно, для $t \in [0, t_N)$ справедливо неравенство $\mathcal{E}(t) > \varepsilon(N)$; тогда соотношение (6.23) можно переписать в виде

$$(\mathcal{E}(t) - \varepsilon(N))^{p_1/k} \leq \mu_1^{-p_1}(N) \sum_{\alpha=1}^n \|\{u\}_\alpha\|_{p_\alpha, \Omega_{z_N}}^{p_\alpha}, \quad t \in [0, t_N). \quad (6.24)$$

Соединяя (1.7) с (6.24), выводим соотношение

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} \leq -\frac{k\bar{a}}{k-1}\mu_1^{p_1}(N)(\mathcal{E}(t) - \varepsilon(N))^{p_1/k}, \quad t \in [0, t_N]. \quad (6.25)$$

Решая дифференциальное неравенство, получаем

$$(\mathcal{E}(t) - \varepsilon(N))^{(p_1-k)/k} \leq \frac{C_1}{t\mu_1^{p_1}(N)}.$$

Подставив в последнее неравенство значение $\varepsilon(N)$, выводим

$$\mathcal{E}(t) \leq C_2(t\mu_1^{p_1}(N))^{-k/(p_1-k)} + \overline{\mathcal{M}}^k \exp(-k\kappa N) \|\varphi\|_k^k. \quad (6.26)$$

Отметим, что для $t \in [t_N; \infty)$ оценка (6.26) также справедлива.

Далее воспользуемся определением (0.17) функции $N(t)$; в итоге получаем

$$\mathcal{E}(t) \leq C_3(t\mu_1^{p_1}(N(t)))^{-k/(p_1-k)}, \quad t > 0.$$

Таким образом, установлено неравенство (0.18).

Теорема 3 доказана.

§ 7. Примеры

ЛЕММА 8. *Рассмотрим прямоугольник $P_{a,h}^{b+} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x < b, 0 < y < h\}$ и функцию $g(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, равную нулю на отрезке $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, y = h\}$. При $p \geq 1, m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство Фридрихса–Стеклова*

$$\|g\|_{p, P_{a,h}^{b+}} \leq h^m \|D_y^m g\|_{p, P_{a,h}^{b+}}. \quad (7.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу того, что $g(x, h) = 0$ при $a \leq x \leq b$, из формулы Ньютона–Лейбница следует неравенство

$$|g(x, y)| \leq \int_0^h |D_y g(x, y)| dy. \quad (7.2)$$

Применив это неравенство $m-1$ раз, получим

$$|g(x, y)| \leq h^{m-1} \int_0^h |D_y^m g(x, y)| dy. \quad (7.3)$$

Используя неравенство Гёльдера, оценим интеграл

$$\int_0^h |D_y^m g(x, y)| dy \leq h^{(p-1)/p} \|D_y^m g(x)\|_{p, (0, h)};$$

тогда неравенство (7.3) можем записать в виде

$$|g(x, y)| \leq h^{m-1/p} \|D_y^m g(x)\|_{p, (0, h)}, \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq h. \quad (7.4)$$

Из последнего неравенства выводим (7.1).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *П-последовательность $\{z_J\}_{J=0}^\infty$ функции $f(x)$, удовлетворяющей условию (0.24), является λ -последовательностью для области $\Omega(f)[s]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем целое $J \geq 0$. Обозначим через $\widehat{z}_J$ любую точку отрезка $[z_J, z_{J+1}]$ такую, что $\inf_{[z_J, z_{J+1}]} f(x) = f(\widehat{z}_J)$. Применяя условие (0.24), находим вблизи $\widehat{z}_J$ точку $z_J^* \in [z_J, z_{J+1}]$ такую, что

$$f(z_J^*) \leq \omega f(\widehat{z}_J). \quad (7.5)$$

Из определения П-последовательности (0.23) следуют неравенства

$$\Delta_J^{q_s} \leq \inf_{[z_J, z_{J+1}]} f^{[q_n, q_1]}(x) \leq f^{[q_n, q_1]}(z_J^*), \quad (7.6)$$

$$f^{[q_n, q_1]}(\widehat{z}_J) \leq \Delta_J^{q_s}. \quad (7.7)$$

Соединяя (7.6) и (7.5), выводим

$$\Delta_J^{q_s} \leq \omega^{q_1} f^{[q_n, q_1]}(\widehat{z}_J). \quad (7.8)$$

Используя (7.6), из неравенства (0.24) при $x = z_J^*$ находим, что

$$\sup\{f(z) \mid z \in [z_J^* - \Delta_J, z_J^* + \Delta_J]\} \leq \omega f(z_J^*).$$

В силу включений $[z_J, z_{J+1}] \subset [z_J^* - \Delta_J, z_J^* + \Delta_J]$, применяя (7.5), устанавливаем справедливость неравенств

$$f(\widehat{z}_J) \leq f(x) \leq \omega f(z_J^*) \leq \omega^2 f(\widehat{z}_J), \quad x \in [z_J, z_{J+1}]. \quad (7.9)$$

Введем обозначения

$$P_{a,h}^b = \{(x_1, x_s) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x_s < b, |x_1| < h\},$$

$$P_{a,h}^{b\pm} = \{(x_1, x_s) \in \mathbb{R}^2 \mid a < x_s < b, 0 < \pm x_1 < h\}.$$

Положим $h = \sup_{[z_J, z_{J+1}]} f(x)$. Если $f(\widehat{z}_J) \geq 1$, то, воспользовавшись неравенством (7.1) при $p = p_1$ для прямоугольника $P_{z_J, h}^{z_{J+1}^+}$ и функции $g \in C_0^\infty(\Omega(f))$, выводим

$$\|g(\mathbf{x}_{s1}'')\|_{p_1, P_{z_J, h}^{z_{J+1}^+}} \leq h^{m_1} \| \{g(\mathbf{x}_{s1}'')\}_1 \|_{p_1, P_{z_J, h}^{z_{J+1}^+}},$$

где $\mathbf{x}_{s1}'' = (x_2, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^{n-2}$. Применив (7.9), выводим

$$\|g(\mathbf{x}_{s1}'')\|_{p_1, P_{z_J, h}^{z_{J+1}^+}}^{p_1} \leq (\omega^2 f(\widehat{z}_J))^{q_1} \| \{g(\mathbf{x}_{s1}'')\}_1 \|_{p_1, P_{z_J, h}^{z_{J+1}^+}}^{p_1}.$$

Установим аналогичное неравенство для прямоугольника $P_{z_J, h}^{z_{J+1}^-}$, сложим эти два неравенства, проинтегрировав их по $\mathbf{x}_{s1}'' \in \mathbb{R}^{n-2}$ и применив (7.7); получим соотношение

$$\|g\|_{p_1, \Omega_{z_J}^{z_{J+1}}(f)[s]}^{p_1} \leq \omega^{2q_1} \Delta_J^{q_s} \| \{g\}_1 \|_{p_1, \Omega_{z_J}^{z_{J+1}}(f)[s]}^{p_1}.$$

Из него следует оценка

$$1 \leq \omega^{2q_1} \lambda_1^{p_1}(z_J, z_{J+1}; \Omega(f)[s]) \Delta_J^{q_s}.$$

Для случая $f(\widehat{z}_J) < 1$, применив неравенство (7.1) при $p = p_n$, аналогичным образом выводим

$$1 \leq \omega^{2q_n} \lambda_n^{p_n} (z_J, z_{J+1}; \Omega(f)[s]) \Delta_J^{q_s}.$$

Из последних двух неравенств следует (0.11) с $\theta = \omega^{2\max\{q_1, q_n\}}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть выполнено условие (0.7), $\Omega(f)[s]$ – область вращения с функцией $f(x)$, удовлетворяющей условию (0.24). Тогда найдутся положительные числа κ , $\widetilde{M}$ и решение $u(t, \mathbf{x})$ задачи (0.1)–(0.3) в цилиндрической области $D(f) = (0, \infty) \times \Omega(f)[s]$ такие, что при всех $t \geq 0$, $r \geq 1$ справедлива оценка (0.25).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{z_J\}_{J=0}^\infty$ – это П-последовательность функции f . Из (7.6) следуют соотношения

$$\int_{z_J}^{z_{J+1}} \frac{dx}{f^{[q_n, q_1]/q_s}(x)} \leq \frac{z_{J+1} - z_J}{\inf_{[z_J, z_{J+1}]} f^{[q_n, q_1]/q_s}(x)} \leq 1, \quad J = \overline{0, \infty}.$$

Суммируя их по $J = \overline{0, N}$, выводим

$$\int_1^{z_{N+1}} \frac{dx}{f^{[q_n, q_1]/q_s}(x)} \leq N + 1, \quad N \geq 0. \quad (7.10)$$

Пусть $r \in [z_N, z_{N+1})$; согласно (7.10) получим

$$\int_1^r \frac{dx}{f^{[q_n, q_1]/q_s}(x)} \leq \int_1^{z_{N+1}} \frac{dx}{f^{[q_n, q_1]/q_s}(x)} \leq N + 1. \quad (7.11)$$

Соединяя (7.11), (0.13), выводим оценку (0.25).

Пусть $\mathcal{P}(\rho, z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid z \leq x < z + \rho, 0 < y < \rho^{[q_s/q_n, q_s/q_1]}\}$ – прямоугольник со стороной ρ и левой нижней вершиной в точке z оси абсцисс. Для положительной функции $f(x)$, $x > 0$, через $\Gamma_1^r(f)$ будем обозначать криволинейную трапецию:

$$\Gamma_1^r(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x < r, 0 < y < f(x)\}.$$

Через $\rho_*(r)$ обозначим сторону наибольшего прямоугольника $\mathcal{P}(\rho_*, z_*)$, содержащегося в $\Gamma_1^r(f)$.

Определим монотонно возрастающие функции:

$$G(r) = (\text{mes } \Omega^r)^{(p_1-k)/k} \rho_*^{q_s}(r), \quad g(r) = G^{1/(p_1-k)}(r), \quad r \geq 1, \quad (7.12)$$

$$r(t): \quad \int_1^r \frac{dx}{f^{[q_n, q_1]/q_s}(x)} = \frac{\ln t}{\kappa(p_1 - k)}, \quad t \geq 1. \quad (7.13)$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть выполнено условие (0.7), $\Omega(f)[s]$ – область вращения с функцией $f(x)$, удовлетворяющей условию (0.24). Тогда существуют положительное число $\widetilde{M}$ и решение $u(t, \mathbf{x})$ задачи (0.1)–(0.3) в цилиндрической области $D(f) = (0, \infty) \times \Omega(f)[s]$ такие, что справедлива оценка (0.28). Кроме того, если дополнительно выполнены условия (0.26), (0.29), то функция $\tilde{g}(t)$ растет медленнее функции t^γ для любого $\gamma > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим монотонно невозрастающую последовательность $\lambda(N)$:

$$\lambda(N) = \min\{\lambda(0, z_0), \lambda(z_0, z_1), \dots, \lambda(z_{N-1}, z_N)\}, \quad N = \overline{0, \infty}. \quad (7.14)$$

Положим $\delta(N) = \max_{J=\overline{0, N-1}} \Delta_J$, $N \in \mathbb{N}$. В силу того, что Π -последовательность функции f является λ -последовательностью для области $\Omega(f)[s]$, согласно (0.11) имеем

$$\rho_*^{q_s}(z_N) \geq \delta^{q_s}(N) = \max_{J=\overline{0, N-1}} \Delta_J^{q_s} \geq \frac{1}{\theta \min_{J=\overline{0, N-1}} \lambda(z_J, z_{J+1})}.$$

Можно подобрать ϵ , $0 < \epsilon < 1$ такое, что

$$\rho_*^{q_s}(z_N) \geq \delta^{q_s}(N) \geq \delta^{q_s}(1) \geq \frac{\epsilon}{\theta \lambda(0, z_0)}, \quad N \in \mathbb{N}.$$

В итоге установлено неравенство

$$\lambda(N) = \min_{J=\overline{0, N-1}} \{\lambda(0, z_0), \lambda(z_J, z_{J+1})\} \geq \frac{\epsilon}{\theta \delta^{q_s}(N)} \geq \frac{\beta}{\rho_*^{q_s}(z_N)}, \quad N \in \mathbb{N}. \quad (7.15)$$

Поскольку $\lambda(N) > 0$, $N = \overline{0, \infty}$, то из определения (0.11) следует неравенство

$$\lambda(N) \|g\|_{p_1, \Omega^{z_N}}^{p_1} \leq \|\{g\}_1\|_{p_1, \Omega^{z_N}}^{p_1}, \quad g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \quad N \geq 0.$$

Применяя неравенство Гёльдера для $g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega)$ и $N \geq 0$, выводим соотношения

$$\|g\|_{k, \Omega^{z_N}}^{p_1} \leq \|g\|_{p_1, \Omega^{z_N}}^{p_1} (\text{mes } \Omega^{z_N})^{(p_1-k)/k} \leq \lambda^{-1}(N) (\text{mes } \Omega^{z_N})^{(p_1-k)/k} \|\{g\}_1\|_{p_1, \Omega^{z_N}}^{p_1},$$

из которых следует неравенство

$$\mu_1^{-p_1}(N) \leq \lambda^{-1}(N) (\text{mes } \Omega^{z_N})^{(p_1-k)/k}, \quad g(\mathbf{x}) \in C_0^\infty(\Omega), \quad N \geq 0. \quad (7.16)$$

Далее, из (7.16), (7.15) следует оценка

$$\mu_1^{-p_1}(N) \leq \gamma \rho_*^{q_s}(z_N) (\text{mes } \Omega^{z_N})^{(p_1-k)/k} = \gamma G(z_N), \quad N \in \mathbb{N}. \quad (7.17)$$

Пусть $r \in [z_N, z_{N+1})$; тогда из (7.17) получаем

$$\mu_1^{-p_1}(N) \leq \gamma (\text{mes } \Omega^r)^{(p_1-k)/k} \rho_*^{q_s}(r) = \gamma G(r). \quad (7.18)$$

Зафиксируем

$$t \geq \exp\left(\kappa(p_1 - k) \int_1^{z_1} f^{-[q_n, q_1]/q_s}(x) dx\right) = t_1$$

и положим $r = r(t)$. Подставляя (7.18), (7.11) в (6.26) и пользуясь определением (7.13) функции $r(t)$, получаем соотношения

$$\mathcal{E}(t) \leq C_3 \exp\left(-\kappa k \int_1^{r(t)} \frac{dx}{f^{[q_n, q_1]/q_s}(x)}\right) + C_4 g^k(r(t)) t^{-k/(p_1-k)} \leq C_5 \tilde{g}^k(t) t^{-k/(p_1-k)},$$

откуда следует неравенство (0.28) с функцией $\tilde{g}(t) = g(r(t))$.

Покажем, что функция $\tilde{g}(t)$ растет медленнее любой степенной функции. Из условия (0.26) следует, что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует r_0 такое, что

$$\varepsilon \kappa(p_1 - k) \int_1^r \frac{dx}{f^{[q_n, q_1]/q_s}(x)} > \ln r, \quad r \geq r_0.$$

Тогда из определения (7.13) функции $r(t)$ следует, что справедливо неравенство

$$r(t) < t^\varepsilon, \quad t \geq t_0. \quad (7.19)$$

Далее, из определения (7.12), применяя формулу

$$\text{mes } \Omega^r(f) = c_n \int_0^r f^{n-1}(x) dx, \quad (7.20)$$

получаем неравенства

$$\begin{aligned} G(r) &= C_6 \rho_*^{q_s}(r) \left(\int_0^r f^{n-1}(x) dx \right)^{(p_1-k)/k} \\ &\leq C_6 r^{q_s+(p_1-k)/k} \max_{[0,r]} f^{(n-1)(p_1-k)/k}(x), \quad r \geq 1. \end{aligned}$$

Применяя условие (0.29), выводим

$$G(r) \leq C_7 (r_1) r^{q_s+(p_1-k)(1+(n-1)b)/k}, \quad r \geq r_1. \quad (7.21)$$

Соединяя (7.19) и (7.21), устанавливаем, что функция $g(t)$ растет медленнее любой степени t .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для областей вращения с функцией f , удовлетворяющей условиям (0.24), (0.27), справедливо соотношение (0.19).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (7.17), (7.21), выводим

$$\mu_1^{-p_1}(N) \leq C_8 (N_1) z_{N_1}^{C_9}, \quad N \geq N_1. \quad (7.22)$$

В силу условия (0.27) можно зафиксировать любое число $\varepsilon \in (0, 1)$ такое, что

$$f^{[q_n, q_1]/q_s}(x) \leq \varepsilon x, \quad x \geq z_N, \quad N \geq N_0.$$

Тогда, применяя (7.6), получаем

$$\frac{z_{N+1}}{z_N} = \frac{z_N + \Delta_N}{z_N} \leq 1 + \varepsilon, \quad N \geq N_0,$$

следовательно, справедлива оценка

$$z_N \leq (1 + \varepsilon)^{N-N_0} z_{N_0} \leq \exp(\varepsilon(N - N_0)) z_{N_0}, \quad N \geq N_0.$$

Соединяя последнюю оценку с (7.22), выводим

$$\mu_1^{-p_1}(N) \leq C_8 \exp(\varepsilon C_9(N - N_0)) z_{N_0}^{C_9} \leq C_8 \exp(C_9 \varepsilon N) \leq \exp(C_{10} \varepsilon N), \quad N \geq N_2.$$

Таким образом, соотношение (0.19) установлено.

Для монотонно неубывающей функции f , удовлетворяющей условию (0.24), справедливо неравенство

$$\omega^{-1}f(r) \leq \rho_*^{q_s[1/q_n, 1/q_1]}(r) \leq f(r), \quad r \geq r_0 = 1 + f^{[q_n, q_1]/q_s}(1). \quad (7.23)$$

В самом деле, ввиду монотонного неубывания функции $f(x)$ справедливо равенство $f(z_*) = (r - z_*)^{q_s[1/q_n, 1/q_1]} = \rho_*^{q_s[1/q_n, 1/q_1]}(r)$. Согласно (0.24) имеем

$$f(r) = \max_{[z_* - f^{[q_n, q_1]/q_s}(z_*), z_* + f^{[q_n, q_1]/q_s}(z_*)]} f(z) \leq \omega f(z_*),$$

откуда следует левое неравенство (7.23).

В силу (7.12), (7.20), (7.23) функция $G(r)$ может быть определена

$$G(r) = f^{[q_n, q_1]}(r) \left(\int_0^r f^{n-1}(x) dx \right)^{(p_1-k)/k}, \quad r \geq r_0.$$

ПРИМЕР 1. Для функции $f(x) = x^a$, $0 \leq a < q_1/q_s$, $x > 0$, можно определить функции $r(t) = (\ln t)^{1/(1-aq_s/q_1)}$, $t \geq t_0$, $g(r) = r^\chi$, $r \geq r_0$. Тогда оценка (0.28) приобретает вид (0.30).

ПРИМЕР 2. Для функции $f(x) = e$, $0 < x < e$, $f(x) = (x/\ln x)^{q_s/q_1}$, $x \geq e$, имеем $r(t) = \exp(\varsigma(\ln t)^{1/2})$, $t \geq t_0$, $\varsigma > 0$, $g(r) = r^{\sigma+1/k}(\ln r)^{-\sigma}$, $r \geq r_0$. При этом оценка (0.28) принимает вид (0.31).

Список литературы

- [1] Э. Р. Андриянова, Ф. Х. Мукминов, “Стабилизация решения параболического уравнения с двойной нелинейностью”, *Матем. сб.*, **204**:9 (2013), 3–28; англ. пер.: È. R. Andriyanova, F. Kh. Mukminov, “Stabilization of the solution of a doubly nonlinear parabolic equation”, *Sb. Math.*, **204**:9 (2013), 1239–1263.
- [2] Л. М. Кожевникова, Ф. Х. Мукминов, “Оценки скорости стабилизации при $t \rightarrow \infty$ решения первой смешанной задачи для квазилинейной системы параболических уравнений второго порядка”, *Матем. сб.*, **191**:2 (2000), 91–131; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, F. Kh. Mukminov, “Estimates of the stabilization rate as $t \rightarrow \infty$ of solutions of the first mixed problem for a quasilinear system of second-order parabolic equations”, *Sb. Math.*, **191**:2 (2000), 235–273.
- [3] Л. М. Кожевникова, “Стабилизация решения первой смешанной задачи для эволюционного квазиэллиптического уравнения”, *Матем. сб.*, **196**:7 (2005), 67–100; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, “Stabilization of a solution of the first mixed problem for a quasi-elliptic evolution equation”, *Sb. Math.*, **196**:7 (2005), 999–1032.
- [4] Р. Х. Каримов, Л. М. Кожевникова, “Стабилизация решений квазилинейных параболических уравнений второго порядка в областях с некомпактными границами”, *Матем. сб.*, **201**:9 (2010), 3–26; англ. пер.: R. Kh. Karimov, L. M. Kozhevnikova, “Stabilization of solutions of quasilinear second order parabolic equations in domains with non-compact boundaries”, *Sb. Math.*, **201**:9 (2010), 1249–1271.
- [5] С. П. Дегтярев, А. Ф. Тедеев, “ L_1 – L_∞ оценки решения задачи Коши для анизотропного вырождающегося параболического уравнения с двойной нелинейностью и растущими начальными данными”, *Матем. сб.*, **198**:5 (2007), 45–66; англ. пер.: S. P. Degtyarev, A. F. Tedeev, “ L_1 – L_∞ estimates of solutions of the Cauchy problem for an anisotropic degenerate parabolic equation with double non-linearity and growing initial data”, *Sb. Math.*, **198**:5 (2007), 639–660.

- [6] Ж. Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972; пер. с фр.: J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Etudes mathématiques, Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1969, xx+554 pp.
- [7] P. A. Raviart, “Sur la résolution de certaines equations paraboliques non linéaires”, *J. Functional Analysis*, **5**:2 (1970), 299–328.
- [8] H. W. Alt, S. Luckhaus, “Quasilinear elliptic-parabolic differential equations”, *Math. Z.*, **183**:3 (1983), 311–341.
- [9] А. С. Калашников, “Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка”, *УМН*, **42**:2(254) (1987), 135–176; англ. пер.: A. S. Kalashnikov, “Some problems of the qualitative theory of non-linear degenerate second-order parabolic equations”, *Russian Math. Surveys*, **42**:2 (1987), 169–222.
- [10] F. Bernis, “Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains”, *Math. Ann.*, **279**:3 (1988), 373–394.
- [11] O. Grange, F. Mignot, “Sur la résolution d’une équation et d’une inéquation paraboliques non linéaires”, *J. Functional Analysis*, **11**:1 (1972), 77–92.
- [12] M. Bendahmane, K. H. Karlsen, “Nonlinear anisotropic elliptic and parabolic equations in $\mathbb{R}^N$ with advection and lower order terms and locally integrable data”, *Potential Anal.*, **22**:3 (2005), 207–227.
- [13] A. Bamberger, “Étude d’une équation doublement non linéaire”, *J. Functional Analysis*, **24**:2 (1977), 148–155.
- [14] А. В. Иванов, П. З. Мкртычан, “О существовании непрерывных по Гёльдеру обобщенных решений первой краевой задачи для квазилинейных параболических уравнений, допускающих двойное вырождение”, *Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций*. 21, Зап. научн. сем. ЛОМИ, **182**, Изд-во “Наука”, Ленинград. отд., Л., 1990, 5–28; англ. пер.: A. V. Ivanov, P. Z. Mkrtychyan, “Existence of Hölder continuous generalized solutions of the first boundary value problem for quasilinear doubly degenerate parabolic equations”, *J. Soviet Math.*, **62**:3 (1992), 2725–2740.
- [15] А. В. Иванов, “Квазилинейные параболические уравнения, допускающие двойное вырождение”, *Алгебра и анализ*, **4**:6 (1992), 114–130; англ. пер.: A. V. Ivanov, “Quasilinear parabolic equations that admit double degeneration”, *St. Petersburg Math. J.*, **4**:6 (1993), 1153–1168.
- [16] Г. И. Лаптев, “Разрешимость квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойным вырождением”, *Сиб. матем. журн.*, **38**:6 (1997), 1335–1355; англ. пер.: G. I. Laptev, “Solvability of second-order quasilinear parabolic equations with double degeneration”, *Siberian Math. J.*, **38**:6 (1997), 1160–1177.
- [17] Г. И. Лаптев, “Слабые решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью”, *Матем. сб.*, **188**:9 (1997), 83–112; англ. пер.: G. I. Laptev, “Weak solutions of second-order quasilinear parabolic equations with double non-linearity”, *Sb. Math.*, **188**:9 (1997), 1343–1370.
- [18] Г. И. Лаптев, “Эволюционные уравнения с монотонным оператором и функциональной нелинейностью при производной по времени”, *Матем. сб.*, **191**:9 (2000), 43–64; англ. пер.: G. I. Laptev, “Evolution equations with monotone operator and functional non-linearity at the time derivative”, *Sb. Math.*, **191**:9 (2000), 1301–1322.
- [19] Э. Р. Андриянова, Ф. Х. Мукминов, “Оценка снизу скорости убывания решения параболического уравнения с двойной нелинейностью”, *Уфимск. матем. журн.*, **3**:3 (2011), 3–14.
- [20] Л. М. Кожевникова, А. А. Леонтьев, “Оценки решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью”, *Уфимск. матем. журн.*, **3**:4 (2011), 64–85.

- [21] Л. М. Кожевникова, А. А. Леонтьев, “Убывание решения анизотропного параболического уравнения с двойной нелинейностью в неограниченных областях”, *Уфимск. матем. журн.*, **5**:1 (2013), 63–82; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, A. A. Leontiev, “Decay of solution of anisotropic doubly nonlinear parabolic equation in unbounded domains”, *Ufa Math. J.*, **5**:1 (2013), 63–82.
- [22] А. Ф. Тедеев, “Стабилизация решений начально-краевых задач для квазилинейных параболических уравнений”, *Укр. матем. журн.*, **44**:10 (1992), 1441–1450; англ. пер.: A. F. Tedeev, “Stabilization of solutions of initial-boundary problems for quasilinear parabolic equations”, *Ukrainian Math. J.*, **44**:10 (1992), 1325–1334.
- [23] N. D. Alikakos, R. Rostamian, “Gradient estimates for degenerate diffusion equations. II”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **91**:3-4 (1981/1982), 335–346.
- [24] Л. М. Кожевникова, Ф. Х. Мукминов, “Стабилизация решений анизотропного квазилинейного параболического уравнения в неограниченных областях”, *Дифференциальные уравнения и динамические системы*, Сборник статей, Тр. МИАН, **278**, МАИК, М., 2012, 114–128; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, F. Kh. Mukminov, “Stabilization of solutions of an anisotropic quasilinear parabolic equation in unbounded domains”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **278**:1 (2012), 106–120.
- [25] Л. М. Кожевникова, “Стабилизация решений псевдодифференциальных параболических уравнений в неограниченных областях”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:2 (2010), 109–130; англ. пер.: L. M. Kozhevnikova, “Stabilization of solutions of pseudo-differential parabolic equations in unbounded domains”, *Izv. Math.*, **74**:2 (2010), 325–345.
- [26] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980; фр. пер.: V. Trénoguine, *Analyse fonctionnelle*, Traduit Russe Math., Mir, Moscow, 1985, 528 pp.
- [27] О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский, *Интегральные представления функций и теоремы вложения*, Наука, М., 1975; англ. пер.: O. V. Besov, V. P. Il'in, S. M. Nikol'skii, *Integral representations of functions and imbedding theorems*, v. I, II, Scripta Series in Mathematics, V. H. Winston & Sons, Washington, D.C.; Halsted Press [John Wiley & Sons], New York–Toronto, Ont.–London, 1978, 1979, viii+345 pp., viii+311 pp.
- [28] Дж. Сансоне, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, т. 2, ИЛ, М., 1954; пер. с итал.: G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, v. 2, 2nd ed., N. Zanichelli, Bologna, 1949, xvi+475 pp.
- [29] L. Nirenberg, “On elliptic partial differential equations”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (3), **13**:2 (1959), 115–162.

Лариса Михайловна Кожевникова
(Larisa M. Kozhevnikova)

Стерлитамакский филиал Башкирского
государственного университета
E-mail: kosul@mail.ru

Поступила в редакцию
28.04.2013 и 07.10.2013

Алексей Александрович Леонтьев
(Aleksey A. Leontiev)

Стерлитамакский филиал Башкирского
государственного университета
E-mail: alexey_leontiev@inbox.ru