Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Локуцкий, Гамильтоновость потока особых траекторий, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 3, 133–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8248>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 07:39:44

УДК 517.97

Л. В. Локуцкий

Гамильтоновость потока особых траекторий

Принцип максимума Понтрягина сводит задачи оптимального управления к изучению гамильтоновых систем ОДУ с разрывной правой частью. Оптимальный синтез – это совокупность решений этой системы с фиксированным конечным (или начальным) условием, однозначно покрывающих некоторую область фазового пространства. Определяющую роль при построении оптимального синтеза играют особые траектории – траектории, идущие вдоль поверхности N разрыва правой части гамильтоновой системы ОДУ. Цель работы – доказать, что совокупность особых траекторий образует гамильтонов поток на некотором подмногообразии в N . В работе в том числе доказано, что поток особых траекторий в задаче управления намагниченным волчком Лагранжа в переменном магнитном поле является вполне интегрируемым по Лиувиллю и включается в поток некоторой суперинтегрируемой гладкой гамильтоновой системы в объемлющем пространстве.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: особые траектории, особые экстремали, гамильтоновы системы, интегрируемые и суперинтегрируемые системы, волчок Лагранжа.

DOI: 10.4213/sm8248

§ 1. Введение

Хорошо известно, что принцип максимума Понтрягина сводит решение задач оптимального управления к нахождению решений гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Гамильтониан $\mathcal{H}$ этой системы часто является негладким, а правая часть системы соответственно терпит разрыв на некотором стратифицированном многообразии N . Пусть N_1 – страта N коразмерности 1. Нетрудно показать, что предел поля скоростей системы ξ в силу гамильтоновости может иметь на N_1 лишь тангенциальный скачок. Большинство траекторий системы пересекает N_1 трансверсально, однако в некоторых точках предел поля ξ с обеих сторон от N_1 становится касательным к N_1 . В этом случае возникают траектории системы, целиком лежащие в N_1 . Их принято называть особыми.

В основе исследования геометрических свойств гладкой системы ОДУ лежит изучение особых точек и предельных циклов системы. Аналогично, особые траектории гамильтоновой системы с разрывной правой частью обычно играют ключевую роль при построении полного фазового портрета. Во-первых, их сравнительно нетрудно находить с помощью дифференцирования гамильтониана принципа максимума Понтрягина. Во-вторых, особые траектории

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 11-01-00986-а и № 13-01-00642).

определяют строение поля неособых траекторий в своей окрестности. В огромном спектре задач удается доказать так называемую “теорему о магистрали”, т.е. показать, что любая оптимальная траектория за конечное время выходит на особую траекторию¹, и далее оптимальное движение продолжается вдоль особой траектории (см. [1]).

Достаточно много работ посвящено изучению оптимальности особых траекторий. Известны как необходимые условия (см. [2]–[4]), так и достаточные условия (см. [5]) второго порядка. Наиболее употребляемую форму эти условия принимают в задачах субримановой геометрии (см. [6]).

Настоящая работа, однако, посвящена не исследованию свойств одной отдельно взятой особой траектории, а изучению потока всех особых траекторий системы в целом. Доказана теорема о том, что множество всех особых траекторий образует симплектическое подмногообразие $\mathcal{S}$, а их поток на $\mathcal{S}$ является гамильтоновым относительно ограничения $\mathcal{H}$ на $\mathcal{S}$. В качестве приложения этой теоремы в § 6 доказано, что поток особых траекторий в задаче оптимального управления волчком Лагранжа в переменном магнитном поле является вполне интегрируемым по Лиувиллю на $\mathcal{S}$ и включается в поток некоторой суперинтегрируемой гладкой гамильтоновой системы в объемлющем пространстве.

С понятием особой траектории тесно связано понятие порядка, характеризующего в каком-то смысле степень вырождения системы. Есть два классических определения – определение локального порядка траектории (local order) и определение глобального порядка системы (intrinsic order; см. [7]). Первое определение дает хорошие инструменты для исследования оптимальности одной отдельной особой траектории и работает в большинстве конкретных задач. Второе определение, напротив, часто оказывается не рабочим, но уж если его можно применить в какой-то задаче, то оно позволяет не только сформулировать необходимые и достаточные условия оптимальности особой траектории удобным образом в терминах скобок Пуассона, но и дает возможность исследовать поведение неособых траекторий в окрестности особой траектории. Например, хорошо известна теорема о невозможности регулярного сопряжения неособой траектории с особой траекторией четного порядка (см. [8]), верная в терминах глобального порядка и, вообще говоря, неверная в терминах локального порядка (см. [9]).

В статье предложено новое, наиболее естественное на взгляд автора, определение порядка особой траектории. Оно не требует (обычно неудобного) дифференцирования управляющего параметра (в отличие от локального порядка) и не требует коммутирования серии гамильтонианов (в отличие от глобального порядка). При этом оно сочетает в себе достоинства обоих классических определений. А именно, новое определение, во-первых, позволяет изучать оптимальность особой траектории и поведение неособых траекторий в ее окрестности, используя гамильтонов формализм и алгебры Ли скобок Пуассона (как и определение глобального порядка), а во-вторых, оно работает в большинстве конкретных задач (как и определение локального порядка). Теорема о гамильтоновости особого потока доказана в терминах нового определения порядка,

¹Единственность решения теряется в окрестности особых траекторий; см. § 2.

хотя верна и в более ограничительном случае глобального порядка. В терминах нового определения также доказана теорема о сопряжении, обобщающая классическую теорему о сопряжении.

§ 2. Гамильтоновы системы с негладким гамильтонианом

Пусть $\mathcal{M}$ – $2n$ -мерное симплектическое многообразие с симплектической формой² $\omega \in \Lambda^2(\mathcal{M})$. Через i_ω обозначим канонический изоморфизм $i_\omega: T^*\mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$, индуцированный формой³ ω . В статье исследуются системы с кусочно гладкими гамильтонианами. Система ОДУ, определяемая кусочно гладким гамильтонианом, имеет разрывную правую часть. Поэтому мы начнем с общепринятого определения траектории такой системы, которое совпадает в точках гладкости гамильтониана с классическим определением для гладких систем ОДУ.

Пусть $\mathcal{H}$ – непрерывный, кусочно гладкий гамильтониан с множеством N точек разрыва первой производной (т.е. $\mathcal{H} \in C^\infty(\mathcal{M} \setminus N)$ и $\mathcal{H} \in C^0(\mathcal{M})$), где множество точек негладкости N является стратифицированным подмногообразием $\mathcal{M}$, не содержащим стратов полной размерности $2n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Абсолютно непрерывная траектория $x(t)$ является *траекторией системы с гамильтонианом $\mathcal{H}$* , если для почти всех t выполнено дифференциальное включение $\dot{x}(t) \in i_\omega K(x(t))$, где $K(x_0) \subseteq T_{x_0}^*\mathcal{M}$ – наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все предельные точки $d\mathcal{H}(x)$ при $x \rightarrow x_0$.

Такое определение гарантирует существование траектории (подробнее о системах ОДУ с разрывной правой частью см. [9]), однако единственность теряется. Часто встречаются случаи, когда существуют траектории, целиком лежащие в N . Причем в каждую точку такой траектории входят траектории, не лежащие в N (и выходят из нее). Чтобы наглядно продемонстрировать этот феномен, рассмотрим классический

ПРИМЕР 1. Пусть $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$, $x = (q, p)$ и $\mathcal{H} = -\frac{1}{2}q^2 + |p|$ – кусочно гладкий гамильтониан с поверхностью негладкости $p = 0$ (рис. 1). Траектория может войти в начало координат по одной из ветвей $p = -q^2 \operatorname{sign} q$, простоять в начале координат любое время (в том числе бесконечное) и выйти по одной из ветвей $p = q^2 \operatorname{sign} q$. Во всех остальных случаях решение единственно. Существует ровно одна траектория $q(t) = p(t) = 0$, которая остается в $N = \{(q, p) : p = 0\}$ при всех t .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Траекторию $x(t)$, $t \in (t_0, t_1)$, будем называть *особой*, если она лежит на множестве точек разрыва $x(t) \in N$ при $t \in (t_0, t_1)$.

Нас будет интересовать поведение особых траекторий гамильтоновой системы на поверхности разрыва $\mathcal{H}$ коразмерности 1. Предположим, что в окрестности V точки $x_0 \in N$ множество N является гладкой гиперповерхностью,

²То есть $\omega(x)$ – невырожденная кососимметрическая форма на касательном пространстве $T_x\mathcal{M}$. В канонических координатах (q, p) форма ω принимает вид $\omega = dp \wedge dq$.

³В канонических координатах (q, p) изоморфизм i_ω принимает вид $i_\omega: dH \mapsto (H'_p, -H'_q) = \operatorname{sgrad} H$.

Рис. 1. Фазовый портрет потока из примера 1

разбивающей V на две области, Ω_1 и Ω_2 . Пусть $\mathcal{H}|_{\Omega_i} = H_i$, $i = 1, 2$, и H_i гладко продолжаются в окрестность $\bar{\Omega}_i$. Тогда гамильтониан $\mathcal{H}$ в окрестности x_0 задается одним из двух соотношений

$$\mathcal{H} = \max(H_1, H_2), \quad \mathcal{H} = \min(H_1, H_2).$$

По-другому это можно записать так:

$$\mathcal{H} = H + Gu,$$

где $H = \frac{1}{2}(H_1 + H_2)$, $G = \frac{1}{2}(H_1 - H_2)$, $u = 1$ в Ω_1 и $u = -1$ в Ω_2 (или наоборот⁴). Будем считать, что $dG(x_0) \neq 0$; этого достаточно, чтобы N было гладким многообразием в окрестности $x_0 \in N$.

§ 3. Порядок особой траектории

С понятием особой траектории тесно связано понятие ее порядка, который в каком-то смысле определяет степень вырождения системы в окрестности особой траектории. Существуют два несовпадающих классических определения порядка – так называемый локальный порядок траектории и глобальный (intrinsic) порядок системы (см. [7]). Напомним их. Обозначим⁵

$$A_k = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d}{dt} \right)^{k-1} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} \quad \text{при } k \geq 1.$$

⁴Всюду в этой работе $u \in [-1, 1]$. Общий случай $u \in [a, b]$ немедленно сводится к $u \in [-1, 1]$ очевидной аффинной заменой.

⁵Подобная форма записи достаточно неудобна, так как может быть неверно истолкована. Эту запись следует понимать так: $\frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H}$ обозначает G ; $(\frac{d}{dt})^k G$ является формальной функцией от x , u , $\dot{u}$, $\ddot{u}$ и т.д.; левый символ $\frac{\partial}{\partial u}$ означает формальное дифференцирование по u . В настоящей статье автор намеренно старается избегать подобной формы записи и не использует ее ни в формулировках, ни в доказательствах во избежание путаницы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть $x(t)$ – некоторая особая траектория и k_1 – первый номер, при котором A_k не обращается в 0 на особой траектории $x(t)$. По теореме Кэлли–Коппа–Мойера (см. [2]) k_1 должно быть четным или бесконечным. Число $h_{\text{loc}} = k_1/2$ называется *локальным порядком особой траектории* $x(t)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть k_2 – первый номер, при котором A_k не является тождественно нулевой функцией в V . По теореме Роббинса (см. [10]) k_2 должно быть четным или бесконечным. Число $h_{\text{glob}} = k_2/2$ называется *глобальным порядком системы* $\mathcal{H} = H + Gu$ в V .

Глобальный порядок всегда меньше или равен локальному порядку. Использование глобального порядка системы позволяет выписывать необходимые условия и отыскивать особые траектории в терминах скобок Пуассона, что очень удобно и при конкретном счете, и при теоретических исследованиях. Точнее, если система имеет глобальный порядок $h = h_{\text{glob}} < \infty$, то на любой траектории выполнено

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^k G &= (\text{ad } H)^k G \quad \text{при } k < 2h, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^{2h} G &= (\text{ad } H)^{2h} G + \{G, (\text{ad } H)^{2h-1} G\}u \quad \text{при } k = 2h. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь и далее через $\{H, G\} = (\text{ad } H)G$ обозначена скобка Пуассона⁶ функций H и G : $\{H, G\} = \omega(i_\omega dH, i_\omega dG)$. Таким образом, $A_{2h} = \{G, (\text{ad } H)^{2h-1} G\}$. Если при этом $A_{2h} \neq 0$ на особой траектории (т.е. ее локальный порядок совпадает с глобальным, $h_{\text{loc}} = h_{\text{glob}}$), то формулы (3.1) позволяют легко находить управление на особой траектории. Более того, с их помощью может быть доказана теорема о сопряжении: если $h = h_{\text{glob}}$ четно, $2|h$, и на особой траектории выполнено усиленное обобщенное условие Лежандра–Клебша $(-1)^h A_{2h} < 0$, то в точке стыковки этой особой траектории с любой неособой управление на последней обязательно имеет разрыв второго рода (см. [8]). Особые траектории, на которых $A_{2h} = 0$ (такие траектории принято называть аномальными), невозможно исследовать с помощью определения глобального порядка.

Локальный порядок, напротив, не позволяет использовать гамильтонов формализм. Однако в большом количестве задач локальный порядок любой особой траектории строго больше глобального порядка системы (в таких случаях мы будем говорить, что определение глобального порядка вырождается). В этом случае в понятии глобального порядка мало смысла: все особые траектории аномальны, и их невозможно найти, используя формулы (3.1). Также в этом случае не работает теорема о сопряжении (см. [7]). Использовать определение локального порядка для отыскания особых траекторий в этих случаях тоже не очень удобно, так как A_k при $k > 2h_{\text{glob}}$ становится формальной функцией от $u, \dot{u}, \ddot{u}$ и т.д. В защиту определения локального порядка скажем, что обобщенное условие Лежандра–Клебша (см. [2]) формулируется очень просто даже для

⁶В канонических координатах (q, p) скобка Пуассона имеет вид $\{H, G\} = H'_p G'_q - H'_q G'_p$. Часто скобку Пуассона определяют с противоположным знаком. В работе сделан именно такой выбор знаков, так как он позволяет избежать большого количества множителей $(-1)^k$.

анормальных особых траекторий⁷:

$$(-1)^{h_{\text{loc}}} A_{2h_{\text{loc}}} = (-1)^{h_{\text{loc}}} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d}{dt} \right)^{2h_{\text{loc}}-1} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} \leq 0.$$

В этой статье мы будем использовать модифицированное определение порядка, сочетающее в себе качества обоих стандартных определений, и будем называть его *натуральным порядком* во избежание путаницы. Во-первых, новое определение порядка позволяет использовать гамильтонов формализм, во-вторых, в большинстве конкретных примеров, в которых локальный порядок траекторий больше глобального порядка системы, натуральный порядок оказывается равным локальному порядку, и все неудобства, связанные с вычислениями в терминах локального порядка, исчезают. В результате удастся получить важную новую теорему о гамильтоновости потока особых траекторий. Теорема о невозможности регулярного сопряжения неособой траектории с особой траекторией в системе четного порядка остается верной при замене глобального порядка на натуральный.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть $\mathcal{S}_k$ обозначает множество точек V , в которых обнуляются скобки $(\text{ad } H)^m G$ при $m = 0, 1, \dots, k-1$:

$$\mathcal{S}_k = \{x \in V : G(x) = (\text{ad } H)G(x) = \dots = (\text{ad } H)^{k-1}G(x) = 0\}.$$

Будем говорить, что гамильтонова система с кусочно гладким гамильтонианом $\mathcal{H} = H + Gu$ имеет в V *натуральный порядок* $h \in \mathbb{N}$, если для всех $k = 1, \dots, h-1$ выполнены соотношения

$$\{G, (\text{ad } H)^{2k-1}G\} = 0 \quad \text{на } \mathcal{S}_{2k}, \quad (3.2)$$

а также⁸

$$\{G, (\text{ad } H)^{2h-1}G\} \neq 0 \quad \text{в любой точке из } \mathcal{S}_{2h}.$$

Если же равенства (3.2) выполнены для всех $k \in \mathbb{N}$, то натуральный порядок системы равен ∞ .

Легко убедиться, что

локальный порядок $\geq$ натуральный порядок $\geq$ глобальный порядок.

Правое неравенство выполнено, поскольку $\{G, (\text{ad } H)^k G\} \equiv 0$, если $k \leq 2h_{\text{glob}} - 1$. Более того, если $A_{2h_{\text{glob}}} \neq 0$ в V (т.е. аномальных особых траекторий в V нет), то $h = h_{\text{glob}} = h_{\text{loc}}$. Однако подобную ситуацию можно считать везением. Левое неравенство будет доказано в дальнейшем, и будет показано, что если система имеет натуральный порядок h в V , то локальный порядок любой особой траектории в V тоже равен h (см. замечание 5).

⁷Неравенство записано для принципа максимума, т.е. для случая $u = \text{sign } G$. Если же $u = -\text{sign } G$, то знак в неравенстве необходимо обратить.

⁸Если в каких-то точках из $\mathcal{S}_{2h}$ (но не во всех) скобка $\{G, (\text{ad } H)^{2h-1}G\}$ обнуляется (обозначим множество таких точек через $\mathcal{S}_{2h}^0$), то в V натуральный порядок не определен. Но в $V \setminus \mathcal{S}_{2h}^0$ система имеет натуральный порядок, равный h . В ситуации общего положения $\dim \mathcal{S}_{2h}^0 = \dim \mathcal{S}_{2h} - 1$. На множестве $\mathcal{S}_{2h}^0$, вообще говоря, могут лежать аномальные особые траектории, локальный порядок которых больше h .

Для того чтобы пояснить данное определение и продемонстрировать разницу между различными определениями порядков, проведем подробное исследование модифицированной задачи Фуллера⁹.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим задачу минимизации интеграла

$$\int_0^T x^2 dt \rightarrow \min$$

с некоторыми начальными и конечными условиями, которые несущественны для дальнейшего, и при ограничении на вторую производную¹⁰

$$|\ddot{x}| \leq |1 + x|.$$

В классической задаче Фуллера предыдущее условие немного иное: $|\ddot{x}| \leq 1$. Поэтому при x и $\dot{x}$, близких к началу координат, эта задача (в каком-то смысле) не сильно отличается от задачи Фуллера. Воспользуемся принципом максимума Понтрягина: пусть $q_1 = x$, $q_2 = \dot{x}$, а p_1 , p_2 – сопряженные переменные к q_1 , q_2 . Тогда¹¹

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}q_1^2 + p_1q_2 + p_2(1 + q_1)u$$

и управление u выбирается в зависимости от знака произведения $p_2(1 + q_1)$. Получаем

$$H = -\frac{1}{2}q_1^2 + p_1q_2, \quad G = p_2(1 + q_1).$$

Траектория является особой, если на ней обнуляется G . Поэтому множество $\mathcal{S}_1$ определяется условием $p_2(1 + q_1) = 0$ и не является гладким многообразием. Прямые вычисления дают

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt}G &= \{H, G\} + \{G, G\}u = \{H, G\} = p_2q_2 - p_1(1 + q_1), \\ 0 = \frac{d}{dt}\{H, G\} &= \{H, \{H, G\}\} + \{G, \{H, G\}\}u. \end{aligned}$$

Поскольку $A_2 = \{G, \{H, G\}\} = 2p_2(1 + q_1) \neq 0$, то система имеет первый глобальный порядок в любой открытой области V , $h_{\text{glob}} = 1$. С другой стороны, поскольку скобка $\{G, \{H, G\}\} = 2G$ обнуляется на любой особой траектории, то локальный порядок любой особой траектории не меньше 2, $h_{\text{loc}} \geq 2$. То есть определение глобального порядка в этой задаче вырождается. Определение натурального порядка, напротив, работает: поскольку $\{G, \{H, G\}\}|_{\mathcal{S}_2} = 0$, то натуральный порядок системы тоже, как и локальный порядок, не меньше 2, $h \geq 2$.

Найдем особые траектории, их локальные порядки и натуральный порядок системы в их окрестности. Итак,

$$\begin{cases} (\text{ad } H)^2 G = -q_1(1 + q_1) - 2p_1q_2, & \{G, (\text{ad } H)^2 G\} = 2\{H, G\}, \\ (\text{ad } H)^3 G = -q_2(1 + 4q_1), & \{G, (\text{ad } H)^3 G\} = -(1 + q_1)(1 + 4q_1), \\ (\text{ad } H)^4 G = -4q_2^2, & \{G, (\text{ad } H)^4 G\} = -4q_2(1 + q_1), \\ (\text{ad } H)^k G \equiv \{G, (\text{ad } H)^k G\} \equiv 0 & \text{при } k \geq 5. \end{cases}$$

⁹Подробнее о задаче Фуллера и вообще об особых экстремальных второго глобального порядка см. [11].

¹⁰Как обычно, предполагаем, что $x \in C^1$ и $\dot{x} \in AC$.

¹¹Будем считать, что $\lambda_0 = -1/2$.

Поскольку $\{G, (\text{ad } H)G\}|_{\mathcal{S}_2} = 0$ и $\{G, (\text{ad } H)^2 G\}|_{\mathcal{S}_3} = 0$, то на любой особой траектории выполнено

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}G = (\text{ad } H)G, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^2 G = (\text{ad } H)^2 G, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^3 G = (\text{ad } H)^3 G, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^4 G = (\text{ad } H)^4 G + \{G, (\text{ad } H)^3 G\}u. \end{cases}$$

Дальнейшие вычисления зависят от того, обнулилась ли скобка $\{G, (\text{ad } H)^3 G\}$. Существуют две возможности в зависимости от того, в окрестности какой особой траектории рассматривается система. Разобьем $\mathcal{S}_1$ на три множества

$$\mathcal{S}_1^1 = \{p_2 = 0, q_1 \neq -1\}, \quad \mathcal{S}_1^2 = \{q_1 = -1, p_2 \neq 0\}, \quad \mathcal{S}_1^0 = \{p_2 = 0, q_1 = -1\}$$

и изучим по отдельности поведение системы в малых окрестностях V^j многообразий $\mathcal{S}_1^j$, $j = 1, 2$. Будем считать, что $V^j \cap \mathcal{S}_1^0 = \emptyset$, $j = 1, 2$.

В области V^1 имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_1^1 &= \{p_2 = 0, q_1 \neq -1\}, & \mathcal{S}_2^1 &= \mathcal{S}_1^1 \cap \{p_1 = 0\}, \\ \mathcal{S}_3^1 &= \mathcal{S}_2^1 \cap \{q_1 = 0\}, & \mathcal{S}_4^1 &= \mathcal{S}_3^1 \cap \{q_2 = 0\}. \end{aligned}$$

С другой стороны, $\{G, (\text{ad } H)^3 G\}|_{\mathcal{S}_4^1} \neq 0$. Поэтому нетрудно показать, что единственная особая траектория $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = u = 0$ в V^1 имеет локальный порядок 2. Более того, натуральный порядок системы в V^1 тоже равен 2 и совпадает с локальным.

В области V^2 ситуация следующая: $\mathcal{S}_2^2 = \mathcal{S}_1^2 \cap \{q_2 = 0\}$, а при $k \geq 3$ $\mathcal{S}_k^2 = \mathcal{S}_2^2$. Все особые траектории образуют двумерную поверхность $\{q_1 = -1, q_2 = 0\}$, а p_1, p_2 любые. Действительно, если $q_1 = -1$ и $q_2 = 0$, то $\dot{q}_1 \equiv \dot{q}_2 \equiv 0$, поэтому никакое управление не может сдвинуть систему из этой точки. Локальный порядок каждой особой траектории в V_2 равен ∞ . Поскольку $\{G, (\text{ad } H)^{k-1} G\}|_{\mathcal{S}_k^2} = 0$ при всех k , то натуральный порядок системы в V^2 совпадает с локальным порядком любой особой траектории и тоже равен ∞ .

Таким образом, в приведенном выше примере глобальный порядок h_{glob} в любой открытой области равен 1. Однако:

(i) есть одна особая траектория локального порядка 2, $h_{\text{loc}} = 2$, и в ее окрестности система имеет натуральный порядок 2, $h = 2$;

(ii) есть двумерная поверхность $\mathcal{S}_2^2$ особых траекторий локального порядка ∞ , $h_{\text{loc}} = \infty$, и в окрестности $\mathcal{S}_2^2$ система тоже имеет натуральный порядок ∞ , $h = \infty$.

§ 4. Гамильтоновость потока особых траекторий

Хорошо известно, что управление на особой траектории с помощью описанной выше процедуры последовательного дифференцирования G может быть

найден лишь на четном шаге дифференцирования $2h$. Поэтому в ситуации общего положения все особые траектории образуют четномерное многообразие $\mathcal{S}$ коразмерности $2h$ в $\mathcal{M}$. Само многообразие $\mathcal{M}$ симплектично, имеет четную размерность, и, значит, $\dim \mathcal{S}$ тоже четно. Истинная причина того, что многообразие $\mathcal{S}$ всегда имеет четную размерность, заключается в том, что оно является симплектическим подмногообразием в $\mathcal{M}$. Более того, поток особых траекторий на нем является гамильтоновым с гладким гамильтонианом $\mathcal{H}|_{\mathcal{S}} = H|_{\mathcal{S}}$.

Нижеследующая теорема о гамильтоновости особого потока будет сформулирована и доказана в терминах натурального порядка, однако останется верной, если заменить в ее формулировке натуральный порядок на глобальный и не рассматривать аномальные траектории (тогда, правда, применимость теоремы сильно упадет). Итак,

ТЕОРЕМА 1 (о гамильтоновости). *Предположим, что гамильтонова система $\mathcal{H} = H + Gu$ имеет в V натуральный порядок $h \neq \infty$ и дифференциалы $dG, d(\operatorname{ad} H)G, \dots, d(\operatorname{ad} H)^{2h-2}G$ линейно независимы в V . Тогда все особые траектории системы лежат в множестве $\mathcal{S}_{2h} \cap \{x : |u^s(x)| \leq 1\}$, где*

$$u^s(x) = -\frac{(\operatorname{ad} H)^{2h}G}{\{G, (\operatorname{ad} H)^{2h-1}G\}}.$$

Более того:

- (i) множество $\mathcal{S}_{2h}$ (если не пусто) является гладким симплектическим многообразием с симплектической формой $\omega|_{\mathcal{S}_{2h}}$;
- (ii) подмногообразие $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{2h} \cap \{x : |u^s(x)| < 1\}$ также симплектично, и через любую его точку проходит и притом единственная особая траектория;
- (iii) любая особая траектория на $\mathcal{S}$ является траекторией гладкой гамильтоновой системы на $\mathcal{S}$ с гамильтонианом $H|_{\mathcal{S}} = \mathcal{H}|_{\mathcal{S}}$, т.е. поток особых траекторий на $\mathcal{S}$ является гамильтоновым с гамильтонианом $H|_{\mathcal{S}} = \mathcal{H}|_{\mathcal{S}}$ на $\mathcal{S}$;
- (iv) поток гладкого гамильтониана $\widetilde{\mathcal{H}} = H(x) + G(x)u^s(x)$ в объемлющем пространстве V является касательным к $\mathcal{S}$, и его траектории на $\mathcal{S}$ совпадают с особыми.

Мы будем называть $\mathcal{S}$ многообразием особых траекторий или просто особым многообразием. Теорема 1 сформулирована в локальных терминах в окрестности V , однако если система с гамильтонианом $\mathcal{H} = H + Gu$ имеет натуральный порядок h на всем пространстве $\mathcal{M}$ (т.е. $\mathcal{M} = \Omega_1 \sqcup \Omega_2 \sqcup N$), то многообразие $\mathcal{S}$ определено глобально на N (достаточно положить $V = \mathcal{M}$).

В дальнейшем (и при доказательстве теоремы 1, и при конкретных вычислениях в примерах) оказывается очень полезной следующая лемма.

ЛЕММА 1. *Пусть F – произвольная гладкая функция в V и $k < 2h$. Тогда значения скобки $\{H, F\}$ в точках множества $\mathcal{S}_{k+1}$ зависят только от значений F в точках $\mathcal{S}_k$ и не зависят от продолжения F в $V \setminus \mathcal{S}_k$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как дифференциалы $dG, d(\operatorname{ad} H)G, \dots, d(\operatorname{ad} H)^{k-1}G$ линейно независимы в V , то $\mathcal{S}_k$ является гладким многообразием. Введем

в его окрестности локальную систему координат $g_1 = G, g_2 = (\text{ad } H)G, \dots, g_k = (\text{ad } H)^{k-1}G$ и дополним координаты $g_1, \dots, g_k$ до полной системы локальных координат координатами $y_1, \dots, y_{2n-k}$, где $2n = \dim \mathcal{M}$. Тогда $F(x) = F(g_1, \dots, g_k, y_1, \dots, y_{2n-k})$ и

$$\begin{aligned} \{H, F\} &= F'_{g_1} \{H, G\} + F'_{g_2} \{H, (\text{ad } H)G\} + \dots + F'_{g_k} \{H, (\text{ad } H)^{k-1}G\} \\ &\quad + \sum_j F'_{y_j} \{H, y_j\}. \end{aligned}$$

Первые k слагаемых обнуляются на $\mathcal{S}_{k+1}$ по определению, а последние $2n - k$ в любой точке многообразия $\mathcal{S}_k$ зависят только от значений F на $\mathcal{S}_k$, так как при $g_1 = \dots = g_k = 0$ переменные y_j являются локальными координатами на $\mathcal{S}_k$.

Для доказательства теоремы 1 нам еще потребуется следующее утверждение: если для некоторого k все скобки $\{(\text{ad } H)^m G, (\text{ad } H)^l G\}$ обнулились при m и l , лежащих на диагонали $m + l = k$, то скобки $\{(\text{ad } H)^m G, (\text{ad } H)^l G\}$ на диагонали $m + l = k + 1$ совпадают по модулю и их знаки чередуются. Точнее, выполнено следующее

СЛЕДСТВИЕ 1. Если для некоторого $k < 2h - 1$ в каждой точке $\mathcal{S}_{k+1}$ выполнено

$$\{(\text{ad } H)^m G, (\text{ad } H)^l G\} = 0 \quad \text{при всех } m + l = k, \quad m, l \geq 0,$$

то в каждой точке $\mathcal{S}_{k+2}$ выполнено

$$\{(\text{ad } H)^m G, (\text{ad } H)^l G\} = (-1)^m \{G, (\text{ad } H)^{k+1} G\} \quad \text{при всех } m + l = k + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(m + 1) + l = k + 1$ и $m, l \geq 0$. Согласно тождеству Якоби имеем

$$\begin{aligned} \{(\text{ad } H)^{m+1} G, (\text{ad } H)^l G\} &= \{H, \{(\text{ad } H)^m G, (\text{ad } H)^l G\}\} \\ &\quad - \{(\text{ad } H)^m G, (\text{ad } H)^{l+1} G\}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое обнуляется в точках $\mathcal{S}_{k+2}$ согласно лемме 1.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если гамильтонова система $\mathcal{H} = H + Gi$ имеет натуральный порядок h , то

$$\{(\text{ad } H)^m G, (\text{ad } H)^l G\} = 0$$

в точках $\mathcal{S}_{k+1}$ при $k = m + l < 2h - 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение индукцией по $k = m + l$. При $k = 0$ имеем $m = l = 0$ и $\{G, G\} \equiv 0$ ввиду антисимметричности скобки Пуассона. Пусть теперь утверждение верно для некоторого $k \geq 1, k < 2h - 2$. Тогда (по следствию 1) в любой точке $\mathcal{S}_{k+2}$ на диагонали $m + l = k + 1$ все элементы $\{(\text{ad } H)^m G, (\text{ad } H)^l G\}$ совпадают по модулю. Осталось найти на этой диагонали хотя бы один нулевой элемент.

Если $k + 1$ нечетно, то $\{G, (\text{ad } H)^{k+1} G\} = 0$ в точках $\mathcal{S}_{k+2}$ по определению натурального порядка. Если же $k + 1$ четно, $k + 1 = 2r$, то на диагонали $m + l = k + 1$ обнуляется элемент $\{(\text{ad } H)^r G, (\text{ad } H)^r G\}$.

В следствии 2 хорошо видно, почему управление в первый раз явно может возникнуть только на четном шаге дифференцирования $(\frac{d}{dt})^k G$. Это есть следствие антисимметричности скобки Пуассона: $\{(\operatorname{ad} H)^r G, (\operatorname{ad} H)^r G\} \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Докажем сначала, что любая особая траектория в V лежит в множестве $\mathcal{S}_{2h} \cap \{x : |u(x)| \leq 1\}$. Пусть $x(t)$, $t \in (t_0, t_1)$, – особая траектория. Докажем по индукции, что $x(t)$ лежит в $\mathcal{S}_k$ при $k \leq 2h$. Если $k = 1$, то, очевидно, $G(x(t)) \equiv 0$ по определению особой траектории (значит, $x(t) \in \mathcal{S}_1$). Пусть теперь $x(t)$ лежит в $\mathcal{S}_k$ для некоторого $k \leq 2h - 1$, т.е. $(\operatorname{ad} H)^{k-1} G(x(t)) \equiv 0$. Тогда в любой точке дифференцируемости $x(t)$ для некоторого $v \in [-1, 1]$ выполняется

$$0 = \frac{d}{dt}((\operatorname{ad} H)^{k-1} G(x(t))) = (\operatorname{ad} H)^k G|_{x(t)} + v\{G, (\operatorname{ad} H)^{k-1} G\}|_{x(t)}.$$

Но $x(t) \in \mathcal{S}_k$ по предположению индукции, а последнее слагаемое обнуляется на $\mathcal{S}_k$ по следствию 2. Поэтому $(\operatorname{ad} H)^k G(x(t)) = 0$ в точках дифференцируемости $x(t)$. Следовательно, $(\operatorname{ad} H)^k G(x(t)) = 0$ при всех $t \in (t_0, t_1)$, так как траектория $x(t)$ абсолютно непрерывна и множество точек ее дифференцируемости всюду плотно на (t_0, t_1) . Получаем $x(t) \in \mathcal{S}_{k+1}$.

Таким образом, при $k = 2h$ получаем $x(t) \in \mathcal{S}_{2h}$. Поэтому в любой точке дифференцируемости $x(t)$ для некоторого $v \in [-1, 1]$ выполнено $(\operatorname{ad} H)^{2h} G + \{G, (\operatorname{ad} H)^{2h-1} G\}v = 0$. Немедленно получаем $v = u^s(x(t))$, и v лежит на отрезке $[-1, 1]$ в точках дифференцируемости $x(t)$, следовательно, $|u^s(x(t))| \leq 1$ всюду, что и требовалось.

Теперь покажем, что множество $\mathcal{S}_{2h}$ является гладким симплектическим подмногообразием (если не пусто) в предположении, что дифференциалы функций $(\operatorname{ad} H)^k G$, $k = 0, \dots, 2h - 1$, линейно независимы в точках $\mathcal{S}_{2h}$ (их независимость будет доказана ниже). Обозначим для краткости $F_k = (\operatorname{ad} H)^k G$. Множество $\mathcal{S}_{2h}$ является гладким многообразием в V коразмерности $2h$ в силу предположения о линейной независимости дифференциалов dF_k .

Покажем, что ограничение симплектической формы ω на $\mathcal{S}_{2h}$ является симплектической формой. Форма $\omega|_{\mathcal{S}_{2h}}$ замкнута в силу замкнутости ω . Покажем невырожденность $\omega|_{\mathcal{S}_{2h}}$. Касательное пространство $T_x \mathcal{S}_{2h}$ определяется следующим свойством:

$$\xi \in T_x \mathcal{S}_{2h} \iff \frac{\partial}{\partial \xi} F_k(x) = 0 \quad \text{при } k \leq 2h - 1.$$

Или, по-другому, $0 = dF_k(\xi) = \omega(\xi, i_\omega dF_k)$. Поэтому подпространство $T_x \mathcal{S}_{2h} \subseteq T_x \mathcal{M}$ относительно ω является дополнительным к подпространству $L \subseteq T_x \mathcal{M}$, порожденному векторами $i_\omega dF_k(x)$. Невырожденность ω на $T_x \mathcal{S}_{2h}$ равносильна невырожденности ω на L как на дополнительных подпространствах. Матрица формы ω в ограничении на L в базисе $i_\omega dF_k(x)$ имеет вид

$$\mathcal{F}(x) = (\omega(i_\omega dF_k, i_\omega dF_l)|_x)_{k,l=0}^{2h-1} = (\{F_k, F_l\}|_x)_{k,l=0}^{2h-1}.$$

Таким образом, осталось показать невырожденность матрицы $\mathcal{F}$ в точках $\mathcal{S}_{2h}$. Согласно следствию 2 в матрице $\mathcal{F}(x)$ выше побочной диагонали стоят нули при $x \in \mathcal{S}_{2h}$, а на самой побочной диагонали (по следствию 1) при $x \in \mathcal{S}_{2h}$

стоят элементы вида $\pm\{G, (\text{ad } H)^{2h-1}G\}$, где знаки чередуются и выбираются в зависимости от четности номера строки. Поскольку по определению натурального порядка $\{G, (\text{ad } H)^{2h-1}G\} \neq 0$ в точках $\mathcal{S}_{2h}$, мы немедленно получаем невырожденность ω на $\mathcal{S}_{2h}$.

Поскольку матрица $\mathcal{F}(x)$ имеет полный ранг, то векторы $dF_k|_x$ линейно независимы в силу того, что $i_\omega|_x$ – изоморфизм $T_x^*\mathcal{M}$ и $T_x\mathcal{M}$. Таким образом, доказано, что $\mathcal{S}_{2h}$ – гладкое симплектическое подмногообразие $\mathcal{M}$.

Множество $\{x : u^s(x) \in (-1, 1)\}$ является открытым. Поэтому $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{2h} \cap \{x : u^s(x) \in (-1, 1)\}$ также является гладким симплектическим подмногообразием (если не пусто) с формой $\omega|_{\mathcal{S}}$. Пункт (i) доказан.

Любая особая траектория в $\mathcal{S}$ имеет в любой своей точке дифференцируемости $x \in \mathcal{S}$ скорость $\xi(x) = i_\omega dH(x) + u^s(x)i_\omega dG(x) \in T_x\mathcal{S}$, т.е. на $\mathcal{S}$ определено гладкое касательное векторное поле $\xi(x)$. Поэтому по теореме Коши о существовании и единственности решения ОДУ с гладкой правой частью через каждую точку $\mathcal{S}$ проходит не более одной особой траектории. Более того, любая траектория $x(t)$ на $\mathcal{S}$ (решение уравнения $\dot{x} = \xi(x)$), очевидно, является особой. Пункт (ii) доказан. Также доказано, что любая особая траектория на $\mathcal{S}$ является бесконечно гладкой.

Покажем теперь, что поток на $\mathcal{S}$, определяемый гладким гамильтонианом H , состоит из особых траекторий, что, во-первых, докажет гамильтоновость потока особых траекторий и, во-вторых, приведет к доказательству п. (iv).

Для того чтобы найти поток H на $\mathcal{S}$, воспользуемся соображениями, аналогичными тем, которыми пользовался Мозер при доказательстве полной интегрируемости геодезического потока на n -мерном эллипсоиде (см. [12]). Рассмотрим гамильтониан

$$\widetilde{\mathcal{H}} = H + \sum_{k=0}^{2h-1} \mu^k F_k,$$

где μ^k – пока не известные гладкие функции. Очевидно, что $\widetilde{\mathcal{H}}|_{\mathcal{S}} = H|_{\mathcal{S}}$, поэтому потоки, определяемые ими, на $\mathcal{S}$ совпадают. Выберем неизвестные функции μ^k так, чтобы поток гамильтониана $\widetilde{\mathcal{H}}$ в объемлющем пространстве V был касательным к $\mathcal{S}$. При таком выборе μ^k поток $\widetilde{\mathcal{H}}$ на V в точках $\mathcal{S}$ не изменится при ограничении $\widetilde{\mathcal{H}}$ на $\mathcal{S}$. Итак, необходимо, чтобы $\{\widetilde{\mathcal{H}}, F_l\} = 0$ в точках многообразия $\mathcal{S}$ при $l \leq 2h-1$. По правилу Лейбница

$$\{\widetilde{\mathcal{H}}, F_l\} = F_{l+1} + \sum_k \{F_k, F_l\} \mu^k \quad \text{в точках } \mathcal{S}$$

и, значит,

$$(\mu^k)_{k=0}^{2h-1} = -\mathcal{F}^{-1}(F_{l+1})_{l=0}^{2h-1}.$$

Вектор $(F_{l+1})_{l=0}^{2h-1}$ в точках $\mathcal{S}$ имеет все нулевые координаты, кроме, возможно, последней. Поскольку в матрице $\mathcal{F}$ стоят нули над побочной диагональю, то в $\mathcal{F}^{-1}$ стоят нули под побочной диагональю. Поэтому $\mu^1 = \dots = \mu^{2h-1} = 0$ на $\mathcal{S}$, а μ^0 находится из первого уравнения:

$$\mu^0 = -\frac{(\text{ad } H)^{2h}G}{\{G, (\text{ad } H)^{2h-1}G\}} = u^s.$$

Поток особых траекторий на $\mathcal{S}$ совпадает с потоком гамильтониана $H(x) + G(x)u^s(x)$ в V , так как $\widetilde{\mathcal{H}}(x) = H(x) + u^s(x)G(x)$.

Теорема 1 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Очевидное следствие заключается в том, что H есть первый интеграл потока особых траекторий (этот факт, конечно, нетрудно получить и прямым счетом).*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если существуют $n - h$ независимых функций $H_1, \dots, H_{n-h}$ в V , коммутирующих на $\mathcal{S}$ с H , G и друг с другом, то поток особых траекторий на $\mathcal{S}$ является вполне интегрируемым по Лиувиллю. Более того, он включается в поток гладкого гамильтониана $\widetilde{\mathcal{H}}$ в V , который часто бывает суперинтегрируемым (см. [13]) на $\mathcal{S}$ с $n + h$ интегралами

$$H_1, \dots, H_{n-h}, H_{n-h+1} = G, H_{n-h+2} = (\operatorname{ad} H)G, \dots, H_{n+h} = (\operatorname{ad} H)^{2h-1}G.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если добавить к $\mathcal{S}$ точки из $\mathcal{S}_{2h}$, в которых выполняется условие $|u^s(x)| = 1$, то получится многообразие с краем (если только дифференциал $u^s(x)$ в этих точках линейно независим с дифференциалами dF_k), содержащее все особые траектории.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если H и G – бесконечно гладкие функции, то многообразие особых траекторий $\mathcal{S}$ бесконечно гладко и, более того, все особые траектории на S бесконечно гладкие. Если же $H, G \in C^k(V)$, где $k > 2h$, то $\mathcal{S}$ и особые траектории на $\mathcal{S}$ будут иметь гладкость не меньше $k - 2h$.

§ 5. Теорема о сопряжении

Как уже отмечалось выше, в окрестности многообразия особых траекторий $\mathcal{S}$ теряется единственность решения гамильтоновой системы $\mathcal{H} = H + Gu$ с разрывной правой частью. А именно, из каждой точки особой траектории могут выходить неособые и, наоборот, в каждую точку особой траектории могут входить неособые. Типичное поведение неособых траекторий в окрестности особой траектории в системе первого натурального (или, что то же, глобального) порядка описано в примере 1. В каждую точку особой траектории приходят две неособые траектории и выходят из нее тоже две. В случае большего глобального порядка в любую точку особой траектории может входить (или выходить из нее) континуальное семейство неособых (см. пример Фуллера в [11]).

Теоремы о невозможности регулярного сопряжения (в том или ином смысле) неособой траектории с особой обычно доказываются в терминах глобального порядка. Например, если система имеет четный глобальный порядок, то при сопряжении неособой траектории с особой (не аномальной) управление обязательно имеет разрыв второго рода. При этом (см. [7]) заменить глобальный порядок на локальный в формулировке нельзя – существует контрпример (см. пример 4).

В этом параграфе мы докажем (как обобщение классической) теорему о невозможности регулярного сопряжения неособой траектории с особой траекторией четного порядка в терминах натурального порядка. Таким образом, наличие глобального порядка не является необходимым для доказательств теорем о сопряжении. Достаточно наличие лишь натурального порядка.

В доказательстве будет использована техника ниспадающих систем скобок Пуассона, уже показавшая свою эффективность в ряде других задач (см., например, [14]). Эта техника позволяет эффективно исследовать поведение неособых траекторий в окрестности особого многообразия, даже когда определение глобального порядка вырождается.

Без ограничения общности будем считать, что $u = 1$, если $G > 0$, и $u = -1$, если $G < 0$, т.е. выполнен принцип максимума.

ТЕОРЕМА 2 (о сопряжении). *Предположим, что негладкая гамильтонова система $\mathcal{H} = H + Gu$ имеет в V четный натуральный порядок $h \neq \infty$ и дифференциалы $dG, d(\text{ad } H)G, \dots, d(\text{ad } H)^{2h-2}G$ линейно независимы в V . Рассмотрим $x^*(t)$, $u^*(t)$ – особую траекторию при $t \in (t_1, t_2)$, на которой $u^*(t) \in (-1, 1)$ и выполнено усиленное условие Лежандра–Клебша¹²*

$$\{G, (\text{ad } H)^{2h-1}G\}(x^*(t)) < 0.$$

Тогда если неособая траектория $\tilde{x}(t)$, $\tilde{u}(t)$ определена при $t \geq \tau$ (соответственно при $t \leq \tau$) и сопрягается в точке $\tau \in (t_1, t_2)$ с особой траекторией, $\tilde{x}(\tau) = x^(\tau)$, то управление $\tilde{u}(t)$ имеет разрыв второго рода при $t \rightarrow \tau + 0$ (соответственно при $t \rightarrow \tau - 0$).*

Опишем подробно структуру ниспадающей системы скобок Пуассона. Выпишем набор дифференциальных уравнений вдоль произвольной траектории системы и упорядочим их по строкам.

Первые две строки системы содержат по одному уравнению (будем перед уравнениями, стоящими в k -й строке, ставить символ $\lfloor k \rfloor$):

$$\begin{aligned} \lfloor 1 \rfloor \quad & \frac{d}{dt}G = \{H, G\}; \\ \lfloor 2 \rfloor \quad & \frac{d}{dt}\{H, G\} = \{H, \{H, G\}\} + \{G, \{H, G\}\}u. \end{aligned}$$

Третья строка содержит два уравнения:

$$\begin{aligned} \lfloor 3 \rfloor \quad & \frac{d}{dt}\{H\{H, G\}\} = \{H\{H, \{H, G\}\}\} + \{G, \{H\{H, G\}\}\}u; \\ \lfloor 3 \rfloor \quad & \frac{d}{dt}\{G\{H, G\}\} = \{H\{G, \{H, G\}\}\} + \{G, \{G\{H, G\}\}\}u. \end{aligned}$$

В общем случае в m -й строке, $m \geq 2$, выписаны уравнения вида

$$\lfloor m \rfloor \quad \frac{d}{dt}\mathcal{K}_m = \{H, \mathcal{K}_m\} + \{G, \mathcal{K}_m\}u,$$

где $\mathcal{K}_m = \{K_m, \{K_{m-1}, \dots, \{K_2, K_1\} \dots\}\}$, $K_1 = G$, $K_2 = H$, а остальные символы K_j могут обозначать как H , так и G (т.е. всего 2^{m-2} уравнений). Уравнения в $(m+1)$ -й строке получаются дифференцированием по t правых частей уравнений в m -й строке, т.е., например,

$$\begin{aligned} \lfloor m+1 \rfloor \quad & \frac{d}{dt}\{H, \mathcal{K}_m\} = \{H, \{H, \mathcal{K}_m\}\} + \{G, \{H, \mathcal{K}_m\}\}u, \\ \lfloor m+1 \rfloor \quad & \frac{d}{dt}\{G, \mathcal{K}_m\} = \{H, \{G, \mathcal{K}_m\}\} + \{G, \{G, \mathcal{K}_m\}\}u. \end{aligned}$$

¹²Тот факт, что обобщенное условие Лежандра–Клебша формулируется в терминах натурального порядка именно в таком виде, доказан в замечании 5.

Ниспадающая система выписывается вплоть до строки с номером $2h$, где h – натуральный порядок системы.

Таким образом, в m -й строке выписаны уравнения на производную по времени от скобок m -го порядка, а правые части этих уравнений есть аффинные по управлению u функции, где коэффициентами выступают скобки $(m+1)$ -го порядка.

Главными скобками ниспадающей системы мы будем называть скобки G , $(\text{ad } H)G, \dots, (\text{ad } H)^{2h-1}G$. Остальные скобки порядка не больше $2h$ мы будем называть *неглавными*. Доказательство теоремы 2 основано на том, что при выходе на особую траекторию (или при сходе с нее) в любой строке с номером m неглавные скобки имеют больший порядок малости по $t - \tau$, чем главные скобки, и потому не влияют на принципиальное поведение системы. Этот факт следует из двух следующих лемм.

Первая лемма аналогична лемме 1 с заменой H на G в условии и $\mathcal{S}_{k+1}$ на $\mathcal{S}_k$ в утверждении леммы.

ЛЕММА 2. Пусть F – произвольная гладкая функция в V и $k < 2h$. Тогда значения скобки $\{G, F\}$ в точках множества $\mathcal{S}_k$ зависят только от значений F в точках $\mathcal{S}_k$ и не зависят от продолжения F в $V \setminus \mathcal{S}_k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно провести его аналогично доказательству леммы 1: для произвольной функции F имеем

$$\begin{aligned} \{G, F\} &= F'_{g_1} \{G, G\} + F'_{g_2} \{G, (\text{ad } H)G\} + \dots + F'_{g_k} \{G, (\text{ad } H)^{k-1}G\} \\ &\quad + \sum_j F'_{y_j} \{G, y_j\}. \end{aligned}$$

Первые k слагаемых обнуляются на $\mathcal{S}_k$ по следствию 2, а последние $2n - k$ слагаемых зависят только от значений F на $\mathcal{S}_k$ по тем же соображениям, что и в лемме 1.

Лемма 3 утверждает, что почти все скобки, участвующие в ниспадающей системе скобок Пуассона, обнуляются на особом многообразии $\mathcal{S}$.

ЛЕММА 3. Пусть $\mathcal{K}_m = \{K_m, \{K_{m-1}, \dots, \{K_2, K_1\} \dots\}\}$, где при каждом j символ K_j обозначает H либо G . Тогда:

- (i) если $m \leq 2h$, то $\mathcal{K}_m = 0$ на $\mathcal{S}_{2h}$;
- (ii) если $m = 2h + 1$ и $\mathcal{K}_{2h+1}$ не есть ни $(\text{ad } H)^{2h}G$, ни $\{G, (\text{ad } H)^{2h-1}G\}$, то также $\mathcal{K}_{2h+1} = 0$ на $\mathcal{S}_{2h}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для пары K_1, K_2 есть четыре варианта: HH, GG, HG и GH . Первые два варианта тождественно обнуляются, последние два совпадают с точностью до знака. Будем считать, что $K_1 = G$ и $K_2 = H$. Тогда $\mathcal{K}_2 = \{K_2, K_1\} = 0$ на $\mathcal{S}_2$ по определению $\mathcal{S}_2$.

Если $K_3 = H$, то $\mathcal{K}_3 = \{K_3, \{K_2, K_1\}\} = 0$ на $\mathcal{S}_3$ по лемме 1. Если же $K_3 = G$, то $\mathcal{K}_3 = 0$ на $\mathcal{S}_2$ по лемме 2. Но $\mathcal{S}_3 \subseteq \mathcal{S}_2$. Поэтому в любом случае $\mathcal{K}_3 = 0$ на $\mathcal{S}_3$. Этот процесс можно продолжать по индукции, пока порядок скобки меньше $2h$. Последний шаг в индукции доказывает утверждение (i).

Рассмотрим теперь случай $m = 2h + 1$. В рассмотренном выше индуктивном процессе шаг при $m = 2h$ сделать нельзя: из условия $\mathcal{K}_{2h} = 0$ на $\mathcal{S}_{2h}$ с помощью лемм 1 и 2 нельзя получить пункт (ii). Покажем, что на самом деле $\mathcal{K}_{2h} = 0$ на $\mathcal{S}_{2h-1}$. Действительно, поскольку $\mathcal{K}_{2h+1}$ не есть ни $(\text{ad } H)^{2h}G$, ни

$\{G, (\text{ad } H)^{2h-1}G\}$, то для некоторого номера j , $3 \leq j \leq 2h$, символ K_j есть G . Поэтому из $\mathcal{K}_{j-1} = 0$ на $\mathcal{S}_{j-1}$ следует по лемме 2, что $\mathcal{K}_j = 0$ на $\mathcal{S}_{j-1}$, а не на $\mathcal{S}_j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Без ограничения общности будем считать, что $\tau = 0$ и неособая траектория сходит с особой, т.е. $\tilde{x}(t)$, $\tilde{u}(t)$ определены при малых $t \geq 0$. Доказательство теоремы проведем от противного: предположим, что управление $\tilde{u}(t)$ имеет предел при $t \rightarrow +0$. Поскольку траектория $\tilde{x}(t)$ неособа, то $\tilde{u}(t) = \pm 1$ при любом t . Пусть $\lim_{t \rightarrow +0} \tilde{u}(t) = 1$ (случай $\lim_{t \rightarrow +0} \tilde{u}(t) = -1$ аналогичен). Тогда $\tilde{u}(t) = 1$ при малых $t \geq 0$, следовательно, $G(\tilde{x}(t)) > 0$ и траектория $\tilde{x}(t)$ является гладкой при малых $t > 0$.

Придем к противоречию с $G(\tilde{x}(t)) > 0$. Докажем обратной индукцией следующее утверждение: если $\mathcal{K}_m$ – главная скобка в ниспадающей системе скобок Пуассона, то $\mathcal{K}_m(\tilde{x}(t)) \leq -c_m t^{2h-m+1}$ для некоторого $c_m > 0$ при малых $t > 0$, а если $\mathcal{K}_m$ – неглавная скобка, то $|\mathcal{K}_m(\tilde{x}(t))| \leq b_m t^{2h-m+2}$, т.е. в ниспадающей системе в строке с номером m неглавные скобки имеют больший порядок малости по t чем главная скобка. При $m = 1$ получим противоречие, так как $0 < G(\tilde{x}(t)) \leq -c_1 t^{2h} < 0$.

По лемме 3 получаем, что для любой скобки $\mathcal{K}_m$ из ниспадающей системы длины $m \leq 2h$ выполнено

$$\mathcal{K}_m = \int_0^t (\{H, \mathcal{K}_m\}(\tilde{x}(s)) + \tilde{u}(s)\{G, \mathcal{K}_m\}(\tilde{x}(s))) ds. \quad (5.1)$$

Докажем теперь базу обратной индукции. Рассмотрим последнюю строчку ниспадающей системы. Если $\mathcal{K}_{2h}$ – неглавная скобка, то подынтегральное выражение в (5.1) обнуляется при $t = 0$, так как $\tilde{x}(0) = x^*(0) \in \mathcal{S}_{2h}$. Следовательно, при малых $t > 0$ для некоторого $b_{2h} > 0$ выполнено

$$|\mathcal{K}_{2h}(\tilde{x}(t))| \leq b_{2h} t^2, \quad \text{если } \mathcal{K}_{2h} \text{ – неглавная скобка.}$$

Рассмотрим подробно главную скобку $(\text{ad } H)^{2h-1}G$ в последней строке. Покажем для нее, что подынтегральное выражение в (5.1) при $t = 0$ отрицательно. Действительно, если в нем заменить $\tilde{u}(0) = 1$ на $u^*(0) < 1$, то получится 0 по теореме 1, а $\{G, (\text{ad } H)^{2h-1}G\}(\tilde{x}(0)) < 0$ по условию теоремы. Поэтому при малых $t > 0$ для некоторого $c_{2h} > 0$ выполнено

$$(\text{ad } H)^{2h-1}G(\tilde{x}(t)) \leq -c_{2h} t < 0.$$

Шаг обратной индукции очень похож на базу. Пусть $m < 2h$. Если $\mathcal{K}_m$ – неглавная скобка, то подынтегральное выражение в (5.1) содержит только неглавные скобки. Поэтому из результата для строчки $m + 1$ получаем, что для некоторого $b_m > 0$ при малых $t \geq 0$

$$|\mathcal{K}_m(\tilde{x}(t))| \leq b_m t^{2h-m+2}, \quad \text{если } \mathcal{K}_m \text{ – неглавная скобка.}$$

Для главной скобки $(\text{ad } H)^{m-1}G$ получаем следующее: первое подынтегральное слагаемое в (5.1) является главной скобкой в строке с номером $m + 1$, второе – неглавной и мажорируется первым при малых $t \geq 0$. Поэтому при малых $t \geq 0$

$$(\text{ad } H)^{m-1}G(\tilde{x}(t)) \leq -c_m t^{2h-m+1} < 0,$$

что и требовалось.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Условие $|u^*(t)| < 1$ в теореме 2 существенно. Это означает, что теорема 2 запрещает регулярное сопряжение в точках многообразия особых траекторий $\mathcal{S}$, но ничего не утверждает о сопряжении на его границе $\partial\mathcal{S}$.

ПРИМЕР 3. В рассмотренном выше примере 2 в окрестности особой траектории $q_1 = q_2 = p_1 = p_2 = 0$ система имеет натуральный порядок 2, поэтому¹³ по доказанной теореме 2 регулярное сопряжение с неособой траекторией невозможно. Однако этот факт не следует из классической теоремы о сопряжении, так как глобальный порядок системы равен 1 в любой открытой области. Это связано с тем, что определение глобального порядка вырождается в этом примере, так как локальный порядок любой особой траектории больше или равен 2, и, следовательно, все траектории аномальны.

Таким образом, невозможность регулярного сопряжения на самом деле определяется четностью натурального порядка, а не глобального. Четность локального порядка, напротив, не препятствует регулярному сопряжению. Это хорошо видно из примера Льюиса, который изначально и послужил толчком для введения двух разных определений порядка – глобального и локального. Разберем его с точки зрения натурального порядка.

ПРИМЕР 4 (Льюис, 1980; см. [7]). Рассматривается задача минимизации интеграла

$$\int_0^\infty \left(q_1 - \frac{1}{2}\right)^2 dt \rightarrow \min$$

при условии, что

$$\dot{q}_1 = uq_2, \quad \dot{q}_2 = u - q_1, \quad u \in [-1, 1].$$

Согласно принципу максимума Понтрягина

$$\mathcal{H} = -\left(q_1 - \frac{1}{2}\right)^2 - p_2q_1 + (p_2 + q_2p_1)u.$$

Как показал Льюис, траектория $q_1 = 1/2, q_2 = p_1 = p_2 = u = 0$ является особой, и ее локальный порядок равен 2. Обобщенное условие Лежандра–Клебша (в терминах локального порядка) выполнено, но при этом существуют неособые траектории, сопрягающиеся с ней регулярно. Это не противоречит классической теореме о сопряжении, так как глобальный порядок в системе равен 1, а особая траектория аномальна.

С точки зрения натурального порядка ситуация такова:

$$G = p_2 + q_2p_1, \quad \{H, G\} = 2q_1q_2 - q_1p_1 + q_2p_2 - q_2.$$

Поэтому в окрестности точки $x^* = (1/2, 0, 0, 0)$ имеем

$$\mathcal{S}_1 = \{p_2 = -q_2p_1\}, \quad \mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1 \cap \left\{p_1 = \frac{q_2(2q_1 - 1)}{q_1 + q_2^2}\right\}.$$

¹³Обобщенное условие Лежандра–Клебша выполнено, так как $\{G, (\text{ad } H)^3 G\} = -1$ в начале координат.

Рис. 2. Проекция множества $\mathcal{S}_2^0$ на плоскость (q_1, q_2)

Переменные q_1 и q_2 являются локальными координатами на $\mathcal{S}_2$ в окрестности x^* , т.е. q_1 и q_2 на $\mathcal{S}_2$ могут быть любыми из окрестности точки $(1/2, 0)$, а p_1 и p_2 по ним однозначно находятся. Найдем натуральный порядок системы в окрестности x^* :

$$\{G, (\text{ad } H)G\}|_{\mathcal{S}_2} = \frac{(q_2^2 + q_1 + 1/2)^2 + 3(q_2^2 - q_1 + 1/2)^2 - 1}{2(q_1 + q_2^2)}.$$

Поэтому скобка $\{G, (\text{ad } H)G\}$ обнуляется не во всех точках многообразия $\mathcal{S}_2$, а лишь на поверхности

$$\mathcal{S}_2^0 = \mathcal{S}_2 \cap \left\{ \left(q_2^2 + q_1 + \frac{1}{2} \right)^2 + 3 \left(q_2^2 - q_1 + \frac{1}{2} \right)^2 = 1 \right\}. \quad (5.2)$$

Если в формулах (5.2) заменить q_2^2 на q_2 , то на плоскости (q_1, q_2) получится эллипс L . Теперь, чтобы построить $\mathcal{S}_2^0$, необходимо к множеству $L \cap \{q_2 \geq 0\}$ применить преобразование $q_2 \mapsto \sqrt{q_2}$ (рис. 2). Таким образом, в окрестности траектории $x^* \in \mathcal{S}_2^0$ натуральный порядок не определен, а натуральный порядок $\mathcal{S}_2$ без $\mathcal{S}_2^0$ равен 1 (как и глобальный) и не препятствует регулярному сопряжению неособых траекторий с x^* .

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Если система в V имеет натуральный порядок h , то локальный порядок любой особой траектории в V совпадает с h (хотя глобальный порядок может быть меньше). Действительно, вычислим в старых обозначениях $\left(\frac{d}{dt}\right)^k \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H}$ как формальный многочлен от $u, \dot{u}, \ddot{u}, \dots$. Коэффициентами при мономах будут линейные комбинации скобок от H и G длины k . Поэтому по лемме 3, если $k < 2h$, то $\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d}{dt}\right)^k \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} = 0$. Если же $k = 2h$, то по той же лемме получаем

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{d}{dt} \right)^{2h} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{H} = \{G, (\text{ad } H)^{2h-1} G\} \neq 0 \quad \text{на } \mathcal{S}.$$

Более того, как элементарное следствие получаем обобщенное неравенство Лежандра–Клебша для натурального порядка, вытекающее из его аналога для локального порядка:

$$(-1)^h \{G, (\text{ad } H)^{2h-1} G\} \leq 0.$$

Неравенство сформулировано для принципа максимума, т.е. для случая $u = \text{sign } G$. Если же $u = -\text{sign } G$, то знак в неравенстве надо обратить. Эта форма хорошо известна в случае, когда h – глобальный порядок. Здесь же она доказана для более общего определения натурального порядка и работает во многих случаях несовпадения локального и глобального порядков.

§ 6. Примеры из классической механики

В этом параграфе будут рассмотрены два примера. Пример 5 об управлении перевернутым маятником. Он достаточно прост и приведен здесь, чтобы проиллюстрировать используемую технику на простых вычислениях. Пример 6 об управлении намагниченным волчком Лагранжа, помещенным в переменное магнитное поле. Получить явные формулы в этом примере без использования предлагаемой техники представляется практически невозможным. В обоих случаях будет доказано, что поток особых траекторий является интегрируемым по Лиувиллю, и будут выписаны полные наборы первых интегралов в инволюции.

Рис. 3. Механическая система перевернутого маятника

ПРИМЕР 5. Рассмотрим задачу оптимального управления перевернутым математическим маятником на тележке (рис. 3). Тележка движется в одномерном направлении по горизонтальной прямой. Маятник закреплен на шарнире. Тогда если x – положение тележки, α – угол отклонения маятника от вертикали, а $u \in [-1, 1]$ – сила, то с точностью до членов второго и высшего порядков получаем

$$\ddot{x} = u, \quad \ddot{\alpha} = \alpha + u.$$

Задача – минимизировать среднеквадратичное отклонение тележки от начала координат (с теми или иными условиями на положение и скорости тележки и

маятника в начальный и конечный моменты времени):

$$\frac{1}{2} \int_0^T x^2(t) dt \rightarrow \inf.$$

Применим принцип максимума Понтрягина. Пусть $q_1 = x$, $q_2 = \dot{x}$, $q_3 = \alpha$ и $q_4 = \dot{\alpha}$, а p_i , $i = 1, \dots, 4$, – сопряженные к ним переменные. Тогда (легко показать, что $\lambda_0 \neq 0$)

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2}q_1^2 + p_1q_2 + p_2u + p_3q_4 + p_4(q_3 + u).$$

Таким образом, $H = -\frac{1}{2}q_1^2 + p_1q_2 + p_3q_4 + p_4q_3$, $G = p_2 + p_4$ и $u = \text{sign } G$. Прямые вычисления показывают, что система имеет натуральный (и глобальный) порядок 2 (как это часто бывает в задачах управления механическими системами):

$$\{G, (\text{ad } H)G\} \equiv 0, \quad \{G, (\text{ad } H)^3G\} \equiv -1.$$

Многообразие особых траекторий $\mathcal{S}$ четырехмерно и определяется соотношениями

$$\begin{cases} G = p_2 + p_4 = 0, \\ (\text{ad } H)G = -p_1 - p_3 = 0, \\ (\text{ad } H)^2G = -q_1 + p_4 = 0, \\ (\text{ad } H)^3G = -q_2 - p_3 = 0, \\ u^s = p_4 \in (-1, 1). \end{cases}$$

Выберем q_3, q_4, p_3, p_4 в качестве координат на $\mathcal{S}$. Тогда

$$\omega|_{\mathcal{S}} = dp_2 \wedge d(q_3 - p_4) + dp_4 \wedge d(q_4 + p_3), \quad H|_{\mathcal{S}} = p_3^2 - \frac{1}{2}p_4^2 + p_3q_4 + p_4q_3.$$

В качестве канонических координат на $\mathcal{S}$ можно выбрать $Q_1 = q_3 - p_4$, $Q_2 = q_4 + p_3$, $P_1 = p_3$ и $P_2 = p_4$. Тогда

$$\omega|_{\mathcal{S}} = dP_1 \wedge dQ_1 + dP_2 \wedge dQ_2, \quad H|_{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}P_2^2 + P_1Q_2 + P_2Q_1.$$

Данная гамильтонова система имеет (помимо $H|_{\mathcal{S}}$) очевидный первый интеграл $P_1^2 - P_2^2 = p_3^2 - p_4^2$ (т.е. является вполне интегрируемой) и, более того, интегрируется в элементарных функциях:

$$\begin{cases} P_1 = -Ae^t + Be^{-t}, \\ P_2 = Ae^t + Be^{-t}, \\ Q_1 = \frac{1}{2}Ate^t - \frac{1}{2}Bte^{-t} + \left(C - \frac{1}{4}A\right)e^t + \left(D - \frac{1}{4}B\right)e^{-t}, \\ Q_2 = \frac{1}{2}Ate^t + \frac{1}{2}Bte^{-t} + \left(C + \frac{1}{4}A\right)e^t - \left(D + \frac{1}{4}B\right)e^{-t}, \end{cases}$$

где A, B, C и D – произвольные постоянные.

Поскольку натуральный порядок системы равен 2 и $\{G, (\text{ad } H)^3G\} < 0$, то по теореме 2 неособые траектории не могут сопрягаться с особыми регулярно¹⁴.

¹⁴За исключением, быть может, точек на границе $\mathcal{S}$, в которых особое управление $u = \pm 1$.

Добавим еще, что согласно теореме Зеликина–Борисова о расслоении (см. [11]) для систем с особыми траекториями глобального порядка 2 в окрестности особого многообразия $\mathcal{S}$ имеются два расслоения E^+ и E^- с базой $\mathcal{S}$ и слоями, гомеоморфными двумерному диску. Каждый слой F расслоения E_+ соткан из однопараметрического семейства оптимальных траекторий, каждая из которых выходит на особое многообразие $\mathcal{S}$ в точке $F \cap \mathcal{S}$, совершая при этом счетное число переключений управления (т.е. счетное число раз пересекая поверхность $\mathcal{S}_1$). Расслоение E^- устроено аналогично, с той лишь разницей, что траектории сходят с $\mathcal{S}$ по слоям E^- .

Поток гладкого гамильтониана

$$\widetilde{\mathcal{H}} = H(x) + G(x)u^s(x) = H + Gp_2 = -\frac{1}{2}q_1^2 + p_1q_2 + p_2^2 + p_3q_4 + p_4q_3 + p_2p_4$$

в $\mathcal{M}$ обладает на $\mathcal{S}$ шестью первыми интегралами $F_1 = G, \dots, F_4 = (\text{ad } H)^3 G, F_5 = \widetilde{\mathcal{H}}, F_6 = p_3^2 - p_4^2$ и, следовательно, является суперинтегрируемым на $\mathcal{S}$.

Прежде чем переходить к следующему примеру, отметим, что леммы 1 и 2 оказываются очень полезными и могут сильно сократить вычисления в тот момент, когда сложность формальных выкладок переходит все разумные пределы. Действительно, построение особого многообразия напрямую связано с последовательным вычислением $(\text{ad } H)^k G$ при $k = 1, 2, \dots$ и $\{G, (\text{ad } H)^k G\}$ при нечетных k . Леммы 1 и 2 позволяют производить вычисления на k -м шаге с точностью до членов, вычисленных на предыдущих шагах.

ПРИМЕР 6. Рассмотрим задачу оптимального управления вращением твердого тела в переменном магнитном поле. Пусть осесимметричное намагниченное твердое тело (волчок Лагранжа) закреплено в точке на оси симметрии и помещено внутрь индукционной магнитной катушки (в невесомости). Магнитное поле катушки приближенно будем считать в каждый момент времени постоянным: $h(t)e$, где $e \in \mathbb{R}^3$ – единичный вектор, а $h(t) \in \mathbb{R}$ – напряженность поля, и пренебрежем эффектом Барнетта. Вычисления будем проводить в системе координат, связанной с телом. Обозначим через $J = \text{diag}(J_1, J_1, J_2)$ матрицу, обратную к тензору инерции, через $m \in \mathbb{R}^3$ – момент тела, а через $N \in \mathbb{R}^3$ – постоянный магнитный момент тела. Будем считать, что вектор N лежит на оси симметрии и, следовательно, является собственным вектором J , т.е. $JN = J_2N$. Тогда если $u(t) \in [-u_0, u_0]$ – напряжение на катушке в момент времени t , а R – ее внутреннее сопротивление, то

$$\begin{cases} \dot{m} = [m, Jm] + h[e, N], \\ \dot{e} = [e, Jm], \\ \dot{h} = -Rh + u, \end{cases} \quad (6.1)$$

где $[\cdot, \cdot]$ обозначает векторное произведение.

Система (6.1) почти совпадают с системой уравнений вращения волчка Лагранжа в однородном силовом поле тяжести (см. [15]). Существенная разница заключается в том, что модуль силы меняется со временем.

Система (6.1) не изменяется при следующих заменах координат: пусть $\lambda > 0$; тогда:

(i) $t \mapsto \frac{1}{\lambda}t$, $m \mapsto \lambda m$, $h \mapsto \lambda^2 h$, $u \mapsto \lambda^3 u$, $R \mapsto \lambda R$, поэтому мы можем считать, что $R = 1$;

(ii) $h \mapsto \lambda h$, $N \mapsto \frac{1}{\lambda}N$, $u \mapsto \lambda u$, поэтому можно считать, что $u_0 = 1$;

(iii) $e \mapsto \lambda e$, $N \mapsto \frac{1}{\lambda}N$, поэтому будем считать, что $N = (0, 0, 1)$, а вектор e может иметь, вообще говоря, не единичную длину. Таким образом, фазовое пространство $M = \{m, e, h\}$ семимерно: $M = \mathbb{R}^7 \setminus \{e = 0\}$.

Требуется, управляя напряжением на катушке $u \in [-1, 1]$, перевести систему из начального состояния в конечное за минимальное время:

$$T \rightarrow \inf. \quad (6.2)$$

Начальное и конечное состояния могут быть либо фиксированными, либо лежащими на некоторых терминальных многообразиях, это несущественно для дальнейшего.

Система (6.1) обладает следующими очевидными первыми интегралами:

- 1) проекция вектора момента на ось симметрии: $\langle m, N \rangle = \text{const}$;
- 2) проекция вектора момента на направление магнитного поля: $\langle m, e \rangle = \text{const}$;
- 3) геометрический интеграл: $\langle e, e \rangle = \text{const}$.

Длина вектора момента m и аналог энергии E не сохраняются в системе, так как напряженность магнитного поля h меняется со временем.

Пусть p , q , r – переменные, сопряженные к m , e и h соответственно (координаты в слое на кокасательном расслоении $\mathcal{M} = T^*M$), т.е. $p \in \mathbb{R}^3$, $q \in \mathbb{R}^3$ и $r \in \mathbb{R}$. Согласно принципу максимума Понтрягина оптимальные траектории должны быть траекториями гамильтоновой системы с разрывной правой частью:

$$\mathcal{H} = \langle p, [m, Jm] \rangle + h \langle p, [e, N] \rangle + \langle q, [e, Jm] \rangle - rh + ru = H + Gu,$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначается спаривание вектора и ковектора (скалярное произведение), а симплектическая форма имеет вид $\omega = dp \wedge dm + dq \wedge de + dr \wedge dh$. Таким образом,

$$\begin{cases} \dot{p} = [p, Jm] - J[p, m] - J[q, e], \\ \dot{q} = h[p, N] + [q, Jm], \\ \dot{r} = -\langle p, [e, N] \rangle + r. \end{cases}$$

Найдем особое многообразие $\mathcal{S}$ и докажем, что поток особых траекторий на $\mathcal{S}$ является вполне интегрируемым по Лиувиллю. В этой задаче можно было бы воспользоваться пуассоновой (или даже бигамильтоновой) структурой системы (6.1) при постоянном h (см. [16]) или ЛА-парой (см. [17]), но прямые вычисления предпочтительнее для того, чтобы явно продемонстрировать разрывную технику.

Как обычно, будем обозначать через x точку $\mathcal{M}$, т.е. $x = (m, e, h, p, q, r)$. Итак, $G = r$, значит, $\mathcal{S}_1 = \{x : r = 0\}$ и

$$(\text{ad } H)G = -\langle p, [e, N] \rangle + G.$$

Поскольку слагаемое G обнулилось на предыдущем шаге, т.е. $G = 0$ на $\mathcal{S}_1$, то оно не может повлиять на дальнейшие вычисления. Действительно, при вычислении $(\text{ad } H)^2 G$ и $\{G, (\text{ad } H)G\}$ на $\mathcal{S}_2$ это слагаемое не дает никакого вклада,

так как и $(\operatorname{ad} H)G$, и $\{G, G\}$ обнуляются на $\mathcal{S}_2$. Аналогично, это слагаемое не внесет никакого вклада в дальнейшем. Другими словами, по леммам 1 и 2 для всех последующих вычислений нам, вообще говоря, достаточно знать, что

$$(\operatorname{ad} H)G \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_1}{=} -\langle p, [e, N] \rangle.$$

Легко видеть, что $\{G, (\operatorname{ad} H)G\} \equiv 0$, т.е. натуральный порядок не меньше 2, и

$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_1 \cap \{x : \langle p, [e, N] \rangle = 0\}.$$

Воспользуемся тем, что N является собственным вектором матрицы J : для любого вектора x выполнено $J[x, N] = [Jx, N] = J_1[x, N]$. Получаем

$$\begin{aligned} (\operatorname{ad} H)^2 G &= J_1(\langle [e, m], [p, N] \rangle + \langle [e, N], [q, e] \rangle) + (\operatorname{ad} H)G \\ &\stackrel{\text{на } \mathcal{S}_2}{=} J_1(\langle [e, m], [p, N] \rangle + \langle [e, N], [q, e] \rangle) \end{aligned}$$

и $\{G, (\operatorname{ad} H)^2 G\} \equiv 0$. На самом деле достаточно того, что $\{G, (\operatorname{ad} H)^2 G\} = 0$ на $\mathcal{S}_3$, что следует без вычислений из следствия 2 или из леммы 3. Итак,

$$\mathcal{S}_3 = \mathcal{S}_2 \cap \{x : \langle [e, m], [p, N] \rangle + \langle [e, N], [q, e] \rangle = 0\}.$$

На четвертом шаге прямая выкладка дает

$$\begin{aligned} (\operatorname{ad} H)^3 G &= J_1^2(\langle m, e \rangle \langle m, [p, N] \rangle + \langle m, e \rangle \langle e, [q, N] \rangle + 2\langle e, N \rangle \langle e, [m, q] \rangle) \\ &\quad + J_1(2h\langle e, N \rangle - J_1\langle m, m \rangle)((\operatorname{ad} H)G - G) + (\operatorname{ad} H)^2 G, \end{aligned} \quad (6.3)$$

и, следовательно,

$$\mathcal{S}_4 = \mathcal{S}_3 \cap \{x : \langle m, e \rangle \langle m, [p, N] \rangle + \langle m, e \rangle \langle e, [q, N] \rangle + 2\langle e, N \rangle \langle e, [m, q] \rangle = 0\}.$$

Более того,

$$\{G, (\operatorname{ad} H)^3 G\} = 2J_1\langle e, N \rangle((\operatorname{ad} H)G - G).$$

Таким образом, скобка $\{G, (\operatorname{ad} H)^3 G\}$ не обнуляется тождественно, но обнуляется на $\mathcal{S}_4$. Поэтому локальный порядок любой особой траектории не меньше 3, а глобальный порядок системы вырождается и равен 2. Натуральный порядок, наоборот, не вырождается и не меньше 3.

Два последних слагаемых в (6.3) можно отбросить по леммам 1 и 2. До этого момента мы “тащили за собой” все лишние слагаемые, чтобы продемонстрировать, каким образом работают леммы 1 и 2, и показать, почему эти слагаемые не влияют на финальный результат. Однако с этого момента формулы становятся слишком тяжеловесные. Итак, нам достаточно того, что

$$(\operatorname{ad} H)^3 G \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_3}{=} J_1^2(\langle m, e \rangle \langle m, [p, N] \rangle + \langle m, e \rangle \langle e, [q, N] \rangle + 2\langle e, N \rangle \langle e, [m, q] \rangle).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (\operatorname{ad} H)^4 G &\stackrel{\text{на } \mathcal{S}_4}{=} 2J_1^3\langle e, [m, N] \rangle \langle e, [m, q] \rangle + 2J_1 h((\operatorname{ad} H)^2 G - (\operatorname{ad} H)G) \\ &\stackrel{\text{на } \mathcal{S}_4}{=} 2J_1^3\langle e, [m, N] \rangle \langle e, [m, q] \rangle \end{aligned}$$

и

$$\mathcal{S}_5 = \mathcal{S}_4 \cap \{x : \langle e, [m, N] \rangle \langle e, [m, q] \rangle = 0\}. \quad (6.4)$$

Скобка $\{G, (\text{ad } H^4)G\}$ равна нулю на $\mathcal{S}_5$ по следствию 2 или по лемме 3.

Для того чтобы найти $(\text{ad } H)^5 G$, вычислим отдельно

$$\begin{aligned} \{H, \langle e, [m, q] \rangle\} &= \frac{1}{J_1} h((\text{ad } H)^2 G - (\text{ad } H)G) \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_5}{=} 0, \\ \{H, \langle e, [m, N] \rangle\} &= J_1 \langle [e, m], [m, N] \rangle - h \langle [e, N], [e, N] \rangle. \end{aligned}$$

Поэтому по правилу Лейбница

$$(\text{ad } H)^5 G \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_5}{=} 2J_1^3 \langle e, [m, q] \rangle (J_1 \langle [e, m], [m, N] \rangle - h \langle [e, N], [e, N] \rangle).$$

Таким образом,

$$\{G, (\text{ad } H)^5 G\} \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_5}{=} -2J_1^3 \langle e, [m, q] \rangle \langle [e, N], [e, N] \rangle,$$

и, следовательно, натуральный порядок системы равен 3 на открытом всюду плотном множестве

$$\mathcal{M}' = \mathcal{M} \cap (\{x : [e, N] \neq 0, \langle e, [m, q] \rangle \neq 0\}).$$

Обобщенное условие Лежандра–Клебша в этой задаче имеет вид

$$\langle e, [m, q] \rangle < 0 \quad \text{на особых траекториях.}$$

Опишем теперь наиболее простым образом множество $\mathcal{S}_6$. Вначале заметим, что $r = 0$, а переменная p_3 вообще не входит в систему уравнений, описывающих $\mathcal{S}_6$. Рассмотрим три уравнения $(\text{ad } H)^k G = 0$ при $k = 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} E_1 = \langle e, [p, N] \rangle = 0, \\ E_2 = \langle [e, m], [p, N] \rangle + \langle [e, N], [q, e] \rangle = 0, \\ E_3 = \langle m, e \rangle \langle m, [p, N] \rangle + \langle m, e \rangle \langle e, [q, N] \rangle + 2\langle e, N \rangle \langle e, [m, q] \rangle = 0. \end{cases}$$

Поскольку $m \neq 0$ на $\mathcal{M}'$, то p_1 и p_2 однозначно выражаются из первых двух уравнений. Третье уравнение можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} &\langle m, e \rangle \langle [m, e], [m, N] \rangle E_1 + \langle m, e \rangle \langle e, [m, N] \rangle E_2 - \langle m, [e, [e, N]] \rangle E_3 \\ &= -\langle q, [e, m] \rangle \langle m, \underbrace{(\langle N, N \rangle \langle e, e \rangle + \langle e, N \rangle^2) e - 2\langle e, N \rangle \langle e, e \rangle N}_{\gamma} \rangle. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Поэтому на $\mathcal{S}_6$ из (6.4) и (6.5) мы получаем, что момент m перпендикулярен γ и $[e, N]$. Поэтому момент m параллелен их векторному произведению. Но

$$[\gamma, [e, N]] = \langle [e, N], [e, N] \rangle (\langle e, N \rangle e + \langle e, e \rangle N).$$

Следовательно,

$$m = \rho (\langle e, N \rangle e + \langle e, e \rangle N), \quad \text{где } 0 \neq \rho \in \mathbb{R}. \quad (6.6)$$

Далее, если $\langle m, [e, [e, N]] \rangle \neq 0$, то согласно (6.5) уравнение $E_3 = 0$ можно заменить условием $m \perp \gamma$, и поэтому условия (6.4) и $E_3 = 0$ равносильны условию (6.6). Если же $m \perp [e, [e, N]]$, то $m \parallel [[e, N], [e, [e, N]]]$, т.е. $m \parallel e$. Поэтому из (6.6) получаем, что $e \parallel N$ (так как $m \neq 0$), но $[e, N] \neq 0$ на $\mathcal{M}'$. Значит, пара условий (6.4) и $E_3 = 0$ в любом случае равносильна условию (6.6).

Таким образом, мы получаем следующую лемму.

ЛЕММА 4. *На $\mathcal{M}'$ система имеет натуральный порядок 3, и множество $\mathcal{S}_6$ описывается так: p_3 и q любые, $r = 0$, p_1 и p_2 находятся однозначно из линейных уравнений $(\text{ad } H)G = (\text{ad } H)^2 G = 0$ (т.е. $E_1 = E_2 = 0$), векторы m и e удовлетворяют условию (6.6), а h находится из уравнения $(\text{ad } H)^5 G = 0$, т.е.*

$$h = \rho^2 J_1 \langle e, e \rangle \langle e, N \rangle. \quad (6.7)$$

СЛЕДСТВИЕ 4. *Множество $\mathcal{S}_6$ по теореме 1 является симплектическим подмногообразием $\mathcal{M}'$ размерности 8 с локальными координатами e , ρ , q и p_3 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, условие (6.6) дает два уравнения, дифференциалы которых линейно зависимы только в точках, где либо $m = 0$, либо $\langle e, N \rangle e + \langle e, e \rangle N = 0$. Но первый вектор не равен 0 на $\mathcal{M}'$, а второй отличен от 0 всегда, так как $e \neq 0$.

Коразмерность $\mathcal{S}_6$ в два раза больше натурального порядка, $\dim \mathcal{M} = 14$, поэтому $\dim \mathcal{S}_6 = 8$.

ЛЕММА 5. *На любой особой траектории длины векторов e и m , а также попарные углы между e , m и N постоянны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что матрица Грамма векторов e , m и N постоянна. Очевидно, что скалярные произведения $\langle N, N \rangle$, $\langle e, e \rangle$, $\langle m, e \rangle$ и $\langle m, N \rangle$ постоянны на любой траектории. Осталось показать, что $\langle e, N \rangle$ и $\langle m, m \rangle$ постоянны на особых траекториях:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle e, N \rangle &= \langle [e, Jm], N \rangle = -J_1 \langle m, [e, N] \rangle \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_6}{=} 0, \\ \frac{d}{dt} \langle m, m \rangle &= 2 \langle m, [m, Jm] \rangle + 2u^s \langle m, [e, N] \rangle \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_6}{=} 0. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 5. *На любой особой траектории $\rho = \text{const}$, $h = \text{const}$ и $E = \langle m, Jm \rangle = \text{const}$.*

СЛЕДСТВИЕ 6. *На любой особой траектории $u^s = h$.*

Найденное управление $u^s(x)$ на особых траекториях согласуется с теоремой 1. Действительно,

$$(\text{ad } H)^6 G \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_6}{=} 2J_1^4 \langle e, [m, q] \rangle \langle [e, m], [m, N] \rangle.$$

По теореме 1 получаем

$$u^s(x) = -\frac{(\text{ad } H)^6}{\{G, (\text{ad } H)^5 G\}} \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_6}{=} J_1 \frac{\langle [e, m], [m, N] \rangle}{\langle [e, N], [e, N] \rangle} \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_6}{=} h.$$

Многообразие особых траекторий $\mathcal{S} = \mathcal{S}_6 \cap \{x : |h| < 1\}$ – симплектическое подмногообразие $\mathcal{S}_6$.

ТЕОРЕМА 3. Движение по любой особой траектории на $\mathcal{M}'$ в задаче (6.1), (6.2) оптимального управления волчком Лагранжа в переменном магнитном поле устроено следующим образом:

- (i) вектор момента импульса m , магнитный момент тела N и направление магнитного поля e во время движения лежат в одной плоскости и образуют друг с другом постоянные углы;
- (ii) вектор момента m во время движения имеет постоянную длину и параллелен сумме вектора магнитного момента N и его проекции на направление магнитного поля e ;
- (iii) векторы m и e вращаются вокруг N с постоянной угловой скоростью

$$\Omega = \langle e, e \rangle + (J_2 - J_1) \frac{\langle e, N \rangle}{\langle N, N \rangle};$$

- (iv) управление u выбирается так, чтобы напряженность магнитного поля h внутри катушки была постоянной, $u = hR \in (-u_0, u_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения (i) и (ii) теоремы есть прямое следствие лемм 4 и 5, утверждение (iv) – следствия 6.

Найдем угловую скорость вращения e вокруг N . По п. (i) теоремы она совпадет с угловой скоростью вращения m вокруг N . Вычислим $\frac{d}{dt}e$. Из (6.6) получаем, что

$$Jm \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_6}{=} \rho \left(J_1 \langle e, N \rangle e + \langle e, e \rangle N + (J_2 - J_1) \frac{\langle e, N \rangle}{\langle N, N \rangle} N \right). \quad (6.8)$$

Поэтому согласно (6.1)

$$\frac{d}{dt}e \stackrel{\text{на } \mathcal{S}_6}{=} \left(\langle e, e \rangle + (J_2 - J_1) \frac{\langle e, N \rangle}{\langle N, N \rangle} \right) [e, N].$$

Таким образом, при движении по особой траектории волчок равномерно вращается с постоянной скоростью вокруг вектора направления магнитного поля. Прецессия и нутация отсутствуют, а сумма магнитного момента и его проекции на направление магнитного поля в любой момент времени параллельна вектору момента вращения тела.

Теорема 3 описывает проекцию особых траекторий на фазовое пространство $M = \{m, e, h\}$. В расширенном фазовом пространстве $\mathcal{M} = T^*M$ имеем следующую лемму.

ЛЕММА 6. Гамильтонов поток особых траекторий на $\mathcal{S}$ обладает четырьмя независимыми первыми интегралами в инволюции: $F_1 = \langle e, e \rangle$, $F_2 = \langle m, e \rangle$, $F_3 = \langle m, N \rangle$ и $F_4 = \widetilde{\mathcal{H}} \stackrel{\text{на } \mathcal{S}}{=} \mathcal{H} \stackrel{\text{на } \mathcal{S}}{=} H \stackrel{\text{на } \mathcal{S}}{=} \langle q, [e, Jm] \rangle$. Первые интегралы h , ρ и $E = \langle m, Jm \rangle$ через них выражаются.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функции F_1 , F_2 и F_3 являются первыми интегралами исходной системы. Гамильтониан H является первым интегралом потока особых траекторий по следствию 3. Поскольку $p \perp [e, N]$, а $[m, Jm] \parallel [e, N]$ на $\mathcal{S}$, то $H|_{\mathcal{S}} = \mathcal{H}|_{\mathcal{S}} = H|_{\mathcal{S}} = \langle q, [e, Jm] \rangle$.

Интегралы F_1 , F_2 и F_3 независимы на $\mathcal{S}$, так как (с учетом того, что на $\mathcal{S}$ выполнено (6.6)) однозначно задают длины и расположение друг относительно

друга векторов e , m и N . Интеграл F_4 содержит переменную q и тоже независим от первых трех. Функция ρ однозначно находится через F_1 , F_2 и F_3 по формуле (6.6), а функция h – по формуле (6.7). Поскольку на $\mathcal{S}$ выполнено равенство (6.8), то E на $\mathcal{S}$ также является функцией от F_1 , F_2 и F_3 .

Таким образом, по теореме 1 поток особых траекторий в задаче (6.1), (6.2) оптимального управления волчком Лагранжа в переменном магнитном поле является вполне интегрируемым по Лиувиллю. Более того, по той же теореме его можно включить в поток гамильтониана $\widetilde{\mathcal{H}} = H(x) + G(x)u(x)$, который (как было отмечено в замечании 1) обладает на $\mathcal{S}$ дополнительно еще шестью первыми интегралами: $F_5 = G$, $F_6 = (\text{ad } H)G$, $\dots$, $F_{10} = (\text{ad } H)^5 G$. Матрица $(\{F_i, F_j\})_{i,j=1}^{10}$ имеет ранг 6, и потому система с гамильтонианом $\widetilde{\mathcal{H}}$ является суперинтегрируемой¹⁵ на $\mathcal{S}$.

Автор выражает глубокую признательность М. И. Зеликину за неоценимую помощь и поддержку в работе, а также Е. В. Троицкому за один небольшой, но невероятно полезный совет.

Список литературы

- [1] М. И. Зеликин, В. Ф. Борисов, “Особые оптимальные режимы в задачах математической экономики”: *Оптимальное управление*, Современная математика и ее приложения, **11**, НАН Грузии, Ин-т кибернетики, Тбилиси, 2003, 3–161; англ. пер.: M. I. Zelikin, V. F. Borisov, “Singular optimal regimes in problems of mathematical economics”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **130**:1 (2005), 4409–4570.
- [2] H. J. Kelley, R. E. Kopp, H. G. Moyer, “Singular extremals”, *Topics in optimization*, Academic Press, New York, 1967, 63–101.
- [3] A. J. Krener, “The high order maximal principle and its application to singular extremals”, *SIAM J. Control Optimization*, **15**:2 (1977), 256–293.
- [4] А. А. Аграчев, Р. В. Гамкредидзе, “Принцип оптимальности второго порядка для задачи быстрогодействия”, *Матем. сб.*, **100(142)**:4(8) (1976), 610–643; англ. пер.: A. A. Agrachev, R. V. Gamkrelidze, “A second order optimality principle for a time-optimal problem”, *Math. USSR-Sb.*, **29**:4 (1976), 547–576.
- [5] А. В. Дмитрук, “Квадратичные условия понтягинского минимума в задаче оптимального управления, линейной по управлению. I. Теорема о расшифровке”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **50**:2 (1986), 284–312; англ. пер.: A. V. Dmitruk, “Quadratic conditions for a Pontryagin minimum in an optimum control problem linear in the control. I. A decoding theorem”, *Math. USSR-Izv.*, **28**:2 (1987), 275–303.
- [6] А. В. Дмитрук, “Квадратичные достаточные условия минимальности аномальных субримановых геодезических”, *Труды международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина (Москва, 31 августа – 6 сентября 1998 г.) Том 4. Оптимальное управление*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **65**, ВИНТИ, М., 1999, 5–89; англ. пер.: A. V. Dmitruk, “Quadratic sufficient conditions for the minimality of abnormal sub-Riemannian geodesics”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **104**:1 (2001), 779–829.
- [7] R. M. Lewis, “Definitions of order and junction conditions in singular optimal control problems”, *SIAM J. Control Optim.*, **18**:1 (1980), 21–32.
- [8] J. P. McDannel, W. F. Powers, “Necessary conditions joining optimal singular and non-singular subarcs”, *SIAM J. Control*, **9**:2 (1971), 161–173.

¹⁵Отметим, что вне $\mathcal{S}$ эта система теряет первые интегралы $F_5, \dots, F_{10}$, но это не имеет значения, так как все особые траектории лежат на $\mathcal{S}$.

- [9] А. Ф. Филиппов, *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Наука, М., 1985, 224 с.; англ. пер.: A. F. Filippov, *Differential equations with discontinuous righthand sides*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **18**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1988, x+304 pp.
- [10] H. M. Robbins, “A generalized Legendre–Clebsch condition for the singular cases of optimal control”, *IBM J. Res. Develop.*, **11**:4 (1967), 361–372.
- [11] M. I. Zelikin, V. F. Borisov, *Theory of chattering control*, with applications to astronautics, robotics, economics, and engineering, Systems Control Found. Appl., Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1994, xvi+242 pp.
- [12] Ю. Мозер, *Интегрируемые гамильтоновы системы и спектральная теория*, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевская республиканская типография, Ижевск, 1999, 296 с.
- [13] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко, “Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем”, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:2 (1978), 46–56; англ. пер.: A. S. Mishchenko, A. T. Fomenko, “Generalized Liouville method of integration of Hamiltonian systems”, *Funct. Anal. Appl.*, **12**:2 (1978), 113–121.
- [14] R. Hildebrand, L. V. Lokutsievskiy, M. I. Zelikin, “Generic fractal structure of finite parts of trajectories of piecewise smooth hamiltonian systems”, *Russ. J. Math. Phys.*, **20**:1 (2013), 25–32.
- [15] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, 3-е изд., Наука, М., 1989, 472 с.; англ. пер. 2-го изд.: V. I. Arnol’d, *Mathematical methods of classical mechanics*, Grad. Texts in Math., **60**, Springer-Verlag, New York, 1989, xvi+508 pp.
- [16] А. В. Борисов, И. С. Мамаев, *Современные методы теории интегрируемых систем*, Современная математика, Институт компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2003, 296 с.
- [17] А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тянь-Шанский, *Интегрируемые системы*, Современная математика, Институт компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2003, 352 с.

Лев Вячеславович Локуциевский
(Lev V. Lokutsievsky)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: lion.lokut@gmail.com

Поступила в редакцию
28.05.2013 и 21.11.2013