Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. С. Исмагилов, О возмущении спектра, вызванном ограниченным изменением потенциала, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 1, 3–8

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8244>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 12:11:59

УДК 517.984.55

Р. С. Исмагилов

О возмущении спектра, вызванном ограниченным изменением потенциала

Оператор гармонического осциллятора возмущается произвольным ограниченным непрерывным слагаемым. Это приводит к возмущению спектра. Рассматривается отображение, переводящее первое из этих возмущений во второе. Изучается возможность аппроксимации этого отображения при помощи линейного отображения.

Библиография: 2 названия.

Ключевые слова: гармонический осциллятор, спектр, возмущение, оператор Штурма–Лиувилля.

DOI: 10.4213/sm8244

§ 1. Введение

Рассмотрим оператор Штурма–Лиувилля $L_q y = -y'' + qy$ на полуоси $[0, +\infty)$ с граничным условием $y(0) = 0$. Предположим, что функция q вещественна, непрерывна и $q(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow +\infty$. Более точно, речь идет о замыкании оператора в $L_2(0, \infty)$, заданного указанным выражением на функциях класса $C^2[0, \infty)$ таких, что $y(0) = 0$ и $y(x) = 0$ для достаточно больших x . Оператор L имеет дискретный спектр $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \lambda_k \rightarrow +\infty$.

Далее, возьмем ограниченную непрерывную функцию $f(x)$, $x \geq 0$. Рассмотрим оператор L_{q+f} (с тем же граничным условием), его спектр $\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \dots$ и последовательность $\Delta_k = \tilde{\lambda}_k - \lambda_k$.

Подчеркнем, что от функции f требуются только непрерывность и ограниченность. Что можно сказать о поведении последовательности Δ_k , опираясь лишь на эту информацию о функции f ? Попытаемся ответить на этот вопрос, взяв в качестве оператора L_q гармонический осциллятор.

Отметим следующее важное для нас обстоятельство: если взять две функции f_1, f_2 указанного вида, удовлетворяющие условию

$$f_2(x) - f_1(x) \rightarrow 0 \quad \text{при } x \rightarrow +\infty,$$

то соответствующие им последовательности $\Delta_{k,1}, \Delta_{k,2}$ удовлетворяют аналогичному условию

$$\Delta_{k,1} - \Delta_{k,2} \rightarrow 0 \quad \text{при } k \rightarrow +\infty$$

(опускаем доказательство этого простого и общеизвестного факта). Таким образом, поведение последовательности Δ_k при $k \rightarrow +\infty$ определяется поведением функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Это обстоятельство можно выразить

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00790а).

следующим образом. Обозначим через $C^b[0, +\infty)$ пространство непрерывных ограниченных функций и через $C_0[0, +\infty)$ – подпространство функций, удовлетворяющих условию $f(x) \rightarrow 0, x \rightarrow +\infty$; аналогичным образом введем пространство l^∞ ограниченных последовательностей $\{a_n\}$ и его подпространство l_0 , выделяемое условием $a_n \rightarrow 0, n \rightarrow +\infty$. Каждой функции $f \in C^b[0, +\infty)$ поставим в соответствие указанную последовательность Δ_k . Из минимаксного принципа следует, что получилось отображение

$$\Phi: C^b[0, +\infty) \rightarrow l^\infty;$$

в силу указанного обстоятельства оно переводит каждый класс смежности $f + C_0[0, +\infty)$ в класс смежности $\Phi(f) + l_0$. Таким образом, определено отображение факторпространств

$$\Phi^\circ: C^b[0, +\infty)/C_0[0, +\infty) \rightarrow l^\infty/l_0.$$

Естественно полагать, что этот переход от пространств $C^b[0, +\infty)$ и l^∞ к их факторпространствам упрощает картину. Нетрудно показать, что если спектр “достаточно разрежен” (если, например, выполнено условие $\lambda_n \simeq n^{3/2+\varepsilon}, \varepsilon > 0$), то указанное отображение линейно; доказательство этого (и даже более общего) утверждения будет дано в § 4. Но уже для гармонического осциллятора (в этом случае потенциалом служит функция x^2 , а спектр состоит из чисел $4n + 3, n \geq 0$) нет очевидного ответа на следующий (лежащий на поверхности) вопрос: линейно ли отображение Φ° ? Мы не сможем ответить на этот вопрос. Однако мы попытаемся “линеаризовать” отображение Φ , насколько это возможно; точная постановка задачи содержится в следующем параграфе.

Подчеркнем, что в этой работе мы ограничимся рассмотрением гармонического осциллятора. Ограниченные изменения потенциала для оператора Штурма–Лиувилля рассматривались в [1].

§ 2. Как линеаризовать отображение?

Пусть дано отображение линейных пространств $\Phi: A \rightarrow B$. Важен случай, когда оно нелинейно. Наша цель – аппроксимировать его линейным отображением. Сейчас мы придадим строгий смысл этому пожеланию.

Пусть даны такие линейные подпространства $A_0 \subset A, B_0 \subset B$, что образ любого класса смежности $a + A_0$ лежит в некотором классе смежности $b + B_0$ (ясно, что в качестве вектора b можно взять $\Phi(a)$). Таким образом, получили отображение факторпространств

$$\Phi^\circ: A/A_0 \rightarrow B/B_0.$$

Пусть это отображение оказалось линейным; оно и было нашей целью. Условимся говорить, что пара подпространств A_0, B_0 *линеаризует* отображение Φ . Отображение Φ° назовем линеаризацией отображения Φ .

В случае, когда A и B – банаховы пространства, будем считать, что все упомянутые отображение непрерывны.

Приведем еще одно, более простое определение линеаризации отображения $\Phi: A \rightarrow B$. Пусть даны линейное отображение $\Psi: A \rightarrow B$ и линейное подпространство $B_0 \subset B$, причем $\Phi(a) - \Psi(a) \in B_0$ для любого $a \in A$. В этом случае условимся говорить, что подпространство B_0 линеаризует отображение Φ , и, как и выше, назовем Ψ *линеаризацией отображения* Φ .

В дальнейшем мы будем пользоваться именно этим (вторым) определением линеаризации. Не вникая подробно в вопрос о связи двух определений, заметим лишь, что если упомянутые подпространства дополняемы, то указанные определения линеаризации по существу совпадают.

Применяя второе определение линеаризации отображения Φ , будем пользоваться следующим удобным способом выделения линейного подпространства $B_0 \subset B$. Пусть в B задана функция $b \mapsto |b|$, которая обладает обычными свойствами нормы, но может принимать также значение ∞ ; назовем эту функцию “*нормой*” (в кавычках). Тогда множество векторов таких, что $|b| < +\infty$, и есть нужное подпространство B_0 .

В § 3 применим сказанное к отображению $\Phi: C^b[0, +\infty) \rightarrow l^\infty$, описанному в § 1 (для гармонического осциллятора).

§ 3. Гармонический осциллятор. Гипотеза линейности

Обратимся к оператору $L_q y = -y'' + x^2 y$ (с граничным условием $y(0) = 0$), соответствующему отображению $\Phi: C^b[0, +\infty) \rightarrow l^\infty$ и полученному из него (в § 1) отображению Φ° .

ГИПОТЕЗА. *Отображение $\Phi^\circ: C^b[0, +\infty)/C_0[0, +\infty) \rightarrow l^\infty/l_0$ линейно.*

Используя терминологию из § 2, можно выразить эту гипотезу так: пара $C_0[0, +\infty)$, l_0 линеаризует отображение Φ . (Здесь мы пользуемся первым определением линеаризации отображения.)

Мы не в силах доказать (или опровергнуть) эту гипотезу. Поэтому вынуждены искать какие-либо иные линеаризации (того типа, который описан в § 2). Несколько удобнее воспользоваться вторым определением линеаризации, данным в § 2, другими словами, искать линеаризующее подпространство в l^∞ (а не пару подпространств) и соответствующее линейное отображение Ψ . Опишем пример такого рода.

Введем пространство l_1 , состоящее из ограниченных последовательностей $a = \{a_k\}$, которые удовлетворяют условию

$$\sup_{0 \leq x < 1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \right| < \infty.$$

Ясно, что это подпространство (незамкнутое) пространства l^∞ может быть задано “нормой”, как объяснялось в § 2. Далее, для любого $k = 1, 2, \dots$ введем линейный функционал $f \mapsto R_k(f)$ равенством

$$\begin{aligned} R_k(f) = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{4k+7} f(\sqrt{y}) \left(\frac{4k+7}{y} - 1 \right)^{1/2} dy \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_0^{4k+3} f(\sqrt{y}) \left(\frac{4k+3}{y} - 1 \right)^{1/2} dy, \quad f \in C^b[0, +\infty). \end{aligned} \quad (1)$$

Легко показать, что функционалы R_k положительны (т.е. принимают положительные значения на положительных функциях); это достигается несложным преобразованием интеграла, задающего R_k . Отсюда получается неравенство

$$|R_k(f)| \leq \|f\| = \sup |f(x)|, \quad x \geq 0.$$

ТЕОРЕМА. Если $f \in C^b[0, +\infty)$, то последовательность $\{\Delta_k - R_k(f)\}$ принадлежит пространству l_1 .

Итак, подпространство l_1 линейризует отображение $\Phi: C^b[0, +\infty) \rightarrow l^\infty$ и линейризацией отображения Φ служит отображение $f \mapsto (R_1(f), R_2(f), \dots)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Нам понадобится следующий результат из работы [1]. Пусть A, B – самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, A имеет дискретный спектр $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \lambda_k \rightarrow +\infty$, B ограничен. Пусть $\tilde{\lambda}_1 \leq \tilde{\lambda}_2 \leq \dots$ – спектр оператора $A + B$, $\Delta_k = \tilde{\lambda}_k - \lambda_k$, $w(t) = \text{Tr} \exp(-tA)$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k \exp(-t\lambda_k) = \text{Tr} B \exp(-tA) + O(tw(t)), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (2)$$

Применим эту теорему, взяв в качестве A оператор $L_q y = -y'' + x^2 y$, а в качестве B – умножение на функцию $f(x)$. Тогда $\exp(-tA)$ – это интегральный оператор, ядро которого, обозначаемое через $G(x, y, t)$, называется функцией Грина гармонического оператора. Справедливо равенство

$$G(x, x, t) = (2 \text{sh } 2t)^{-1/2} \left(\exp\left(-\frac{x^2 \text{sh}(t)}{\text{ch}(t)}\right) - \exp\left(-\frac{x^2 \text{ch}(t)}{\text{sh}(t)}\right) \right). \quad (3)$$

Эту формулу можно извлечь из книг по математической физике либо по специальным функциям (например, она следует из формулы (4.9.5) в книге [2]). Итак,

$$\text{Tr} B \exp(-tA) = \int_0^\infty f(x) G(x, x, t) dx.$$

Покажем, что последний интеграл можно представить в виде

$$\int_0^\infty f(x) G(x, x, t) dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty f(x) \exp(-tx^2) dx + O(1) \quad (4)$$

при $0 < t \leq 1$. Необходимые для этой цели вычисления весьма просты, а потому ограничимся краткими описаниями. Сначала произведем интегрирование в левой части равенства (4) по отрезку $[0, 1/t]$, взяв от функции $G(x, x, t)$ только первое записанное в скобках слагаемое из выражения (3) этой функции и записав функцию $\text{sh}(t)/\text{ch}(t)$ в виде $t + O(t^3)$. Остальными слагаемыми можно пренебречь, ибо их сумма есть величина, ограниченная при $0 < t \leq 1$. В итоге получаем соотношение (4).

Преобразуем интеграл, входящий в правую часть соотношения (4), при помощи замены переменной $x \mapsto \sqrt{x}$. Это приведет к произведению функции

$1/(4\sqrt{\pi t})$ и преобразования Лапласа функции $f(\sqrt{x})x^{-1/2}$. Первый из этих множителей есть преобразование Лапласа функции $1/(4\pi)x^{-1/2}$. Таким образом, правая часть равенства (4) есть преобразование Лапласа свертки функций $f(\sqrt{x})x^{-1/2}$ и $1/(4\pi)x^{-1/2}$. Итак, мы пришли к свертке

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^x \frac{f(\sqrt{s})}{\sqrt{s(x-s)}} ds$$

и равенству

$$\text{Tr } B \exp(-tA) = \int_0^\infty \widehat{f}(x) \exp(-tx) dx + O(1). \quad (5)$$

Заметим, что функция $x \mapsto \widehat{f}(x)$ ограничена.

Преобразуем последний интеграл следующим образом (в ходе вычислений пренебрегаем слагаемыми, ограниченными при $0 < t \leq 1$):

- 1) отбросим интеграл по отрезку $[0, 3]$ (ибо он ограничен при $0 < t \leq 1$);
- 2) разобьем оставшийся интеграл на интегралы по отрезкам $[4k+3, 4k+7]$;
- 3) в полученных таким образом интегралах сделаем замену $\exp(-tx)$ на $\exp(-t(4k+3))(1+O(t))$; положим

$$\beta_k = \int_{4k+3}^{4k+7} \widehat{f}(x) dx$$

(последовательность $\{\beta_k\}$ ограничена в силу ограниченности функции $\widehat{f}$).

Отсюда, пренебрегая ограниченными слагаемыми, получаем равенство

$$\text{Tr } B \exp(-tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \exp(-t(4k+3)) + O(1), \quad 0 < t \leq 1. \quad (6)$$

Вернемся к равенству (2). Заметим, что

$$\lambda_k = 4k+3, \quad w(t) = O\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{при } 0 < t \leq 1.$$

Поэтому из равенств (2) и (6) следует, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\Delta_k - \beta_k) \exp(-t(4k+3)) = O(1), \quad 0 < t \leq 1.$$

Отсюда, введя обозначение $\exp(-4t) = x$, приходим к равенству

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\Delta_k - \beta_k) x^k = O(1), \quad \varepsilon \leq x < 1 \quad \text{для некоторого } \varepsilon \in (0, 1).$$

На отрезке $[0, \varepsilon]$ это равенство также выполняется, ибо последовательности Δ_k , $R_k(f)$ ограничены величиной $\|B\| = \sup\{|f(x)|, x \geq 0\}$.

Наконец преобразуем выражение для β_k , используя интегральное представление функции $\widehat{f}$ (путем изменения порядка интегрирования). После простых вычислений получаем, что величина β_k совпадает с величиной $R_k(f)$, заданной формулой (1). Этим доказана теорема.

§ 4. Приложение

Пусть A – самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H с ортонормированным базисом e_n , $n = 1, 2, \dots$, и

$$Ae_n = \lambda_n(A)e_n, \quad \lambda_{n+1}(A) - \lambda_n(A) \uparrow +\infty.$$

Пусть B – ограниченный самосопряженный оператор. Наша цель – оценить величину $\lambda_n(A + B) - \lambda_n(A) - (Be_n, e_n)$. Для этого применим стандартную формулу

$$\lambda_n(A) = -(2\pi i)^{-1} \operatorname{Tr} \int_{C_n} \lambda R_\lambda d\lambda,$$

где C_n – окружность $|\lambda - \lambda_n| = (\lambda_n - \lambda_{n-1})/2$ (она не содержит других точек λ_k). Аналогичным образом выражаем величину $\lambda_n(A + B)$, используя резольвенту

$$(A + B - \lambda I)^{-1} = R_\lambda(I + BR_\lambda)^{-1}.$$

Несложное вычисление приводит к равенству

$$\begin{aligned} & \lambda_n(A + B) - \lambda_n(A) - (Be_n, e_n) \\ &= \sum_{k \neq n} |b_{kn}|^2 (\lambda_n - \lambda_k)^{-1} + (2\pi i)^{-1} \operatorname{Tr} \int_{C_n} R_\lambda (BR_\lambda)^3 (I + BR_\lambda)^{-1} d\lambda, \end{aligned}$$

где $b_{kn} = (Be_k, e_n)$. Наложим на последовательность λ_n ограничение $\lambda_n \simeq n^c$, $c > 0$. Легко доказывается, что сумма, записанная в правой части, мажорируется величиной $Pn^{1-c} \ln n$, а интеграл из правой части не превосходит величины Qn^{3-2c} (здесь P, Q – константы). Таким образом, если $c > 3/2$, то

$$\lambda_n(A + B) - \lambda_n(A) - (Be_n, e_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Это означает (если применить терминологию из § 2), что подпространство l_0 линейаризует отображение $B \mapsto \{\lambda_n(A + B) - \lambda_n(A)\}$ и линейаризацией служит отображение $B \mapsto \{(Be_n, e_n)\}$.

Отсюда вытекает утверждение, высказанное в § 2 (об операторах L_q со спектром $\lambda_n \simeq n^{3/2+\epsilon}$).

Список литературы

- [1] Р. С. Исмагилов, А. Г. Костюченко, “О возмущении спектра дифференциального оператора, порожденном ограниченным изменением потенциала”, *Функц. анализ и его прил.*, **43:3** (2009), 54–64; англ. пер.: R. S. Ismagilov, A. G. Kostyuchenko, “Perturbation of the spectrum of a differential operator under a bounded perturbation of the potential”, *Funct. Anal. Appl.*, **43:3** (2009), 208–216.
- [2] Н. Н. Лебедев, *Специальные функции и их приложения*, 2-е изд., Физматлит, М.-Л., 1963, 358 с.; англ. пер.: N. N. Lebedev, *Special functions and their applications*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1965, xii+308 pp.

Раис Сальманович Исмагилов
(Rais S. Ismagilov)

Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана
E-mail: ismagil@bmstu.ru

Поступила в редакцию
02.05.2013 и 04.09.2013