Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, О Γ -сходимости осциллирующих интегралов с нестандартными условиями коэрцитивности и роста, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 4, 33–68

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8246>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 17:03:57

УДК 517.956.8

В. В. Жиков, С. Е. Пастухова

О Γ -сходимости осциллирующих интегрантов с нестандартными условиями коэрцитивности и роста

Изучается Γ -сходимость семейства интегральных функционалов с интегрантом $f_\varepsilon(x, u, \nabla u)$, осциллирующим по пространственной переменной x при $\varepsilon \rightarrow 0$. Интегранты удовлетворяют двусторонней степенной оценке коэрцитивности и роста с разными показателями. Как следствие, с одним и тем же функционалом могут быть связаны, по крайней мере, две различные вариационные задачи Дирихле. Это обстоятельство называется эффектом Лаврентьева. Введены два варианта Γ -сходимости, отвечающие вариационным задачам первого и второго типов. Для указанного семейства функционалов найдены Γ -пределы обоих типов, они могут не совпадать. Доказано, что Γ -сходимость функционалов сопровождается сходимостью энергий и минимизантов вариационных задач.

Библиография: 23 названия.

Ключевые слова: Γ -сходимость, усреднение, эффект Лаврентьева, Γ -реализующая последовательность, регуляризации сверху и снизу.

DOI: 10.4213/sm8246

§ 1. Введение

Абстрактная теория Γ -сходимости функций, заданных в топологическом пространстве, была введена в работах Э. Де Джорджи и его коллег [1], [2]. Для интегральных функционалов вариационного исчисления

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) dx \quad (1.1)$$

эта теория нашла свою конкретизацию и развитие в работах Э. Де Джорджи, Л. Карбоне, К. Сбордине, А. Брэдиса и др. (см., например, [3], [4]). В. В. Жиковым [5], [6] построена теория Γ -сходимости для выпуклых функционалов, зависящих только от градиента функции, с нестандартными условиями коэрцитивности и роста. Нас будут интересовать интегральные функционалы, зависящие от функции и ее градиента, с быстро осциллирующими по пространственной переменной интегрантами. Полученные результаты о Γ -сходимости имеют приложение к усреднению вариационных задач. Доказано, что Γ -сходимость влечет ожидаемую для этих задач сходимость энергий и минимизантов. При

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-01-00192 А) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3685.2014.1).

этом важно учитывать эффект Лаврентьева, который может здесь наблюдаться. Напомним, что эффект Лаврентьева заключается в том, что с одним и тем же функционалом могут быть связаны, по крайней мере, две различные вариационные задачи Дирихле. Эти задачи различаются выбором множества, по которому берется минимум. В задачах первого типа минимизация идет по всем функциям из естественной области определения функционала, а в задачах второго типа – только по гладким функциям.

Ниже приводятся краткие сведения из абстрактной теории Γ -сходимости. Подробнее с этой теорией можно ознакомиться по книгам [7]–[11].

1.1. Из абстрактной теории Γ -сходимости. Начнем с понятия *топологического предела множеств*. Γ -сходимость функций будет определена как сходимость надграфиков.

Пусть V – метрическое пространство с метрикой ρ , A_ε – последовательность множеств из V .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Множество $A \subset V$ называют *топологическим пределом* множеств A_ε , $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon = A$, если выполнены два условия:

- i) множество A содержит все предельные точки любой последовательности точек $u_\varepsilon \in A_\varepsilon$;
- ii) для любой точки $u \in A$ существует последовательность $u_\varepsilon \in A_\varepsilon$ такая, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon = u$.

Например, если $A_\varepsilon = \{u_\varepsilon\}$ – одноточечные множества, то $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon$ состоит из предельных точек последовательности $\{u_\varepsilon\}$. Если таковых нет, то $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon = \emptyset$. Из определения следует, что множество $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon$ замкнуто. В частности, если $A_\varepsilon = A$, то $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon = \overline{A}$ (черта сверху означает замыкание множества).

Имеет место следующий принцип выбора.

ТЕОРЕМА БОЛЬЦАНО–ВЕЙЕРШТРАССА. *Любая последовательность множеств сепарабельного пространства содержит сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство можно найти в книге [12].

Теперь пусть F – функция (функционал) на V , принимающая значения из расширенной числовой оси $[-\infty, +\infty]$. Напомним, что надграфиком функции F называется множество элементов $(\alpha, u) \in \mathbb{R} \times V$, для которых $\alpha \geq F(u)$. Надграфик обозначается через $\text{epi } F$. Функцию F называют *замкнутой* или *полу-непрерывной снизу*, если ее надграфик замкнут. В обычных терминах замкнутость функции означает

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F(u_\varepsilon) \geq F(u), \quad \text{если } u_\varepsilon \rightarrow u.$$

Так как $\mathbb{R} \times V$ есть метрическое пространство, то можно применить понятие топологического предела к надграфикам. Легко видеть, что предел надграфиков всегда есть надграфик, причем замкнутый.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2. Функция χ есть Γ -предел последовательности функций F_ε на V , если $\text{epi } \chi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{epi } F_\varepsilon$.

Из определения следует, что $\Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon$ есть замкнутая функция.

Перепишем определение 1.2 в более привычных терминах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3. Функция χ есть Γ -предел последовательности функций F_ε на V , если

1) выполнено условие полунепрерывности снизу:

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \chi(u), \quad \text{как только } u_\varepsilon \rightarrow u; \quad (1.2)$$

2) для любого $u \in V$ найдется последовательность $u_\varepsilon \rightarrow u$, называемая Γ -реализующей, для которой

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \chi(u).$$

Из обобщенной теоремы Больцано–Вейерштрасса получаем

ПРИНЦИП ВЫБОРА. Если V сепарабельно, то из всякой последовательности функций можно выбрать Γ -сходящуюся на V подпоследовательность.

Затронем вопрос, связанный с релаксацией. Пусть S – плотное в V множество и функционал F полунепрерывен снизу. Определим релаксационный функционал (или релаксацию) $\bar{F}$ равенством

$$\bar{F}(u) = \inf_{u_n \in S} \lim_{u_n \rightarrow u} F(u_n) \quad \forall u \in V. \quad (1.3)$$

Очевидно, что $\bar{F}$ также полунепрерывен снизу и $F \leq \bar{F}$ на V . Часто имеет место неравенство $F < \bar{F}$, тесно связанное с так называемым эффектом Лаврентьева для вариационных задач. В дальнейшем эти вопросы будут обсуждаться подробнее.

Итак, с последовательностью функционалов F_ε можно связать два предельных объекта: $\Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon$ и $\Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{F}_\varepsilon$.

Теперь рассмотрим функции (или функционалы) на соболевском пространстве $V = W^{1,\alpha}(\Omega)$, $\alpha > 1$, где Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с липшицевой границей. Выделим класс функционалов, подчиненных оценке

$$F(u) \geq c_1 \|\nabla u\|_{L^\alpha(\Omega)}^\alpha - c_0, \quad c_1 > 0, \quad c_0 \geq 0. \quad (1.4)$$

Для предварительного определения Γ -предела наделим пространство V метрикой пространства $L^\alpha = L^\alpha(\Omega)$. Благодаря условию (1.4), L^α -сходимость можно заменить слабой сходимостью в V . В результате получим следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Функция χ есть Γ -предел последовательности функций F_ε на V , если

1) выполнено условие полунепрерывности снизу:

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \chi(u), \quad \text{как только } u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ в } V; \quad (1.5)$$

2) для любого $u \in V$ найдется последовательность $u_\varepsilon \in V$ такая, что

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{в } V, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \chi(u). \quad (1.6)$$

Легко понять, что в классе (1.4) определение 1.4 эквивалентно первоначальному определению Γ -сходимости с L^α -метрикой. Для примера покажем, что (1.2) следует из свойства (1.5). Действительно, взяв $u_\varepsilon \xrightarrow{L^\alpha} u$, рассмотрим два возможных случая. Если $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\alpha} = \infty$, то $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \infty$ в силу оценки (1.4), а значит, свойство (1.2) заведомо выполнено. Если же семейство ∇u_ε ограничено в L^α , то автоматически $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в V и достаточно ссылки на (1.5).

Отметим также, что оценка снизу (1.4) сохраняется при Γ -сходимости. В самом деле, взяв последовательность u_ε из (1.6), имеем

$$\chi(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \stackrel{(1.4)}{\geq} c_1 \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^\alpha(\Omega)}^\alpha - c_0 \geq c_1 \|\nabla u\|_{L^\alpha(\Omega)}^\alpha - c_0,$$

где на последнем шаге использовано свойство слабой полунепрерывности снизу функционала нормы.

Поскольку в классе (1.4) полунепрерывность снизу относительно L^α -сходимости совпадает с полунепрерывностью снизу относительно (секвенциальной) слабой сходимости в $W^{1,\alpha}(\Omega)$, далее мы говорим просто о полунепрерывности снизу.

1.2. Класс нестандартных интегрантов. Определим более точно интересующий нас класс интегральных функционалов вида (1.1). Интегрантами являются каратеодориевы функции $f(x, s, \xi): \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ (с непрерывностью по s, ξ), выпуклые по ξ , для которых выполнены условия:

$$c_1 |\xi|^\alpha \leq f(x, s, \xi) \leq c_0 + c_2 |\xi|^\beta, \quad c_0 \geq 0, \quad c_1, c_2 > 0, \quad 1 < \alpha \leq \beta < \infty; \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} f(x, s', \xi) - f(x, s, \xi) &\leq \sigma(|s - s'|) f(x, s, \xi), \\ \sigma(t): [0, \infty) &\rightarrow [0, m] \text{ непрерывна, } \sigma(0) = 0, \end{aligned} \quad (1.8)$$

для любых $\xi \in \mathbb{R}^d$, $s, s' \in \mathbb{R}$ и почти всех $x \in \Omega$.

В случае равенства $\alpha = \beta$ оценка (1.7) обеспечивает классическое условие коэрцитивности и роста. Такие интегранты будем называть стандартными.

Условие (1.8) будет для краткости именоваться *условием липшицевости*. Из него следует непрерывность по s с контролируемым модулем непрерывности:

$$|f(x, s', \xi) - f(x, s, \xi)| \leq c_3 \sigma(|s - s'|) f(x, s, \xi), \quad c_3 = m + 1, \quad (1.9)$$

а также свойство сравнимости

$$\tilde{c} f(x, s', \xi) \leq f(x, 0, \xi) \leq \tilde{c}^{-1} f(x, s, \xi), \quad \tilde{c} = (m + 1)^{-1}, \quad (1.10)$$

для любых $\xi \in \mathbb{R}^d$, $s, s' \in \mathbb{R}$ и почти всех $x \in \Omega$.

Функционал (1.1) считаем заданным на всем соболевском пространстве $W^{1,\alpha}(\Omega)$, где он может принимать значение $+\infty$. Очевидно вложение

$$W^{1,\beta}(\Omega) \subset \text{dom } F = \{u \in W^{1,\alpha}(\Omega) : F(u) < \infty\}.$$

Из условий на интегрант $f(x, s, \xi)$ вытекают следующие свойства функционала (1.1): F слабо полунепрерывен снизу на $W^{1,\alpha}(\Omega)$, коэрцитивен на $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ и непрерывен на $W^{1,\beta}(\Omega)$. Выпуклость функционала имеет место, если интегрант не зависит от s . Более детально свойства функционала обсуждаются в § 8.

Можно ввести два типа Г-сходимости для интегрантов класса (1.7), (1.8). Пусть f_ε – последовательность интегрантов из этого класса.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5. Будем говорить, что f есть Γ_1 -предел f_ε , если

1) как только $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$, так

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) dx; \quad (1.11)$$

2) для любого $u \in W^{1,\beta}(\Omega)$ найдется $u_\varepsilon \in W^{1,\alpha}(\Omega)$ такая, что

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{в } W^{1,\alpha}(\Omega), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) dx = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) dx.$$

Посмотрим на это определение с абстрактной точки зрения. В случае стандартных интегрантов, когда $\alpha = \beta$ в (1.7), определение 1.5 находится в точном соответствии с абстрактным определением 1.3. Иначе говоря, функционал F_ε с интегрантом f_ε Г-сходится к функционалу F с интегрантом f .

В случае $\alpha < \beta$ между указанными определениями нет полной согласованности, поскольку в определении 1.5 существование Г-реализующей последовательности требуется только для $u \in W^{1,\beta}(\Omega)$ (а не для $u \in W^{1,\alpha}(\Omega)$).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6. Пусть χ есть Г-предел интегральных функционалов F_ε на $V = W^{1,\alpha}(\Omega)$, f есть Γ_1 -предел соответствующих интегрантов f_ε . Тогда

$$F \leq \chi \leq \bar{F} \quad \text{на } V. \quad (1.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определений 1.3 и 1.5 заключаем, что

$$\chi(u) = F(u) \quad \forall u \in W^{1,\beta}(\Omega). \quad (1.13)$$

Равенство (1.13) можно получить, используя соответствующие Г-реализующие последовательности, одновременно учитывая свойство полунепрерывности снизу.

Правая часть неравенства (1.12) следует непосредственно из свойства полунепрерывности снизу для χ и определения релаксационного функционала $\bar{F}$ (см. (1.13)).

Докажем левую часть неравенства (1.12). Для $u \in V$ возьмем Г-реализующую последовательность

$$u_\varepsilon \xrightarrow{V} u, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) = \chi(u).$$

С другой стороны,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq F(u)$$

по условию 1) определения 1.5. Отсюда $\chi(u) \geq F(u)$, что и требовалось доказать.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Следует отметить существенное различие между левой и правой частями неравенства (1.12). Пусть χ – некоторый (необязательно Γ -предельный) слабо полунепрерывный снизу функционал на V , совпадающий с F на множестве $W^{1,\beta}(\Omega)$. Тогда оценка $\chi \leq \bar{F}$ следует просто из определения функционала $\bar{F}$. Что касается оценки $\chi \geq F$ на V , то она может и не иметь места. Но она справедлива для Γ -предельных функционалов, благодаря свойству полунепрерывности снизу, которое сформулировано в определении 1.5.

Равенство (1.13) называют *интегральным представлением на гладких функциях*. Отметим, что Γ -предельный функционал χ не обязан совпадать с F на всем пространстве V . Для совпадения требуется равенство функционалов $F = \bar{F}$. В таком случае соответствующий интегрант f называется *регулярным*. Равенство

$$\chi = F \quad \text{на } V \tag{1.14}$$

означает *полное интегральное представление Γ -предельного функционала χ* .

Сделаем несколько замечаний, упрощающих построение Γ -реализующей последовательности. Имеющееся в определении 1.5 условие 2) можно с самого начала несколько ослабить, заменив на

$2_\delta)$ для любого $u \in W^{1,\beta}(\Omega)$ и любого $\delta > 0$ найдется последовательность u_ε^δ такая, что

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon^\delta &= u \quad (\text{слабый предел в } W^{1,\alpha}(\Omega)) \quad \forall \delta, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, u_\varepsilon^\delta, \nabla u_\varepsilon^\delta) dx &\leq \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) dx. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Можно показать, что условие $2_\delta)$ вместе с условием 1) обеспечивают выполнение условия 2). Этот результат получается из топологических соображений, см. [9]–[11]. На его основе нетрудно также доказать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7. *Предположим, что Γ -реализующая последовательность $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$ существует для любой функции u из плотного в $W^{1,\beta}(\Omega)$ множества. Тогда Γ -реализующая последовательность существует для любой функции $u \in W^{1,\beta}(\Omega)$.*

Здесь важно, что функционал F непрерывен на $W^{1,\beta}(\Omega)$. В дальнейшем в качестве плотного в $W^{1,\beta}(\Omega)$ множества будем брать пространство липшицевых функций $W^{1,\infty}(\Omega)$.

Дадим второе определение Γ -сходимости интегрантов из класса (1.7), (1.8).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8. Будем говорить, что f есть Γ_2 -предел f_ε , если

1) как только $u_\varepsilon \in W^{1,\beta}(\Omega)$, $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$, так

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) dx;$$

2) для любого $u \in W^{1,\beta}(\Omega)$ найдется $u_\varepsilon \in W^{1,\beta}(\Omega)$ такая, что

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{в } W^{1,\alpha}(\Omega), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) dx = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) dx.$$

Определение Γ_2 -сходимости отличается от определения Γ_1 -сходимости лишь тем, что оно допускает аппроксимирующие последовательности $u_\varepsilon \in W^{1,\beta}(\Omega)$ вместо $u_\varepsilon \in W^{1,\alpha}(\Omega)$. Это небольшое, на первый взгляд, различие оказывается весьма существенным. Известны примеры [13], [14] последовательностей f_ε , для которых $\Gamma_1\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon \neq \Gamma_2\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon$.

Определение 1.8 можно сопоставить с абстрактным определением Γ -сходимости, но не самих функционалов F_ε , а их релаксаций $\bar{F}_\varepsilon$. При этом в определении релаксации в качестве множества S можно взять пространство $W^{1,\beta}(\Omega)$.

Для применения Γ -сходимости к вариационным задачам полезно иметь в виду следующее замечание.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Часто второе условие (существования Γ -реализующей последовательности) требуется в усиленной форме. Например, в определении 1.5 оно выглядит как

2') для любого $u \in W^{1,\beta}(\Omega)$ найдется такая последовательность $u_\varepsilon \in W^{1,\alpha}(\Omega)$, что

$$\begin{aligned} u_\varepsilon - u &\in W_0^{1,\alpha}(\Omega), \quad u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{в } W^{1,\alpha}(\Omega), \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) dx &= \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) dx. \end{aligned} \tag{1.16}$$

При определенных предположениях свойство 2') можно вывести из свойства 2), в литературе это иногда называют леммой Де Джорджи [3]. В нашем изложении используются такие Γ -реализующие последовательности, которые автоматически обеспечены свойством 2'). Дело в том, что для наших целей берутся Γ -реализующие последовательности, обслуживающие вспомогательные семейства не зависящих от s интегрантов. А в процедуре построения таких последовательностей $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ свойство $u_\varepsilon - u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)$ заложено с самого начала (см. [6; § 1]).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В вариационном исчислении встречаются интегральные функционалы более сложной структуры по сравнению с только что описанными. Полный интегрант может иметь вид суммы $f + \varphi$, где “старший” член f принадлежит классу (1.7), (1.8), а “младший” член φ описывается несколько иначе. Предположим, что $\varphi = \varphi(x, s, \xi): \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ – каратеодориева функция (с непрерывностью по s, ξ) и соответствующий функционал Φ слабо непрерывен на $W^{1,\alpha}(\Omega)$. Например, можно взять $\Phi(u) = \int_{\Omega} |u|^\alpha dx$ или

$\Phi(u) = \int_{\Omega} u \cdot z \, dx$, где $z \in L^{\alpha'}(\Omega)^d$, $\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha-1}$. При условии, что интегрант φ не зависит от ε , справедливо равенство

$$\Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f_{\varepsilon} + \varphi) = \Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon} + \varphi.$$

Наконец, укажем ситуацию, когда легко доказать Γ -сходимость.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.9. Пусть f_{ε}, f – интегранты класса (1.7), (1.8) и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}(x, s, \xi) = f(x, s, \xi)$$

поточечно для любых $\xi \in \mathbb{R}^d$, $s \in \mathbb{R}$ и почти всех $x \in \Omega$. Тогда

$$\Gamma_1\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon} = f = \Gamma_2\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Начнем с проверки условия 2) Γ -сходимости. Для любой функции $u \in W^{1,\beta}(\Omega)$ стационарная последовательность $u_{\varepsilon} = u$ является Γ -реализующей. В самом деле,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_{\varepsilon}(x, u, \nabla u) \, dx = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) \, dx$$

по теореме Лебега, так как по предположению на интегранты f_{ε} имеем поточечную сходимость $f_{\varepsilon}(x, u(x), \nabla u(x)) \rightarrow f(x, u(x), \nabla u(x))$ п.в. в Ω , а кроме того, $|f_{\varepsilon}(x, u, \nabla u)| \stackrel{(1.7)}{\leq} c_2 |\nabla u|^{\beta} + c_0$ и $|\nabla u|^{\beta} \in L^1(\Omega)$.

Выполнение условия 1) Γ -сходимости обеспечено леммой 8.1, которая приведена в § 8.

1.3. Об интегрантах вида $f(x, \xi)$. Остановимся подробнее на не зависящих от s интегрантах класса (1.7). Далее мы систематически используем относящиеся к таким интегрантам результаты как по Γ -сходимости, так и по усреднению.

Прежде всего отметим доказанный в [6]

ПРИНЦИП КОМПАКТНОСТИ. Для любой последовательности интегрантов $f_{\varepsilon}(x, \xi)$ из класса (1.7) найдется подпоследовательность $f_{\varepsilon'}(x, \xi)$ и интегрант $f(x, \xi)$ из класса (1.7) такие, что $f_{\varepsilon'} \xrightarrow{\Gamma_1} f$ в любой липшицевой подобласти области Ω .

Аналогичное утверждение справедливо в отношении Γ_2 -сходимости.

В дальнейшем, говоря о сходимости $f_{\varepsilon} \xrightarrow{\Gamma_i} f$ в области Ω , мы подразумеваем Γ_i -сходимость в любой липшицевой подобласти Ω' области Ω , $i = 1, 2$. В таком случае нетрудно показать *единственность Γ_i -предела*.

Полезным инструментом при изучении Γ -сходимости служит

ПРИНЦИП ЛОКАЛЬНОСТИ. Пусть $f_{\varepsilon}(x, \xi)$ – интегранты класса (1.7), $f_{\varepsilon} \xrightarrow{\Gamma_1} f$, $u_{\varepsilon} \rightharpoonup u$ есть соответствующая Γ -реализующая последовательность. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega'} f_{\varepsilon}(x, \nabla u_{\varepsilon}) \, dx = \int_{\Omega'} f(x, \nabla u) \, dx, \quad (1.17)$$

где Ω' – любая липшицева подобласть области Ω .

Аналогичное утверждение справедливо в отношении Γ_2 -сходимости.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо доказать равенство (1.17), которое запишем в виде

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon, \Omega') = F(u, \Omega').$$

Исходим из того, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon, \Omega) = F(u, \Omega), \quad (1.18)$$

поскольку u_ε – Γ -реализующая последовательность. С другой стороны, справедливо (установленное в [6] в процессе доказательства принципа компактности) общее свойство полунепрерывности вида

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon, \Omega') \geq F(u, \Omega'), \quad \text{как только } u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ в } W^{1,\alpha}(\Omega), \quad (1.19)$$

где Ω' – любая липшицева подобласть области Ω . Но и для подобласти $\Omega \setminus \Omega'$ верно неравенство, аналогичное (1.19). Эти два соотношения совместимы с (1.18), только если оба выполнены как равенства. В результате получаем то, что и требовалось доказать.

§ 2. Основные результаты

2.1. Периодические интегралы. Рассмотрим семейство интегралов, осциллирующих по пространственной переменной x ,

$$f_\varepsilon(x, s, \xi) = f\left(\frac{x}{\varepsilon}, s, \xi\right), \quad (2.1)$$

где $f(y, s, \xi): \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ – каратеодориева функция (с непрерывностью по s, ξ), выпуклая по ξ , периодическая по y с ячейкой периодичности $\square = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^d$, удовлетворяющая двусторонней оценке коэрцитивности и роста вида (1.7) и неравенству (1.8).

Далее используем следующие обозначения: $W^{1,\gamma}(\square)$ – соболевское пространство периодических функций; $f^*(\cdot, \xi) = \sup_{\eta \in \mathbb{R}^d} (\xi \cdot \eta - f(\cdot, \eta))$ – сопряженный к f интеграл.

Часто на сопряженный интеграл необходимо налагать Δ_2 -условие:

$$f^*(\cdot, \pm 2\xi) \leq c(1 + f^*(\cdot, \xi)), \quad c > 0. \quad (2.2)$$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\{f_\varepsilon\}$ – семейство вида (2.1). Тогда существует предел

$$\Gamma_1\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x, s, \xi) = f_1^{\text{hom}}(s, \xi), \quad (2.3)$$

а если выполнено условие (2.2), то существует также предел

$$\Gamma_2\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x, s, \xi) = f_2^{\text{hom}}(s, \xi). \quad (2.4)$$

Здесь предельные (или усредненные) интегранты имеют вариационное представление

$$\begin{aligned} f_1^{\text{hom}}(s, \xi) &= \min_{u \in W^{1, \alpha}(\square)} \int_{\square} f(y, s, \xi + \nabla u(y)) dy, \\ f_2^{\text{hom}}(s, \xi) &= \inf_{u \in W^{1, \beta}(\square)} \int_{\square} f(y, s, \xi + \nabla u(y)) dy. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Сходимость (2.3), (2.4) для интегрантов вида (2.1), не зависящих от s , была доказана в [13]. Там же приведен пример $f_1^{\text{hom}} < f_2^{\text{hom}}$. Это будет интегрант

$$f(y, \xi) = |\xi|^{p(y)}, \quad y, \xi \in \mathbb{R}^2, \quad (2.6)$$

где кусочно постоянный показатель p периодичен и задан на ячейке периодичности $\square = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^2$ равенством

$$p(y) = \begin{cases} \alpha, & \text{если } y_1 y_2 > 0, \\ \beta, & \text{если } y_1 y_2 < 0, \end{cases} \quad y = (y_1, y_2), \quad \alpha < 2 < \beta.$$

Напротив, равенство $f_1^{\text{hom}} = f_2^{\text{hom}}$ имеет место, если показатель p в (2.6) подчинен так называемому *логарифмическому условию*

$$\exists k > 0 : \quad |p(y) - p(y')| \leq \frac{k}{\ln(1/|y - y'|)}, \quad |y - y'| \leq \frac{1}{2}, \quad (2.7)$$

что верно в любой размерности.

Доказательство теоремы 2.1 основано на следующем промежуточном результате. Рассмотрим семейство $f_\varepsilon(x, v_\varepsilon(x), \xi)$, где v_ε – заданная последовательность функций, $v_\varepsilon \xrightarrow{L^1(\Omega)} v$. Это семейство попадает в ранее изученный класс интегрантов, не содержащих аргумент s , но уже непериодических по x . По принципу компактности (см. п. 1.3) можно утверждать, что (по крайней мере по подпоследовательности)

$$f_\varepsilon(x, v_\varepsilon(x), \xi) \xrightarrow{\Gamma} \tilde{f}(x, \xi).$$

Возникает вопрос о представлении предельного интегранта $\tilde{f}$ через f^{hom} .

ЛЕММА 2.2. Пусть $\{f_\varepsilon\}$ – семейство вида (2.1) и $v_\varepsilon \xrightarrow{L^1(\Omega)} v$. Тогда существует предел

$$\Gamma_1\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x, v_\varepsilon(x), \xi) = f_1^{\text{hom}}(v(x), \xi), \quad (2.8)$$

а если выполнено условие (2.2), то существует также предел

$$\Gamma_2\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x, v_\varepsilon(x), \xi) = f_2^{\text{hom}}(v(x), \xi), \quad (2.9)$$

где интегранты $f_i^{\text{hom}}(s, \xi)$ определены в (2.5).

Соотношения (2.8), (2.9) будем называть формулами представления.

Лемма 2.2 является основным техническим результатом, который требует достаточно долгого доказательства. Далее проверка условий сходимости (2.3),

(2.4) выполняется непосредственно в отношении условия 1) и с использованием общих соображений в отношении условия 2).

Спецификой интегрантов вида (2.1) является то, что их Γ -пределы оказываются регулярными. Тогда в соответствии с предложением 1.6 и формулой (1.14) выводим из теоремы 2.1 полное интегральное представление для предельных функционалов

$$\Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon = \int_{\Omega} f_1^{\text{hom}}(u, \nabla u) dx, \quad \Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{F}_\varepsilon = \int_{\Omega} f_2^{\text{hom}}(u, \nabla u) dx$$

$$\forall u \in W^{1,\alpha}(\Omega).$$

Заметим, что все результаты нашей работы основываются на условии липшицевости (1.8). Оно позволяет свести усреднение исходных интегрантов к усреднению их при фиксированном s , т.е. рассматривать аргумент s в $f(y, s, \xi)$ как параметр. Мы не касаемся здесь важных вопросов усреднения, когда условие липшицевости отсутствует (см. [15]).

Другие варианты формул представления типа (2.8), (2.9) для Γ -предела последовательности интегрантов без каких-либо свойств периодичности доказаны в [16]. В частности, охвачен случай любых стандартных интегрантов класса (1.7), (1.8).

2.2. Г-сходимость и усреднение. Вариационные задачи с интегрантами вида (2.1) изучаются в теории усреднения. Главная цель усреднения – найти предельную задачу и установить соответствующую сходимость энергий и минимизантов.

Рассмотрим задачи Дирихле

$$E_1^\varepsilon = \min_{W_0^{1,\alpha}(\Omega)} \int_{\Omega} (f_\varepsilon(x, u, \nabla u) - z \cdot \nabla u) dx, \quad (2.10)$$

$$E_2^\varepsilon = \inf_{C_0^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} (f_\varepsilon(x, u, \nabla u) - z \cdot \nabla u) dx, \quad (2.11)$$

где $z \in L^\infty(\Omega)^d$. Это – так называемые задачи *первого и второго типов*, вообще говоря, несовпадающие. В задаче первого типа минимум достигается по теореме Вейерштрасса–Тонелли, поскольку интегральный функционал слабо полунепрерывен и коэрцитивен на $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$. В задаче второго типа можно оперировать лишь с минимизирующей последовательностью, или почти минимизантами. С помощью теории Γ -сходимости довольно легко решаются вопросы о предельном поведении энергий E_1^ε , E_2^ε и соответствующих минимизантов. Выясняется, что при усреднении различие между типами задач, вообще говоря, сохраняется. Мы получаем полное соответствие с теоремой 2.1.

ТЕОРЕМА 2.3. *Имеет место сходимость энергий*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_1^\varepsilon = \min_{W_0^{1,\alpha}(\Omega)} \int_{\Omega} (f_1^{\text{hom}}(u, \nabla u) - z \cdot \nabla u) dx, \quad (2.12)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_2^\varepsilon = \min_{C_0^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} (f_2^{\text{hom}}(u, \nabla u) - z \cdot \nabla u) dx. \quad (2.13)$$

При этом наблюдается и сходимость решений вариационных задач в следующем смысле: последовательность минимизантов задачи E_1^ε ограничена в $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$, и всякая ее предельная точка есть минимизант предельной задачи. В случае задачи E_2^ε аналогичное утверждение выполнено в отношении ε -минимизантов.

Теорема 2.3 связана с определенной спецификой задачи усреднения и, вообще говоря, не имеет места для произвольных Γ -сходящихся последовательностей. Рассмотрим задачу первого типа E_1^ε , в которой $f_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma_1} f$. В общем случае можно гарантировать только оценки

$$\begin{aligned} \min_{W_0^{1,\alpha}(\Omega)} \int_{\Omega} (f(x, u, \nabla u) - z \cdot \nabla u) dx &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_1^\varepsilon \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} E_1^\varepsilon \\ &\leq \inf_{C_0^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} (f(x, u, \nabla u) - z \cdot \nabla u) dx. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Видим, что для сходимости энергий E_1^ε достаточно, чтобы в (2.14) совпали крайние левая и правая части неравенств. Это означает отсутствие эффекта Лаврентьева для предельного функционала. В таком случае интегрант f называется регулярным. Будет показано, что усредненные интегранты $f_1^{\text{hom}}, f_2^{\text{hom}}$ регулярны.

Доказательство теоремы 2.3 приведено в § 7.

§ 3. Доказательство свойства полунепрерывности снизу

Нашей целью будет доказательство следующего утверждения о полунепрерывности снизу.

ЛЕММА 3.1. Пусть $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$ и $v_\varepsilon \rightarrow v$ в $L^1(\Omega)$. Тогда для любого измеримого множества $K \subset \Omega$

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K f_\varepsilon(x, v_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_K f_1^{\text{hom}}(v, \nabla u) dx; \quad (3.1)$$

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K f_\varepsilon(x, v_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_K f_2^{\text{hom}}(v, \nabla u) dx, \quad \text{если } u_\varepsilon \in W^{1,\beta}(\Omega). \quad (3.2)$$

При этом для справедливости формулы (3.2) требуется выполнение условия (2.2).

Принимая в неравенствах (3.1), (3.2) $v_\varepsilon = u_\varepsilon$ и $K = \Omega$, получаем свойство слабой полунепрерывности снизу для Γ -сходимости (2.3) или (2.4).

Доказательство леммы 3.1 существенно использует аналогичный результат для не зависящих от s интегрантов:

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K f_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_K f_1^{\text{hom}}(\nabla u) dx; \quad (3.3)$$

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K f_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_K f_2^{\text{hom}}(\nabla u) dx, \quad \text{если } u_\varepsilon \in W^{1,\beta}(\Omega). \quad (3.4)$$

Как в случае с (3.2), для справедливости формулы (3.4) требуется выполнение условия (2.2).

Соотношения (3.3) и (3.4) установлены в [13] для $K = \Omega$. Полное их доказательство приведено в § 9.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.1. Будем считать, что $v_\varepsilon \rightarrow v$ п.в. в Ω . По теореме Егорова найдутся измеримые множества $\Omega_n \subset \Omega$, $n = 1, 2, \dots$, такие, что

$$\Omega_n \subset \Omega_{n+1}, \quad |\Omega \setminus \Omega_n| \leq \frac{1}{n}, \quad v_\varepsilon \rightarrow v \text{ равномерно на } \Omega_n. \quad (3.5)$$

Кроме того, представим $v = \lim_{r \rightarrow 0} v_r$ как предел кусочно постоянных аппроксимаций по $L^1(\Omega)$ -норме, а также как поточечный предел. Считаем, что множества Ω_n в (3.5) выбраны так, что наряду с последним соотношением в (3.5) имеем

$$v_r \rightarrow v \text{ равномерно на } \Omega_n. \quad (3.6)$$

В силу неотрицательности интегранта f , можно записать

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, v_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) dx &\geq \int_{\Omega_n} f_\varepsilon(x, v_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) dx \\ &\geq \int_{\Omega_n} f_\varepsilon(x, v_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) dx - \int_{\Omega_n} f_\varepsilon(x, v, \nabla u_\varepsilon) dx \\ &\quad + \int_{\Omega_n} f_\varepsilon(x, v, \nabla u_\varepsilon) dx - \int_{\Omega_n} f_\varepsilon(x, v_r, \nabla u_\varepsilon) dx \\ &\quad + \int_{\Omega_n} f_\varepsilon(x, v_r, \nabla u_\varepsilon) dx \\ &= \tau_n(\varepsilon) + \tau_{\varepsilon, n}(r) + \int_{\Omega_n} f_\varepsilon(x, v_r, \nabla u_\varepsilon) dx, \end{aligned} \quad (3.7)$$

при этом для каждого фиксированного n

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_n(\varepsilon) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{\varepsilon, n}(r) = 0 \text{ равномерно по } \varepsilon. \quad (3.8)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} |\tau_n(\varepsilon)| &\leq \int_{\Omega_n} |f_\varepsilon(x, v_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) - f_\varepsilon(x, v, \nabla u_\varepsilon)| dx \\ &\stackrel{(1.9)}{\leq} c_3 \sup_{\Omega_n} \sigma(|v_\varepsilon - v|) \int_{\Omega_n} f_\varepsilon(x, v_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) dx = o(1) \end{aligned}$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Здесь и далее учитываем, что исходный интеграл в оценке (3.7) ограничен равномерно по ε , а значит, в силу (1.10) равномерно ограничены и все участвующие в (3.7) интегралы. Кроме того, $\sup_{\Omega_n} \sigma(|v_\varepsilon - v|) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ вследствие выбора Ω_n (см. последнее соотношение в (3.5)). Аналогично (используя вместо равномерной сходимости $v_\varepsilon \rightarrow v$ на Ω_n сходимость (3.6)) доказываем последнее соотношение в (3.8).

Поскольку v_r кусочно постоянна, имеем

$$\Omega_n = \bigcup_i \Omega_{n,i}, \quad v_r|_{\Omega_{n,i}} = s_i, \quad (3.9)$$

$$\int_{\Omega_n} f_\varepsilon(x, v_r, \nabla u_\varepsilon) dx = \sum_i \int_{\Omega_{n,i}} f_\varepsilon(x, s_i, \nabla u_\varepsilon) dx, \quad (3.10)$$

к слагаемым этой суммы применяем неравенство (3.3) для измеримого множества $\Omega_{n,i}$

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_n} f_\varepsilon(x, v_r, \nabla u_\varepsilon) dx \geq \sum_i \int_{\Omega_{n,i}} f_1^{\text{hom}}(s_i, \nabla u) dx = \int_{\Omega_n} f_1^{\text{hom}}(v_r, \nabla u) dx. \quad (3.11)$$

Восстанавливая функцию $v = \lim_{r \rightarrow 0} v_r$, получаем

$$\int_{\Omega_n} f_1^{\text{hom}}(v_r, \nabla u) dx = \int_{\Omega_n} f_1^{\text{hom}}(v, \nabla u) dx + \tau_n(r), \quad (3.12)$$

где $\lim_{r \rightarrow 0} \tau_n(r) = 0$ в силу (3.6) и непрерывности по s интегранта $f_1^{\text{hom}}(s, \xi)$ (см. далее лемму 3.2). Действительно,

$$\begin{aligned} |\tau_n(r)| &\leq \int_{\Omega_n} |f_1^{\text{hom}}(v_r, \nabla u) - f_1^{\text{hom}}(v, \nabla u)| dx \\ &\leq c_3 \sup_{\Omega_n} \sigma(|v_r - v|) \int_{\Omega_n} f_1^{\text{hom}}(v_r, \nabla u) dx, \end{aligned}$$

где первый множитель стремится к нулю, а второй равномерно ограничен при $r \rightarrow 0$.

Из (3.7)–(3.12) получаем

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, v_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega_n} f_1^{\text{hom}}(v, \nabla u) dx + \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_{\varepsilon,n}(r) + \tau_n(r),$$

что в пределе при $r \rightarrow 0$ и $n \rightarrow \infty$ дает неравенство (3.1).

Неравенство (3.2) доказывается аналогично, только на этапе оценки (3.11) применяем соотношение (3.4) вместо (3.3).

Доказательство соотношений (3.1), (3.2) не изменится, если вместо области Ω взять произвольное измеримое множество $K \subset \Omega$. Лемма 3.1 доказана.

ЛЕММА 3.2. *Интегрант $f^{\text{hom}} = f_i^{\text{hom}}(s, \xi)$, $i = 1, 2$, принадлежит классу (1.7), (1.8). В частности, $f^{\text{hom}}(s, \xi)$ липшицев по s в смысле неравенства*

$$f^{\text{hom}}(s', \xi) - f^{\text{hom}}(s, \xi) \leq \sigma(|s - s'|) f^{\text{hom}}(s, \xi). \quad (3.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для примера докажем только неравенство (3.13). Обозначим через N_s минимизант первой задачи в (2.5). Тогда

$$\begin{aligned} f_1^{\text{hom}}(s', \xi) - f_1^{\text{hom}}(s, \xi) &= \int_{\square} [f(y, s', \xi + \nabla N_{s'}(y)) - f(y, s, \xi + \nabla N_s(y))] dy \\ &\leq \int_{\square} [f(y, s', \xi + \nabla N_s(y)) - f(y, s, \xi + \nabla N_s(y))] dy \\ &\leq \sigma(|s - s'|) \int_{\square} f(y, s, \xi + \nabla N_s(y)) dy = \sigma(|s - s'|) f_1^{\text{hom}}(s, \xi), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. В случае $f_2^{\text{hom}}(s, \xi)$ действуем через τ -минимизанты второй задачи в (2.5).

Из (3.13) выводятся аналоги свойств (1.9), (1.10), в частности свойство сравнимости

$$\exists c > 0 : \quad c^{-1} f^{\text{hom}}(0, \xi) \leq f^{\text{hom}}(s, \xi) \leq c f^{\text{hom}}(0, \xi). \quad (3.14)$$

Последнее неравенство важно, например, при доказательстве регулярности интегранта $f^{\text{hom}}(s, \xi)$. Определение регулярности, а также ее следствия обсуждаются далее в § 7 и 8.

§ 4. Доказательство формулы представления

Докажем представление (2.8). По принципу компактности (см. § 1) можно считать, что последовательность $f_\varepsilon(x, v_\varepsilon(x), \xi)$ является Γ_1 -сходящейся:

$$\Gamma_1\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x, v_\varepsilon(x), \xi) = \tilde{f}(x, \xi). \quad (4.1)$$

Сначала установим неравенство

$$\tilde{f}(x, \xi) \geq f_1^{\text{hom}}(v(x), \xi) \quad (4.2)$$

для любых ξ и почти всех $x \in \Omega$.

1°. Пусть $u = x \cdot \xi$ и $u_\varepsilon \rightarrow u$ есть Γ_1 -реализующая последовательность для сходимости (4.1). Из неравенства (3.1) для $K = B$ – шара в Ω , и из принципа локальности (см. п. 1.3) получаем

$$\int_B \tilde{f}(x, \xi) dx \geq \int_B f_1^{\text{hom}}(v(x), \xi) dx.$$

Стягивая шар $B = B_r(x_0)$ при $r \rightarrow 0$ к x_0 – точке Лебега для функций $\tilde{f}(\cdot, \xi)$ и $f_1^{\text{hom}}(v(\cdot), \xi)$, выводим поточечное неравенство (4.2).

Выше использовано утверждение: для интегранта $f(x, \xi)$ класса (1.7) найдется множество полной меры в Ω , состоящее из точек Лебега функции $f(\cdot, \xi)$ для любых $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Для доказательства этого утверждения выберем $\{\xi_j\}$ – счетное всюду плотное множество в $\mathbb{R}^d$ и положим $\Lambda = \bigcap_j \Lambda_j$, где Λ_j – множество точек Лебега функции $f(\cdot, \xi_j)$. Тогда Λ – множество полной меры в Ω , и всякая точка $x_0 \in \Lambda$ есть точка Лебега функции $f(\cdot, \xi)$ для любых $\xi \in \mathbb{R}^d$. Чтобы проверить последнее свойство, для произвольного ξ и $\tau > 0$ найдем ξ_j такое, что $|\xi_j - \xi| \leq \tau$, и пусть $|\xi|, |\xi_j| \leq R$. Для выпуклой по ξ функции $f(x, \xi)$ выполнено неравенство

$$|f(\cdot, \xi) - f(\cdot, \xi_j)| \leq c(R^{\beta-1} + 1)|\xi - \xi_j|, \quad c = \text{const}(c_0, c_2).$$

Следовательно,

$$|f(x, \xi) - f(x_0, \xi)| \leq \Delta(\tau) + |f(x, \xi_j) - f(x_0, \xi_j)|, \quad \Delta(\tau) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \tau \rightarrow 0.$$

Если $B = B_r(x_0)$ – шар радиуса r с центром в x_0 , то по свойству точки Лебега $x_0 \in \Lambda_j$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_B |f(x, \xi) - f(x_0, \xi)| dx \leq \lim_{r \rightarrow 0} \int_B |f(x, \xi_j) - f(x_0, \xi_j)| dx + \Delta(\tau) = \Delta(\tau),$$

где $\int_B \cdot dx = \frac{1}{|B|} \int_B \cdot dx$. Мы получаем проверяемое свойство, поскольку $\lim_{\tau \rightarrow 0} \Delta(\tau) = 0$.

2°. Теперь покажем, что в (4.2) в действительности наблюдается равенство.

Напомним свойство среднего значения периодической функции:

$$\text{если } b \in L^1_{\text{per}}(\square), \text{ то } b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \rightharpoonup \langle b \rangle \text{ в } L^1(\Omega) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\langle b \rangle = \langle b(\cdot) \rangle = \int_{\square} b(y) dy.$$

В частности

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K b\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = |K| \langle b \rangle, \quad (4.3)$$

где K – любое измеримое множество в Ω .

Введем $L_f(\square) = \{u \in L^1_{\text{per}}(\square)^d : \langle f(\cdot, 0, u(\cdot)) \rangle < \infty\}$. Тогда если $\Phi \in L_f(\square)$, то

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K f\left(\frac{x}{\varepsilon}, v_\varepsilon(x), \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) dx \stackrel{(1.10)}{\leq} c \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K f\left(\frac{x}{\varepsilon}, 0, \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) dx$$

$$\stackrel{(4.3)}{=} c \langle f(\cdot, 0, \Phi(\cdot)) \rangle |K|. \quad (4.4)$$

Значение предела в левой части выражения (4.4) можно уточнить на основе следующего варианта леммы о среднем значении.

ЛЕММА 4.1. Пусть $v_\varepsilon \rightarrow v$ в $L^1(\Omega)$, $\Phi \in L_f(\square)$. Тогда

$$f\left(\frac{x}{\varepsilon}, v_\varepsilon(x), \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \rightharpoonup \langle f(\cdot, v(x), \Phi(\cdot)) \rangle \text{ в } L^1(\Omega). \quad (4.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Слабая компактность в $L^1(\Omega)$ изучаемого семейства следует из оценки

$$f\left(\frac{x}{\varepsilon}, v_\varepsilon(x), \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \stackrel{(1.10)}{\leq} c f\left(\frac{x}{\varepsilon}, 0, \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right),$$

свойства среднего значения и условия $\Phi \in L_f(\square)$. Найдем слабый предел семейства. Предположим, что $v_\varepsilon \rightarrow v$ п.в. в Ω . Используя построения (3.5), (3.6), имеем

$$\int_{\Omega} f\left(\frac{x}{\varepsilon}, v_\varepsilon(x), \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) dx = \int_{\Omega_n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}, v_\varepsilon(x), \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) dx + \tau_\varepsilon(n), \quad (4.6)$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_\varepsilon(n) = 0$ равномерно по ε в силу оценки (4.4), в которой используем $K = \Omega \setminus \Omega_n$ и условие $|\Omega \setminus \Omega_n| \leq \frac{1}{n}$ из (3.5). Обозначив $\Phi_\varepsilon(x) = \Phi(\frac{x}{\varepsilon})$, запишем представление

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} f_\varepsilon(x, v_\varepsilon, \Phi_\varepsilon) dx &= \int_{\Omega_n} f_\varepsilon(x, v_\varepsilon, \Phi_\varepsilon) dx - \int_{\Omega_n} f_\varepsilon(x, v, \Phi_\varepsilon) dx \\ &\quad + \int_{\Omega_n} f_\varepsilon(x, v, \Phi_\varepsilon) dx - \int_{\Omega_n} f_\varepsilon(x, v_r, \Phi_\varepsilon) dx \\ &\quad + \int_{\Omega_n} f_\varepsilon(x, v_r, \Phi_\varepsilon) dx \\ &= \tau_n(\varepsilon) + \tau_{\varepsilon,n}(r) + \int_{\Omega_n} f_\varepsilon(x, v_r, \Phi_\varepsilon) dx, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где для фиксированного n

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_n(\varepsilon) = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \tau_{\varepsilon,n}(r) = 0 \quad \text{равномерно по } \varepsilon. \quad (4.8)$$

В самом деле,

$$|\tau_n(\varepsilon)| \leq c_3 \sup_{\Omega_n} \sigma(|v_\varepsilon - v|) \int_{\Omega_n} f_\varepsilon(x, 0, \Phi_\varepsilon) dx = o(1)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, так как $\sup_{\Omega_n} \sigma(|v_\varepsilon - v|) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ (см. последнее соотношение в (3.5)) и, кроме того,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_n} f_\varepsilon(x, 0, \Phi_\varepsilon) dx \stackrel{(4.3)}{=} \langle f(\cdot, 0, \Phi(\cdot)) \rangle |\Omega_n| < C$$

вследствие выбора функции $\Phi \in L_f(\square)$. Аналогично проверяется второе соотношение в (4.8), если использовать вместо равномерной сходимости $v_\varepsilon \rightarrow v$ на Ω_n равномерную сходимость (3.6).

Для последнего интеграла из (4.7) имеем (см. аналогичные преобразования в (3.9), (3.10))

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} f_\varepsilon(x, v_r, \Phi_\varepsilon) dx &= \sum_i \int_{\Omega_{n,i}} f_\varepsilon(x, s_i, \Phi_\varepsilon) dx, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_n} f_\varepsilon(x, v_r, \Phi_\varepsilon) dx &\stackrel{(4.3)}{=} \sum_i |\Omega_{n,i}| \langle f(\cdot, s_i, \Phi(\cdot)) \rangle = \int_{\Omega_n} \langle f(\cdot, v_r(x), \Phi(\cdot)) \rangle dx. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Восстанавливая функцию $v = \lim_{r \rightarrow 0} v_r$ так же, как в (3.11), (3.12), получаем

$$\int_{\Omega_n} \langle f(\cdot, v_r(x), \Phi(\cdot)) \rangle dx = \int_{\Omega_n} \langle f(\cdot, v(x), \Phi(\cdot)) \rangle dx + \tau_n(r), \quad (4.10)$$

где $\lim_{r \rightarrow 0} \tau_n(r) = 0$ в силу (3.5), (3.6) и непрерывности интегранта $f(y, s, \xi)$ по s .

Переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, из (4.6)–(4.10) выводим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f\left(\frac{x}{\varepsilon}, v_{\varepsilon}(x), \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) dx = \int_{\Omega} \langle f(\cdot, v(x), \Phi(\cdot)) \rangle dx. \quad (4.11)$$

Равенство типа (4.11) аналогично проверяется для любого измеримого множества $K \subset \Omega$, откуда следует утверждение (4.5). Лемма доказана.

По лемме 4.1 для любого шара $B \subset \Omega$ верно равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B f\left(\frac{x}{\varepsilon}, v_{\varepsilon}(x), \xi + (\nabla N)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) dx = \int_B \langle f(\cdot, v(x), \xi + \nabla N(\cdot)) \rangle dx,$$

где $\xi \in \mathbb{R}^d$ и $N \in W_{\text{per}}^{1,\alpha}(\square)$, $\nabla N \in L_f(\square)$.

С другой стороны, по свойству полунепрерывности снизу для сходимости (4.1) можно записать

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B f\left(\frac{x}{\varepsilon}, v_{\varepsilon}(x), \xi + (\nabla N)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) dx \geq \int_B \tilde{f}(x, \xi) dx,$$

поскольку $(\xi + (\nabla N)(\frac{x}{\varepsilon}))$ есть градиент $\nabla u_{\varepsilon}(x)$ функции $u_{\varepsilon}(x) = x \cdot \xi + \varepsilon N(\frac{x}{\varepsilon})$ и $u_{\varepsilon}(x) \rightharpoonup x \cdot \xi$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$. Следовательно,

$$\int_B \langle f(\cdot, v(x), \xi + \nabla N(\cdot)) \rangle dx \geq \int_B \tilde{f}(x, \xi) dx.$$

Стандартным образом, стягивая шар B в точку, приходим к поточечному неравенству

$$\langle f(\cdot, v(x), \xi + \nabla N(\cdot)) \rangle \geq \tilde{f}(x, \xi) \quad \text{для почти всех } x \in \Omega.$$

Рассматривая минимум левой части по всем $N \in W_{\text{per}}^{1,\alpha}(\square)$, получаем по определению вариационной задачи (2.5) неравенство

$$f_1^{\text{hom}}(v(x), \xi) \geq \tilde{f}(x, \xi) \quad \text{для почти всех } x \in \Omega.$$

Это неравенство вместе с доказанным уже неравенством в противоположную сторону означает, что (4.2) реализуется как равенство. В итоге доказана формула представления (2.8).

§ 5. Построение Γ -реализующей последовательности

В этом параграфе дано построение Γ -реализующей последовательности для сходимости (2.3) и (2.4).

5.1. Сначала отметим одно свойство Γ -реализующих последовательностей для не зависящих от s интегрантов класса (1.7).

Пусть $f_{\varepsilon}(x, \xi)$ – интегранты класса (1.7), $f_{\varepsilon} \xrightarrow{\Gamma} f$, $u_{\varepsilon} \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$ есть некоторая Γ -реализующая последовательность, при этом

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_{\varepsilon}(x, \nabla u_{\varepsilon}) dx = \int_{\Omega} f(x, \nabla u) dx. \quad (5.1)$$

Исходим из представления

$$u_\varepsilon = u + w_\varepsilon, \quad \text{где } w_\varepsilon \rightharpoonup 0 \quad \text{в } W^{1,\alpha}(\Omega). \quad (5.2)$$

Можно улучшить асимптотические свойства этой последовательности, применив срезку к слагаемому w_ε . Полагая

$$T_\varepsilon(k) = \{x \in \Omega : |w_\varepsilon| > k\}, \quad \bar{w}_\varepsilon = \begin{cases} w_\varepsilon & \text{вне } T_\varepsilon(k), \\ \pm k & \text{на } T_\varepsilon(k), \end{cases} \quad (5.3)$$

оценим меру Лебега множества $T_\varepsilon(k)$:

$$\begin{aligned} k^\alpha |T_\varepsilon(k)| &\leq \int_{T_\varepsilon(k)} |w_\varepsilon|^\alpha dx \leq \int_\Omega |w_\varepsilon|^\alpha dx \equiv \lambda_\varepsilon, \\ |T_\varepsilon(k)| &\leq \lambda_\varepsilon^{1/\alpha}, \end{aligned} \quad (5.4)$$

где $k = \lambda_\varepsilon^{1/(2\alpha)}$ и $\lambda_\varepsilon = \|w_\varepsilon\|_{L^\alpha(\Omega)}^\alpha$. Очевидно, что $\lambda_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ вследствие сильной сходимости w_ε к нулю в $L^\alpha(\Omega)$ (см. (5.2)).

По свойству срезки

$$\int_\Omega f_\varepsilon(x, \nabla u + \nabla \bar{w}_\varepsilon) dx = \int_{\Omega \setminus T_\varepsilon(k)} f_\varepsilon(x, \nabla u + \nabla w_\varepsilon) dx + \int_{T_\varepsilon(k)} f_\varepsilon(x, \nabla u) dx,$$

и в силу неотрицательности f_ε , а также используя оценки (1.7) и (5.4), получаем при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \int_\Omega f_\varepsilon(x, \nabla u + \nabla \bar{w}_\varepsilon) dx &\leq \int_\Omega f_\varepsilon(x, \nabla u + \nabla w_\varepsilon) dx + \int_{T_\varepsilon(k)} (c_1 |\nabla u|^\beta + c_0) \\ &\leq \int_\Omega f_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) dx + o(1). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая (5.1) и свойство полунепрерывности снизу (1.11), выводим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\Omega f_\varepsilon(x, \nabla(u + \bar{w}_\varepsilon)) dx = \int_\Omega f(x, \nabla u) dx. \quad (5.5)$$

Из (5.3) и (5.5) следует, что построена Γ -реализующая последовательность

$$\bar{u}_\varepsilon = u + \bar{w}_\varepsilon, \quad (5.6)$$

обладающая дополнительным свойством

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\bar{u}_\varepsilon - u\|_{L^\infty(\Omega)} = 0. \quad (5.7)$$

5.2. Благодаря равномерной сходимости (5.7), можно построить Γ -реализующую последовательность для сходимости (2.3). В случае сходимости (2.4) поступаем аналогично.

ЛЕММА 5.1. *Предположим, что $u_\varepsilon \xrightarrow{W^{1,\alpha}(\Omega)}$ и есть Γ_1 -реализующая последовательность для сходимости $f_\varepsilon(x, u(x), \xi) \xrightarrow{\Gamma_1} f_1^{\text{hom}}(u(x), \xi)$. Тогда “подправленная” последовательность $\bar{u}_\varepsilon$ из (5.6) будет Γ_1 -реализующей для сходимости (2.3), в частности,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, \bar{u}_\varepsilon(x), \nabla \bar{u}_\varepsilon(x)) dx = \int_{\Omega} f_1^{\text{hom}}(u(x), \nabla u(x)) dx. \quad (5.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению $\bar{u}_\varepsilon$ выполнено предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, u, \nabla \bar{u}_\varepsilon) dx = \int_{\Omega} f_1^{\text{hom}}(u, \nabla u) dx. \quad (5.9)$$

Убедимся в том, что автоматически выполнено и равенство (5.8). В самом деле,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, \bar{u}_\varepsilon, \nabla \bar{u}_\varepsilon) dx \\ &= \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, u, \nabla \bar{u}_\varepsilon) dx + \left(\int_{\Omega} f_\varepsilon(x, \bar{u}_\varepsilon, \nabla \bar{u}_\varepsilon) dx - \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, u, \nabla \bar{u}_\varepsilon) dx \right), \end{aligned} \quad (5.10)$$

причем

$$\int_{\Omega} |f_\varepsilon(x, \bar{u}_\varepsilon, \nabla \bar{u}_\varepsilon) - f_\varepsilon(x, u, \nabla \bar{u}_\varepsilon)| dx \stackrel{(1.9)}{\leq} c_3 \int_{\Omega} \sigma(|\bar{u}_\varepsilon - u|) f_\varepsilon(x, u, \nabla \bar{u}_\varepsilon) dx = o(1) \quad (5.11)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$, где на последнем шаге учтены соотношения (5.7) и (5.9). Переходя к пределу в (5.10) в силу (5.9) и (5.11), получаем (5.8).

§ 6. Векторный случай. Регуляризации сверху и снизу

6.1. Дополнительное условие на показатели. Рассмотрим функционалы вида (1.1) на вектор-функциях $u = (u_1, \dots, u_n)$, $n \geq 1$, когда градиент ∇u есть $n \times d$ -матрица. В этом случае интегрант

$$f(x, s, \xi): \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times d} \rightarrow \mathbb{R} \quad (6.1)$$

имеет векторный и матричный аргументы s и ξ .

Только некоторые результаты, полученные ранее для $n = 1$, удалось перенести на векторный случай, когда $n > 1$.

ТЕОРЕМА 6.1. *В векторном случае справедливо соотношение*

$$\Gamma_2\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x, s, \xi) = f_2^{\text{hom}}(s, \xi), \quad (6.2)$$

если выполнено условие (2.2) и

$$1 < \alpha \leq \beta < \alpha_* = \begin{cases} \frac{\alpha(d-1)}{d-1-\alpha}, & \text{если } \alpha < d-1, \\ +\infty, & \text{если } \alpha \geq d-1. \end{cases} \quad (6.3)$$

Условие (6.3) требуется при доказательстве векторного варианта соотношения полунепрерывности снизу (3.2). Также оно возникает при выводе неравенства (3.4) (см. § 9), когда используются соображения компенсированной компактности, справедливые при условии (6.3) (см. [17]). В скалярном случае применением срезки удастся избежать какого-либо ограничения на показатели.

Соотношение полунепрерывности снизу (3.2) задействовано и в доказательстве формулы представления (2.9), поэтому векторный вариант ее тоже верен при дополнительном условии. Таким образом, аналогом леммы 2.2 является

ЛЕММА 6.2. *В векторном случае представление (2.8) остается в силе, а для представления (2.9) требуются дополнительные условия (2.2) и (6.3).*

При построении Γ -реализующей последовательности (см. § 5) снова была использована срезка, не пригодная в векторном случае. Вместо этого предлагается иной подход: регуляризация сверху сводит построение к случаю стандартных интегралов, когда необходимое улучшение асимптотических свойств последовательности достигается не срезкой, а за счет повышенной суммируемости градиента. Ниже подробно излагается этот метод.

При построении Γ_1 -реализующей последовательности замена приему срезки не найдена. По этой причине векторный вариант утверждения теоремы 2.1 для Γ_1 -сходимости остался не охваченным.

6.2. Стандартные интегралы. Покажем, как в случае равенства показателей $\alpha = \beta$ получить утверждение теоремы 2.1, а именно,

$$\Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x, s, \xi) = f^{\text{hom}}(s, \xi), \quad (6.4)$$

где $f^{\text{hom}}(s, \xi)$ определен в (2.5).

Справедливо свойство полунепрерывности снизу

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} f^{\text{hom}}(u, \nabla u) dx, \quad \text{если } u_\varepsilon \xrightarrow{W^{1,\alpha}(\Omega)} u,$$

а также формула представления

$$\Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(x, u(x), \xi) = f^{\text{hom}}(u(x), \xi). \quad (6.5)$$

В доказательстве этих фактов прием срезки не используется.

Перейдем к построению Γ -реализующей последовательности.

ЛЕММА 6.3. *Пусть $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Тогда для сходимости (6.5) найдется Γ -реализующая последовательность $u_\varepsilon \rightarrow u$, для которой верна оценка повышенной суммируемости градиента*

$$\int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^{\alpha(1+\theta)} dx \leq c_* \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^\alpha dx + c_*, \quad (6.6)$$

где $\theta > 0$ и $c_* > 0$ зависят только от констант c_0, c_1, c_2 , θ из (1.7), (1.8).

Отметим, что в (6.5) рассматривается Γ -сходимость не зависящих от s стандартных интегрантов. Сама лемма 6.3 будет получена как следствие из общего утверждения, относящегося к Γ -сходимости таких интегрантов (см. п. 7.3 и предложение 7.2).

Продемонстрируем, как свойство повышенной суммируемости градиента (6.6) участвует в построении Γ -реализующей последовательности для сходимости (6.4). Предварительно напомним классические результаты о сходимости в $L^1(\Omega)$.

КРИТЕРИЙ СЛАБОЙ КОМПАКТНОСТИ. Эквивалентны утверждения:

- а) семейство v_ε слабо компактно в $L^1(\Omega)$;
- б) семейство v_ε равномерно интегрируемо, т.е.

$$\forall \tau > 0 \quad \exists \delta = \delta(\tau) : \quad \int_B |v_\varepsilon| dx < \tau,$$

что справедливо для любого измеримого множества $B \subset \Omega$ с лебеговой мерой $|B| \leq \delta$;

в) выполнено условие: для любого $\tau > 0$ найдется $n = n(\tau)$ такое, что $\int_{|v_\varepsilon| \geq n} |v_\varepsilon| dx < \tau$ равномерно по ε .

ТЕОРЕМА ЛЕБЕГА. Если v_ε равномерно интегрируема и $v_\varepsilon(x) \rightarrow v(x)$ п.в. в Ω , то $v_\varepsilon \rightarrow v$ в $L^1(\Omega)$.

ЛЕММА 6.4. Пусть семейство η_ε слабо компактно в $L^1(\Omega)$, а $\|\zeta_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c$ и $\zeta_\varepsilon \rightarrow 0$ в $L^1(\Omega)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда $\eta_\varepsilon \zeta_\varepsilon \rightarrow 0$ в $L^1(\Omega)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что

$$\int_\Omega |\eta_\varepsilon \zeta_\varepsilon| dx \leq c \int_{\Omega \cap \{|\eta_\varepsilon| \geq n\}} |\eta_\varepsilon| dx + n \int_{\Omega \cap \{|\eta_\varepsilon| < n\}} |\zeta_\varepsilon| dx.$$

За счет выбора n первое слагаемое как угодно мало равномерно по ε , а второе по предположению леммы стремится к нулю при фиксированном n и $\varepsilon \rightarrow 0$.

Следствием леммы 6.3 является

ЛЕММА 6.5. Пусть функции u, u_ε — те же, что в лемме 6.3. Тогда

$$f_\varepsilon(x, u(x), \nabla u_\varepsilon(x)) \rightharpoonup f^{\text{hom}}(u(x), \nabla u(x)) \quad \text{в } L^1(\Omega). \quad (6.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Семейство $|\nabla u_\varepsilon|^\alpha$ слабо компактно в $L^1(\Omega)$, так как оно ограничено в $L^{1+\theta}(\Omega)$. В силу неравенства

$$f_\varepsilon(x, u(x), \nabla u_\varepsilon(x)) \leq c_0 + c_2 |\nabla u_\varepsilon(x)|^\alpha$$

слабо компактным в $L^1(\Omega)$ будет и семейство $f_\varepsilon(x, u(x), \nabla u_\varepsilon)$.

Поскольку $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ есть Γ -реализующая последовательность для сходимости (6.5), по принципу локальности (см. п. 1.3) имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_B f_\varepsilon(x, u(x), \nabla u_\varepsilon(x)) dx = \int_B f^{\text{hom}}(u(x), \nabla u(x)) dx,$$

где B – произвольный шар в Ω , что позволяет идентифицировать предел в соотношении (6.7). Лемма доказана.

Теперь можно показать, что для последовательности u_ε из леммы 6.3 выполнено равенство

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, u_\varepsilon(x), \nabla u_\varepsilon(x)) dx = \int_{\Omega} f^{\text{hom}}(u(x), \nabla u(x)) dx, \quad (6.8)$$

т.е. u_ε является Γ -реализующей последовательностью и для сходимости (6.4).

Действительно,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) dx \\ &= \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, u, \nabla u_\varepsilon) dx + \left(\int_{\Omega} f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) dx - \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, u, \nabla u_\varepsilon) dx \right), \end{aligned} \quad (6.9)$$

причем

$$\int_{\Omega} |f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) - f_\varepsilon(x, u, \nabla u_\varepsilon)| dx \stackrel{(1.9)}{\leq} c_3 \int_{\Omega} \sigma(|u_\varepsilon - u|) f_\varepsilon(x, u, \nabla u_\varepsilon) dx = o(1) \quad (6.10)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. На последнем шаге в (6.10) применена лемма 6.4. Переходя к пределу в (6.9) в силу (6.7) и (6.10), получаем (6.8).

Случай стандартных интегралов исчерпан.

6.3. Регуляризация сверхху. Пусть $f(y, s, \xi)$ – периодический по y интегрант класса (1.7), (1.8). Введем интегрант

$$f^\delta(y, s, \xi) = f(y, s, \xi) + \delta |\xi|^\beta, \quad \delta > 0,$$

который, очевидно, удовлетворяет при любом фиксированном $\delta > 0$ оценке

$$\delta |\xi|^\beta \leq f^\delta(y, s, \xi) \leq c_0 + (c_2 + \delta) |\xi|^\beta$$

и является стандартным. Для соответствующих осциллирующих интегралов

$$f_\varepsilon^\delta(x, s, \xi) = f_\varepsilon(x, s, \xi) + \delta |\xi|^\beta, \quad \varepsilon > 0, \quad \delta > 0, \quad (6.11)$$

можно рассмотреть повторный предел $\Gamma\text{-}\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon^\delta$, где

$$\Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon^\delta(x, s, \xi) = (f^\delta)^{\text{hom}}(s, \xi), \quad \Gamma\text{-}\lim_{\delta \rightarrow 0} (f^\delta)^{\text{hom}}(s, \xi) = f_2^{\text{hom}}(s, \xi). \quad (6.12)$$

Первый из этих пределов относится к стандартным интегрантам и определяется по формуле (6.4), поэтому доказательства требует только второе соотношение в (6.12).

Запишем вариационное представление

$$(f^\delta)^{\text{hom}}(s, \xi) = \min_{u \in W_{\text{per}}^{1, \beta}(\square)} \int_{\square} [f(y, s, \xi + \nabla u(y)) + \delta |\xi + \nabla u(y)|^\beta] dy \quad (6.13)$$

и возьмем τ -минимизант $N \in W_{\text{per}}^{1,\beta}(\square)$ для второй вариационной задачи в (2.5). Тогда

$$\begin{aligned} (f^\delta)^{\text{hom}}(s, \xi) &\leq \int_{\square} [f(y, s, \xi + \nabla N(y)) + \delta |\xi + \nabla N(y)|^\beta] dy \\ &= f_2^{\text{hom}}(s, \xi) + \tau + \delta \int_{\square} |\xi + \nabla N(y)|^\beta dy, \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} (f^\delta)^{\text{hom}} \leq f_2^{\text{hom}} + \tau. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности $\tau > 0$ имеем $\lim_{\delta \rightarrow 0} (f^\delta)^{\text{hom}} \leq f_2^{\text{hom}}$. Неравенство в обратную сторону следует из поточечной оценки

$$(f^\delta)^{\text{hom}}(s, \xi) \geq \int_{\square} f(y, s, \xi + \nabla N^\delta(y)) dy \geq f_2^{\text{hom}}(s, \xi),$$

где N^δ – минимизант задачи (6.13). Таким образом, второе равенство в (6.12) следует согласно предложению 1.9 из поточечной сходимости (с монотонным стремлением сверху)

$$(f^\delta)^{\text{hom}} \searrow f_2^{\text{hom}} \quad \text{при } \delta \searrow 0. \quad (6.14)$$

6.4. Построение Γ -реализующей последовательности посредством регуляризации сверху. Пусть $u \in W^{1,\beta}(\Omega)$. Возьмем Γ -реализующую последовательность $u_\varepsilon^\delta \rightharpoonup u$ для сходимости интегрантов f_ε^δ , выраженной первым равенством в (6.12), существование которой доказано в п. 6.2. Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon^\delta(x, u_\varepsilon^\delta, \nabla u_\varepsilon^\delta) dx = \int_{\Omega} (f^\delta)^{\text{hom}}(u, \nabla u) dx,$$

при этом в силу поточечной сходимости (6.14)

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Omega} (f^\delta)^{\text{hom}}(u, \nabla u) dx = \int_{\Omega} f_2^{\text{hom}}(u, \nabla u) dx.$$

Отсюда, поскольку $f_\varepsilon \leq f_\varepsilon^\delta$, имеем

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, u_\varepsilon^\delta, \nabla u_\varepsilon^\delta) dx &\leq \int_{\Omega} (f^\delta)^{\text{hom}}(u, \nabla u) dx = \int_{\Omega} f_2^{\text{hom}}(u, \nabla u) dx + \tau(\delta), \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \tau(\delta) &= 0. \end{aligned}$$

В результате для последовательности u_ε^δ имеем

$$\begin{aligned} u_\varepsilon^\delta &\rightharpoonup u \quad \text{в } W^{1,\alpha}(\Omega) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, u_\varepsilon^\delta, \nabla u_\varepsilon^\delta) dx &\leq \int_{\Omega} f_2^{\text{hom}}(u, \nabla u) dx, \end{aligned}$$

т.е. найдена Γ -реализующая последовательность вида (1.15) для сходимости (6.2) (см. замечание в п. 1.2).

Таким образом, изложен альтернативный способ построения Γ_2 -реализующей последовательности, который применим как для скалярных, так и для векторных задач.

6.5. Регуляризация снизу и ее применение. Регуляризация снизу строится с помощью операции сопряжения (см. определение в начале п. 2.1).

Отметим некоторые свойства сопряжения, полезные в дальнейшем:

- (i) $(f^*)^* = f$;
- (ii) $f_1 \leq f_2 \iff (f_1)^* \geq (f_2)^*$;
- (iii) если f – интегрант класса (1.7), то f^* удовлетворяет оценке коэрцитивности и роста с показателями β' , α' ;
- (iv) если f_ε , f – интегранты класса (1.7) и $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon(\cdot, \xi) = f(\cdot, \xi)$ поточечно для любого ξ , то $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon^*(\cdot, \xi) = f^*(\cdot, \xi)$ поточечно.

Полагая

$${}^\delta f(\cdot, \xi) = (f^*(\cdot, \xi) + \delta|\xi|^{\alpha'})^*, \quad \delta > 0, \quad (6.15)$$

получаем, используя свойства сопряжения, аппроксимацию интегранта f снизу: ${}^\delta f \nearrow f$ поточечно при $\delta \searrow 0$, при этом ${}^\delta f$ – стандартный интегрант с показателем роста α для любого фиксированного $\delta > 0$.

Для семейства осциллирующих интегрантов

$${}^\delta f_\varepsilon(x, s, \xi) = ({}^\delta f(y, s, \xi))|_{y=x/\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad \delta > 0,$$

существует повторный предел $\Gamma\text{-}\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} {}^\delta f_\varepsilon$, где

$$\Gamma\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} {}^\delta f_\varepsilon(x, s, \xi) = ({}^\delta f)^{\text{hom}}(s, \xi), \quad \Gamma\text{-}\lim_{\delta \rightarrow 0} ({}^\delta f)^{\text{hom}}(s, \xi) = f_1^{\text{hom}}(s, \xi). \quad (6.16)$$

Первый из этих пределов относится к усреднению стандартных интегрантов и найден по формуле (6.4). Дальнейшие пояснения касаются второго предела.

Напомним формулы двойственности для усредненных интегрантов (см. вывод в [13]). Эти формулы позволяют опираться на свойства задействованной в (6.15) регуляризации сверху сопряженного интегранта f^* .

Если $f(y, \xi)$ – периодический по y стандартный интегрант класса (1.7) с показателями $\alpha = \beta$, то сопряженный к f^{hom} интегрант задается как

$$(f^{\text{hom}})^*(\xi) = \min_{v \in W} \int_{\square} f^*(y, \xi + v(y)) dy,$$

где $W = V_{\text{sol}}^{\alpha'}(\square)$ – пространство периодических соленоидальных векторов из $L^{\alpha'}(\square)^d$, имеющих нулевое среднее, т.е.

$$W = \left\{ v \in L^{\alpha'}(\square)^d : \operatorname{div} v = 0, \int_{\square} v dy = 0 \right\}.$$

Отсюда, поскольку по определению (6.15)

$$({}^\delta f(\cdot, \xi))^* = f^*(\cdot, \xi) + \delta|\xi|^{\alpha'},$$

получаем вариационное представление для сопряженного к $({}^\delta f)^{\text{hom}}$ интегранта

$$(({}^\delta f)^{\text{hom}})^*(s, \xi) = \min_{v \in W} \int_{\square} [f^*(y, s, \xi + v(y)) + \delta|\xi + v(y)|^{\alpha'}] dy. \quad (6.17)$$

С другой стороны, если f – интегрант класса (1.7) с показателями $\alpha < \beta$, сопряженный к f_1^{hom} интегрант задается как

$$(f_1^{\text{hom}})^*(s, \xi) = \inf_{v \in W} \int_{\square} f^*(y, s, \xi + v(y)) dy. \quad (6.18)$$

Видим, что задача (6.18) – второго типа. Используя τ -минимизант w этой задачи, выводим

$$\begin{aligned} ((\delta f)^{\text{hom}})^*(s, \xi) &\stackrel{(6.17)}{\leq} \int_{\square} [f^*(y, s, \xi + w) + \delta |\xi + w|^{\alpha'}] dy \\ &= (f_1^{\text{hom}})^*(s, \xi) + \tau + \delta \int_{\square} |\xi + w|^{\alpha'} dy, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} ((\delta f)^{\text{hom}})^*(s, \xi) &\leq (f_1^{\text{hom}})^*(s, \xi) + \tau. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Кроме того,

$$((\delta f)^{\text{hom}})^*(s, \xi) \geq \int_{\square} f^*(y, s, \xi + w^\delta(y)) dy \geq (f_1^{\text{hom}})^*(s, \xi),$$

где w^δ – минимизант задачи (6.17). Отсюда и в силу произвольности $\tau > 0$ в (6.19) имеем

$$((\delta f)^{\text{hom}})^*(s, \xi) \searrow (f_1^{\text{hom}})^*(s, \xi) \quad \text{при } \delta \searrow 0.$$

Согласно свойствам сопряжения (ii), (iv) сопряженные интегранты (в данном случае $(\delta f)^{\text{hom}}$ и f_1^{hom}) тоже связаны поточечной сходимостью, причем монотонной снизу, т.е.

$$(\delta f)^{\text{hom}}(s, \xi) \nearrow f_1^{\text{hom}}(s, \xi) \quad \text{при } \delta \searrow 0, \quad (6.20)$$

откуда следует второе предельное соотношение из (6.16).

Сравним соотношения (6.15) и (6.16). Внешне похожие, они служат разным целям при доказательстве Γ -сходимости (2.3), (2.4). С помощью (6.15) доказано существование Γ_2 -реализующей последовательности, а с помощью (6.16) можно проверить свойство полунепрерывности снизу из определения Γ_1 -сходимости. Последнее свойство в полном объеме установлено уже другим методом, и здесь указывается лишь альтернативная схема проверки. Она основана на аргументах, в некоторой степени двойственных к тем, что использованы в п. 6.2 при построении Γ_2 -реализующей последовательности (изучаются верхние пределы, а не нижние, оценка ведется не сверху, а снизу). Воспроизведем детали этой схемы. Поскольку $f_\varepsilon \geq \delta f_\varepsilon$, имеем

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) dx &\geq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \delta f_\varepsilon(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) dx \\ &\stackrel{(6.16)}{\geq} \int_{\Omega} (\delta f)^{\text{hom}}(u, \nabla u) dx \stackrel{(6.20)}{=} \int_{\Omega} f_1^{\text{hom}}(u, \nabla u) dx + \tau(\delta), \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \tau(\delta) = 0. \end{aligned}$$

Отметим одну особенность периодических интегралов, которая использована выше. Сходимости произвольных интегралов $f_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma_i} f_i$, $i = 1, 2$, всегда можно поставить в соответствие повторные пределы для регуляризаций сверху и снизу

$$\Gamma\text{-}\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_\varepsilon^\delta = f^+, \quad \Gamma\text{-}\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} {}^\delta f_\varepsilon = f^-,$$

при этом выполнены неравенства

$$f^- \leq f_1 \leq f_2 \leq f^+. \quad (6.21)$$

Однако, для интегралов вида (2.1) в цепочке соотношений (6.21) имеем равенства $f^- = f_1$, $f_2 = f^+$, благодаря которым регуляризации становятся эффективными при проверке условий Г-сходимости.

§ 7. Усреднение вариационных задач

7.1. Пусть f – интеграл класса (1.7), (1.8).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Назовем интеграл f *регулярным*, если

$$\forall u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega), \quad \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) dx < \infty, \quad (7.1)$$

$$\exists u_n \in C_0^\infty(\Omega), \quad u_n \rightharpoonup u \quad \text{в } W^{1,\alpha}(\Omega),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x, u_n, \nabla u_n) dx = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) dx. \quad (7.2)$$

Примерами регулярных интегралов из класса (1.7), (1.8) служат:

- (i) стандартные интегралы (удовлетворяющие оценке (1.7) с $\alpha = \beta$);
- (ii) интегралы $f(\xi)$, не зависящие от x и s ;
- (iii) интегралы $f(s, \xi)$, не зависящие от x ;
- (iv) интегралы $f(x, s, \xi)$, удовлетворяющие оценке коэрцитивности и роста вида (1.7) с переменным показателем $p(x)$, а именно,

$$c_1 |\xi|^{p(x)} \leq f(x, s, \xi) \leq c_0 + c_2 |\xi|^{p(x)}, \quad c_0 \geq 0, \quad c_1, c_2 > 0,$$

где показатель $p: \mathbb{R}^d \rightarrow [\alpha, \beta]$ подчинен логарифмическому условию (2.7).

Регулярность интегралов вида (ii) из определения 7.1 – это классический результат (см. [18; гл. X, раздел 2.3]). Из нее следует регулярность интегралов вида (iii), благодаря лемме 8.2 и свойству сравнимости (1.10). В частности, регулярны усредненные интегралы $f_1^{\text{hom}}(s, \xi)$, $f_2^{\text{hom}}(s, \xi)$, так как по лемме 3.2 они принадлежат классу (1.7), (1.8). Регулярность интегралов вида (iv) вытекает по лемме 8.2 из регулярности интеграла $|\xi|^{p(x)}$, установленной в [19].

Для нерегулярных интегралов, вообще говоря, не совпадают задачи на отыскание $\min\{F(u) : u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)\}$ и $\inf\{F(u) : u \in C_0^\infty(\Omega)\}$. Может случиться, что инфимум по гладким функциям превосходит минимум по всем допустимым функциям, т.е.

$$\min\{F(u) : u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)\} < \inf\{F(u) : u \in C_0^\infty(\Omega)\}. \quad (7.3)$$

Факт строгого неравенства (7.3), называемый эффектом Лаврентьева, был замечен впервые в многомерных вариационных задачах В. В. Жиковым в [5]. Таким образом, для функционала F могут существовать, по крайней мере, две различные задачи Дирихле, называемые задачами первого и второго типов.

В теореме 2.3 рассматриваются задачи Дирихле

$$\begin{aligned} E_1^\varepsilon &= \min_{u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)} F_\varepsilon(u), & E_2^\varepsilon &= \inf_{u \in C_0^\infty(\Omega)} F_\varepsilon(u), \\ F_\varepsilon(u) &= \int_{\Omega} [f_\varepsilon(x, u, \nabla u) - z \cdot \nabla u] dx, & z &\in L^\infty(\Omega)^d, \end{aligned} \quad (7.4)$$

и устанавливается их связь с соответствующими усредненными задачами

$$\begin{aligned} E_1 &= \min_{u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)} F_1(u), & E_2 &= \min_{u \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)} F_2(u), \\ F_i(u) &= \int_{\Omega} [f_i^{\text{hom}}(u, \nabla u) - z \cdot \nabla u] dx, & i &= 1, 2. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Поскольку предельные интегранты $f_i^{\text{hom}}(s, \xi)$ регулярны, для каждого из них существует единственная задача Дирихле.

7.2. Доказательство теоремы 2.3. Легко увидеть, что функционал F_ε коэрцитивен на $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$, а значит, последовательность минимизантов u_ε первой задачи в (7.4) ограничена в $W^{1,\alpha}(\Omega)$, и можно считать, что $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$. Воспользуемся свойствами установленной ранее (см. теорему 2.1) сходимости $f_\varepsilon(x, s, \xi) \xrightarrow{\Gamma_1} f_1^{\text{hom}}(s, \xi)$. По условию 1) из определения Γ_1 -сходимости имеем

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} E_1^\varepsilon = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq F_1(u) \geq E_1. \quad (7.6)$$

С другой стороны, найдется элемент $\bar{u} \in C_0^\infty(\Omega)$ такой, что

$$F_1(\bar{u}) \leq E_1 + \tau.$$

Это возможно в силу регулярности интегранта $f_1^{\text{hom}}(s, \xi)$. Используя Γ_1 -реализующую последовательность

$$\bar{u}_\varepsilon \in W_0^{1,\alpha}(\Omega), \quad \bar{u}_\varepsilon \rightharpoonup \bar{u} \quad \text{в } W^{1,\alpha}(\Omega), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon) = F_1(\bar{u}),$$

выводим

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} E_1^\varepsilon \leq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(\bar{u}_\varepsilon) \leq E_1 + \tau.$$

В силу произвольной малости $\tau > 0$ это означает, что в (7.6) наблюдаются равенства, т.е. имеет место сходимость энергий

$$E_1^\varepsilon = F_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow F_1(u) = E_1.$$

Отсюда следует, что $u = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon$ есть минимизант первой задачи в (7.5), так что “минимизанты сходятся к минимизанту” в том смысле, как оговорено в теореме 2.3.

Утверждение теоремы 2.3 в отношении задачи E_2^ε доказывается аналогично.

7.3. Теперь докажем лемму 6.3. Предварительно получим вспомогательное утверждение о построении Γ -реализующей последовательности.

Пусть $f_\varepsilon = f_\varepsilon(x, \xi)$ – интегранты стандартного типа, т.е. $\alpha = \beta$ в оценке (1.7), $f_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} f$. Рассмотрим вариационную задачу

$$\min_{w \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)} \int_{\Omega} [f_\varepsilon(x, \nabla u + \nabla w) - z \cdot \nabla w + |w|^\alpha] dx, \quad (7.7)$$

где $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $z \in L^\infty(\Omega)^d$ – заданные функции. Как и выше, легко видеть, что минимизируемый функционал коэрцитивен на $W_0^{1,\alpha}(\Omega)$, а значит, последовательность минимизантов w_ε ограничена в $W^{1,\alpha}(\Omega)$, и можно считать, что $w_\varepsilon \rightharpoonup \bar{w}$. Кроме того, имеет место сходимость энергий

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} [f_\varepsilon(x, \nabla u + \nabla w_\varepsilon) - z \cdot \nabla w_\varepsilon + |w_\varepsilon|^\alpha] dx \\ = \min_{w \in W_0^{1,\alpha}(\Omega)} \int_{\Omega} [f(x, \nabla u + \nabla w) - z \cdot \nabla w + |w|^\alpha] dx \end{aligned} \quad (7.8)$$

и предельная функция $\bar{w}$ есть минимизант предельной задачи.

Распорядимся выбором z так, чтобы предельная задача имела единственное нулевое решение. С этой целью возьмем

$$z(x) = \partial f(x, \nabla u(x)), \quad (7.9)$$

где $\partial f(\cdot, \xi)$ – субградиент выпуклой по ξ функции $f(\cdot, \xi)$. Из критерия субградиента (см., например, [18; гл. I, предложение 5.1]) выводим поточечное неравенство

$$f(x, \nabla u) + f^*(x, z) \equiv \nabla u \cdot z \leq C|z|,$$

так как $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Отсюда и из оценки для сопряженного интегранта

$$f^*(x, z) \geq \tilde{c}_1 |z|^{\alpha'} - c_0$$

легко заключить, что $z \in L^\infty(\Omega)^d$, как и предполагается в задаче (7.7).

По выпуклости

$$f(x, \nabla u + \nabla w) - z \cdot \nabla w \geq f(x, \nabla u) \quad \forall w \in W^{1,\alpha}(\Omega),$$

так что $\bar{w} \equiv 0$ есть минимизант предельной задачи, притом единственный за счет присутствия в функционале строго выпуклой компоненты $|w|^\alpha$ (которую можно опустить, если сам интегрант $f(\cdot, \xi)$ строго выпуклый). Следовательно, $w_\varepsilon \rightharpoonup 0$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$ и сходимость энергий (7.8) принимает вид

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f_\varepsilon(x, \nabla u + \nabla w_\varepsilon) dx = \int_{\Omega} f(x, \nabla u) dx, \quad (7.10)$$

поскольку функционалы $\int_{\Omega} z \cdot \nabla w dx$ и $\int_{\Omega} |w|^\alpha dx$ слабо непрерывны на $W^{1,\alpha}(\Omega)$

и сходятся к нулю на последовательности $w_\varepsilon \xrightarrow{W^{1,\alpha}} 0$. Равенство (7.10) показывает, что последовательность $u_\varepsilon = u + w_\varepsilon$ является Γ -реализующей для сходимости $f_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} f$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. Построенная выше Γ -реализующая последовательность u_ε обладает свойством повышенной суммируемости градиента, т.е. для u_ε выполнена оценка (6.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Повышенная суммируемость градиента решения вариационной задачи типа (7.7) хорошо известна (см. [20], [21; гл. V]). Тогда это свойство имеет место и для последовательности u_ε , которая строится указанным выше способом.

Лемма 6.3 есть очевидное следствие предложения 7.2.

§ 8. О свойствах интегрального функционала

Обсудим подробнее отмеченные ранее свойства определенного в (1.1) интегрального функционала F , если интегрант принадлежит классу (1.7), (1.8).

1) Функционал F *коэрцитивен* в банаховом пространстве $V = W_0^{1,\alpha}(\Omega)$, так как в силу оценки (1.7)

$$F(u) \geq c_1 \|\nabla u\|_{L^\alpha(\Omega)}^\alpha, \quad \alpha > 1,$$

а по неравенству Фридрихса норму в V можно ввести как $\|u\|_V = \|\nabla u\|_{L^\alpha(\Omega)}$.

2) Интегральный функционал вида (1.1) *слабо полунепрерывен снизу* на $W^{1,\alpha}(\Omega)$ при весьма общих условиях (см., например, [22], [23; гл. 1, раздел 1]). В наших предположениях для проверки этого свойства можно сослаться на следующее утверждение.

ЛЕММА 8.1 (см. [14; лемма 10.1]). Пусть $g_\varepsilon(x, \xi)$, $g(x, \xi)$ – интегранты класса (1.7) и имеется поточечная сходимость

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g_\varepsilon(x, \xi) = g(x, \xi)$$

для любых $\xi \in \mathbb{R}^d$ и почти всех $x \in \Omega$.

Тогда если $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W^{1,1}(\Omega)$, то

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} g_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} g(x, \nabla u) dx.$$

Положим $g_\varepsilon(x, \xi) = f(x, u_\varepsilon(x), \xi)$. Считая $u_\varepsilon(x) \rightarrow u(x)$ для почти всех $x \in \Omega$, в силу липшицевости $f(x, s, \xi)$ по s имеем поточечную сходимость $f(x, u_\varepsilon(x), \xi) \rightarrow f(x, u(x), \xi)$ в Ω . Следовательно,

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} f(x, u_\varepsilon, \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) dx, \quad \text{если } u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ в } W^{1,\alpha}(\Omega),$$

и свойство слабой полунепрерывности снизу получено.

3) F *непрерывен* на $W^{1,\beta}(\Omega)$, т.е.

$$F(v) - F(u) = o(1) \quad \text{при } v \rightarrow u \text{ в } W^{1,\beta}(\Omega). \quad (8.1)$$

Действительно, отображение $u(x) \rightarrow f(x, u(x), \nabla u(x))$ действует из $W^{1,\beta}(\Omega)$ в $L^1(\Omega)$ в силу верхней оценки (1.7) и по теореме Красносельского (см. [18; гл. IV, предложение 1.1]) непрерывно в нормированной топологии. Отсюда в силу неравенства

$$|F(v) - F(u)| \leq \int_{\Omega} |f(x, v(x), \nabla v(x)) - f(x, u(x), \nabla u(x))| dx$$

получаем (8.1).

4) Обсудим свойство *регулярности* – определение регулярного интегранта дано в § 8. Для проверки регулярности интегрантов класса (1.7), (1.8) полезна

ЛЕММА 8.2. Пусть $\tilde{f}(\cdot, \xi)$, $f(\cdot, s, \xi)$ каратеодориевы, $\tilde{f}(x, \xi)$ выпуклый по ξ и регулярный. Тогда если выполнено неравенство

$$c^{-1} \tilde{f}(x, \xi) \leq f(x, s, \xi) \leq c \tilde{f}(x, \xi), \quad c > 0, \quad (8.2)$$

то $f(x, s, \xi)$ также регулярен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что выполнено (7.1). Тогда в силу нижней оценки в (8.2)

$$\tilde{F}(u) = \int_{\Omega} \tilde{f}(x, \nabla u) dx < \infty,$$

и по предположению найдется

$$\begin{aligned} u_n &\in C_0^\infty(\Omega), \quad u_n \rightarrow u \quad \text{в } W^{1,\alpha}(\Omega), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \tilde{f}(x, \nabla u_n) dx &= \int_{\Omega} \tilde{f}(x, \nabla u) dx. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Заметим, что для выпуклого функционала, каким является $\tilde{F}$, в силу леммы Маура значение $\tilde{F}(u)$ достижимо по сильно сходящейся последовательности, что учтено уже в (8.3). Покажем, что для u_n выполнено также равенство из (7.2). Можно считать, что $u_n \rightarrow u$, $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$, а значит, $\tilde{f}(x, \nabla u_n) \rightarrow \tilde{f}(x, \nabla u)$, $f(x, u_n, \nabla u_n) \rightarrow f(x, u, \nabla u)$ поточечно почти всюду в Ω . Кроме того, по теореме Шеффе (см. ниже) $\tilde{f}(x, \nabla u_n) \rightarrow \tilde{f}(x, \nabla u)$ в $L^1(\Omega)$, откуда выводим в силу верхнего неравенства в (8.2) равностепенную интегрируемость семейства $f(x, u_n, \nabla u_n)$. Тогда равенство в (7.2) имеет место по теореме Лебега. Лемма доказана.

Для удобства чтения приводится

ТЕОРЕМА ШЕФФЕ. Пусть $v_n \geq 0$, $v_n(x) \rightarrow v(x)$ для почти всех $x \in \Omega$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} v_n dx = \int_{\Omega} v dx.$$

Тогда $v_n \rightarrow v$ в $L^1(\Omega)$.

§ 9. К доказательству леммы 3.1

В этом параграфе доказаны соотношения (3.3), (3.4).

9.1. Предварительно напомним, что сопряженные к усредненным интегралам f_1^{hom} и f_2^{hom} вычисляются по формулам (см. [13])

$$g_2^{\text{hom}} = (f_1^{\text{hom}})^*(\xi) = \inf_{v \in V_{\text{sol}}^{\alpha'}(\square)} \int_{\square} f^*(y, \xi + v) dy, \quad (9.1)$$

$$g_1^{\text{hom}} = (f_2^{\text{hom}})^*(\xi) = \inf_{v \in V_{\text{sol}}^{\beta'}(\square)} \int_{\square} f^*(y, \xi + v) dy, \quad (9.2)$$

где $V_{\text{sol}}^{\gamma}(\square)$ – пространство периодических соленоидальных векторов из $L^{\gamma}(\square)^d$, имеющих нулевое среднее. Для f^* справедлива оценка

$$-c_0 + \tilde{c}_1 |\xi|^{\beta'} \leq f^*(x, \xi) \leq c_0 + \tilde{c}_2 |\xi|^{\alpha'}, \quad \tilde{c}_1 > 0,$$

из которой видно, что (9.1) – это задача второго типа, а (9.2) – первого.

Доказательство соотношений (3.3), (3.4) разобьем на несколько этапов.

1) Начнем с вывода неравенства (3.4). Удобно предварительно произвести срезку функции u_{ε}

$$u_{\varepsilon} k = \begin{cases} u_{\varepsilon}, & \text{если } |u_{\varepsilon}| \leq k, \\ \pm k, & \text{если } |u_{\varepsilon}| > k, \end{cases}$$

и аналогичную срезку делаем для u .

Положим также $T_{\varepsilon}(k) = \{x \in \Omega, |u_{\varepsilon}| > k\}$. Ясно, что $|T_{\varepsilon}(k)| \leq ck^{-1}$.

Согласно свойствам срезки имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_{\varepsilon}(x, \nabla u_{\varepsilon} k) dx &= \int_{\Omega} f_{\varepsilon}(x, \nabla u_{\varepsilon}) dx - \int_{T_{\varepsilon}(k)} f_{\varepsilon}(x, \nabla u_{\varepsilon}) dx + \int_{T_{\varepsilon}(k)} f_{\varepsilon}(x, 0) dx \\ &\leq \int_{\Omega} f_{\varepsilon}(x, \nabla u_{\varepsilon}) dx + c_0 |T_{\varepsilon}(k)|, \end{aligned}$$

где использовалась оценка (1.7). Кроме того, по слабой полунепрерывности снизу

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_2^{\text{hom}}(\nabla u^{(k)}) dx \geq \int_{\Omega} f_2^{\text{hom}}(\nabla u) dx,$$

поскольку $\nabla u^{(k)} \rightharpoonup \nabla u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$ при $k \rightarrow \infty$.

Отсюда видно, что неравенство (3.4) достаточно доказать для $u^{(k)}$ при фиксированной k . Так как $|u_{\varepsilon} k| \leq k$, то $u_{\varepsilon} k \rightarrow u^{(k)}$ не только в $L^{\alpha}(\Omega)$, но и в $L^{\beta}(\Omega)$. Итак, можно с самого начала считать, что потенциалы u_{ε} обладают дополнительным свойством: $u_{\varepsilon} \rightarrow u$ в $L^{\beta}(\Omega)$.

2) Обозначим через $v(y) = v(y, \xi)$ некоторое решение вариационной задачи (9.2) и положим $v_{\varepsilon}(x) = v(\varepsilon^{-1}x)$. По свойству среднего значения

$$f_{\varepsilon}^*(x, \xi + v_{\varepsilon}(x)) \rightarrow g_1^{\text{hom}}(\xi) \quad \text{в } L^1(\Omega), \quad (9.3)$$

$$v_{\varepsilon} \rightarrow 0 \quad \text{в } L^{\beta'}(\Omega). \quad (9.4)$$

Требуется проверить сходимость

$$\nabla u_\varepsilon \cdot v_\varepsilon \rightharpoonup 0 \quad \text{в } L^1(\Omega). \quad (9.5)$$

Сначала установим, что $\nabla u_\varepsilon \cdot v_\varepsilon \xrightarrow{*} 0$ в $L^1(\Omega)$, т.е.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi \nabla u_\varepsilon \cdot v_\varepsilon \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega). \quad (9.6)$$

Действительно, так как $\operatorname{div} v_\varepsilon = 0$, то

$$\int_{\Omega} \varphi \nabla u_\varepsilon \cdot v_\varepsilon \, dx = \int_{\Omega} \nabla(\varphi \nabla u_\varepsilon) \cdot v_\varepsilon \, dx - \int_{\Omega} u_\varepsilon \nabla \varphi \cdot v_\varepsilon \, dx = - \int_{\Omega} u_\varepsilon \nabla \varphi \cdot v_\varepsilon \, dx. \quad (9.7)$$

Последний интеграл стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$ в силу (9.4) и сильной сходимости $u_\varepsilon \rightarrow u$ в L^β . Соотношение (9.6) доказано. Отметим, что именно здесь использовано условие $u_\varepsilon \in W^{1,\beta}(\Omega)$ – без него нельзя интегрировать по частям в (9.7).

Теперь, чтобы получить (9.5), достаточно проверить, что семейство

$$\nabla u_\varepsilon \cdot v_\varepsilon - \text{равностепенно интегрируемо.} \quad (9.8)$$

В силу Δ_2 -условия на f^* имеем

$$f_\varepsilon^*(x, \pm 2\xi) \leq c(f_\varepsilon^*(x, \xi) + 1),$$

откуда легко получить неравенство

$$f_\varepsilon^*(x, \pm t\xi) \leq c_1(t)f_\varepsilon^*(x, \xi) + c_2(t) \quad \forall t \geq 1.$$

Тогда по неравенству Юнга

$$|\nabla u_\varepsilon \cdot (\xi + v_\varepsilon)| = t^{-1} |\nabla u_\varepsilon \cdot t(\xi + v_\varepsilon)| \leq t^{-1} f_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) + t^{-1} c_1(t) f_\varepsilon^*(x, \xi + v_\varepsilon) + t^{-1} c_2(t),$$

и для любого измеримого $A \subset \Omega$

$$\int_A |\nabla u_\varepsilon \cdot (\xi + v_\varepsilon)| \, dx \leq t^{-1} C + t^{-1} c_1(t) \int_A f_\varepsilon^*(x, \xi + v_\varepsilon) \, dx + t^{-1} c_2(t) |A|.$$

Первое слагаемое делаем меньше $\frac{\delta}{2}$ за счет выбора $t = t_0$, после чего остальные слагаемые делаем меньше $\frac{\delta}{2}$ за счет малости $|A|$. Последнее возможно в силу равностепенной интегрируемости семейства $f_\varepsilon^*(x, \xi + v_\varepsilon(x))$ (см. (9.3)). Итак, доказано (9.8), а следовательно, и (9.5).

3) По неравенству Юнга

$$f_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \geq \nabla u_\varepsilon \cdot (\xi + v_\varepsilon) - f_\varepsilon^*(x, \xi + v_\varepsilon),$$

откуда, интегрируя и переходя к пределу с учетом (9.5), (9.3), выводим

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K f_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) \, dx \geq \int_K \nabla u \cdot \xi \, dx - \int_K g_1^{\text{hom}}(\xi) \, dx$$

для любого $\xi \in \mathbb{R}^d$. Отсюда разбиением множества K на части получаем

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K f_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) dx \geq \int_K \nabla u \cdot h dx - \int_K g_1^{\text{hom}}(h) dx \quad (9.9)$$

для любого кусочно постоянного на K вектора $h(x)$. Правая часть неравенства (9.9) представляет собой непрерывную по $h \in L^{\alpha'}(K)^d$ функцию, а кусочно постоянные векторы плотны в $L^{\alpha'}(K)^d$. Поэтому

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_K f_\varepsilon(x, \nabla u_\varepsilon) dx &\geq \sup_{h \in L^{\alpha'}(K)^d} \left\{ \int_K (\nabla u \cdot h dx - g_1^{\text{hom}}(h)) dx \right\} \\ &= \int_K f_2^{\text{hom}}(\nabla u) dx \end{aligned}$$

в силу классической теоремы о сопряженном функционале. Для удобства чтения приведем формулировку этой теоремы.

ТЕОРЕМА О СОПРЯЖЕННОМ ФУНКЦИОНАЛЕ (см. [18; гл. IX, раздел 2.1]). Пусть интегрант $f(x, \xi)$ принадлежит классу (1.7). Тогда для любого $z \in L^1(K)^d$

$$\begin{aligned} \int_K f(x, z(x)) dx &= \sup_{h \in L^\infty(K)^d} \int_K \{h \cdot z - f^*(x, h(x))\} dx \\ &= \sup_{h \in L^1(K)^d} \int_K \{h \cdot z - f(x, h(x))\} dx. \end{aligned}$$

Тем самым неравенство (3.4) доказано.

4) Неравенство (3.3) доказывается даже проще. Вариационная задача (9.1) может не иметь минимизанта, но обладает гладкой минимизирующей последовательностью. Пусть $v(y) = v(y, \xi)$ – элемент из $C_{\text{per}}^\infty(\square)^d$, реализующий инфимум в (9.1) с точностью до $\delta > 0$. Далее используем те же рассуждения, что и раньше, но с некоторым упрощением. Прием срезки не нужен, соотношение (9.6) устанавливается непосредственно, Δ_2 -условие на f_ε^* не требуется, равномерная интегрируемость семейства $\nabla u_\varepsilon \cdot v_\varepsilon$ проверяется по неравенству Гёльдера.

9.2. Поясним доказательство векторной версии неравенства (3.4). Этап 1) отсутствует, этап 3) остается без изменений, а на этапе 2) доказательство сходимости (9.5) строится несколько иначе. Сначала устанавливаем слабую компактность в $L^1(\Omega)$ семейства $\nabla u_\varepsilon \cdot v_\varepsilon$, как и прежде, через свойство равномерной интегрируемости. Но, чтобы идентифицировать предел, используем вместо (9.6), (9.7) более тонкие соображения, связанные с компенсированной компактностью.

ЛЕММА О КОМПЕНСИРОВАННОЙ КОМПАКТНОСТИ (см. [17]). Пусть выполнены условия:

- (i) $v_\varepsilon \rightharpoonup v$ в $L^{\beta'}(\Omega)^d$, $\text{div } v_\varepsilon = 0$;
- (ii) $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ в $W^{1,\alpha}(\Omega)$;

- (iii) произведение $\nabla u_\varepsilon \cdot v_\varepsilon$ ограничено в $L^1(\Omega)$;
 - (iv) $u_\varepsilon \in W^{1,\beta}(\Omega)$;
 - (v) показатели α и β подчинены соотношению (6.3).
- Тогда имеет место слабая сходимость мер

$$\nabla u_\varepsilon \cdot v_\varepsilon dx \rightharpoonup d\mu, \quad d\mu = \nabla u \cdot v dx + d\mu^s, \quad (9.10)$$

где μ^s – сингулярная относительно меры Лебега компонента.

В нашем случае все условия этой леммы выполнены, при этом с учетом (9.4) и слабой компактности в $L^1(\Omega)$ семейства $\nabla u_\varepsilon \cdot v_\varepsilon$ получаем вместо (9.10) сходимость (9.5).

Список литературы

- [1] E. De Giorgi, T. Franzoni, “Su un tipo di convergenza variazionale”, *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8), **58**:6 (1975), 842–850.
- [2] E. De Giorgi, G. Letta, “Une notion générale de convergence faible des fonctions croissantes d'ensemble”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **4**:1 (1977), 61–99.
- [3] E. De Giorgi, “Sulla convergenza di alcune successioni di integrali del tipo dell'area”, *Rend. Mat.* (6), **8** (1975), 277–294.
- [4] L. Carbone, C. Sbordone, “Some properties of Γ -limits of integral functionals”, *Ann. Mat. Pura Appl.* (4), **122**:1 (1979), 1–60.
- [5] В. В. Жиков, “Вопросы сходимости, двойственности и усреднения для функционалов вариационного исчисления”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **47**:5 (1983), 961–998; англ. пер.: V. V. Zhikov, “Questions of convergence, duality, and averaging for functionals of the calculus of variations”, *Math. USSR-Izv.*, **23**:2 (1984), 243–276.
- [6] В. В. Жиков, “О переходе к пределу в нелинейных вариационных задачах”, *Матем. сб.*, **183**:8 (1992), 47–84; англ. пер.: V. V. Zhikov, “On passage to the limit in nonlinear variational problems”, *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, **76**:2 (1993), 427–459.
- [7] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Наука, М., 1993, 464 с.
- [8] V. V. Jikov, S. M. Kozlov, O. A. Oleinik, *Homogenization of differential operators and integral functionals*, Springer-Verlag, Berlin, 1994, xii+570 с.
- [9] G. Dal Maso, *An introduction to Γ -convergence*, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **8**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993, xiv+340 pp.
- [10] A. Braides, A. Defranceschi, *Homogenization of multiple integrals*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **12**, The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, New York, 1998, xiv+298 pp.
- [11] A. Braides, *Γ -convergence for beginners*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **22**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2002, xii+218 pp.
- [12] К. Куратовский, *Топология*, т. 1, Мир, М., 1966, 594 с.; пер. с англ.: K. Kuratowski, *Topology*, v.I, new edition, revised and augmented, Academic Press, Warsaw; Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1966, xx+560 pp.
- [13] В. В. Жиков, “Эффект Лаврентьева и усреднение нелинейных вариационных задач”, *Дифференц. уравнения*, **27**:1 (1991), 42–50; англ. пер.: V. V. Zhikov, “The Lavrent'ev effect and averaging of nonlinear variational problems”, *Differential Equations*, **27**:1 (1991), 32–39.
- [14] В. В. Жиков, “О вариационных задачах и нелинейных уравнениях с нестандартными условиями роста”, *Проблемы матем. анализа*, **54** (2011), 23–112; англ.

- пер.: V. V. Zhikov, “On variational problems and nonlinear elliptic equations with nonstandard growth conditions”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **173**:5 (2011), 463–570.
- [15] E. Weinan, “A class of homogenization problems in the calculus of variations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **44**:7 (1991), 733–759.
- [16] В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, “О Γ -сходимости интегрантов с нестандартными условиями коэрцитивности и роста”, *Проблемы матем. анализа*, 2013, № 74, 85–108; англ. пер.: V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, “ Γ -convergence of integrands with nonstandard coercivity and growth conditions”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **196**:4 (2014), 535–566.
- [17] В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, “О принципе компенсированной компактности”, *Докл. РАН*, **433**:5 (2010), 590–595; англ. пер.: V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, “On the compensated compactness principle”, *Dokl. Math.*, **82**:1 (2010), 590–595.
- [18] И. Экланд, Р. Темам, *Выпуклый анализ и вариационные проблемы*, Мир, М., 1979, 399 с.; пер. с англ.: I. Ekeland, R. Temam, *Convex analysis and variational problems*, Stud. Math. Appl., **1**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–Oxford; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1976, ix+402 pp.
- [19] V. V. Jikov, “On Lavrentiev’s phenomenon”, *Russian J. Math. Phys.*, **3**:2 (1995), 249–269.
- [20] M. Giaquinta, E. Giusti, “On the regularity of the minima of variational integrals”, *Acta Math.*, **148**:1 (1982), 31–46.
- [21] M. Giaquinta, *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems*, Ann. of Math. Stud., **105**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1983, vii+296 pp.
- [22] A. D. Ioffe, “On lower semicontinuity of integral fuctionals. I”, *SIAM J. Control Optim.*, **15**:4 (1977), 521–538.
- [23] М. Струве, *Вариационные методы. Приложения к нелинейным уравнениям в частных производных и гамильтоновым системам*, МЦНМО, М., 2010, 320 с.; пер. с англ.: M. Struwe, *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, 4th ed., Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **34**, Springer-Verlag, Berlin, 2008, xx+302 pp.

Василий Васильевич Жиков
(Vasilii V. Zhikov)

Владимирский государственный университет
им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
E-mail: zhikov@vlsu.ru

Поступила в редакцию
11.05.2013 и 22.11.2013

Светлана Евгеньевна Пастухова
(Svetlana E. Pastukhova)

Московский государственный технический
университет радиотехники, электроники и
автоматики
E-mail: pas-se@yandex.ru