Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Харибегашвили, О. М. Джохадзе, О глобальных и взрывных решениях смешанной задачи с нелинейным граничным условием для одномерного полулинейного волнового уравнения, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 4, 121–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8249>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 17:21:55

УДК 517.956.35

С. С. Харибегашвили, О. М. Джохадзе

О глобальных и взрывных решениях смешанной задачи с нелинейным граничным условием для одномерного полулинейного волнового уравнения

Рассмотрена смешанная задача для одномерного полулинейного волнового уравнения с нелинейным граничным условием. Такое условие возникает, например, при описании процесса продольных колебаний пружины при упругом закреплении одного из ее концов, не подчиняющемся линейному закону Гука. Исследованы вопросы единственности, существования глобальных и взрывных решений этой задачи в зависимости от характера нелинейностей, присутствующих как в уравнении, так и в краевом условии.

Библиография: 14 названий.

Ключевые слова: полулинейное волновое уравнение, нелинейное граничное условие, априорная оценка, теоремы сравнения, глобальные и взрывные решения.

§ 1. Постановка задачи

В плоскости независимых переменных x и t в области $D_T := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассмотрим смешанную задачу определения решения $u(x, t)$ полулинейного волнового уравнения вида

$$Lu := u_{tt} - u_{xx} + g(u) = f(x, t), \quad (x, t) \in D_T, \quad (1.1)$$

удовлетворяющего следующим начальным

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.2)$$

и краевым условиям

$$u_x(0, t) = F[u(0, t)] + \beta(t), \quad u(l, t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.3)$$

где f , φ , ψ , β , ν , g и F – заданные функции своих аргументов, а u – искомая действительная функция.

Отметим, что при $f \in C(\bar{D}_T)$, $g \in C(\mathbb{R})$, $F \in C^1(\mathbb{R})$, $\varphi \in C^2([0, l])$, $\psi \in C^1([0, l])$, $\beta \in C^1([0, T])$, $\nu \in C^2([0, T])$ необходимыми условиями разрешимости задачи (1.1)–(1.3) в классе $C^2(\bar{D}_T)$ являются следующие условия согласования второго порядка:

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= F[\varphi(0)] + \beta(0), & \psi'(0) &= F'[\varphi(0)]\psi(0) + \beta'(0), \\ \varphi(l) &= \nu(0), & \psi(l) &= \nu'(0), & \nu''(0) - \varphi''(l) + g[\varphi(l)] &= f(l, 0). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Положим $\Gamma := \Gamma_1 \cup \omega_0 \cup \Gamma_2$, где $\Gamma_1 = \{(x, t) : x = 0, 0 \leq t \leq T\}$, $\omega_0 = \{(x, t) : t = 0, 0 \leq x \leq l\}$, $\Gamma_2 = \{(x, t) : x = l, 0 \leq t \leq T\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Пусть функции

$$\begin{aligned} f &\in C(\bar{D}_T), & g, F &\in C(\mathbb{R}), & \varphi &\in C^1([0, l]), \\ \psi &\in C([0, l]), & \beta &\in C([0, T]), & \nu &\in C^1([0, T]) \end{aligned} \quad (1.5)$$

удовлетворяют следующим условиям согласования первого порядка:

$$\varphi'(0) = F[\varphi(0)] + \beta(0), \quad \varphi(l) = \nu(0), \quad \psi(l) = \nu'(0). \quad (1.6)$$

Функцию u будем называть сильным обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) класса C в области D_T , если $u \in C(\bar{D}_T)$ и существует такая последовательность функций $u_n \in C^2(\bar{D}_T)$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{C(\bar{D}_T)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|Lu_n - f\|_{C(\bar{D}_T)} = 0, \quad (1.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(\cdot, 0) - \varphi\|_{C^1(\omega_0)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{nt}(\cdot, 0) - \psi\|_{C(\omega_0)} = 0, \quad (1.8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{nx}(0, \cdot) - F[u_n(0, \cdot)] - \beta\|_{C(\Gamma_1)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(l, \cdot) - \nu\|_{C^1(\Gamma_2)} = 0. \quad (1.9)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В случае $\nu = 0$ в определении (1.1) от последовательности u_n потребуем, чтобы $u_n \in \hat{C}^2(\bar{D}_T, \Gamma_2) := \{v \in C^2(\bar{D}_T) : v|_{\Gamma_2} = 0\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Очевидно, что классическое решение $u \in C^2(\bar{D}_T)$ задачи (1.1)–(1.3) является сильным обобщенным решением этой задачи класса C в области D_T .

Отметим, что нелинейное граничное условие вида (1.3) возникает, например, при описании процесса продольных колебаний пружины в случае упругого закрепления одного из ее концов, когда натяжение на этом конце является нелинейной функцией смещения [1; гл. II, § 1, п. 7, равенство (56)], а также при описании процессов в распределенных автоколебательных системах [2; дополнение при корректуре, п. 3, равенство (Д.7)], [3]. Задача (1.1)–(1.3) для конкретных нелинейных функций, присутствующих в уравнении (1.1) и в краевом условии (1.3), как в одномерном, так и в многомерном случае рассмотрена во многих работах (см., например, [4]–[8] и цитированную там литературу). В основном в этих работах решения $u = u(x, t)$ рассматриваются в энергетических пространствах, когда решения и их частные производные при фиксированном t принадлежат пространствам Соболева по пространственным переменным. В настоящей работе задача (1.1)–(1.3) исследуется в пространстве непрерывных функций для достаточно широких классов нелинейных функций, присутствующих как в уравнении (1.1), так и в краевых условиях (1.3).

Работа организована следующим образом. В § 2 при некоторых ограничениях на функции g , F , β и ν получена априорная оценка для сильного обобщенного решения u задачи (1.1)–(1.3) класса C в области D_T в смысле определения 1.1. В § 3 приведена эквивалентная редукция поставленной задачи к системе нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра в классе непрерывных функций. В § 4 доказаны теоремы сравнения решений некоторых смешанных задач, а также теорема единственности решения нелинейной смешанной задачи (1.1)–(1.3). В § 5 рассмотрен вопрос о разрешимости в целом в области D_T ,

$T \leq l$, задачи (1.1)–(1.3) в классе непрерывных функций, а также вопрос о существовании глобального классического решения этой задачи в области D_∞ . В § 6 изучен вопрос о локальной разрешимости задачи (1.1)–(1.3) без всяких ограничений структурного характера, налагаемых на непрерывные функции g , F , β и ν . В этом же параграфе рассмотрен вопрос о существовании взрывных решений задачи (1.1)–(1.3).

§ 2. Априорная оценка решения задачи (1.1)–(1.3)

Рассмотрим условия

$$G(g; s) := \int_0^s g(s_1) ds_1 \geq -M_1 s^2 - M_2, \quad \int_0^s F(s_1) ds_1 \geq -M_3 \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

где $M_i := \text{const} \geq 0$, $1 \leq i \leq 3$.

ЛЕММА 2.1. Пусть выполнены условия (2.1) и $\beta = \nu = 0$. Тогда для сильно-го обобщенного решения и задачи (1.1)–(1.3) класса C в области D_T в смысле определения 1.1 справедлива априорная оценка

$$\begin{aligned} \|u\|_{C(\bar{D}_T)} &\leq c_1 \|f\|_{C(\bar{D}_T)} + c_2 \|\varphi\|_{C^1(\omega_0)} + c_3 \|\psi\|_{C(\omega_0)} \\ &\quad + c_4 \|G(|g|; |\varphi|)\|_{C(\omega_0)}^{1/2} + c_5 \|F\|_{C([-|\varphi(0)|, |\varphi(0)|])} + c_6 \end{aligned} \quad (2.2)$$

с положительными постоянными $c_i = c_i(M_1, M_2, M_3, l, T)$, $1 \leq i \leq 6$, не зависящими от функций u , g , f , φ , ψ , F .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u – сильное обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) класса C в области D_T . Тогда в силу определения 1.1 существует такая последовательность функций $u_n \in \dot{C}^2(\bar{D}_T, \Gamma_2)$, что справедливы предельные равенства (1.7)–(1.9).

Рассмотрим функцию $u_n \in \dot{C}^2(\bar{D}_T, \Gamma_2)$ как решение следующей задачи:

$$Lu_n = f_n, \quad (2.3)$$

$$u_n|_{\omega_0} = \varphi_n, \quad u_{nt}|_{\omega_0} = \psi_n, \quad (2.4)$$

$$u_{nx}|_{\Gamma_1} = F(u_n)|_{\Gamma_1} + \chi_n. \quad (2.5)$$

Здесь

$$f_n := Lu_n, \quad (2.6)$$

$$\varphi_n := u_n|_{\omega_0}, \quad \psi_n := u_{nt}|_{\omega_0}, \quad (2.7)$$

$$\chi_n := u_{nx}|_{\Gamma_1} - F(u_n)|_{\Gamma_1}. \quad (2.8)$$

Умножая обе части равенства (2.3) на u_{nt} и интегрируя по области D_τ , $0 < \tau \leq T$, получим

$$\frac{1}{2} \int_{D_\tau} (u_{nt}^2)_t dx dt - \int_{D_\tau} u_{nxx} u_{nt} dx dt + \int_{D_\tau} [G(g; u_n)]_t dx dt = \int_{D_\tau} f_n u_{nt} dx dt. \quad (2.9)$$

Положим $\omega_\tau = \{(x, t) : t = \tau, 0 \leq x \leq l, 0 \leq \tau \leq T\}$. Пусть $\nu := (\nu_x, \nu_t)$ – единичный вектор внешней нормали к ∂D_τ . Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \nu_x|_{\omega_\tau} &= 0, & 0 \leq \tau \leq T, & & \nu_x|_{\Gamma_1} &= -1, & & \nu_x|_{\Gamma_2} &= 1, \\ \nu_t|_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} &= 0, & \nu_t|_{\omega_0} &= -1, & \nu_t|_{\omega_\tau} &= 1, & & 0 < \tau \leq T. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Применяя интегрирование по частям (формулы Грина), с учетом (2.4), (2.10) и того, что согласно замечанию 1.1 $u_n \in \mathring{C}^2(\bar{D}_T, \Gamma_2)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{D_\tau} (u_{nt}^2)_t dx dt + \int_{D_\tau} [G(g; u_n)]_t dx dt &= \frac{1}{2} \int_{\partial D_\tau} u_{nt}^2 \nu_t ds + \int_{\partial D_\tau} G(g; u_n) \nu_t ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{\omega_\tau} u_{nt}^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\omega_0} \psi_n^2 dx + \int_{\omega_\tau} G(g; u_n) dx - \int_{\omega_0} G(g; \varphi_n) dx, \\ &\quad - \int_{D_\tau} u_{nxx} u_{nt} dx dt = \int_{D_\tau} [u_{nx} u_{ntx} - (u_{nx} u_{nt})_x] dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{D_\tau} (u_{nxx}^2)_t dx dt - \int_{\partial D_\tau} u_{nxx} u_{nt} \nu_x ds = \frac{1}{2} \int_{\partial D_\tau} u_{nxx}^2 \nu_t ds + \int_{\Gamma_{1,\tau}} u_{nxx} u_{nt} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{\omega_\tau} u_{nxx}^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\omega_0} \varphi_{nxx}^2 dx + \int_{\Gamma_{1,\tau}} u_{nxx} u_{nt} dt, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где $\Gamma_{1,\tau} := \Gamma_1 \cap \{t \leq \tau\}$.

В силу (2.11) равенство (2.9) перепишем в виде

$$\begin{aligned} 2 \int_{D_\tau} f_n u_{nt} dx dt &= 2 \int_{\Gamma_{1,\tau}} u_{nxx} u_{nt} dt + \int_{\omega_\tau} (u_{nxx}^2 + u_{nt}^2) dx \\ &\quad + 2 \int_{\omega_\tau} G(g; u_n) dx - \int_{\omega_0} (\varphi_{nxx}^2 + \psi_n^2) dx - 2 \int_{\omega_0} G(g; \varphi_n) dx. \end{aligned} \quad (2.12)$$

С учетом (2.5) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{1,\tau}} u_{nxx} u_{nt} dt &= \int_0^\tau F[u_n(0, t)] du_n(0, t) + \int_0^\tau \chi_n(t) u_{nt}(0, t) dt \\ &= \int_{\varphi_n(0)}^{u_n(0,\tau)} F(s_1) ds_1 + \int_0^\tau \chi_n(t) u_{nt}(0, t) dt \\ &= \int_{\varphi_n(0)}^0 F(s_1) ds_1 + \int_0^{u_n(0,\tau)} F(s_1) ds_1 + \alpha_n(\tau), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где

$$\alpha_n(\tau) := \int_0^\tau \chi_n(t) u_{nt}(0, t) dt,$$

причем в силу условий (1.9), (2.8) и того, что $\beta = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\alpha_n\|_{C([0, T])} = 0. \quad (2.14)$$

Согласно (2.1) и (2.13) из (2.12) получаем

$$\begin{aligned}
 w_n(\tau) &:= \int_{\omega_\tau} (u_{nx}^2 + u_{nt}^2) dx \\
 &\leq 2 \int_{D_\tau} f_n u_{nt} dx dt + \int_{\omega_0} (\varphi_{nx}^2 + \psi_n^2) dx + 2 \int_{\omega_0} G(g; \varphi_n) dx + 2M_1 \int_{\omega_\tau} u_n^2 dx \\
 &\quad + 2 \int_0^{\varphi_n(0)} F(s_1) ds_1 + 2(M_2 l + M_3) + 2\|\alpha_n\|_{C([0,T])}. \tag{2.15}
 \end{aligned}$$

Далее, поскольку в силу (2.7)

$$u_n(x, \tau) = \varphi_n(x) + \int_0^\tau u_{nt}(x, t) dt,$$

имеем

$$|u_n(x, \tau)|^2 \leq 2\varphi_n^2(x) + 2\left(\int_0^\tau u_{nt}(x, t) dt\right)^2 \leq 2\varphi_n^2(x) + 2\tau \int_0^\tau u_{nt}^2(x, t) dt.$$

Отсюда получаем

$$\int_{\omega_\tau} u_n^2 dx \leq 2\|\varphi_n\|_{L_2(\omega_0)}^2 + 2T \int_0^\tau w_n(s) ds, \tag{2.16}$$

где w_n определена в левой части (2.15).

Примем во внимание (2.16) и неравенства

$$\begin{aligned}
 2f_n u_{nt} &\leq u_{nt}^2 + f_n^2, \quad \|f_n\|_{L_2(D_\tau)}^2 \leq lT \|f_n\|_{C(D_T)}^2, \\
 \int_{D_\tau} u_{nt}^2 dx dt &= \int_0^\tau \left[\int_{\omega_s} u_{nt}^2 dx \right] ds \leq \int_0^\tau w_n(s) ds, \\
 \int_{\omega_0} (\varphi_{nx}^2 + \psi_n^2) dx + 2 \int_{\omega_0} G(g; \varphi_n) dx \\
 &\leq l\|\varphi'_n\|_{C(\omega_0)}^2 + l\|\psi_n\|_{C(\omega_0)}^2 + 2l\|G(|g|; |\varphi_n|)\|_{C(\omega_0)}, \\
 2 \int_0^{\varphi_n(0)} F(s_1) ds_1 &\leq 2|\varphi_n(0)| \|F\|_{C([-|\varphi_n(0)|, |\varphi_n(0)|])} \\
 &\leq \varphi_n^2(0) + \|F\|_{C([-|\varphi_n(0)|, |\varphi_n(0)|])}^2, \\
 4M_1 \|\varphi_n\|_{L_2(\omega_0)}^2 + \varphi_n^2(0) + l\|\varphi'_n\|_{C(\omega_0)}^2 &\leq (4M_1 l + 1) \|\varphi_n\|_{C(\omega_0)}^2 + l\|\varphi'_n\|_{C(\omega_0)}^2 \\
 &\leq l_0 (\|\varphi_n\|_{C(\omega_0)}^2 + \|\varphi'_n\|_{C(\omega_0)}^2) \leq l_0 \|\varphi_n\|_{C^1(\omega_0)}^2, \quad l_0 := \max(4M_1 l + 1, l).
 \end{aligned}$$

Тогда из (2.15) будем иметь

$$\begin{aligned}
 w_n(\tau) &\leq (4M_1 T + 1) \int_0^\tau w_n(s) ds + lT \|f_n\|_{C(D_T)}^2 + l_0 \|\varphi_n\|_{C^1(\omega_0)}^2 + l\|\psi_n\|_{C(\omega_0)}^2 \\
 &\quad + 2l\|G(|g|; |\varphi_n|)\|_{C(\omega_0)} + \|F\|_{C([-|\varphi_n(0)|, |\varphi_n(0)|])}^2 \\
 &\quad + 2(M_2 l + M_3) + 2\|\alpha_n\|_{C([0,T])}.
 \end{aligned}$$

Отсюда в силу леммы Гроунолла следует, что

$$\begin{aligned} w_n(\tau) \leq & \left[lT \|f_n\|_{C(D_T)}^2 + l_0 \|\varphi_n\|_{C^1(\omega_0)}^2 + l \|\psi_n\|_{C(\omega_0)}^2 \right. \\ & + 2l \|G(|g|; |\varphi_n|)\|_{C(\omega_0)} + \|F\|_{C([-|\varphi_n(0)|, |\varphi_n(0)|])}^2 \\ & \left. + 2(M_2 l + M_3) + 2\|\alpha_n\|_{C([0, T])} \right] \exp[T(4M_1 T + 1)]. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Если $(x, t) \in \bar{D}_T$, то в силу определения пространства $\mathring{C}^2(\bar{D}_T, \Gamma_2)$ имеет место равенство

$$u_n(x, t) = u_n(x, t) - u_n(l, t) = \int_l^x u_{nx}(s, t) ds,$$

откуда в силу (2.17) будем иметь

$$\begin{aligned} |u_n(x, t)|^2 & \leq \int_x^l ds \int_x^l u_{nx}^2(s, t) ds \leq (l - x) \int_{\omega_t} u_{nx}^2(s, t) ds \leq (l - x) w_n(t) \leq l w_n(t) \\ & \leq \left[l^2 T \|f_n\|_{C(D_T)}^2 + l l_0 \|\varphi_n\|_{C^1(\omega_0)}^2 + l^2 \|\psi_n\|_{C(\omega_0)}^2 + 2l^2 \|G(|g|; |\varphi_n|)\|_{C(\omega_0)} \right. \\ & \quad \left. + l \|F\|_{C([-|\varphi_n(0)|, |\varphi_n(0)|])}^2 + 2l(M_2 l + M_3) + 2l \|\alpha_n\|_{C([0, T])} \right] \\ & \quad \times \exp[T(4M_1 T + 1)]. \end{aligned}$$

Отсюда, используя очевидное неравенство $\left(\sum_{i=1}^m a_i^2\right)^{1/2} \leq \sum_{i=1}^m |a_i|$, получаем

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{C(\bar{D}_T)} & \leq \left[l\sqrt{T} \|f_n\|_{C(\bar{D}_T)} + \sqrt{l l_0} \|\varphi_n\|_{C^1(\omega_0)} + l \|\psi_n\|_{C(\omega_0)} \right. \\ & \quad + l\sqrt{2} \|G(|g|; |\varphi_n|)\|_{C(\omega_0)}^{1/2} + \sqrt{l} \|F\|_{C([-|\varphi_n(0)|, |\varphi_n(0)|])} + \sqrt{2l(M_2 l + M_3)} \\ & \quad \left. + \sqrt{2l \|\alpha_n\|_{C([0, T])}} \right] \exp[2^{-1} T(4M_1 T + 1)]. \end{aligned}$$

В силу (1.7), (1.8), (2.7) и (2.14), переходя в этом неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, будем иметь

$$\begin{aligned} \|u\|_{C(\bar{D}_T)} & \leq \left[l\sqrt{T} \|f\|_{C(\bar{D}_T)} + \sqrt{l l_0} \|\varphi\|_{C^1(\omega_0)} + l \|\psi\|_{C(\omega_0)} + l\sqrt{2} \|G(|g|; |\varphi|)\|_{C(\omega_0)}^{1/2} \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{l} \|F\|_{C([-|\varphi(0)|, |\varphi(0)|])} + \sqrt{2l(M_2 l + M_3)} \right] \exp[2^{-1} T(4M_1 T + 1)]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Лемма 2.1 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Из (2.18) следует, что в оценке (2.2) для постоянных c_i , $1 \leq i \leq 6$, справедливы выражения

$$\begin{aligned} c_1 &= l\sqrt{T} c_0, & c_2 &= \sqrt{l l_0} c_0, & c_3 &= l c_0, & c_4 &= l\sqrt{2} c_0, & c_5 &= \sqrt{l} c_0, \\ c_6 &= \sqrt{2l(M_2 l + M_3)} c_0, & \text{где } c_0 &:= \exp[2^{-1} T(4M_1 T + 1)]. \end{aligned} \quad (2.19)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Приведем некоторые классы функций, которые часто встречаются в приложениях и для которых выполнены условия (2.1):

- 1) $g(s) = g_0(s) \operatorname{sign}(s) + as + b$, где $g_0 \in C(\mathbb{R})$, $g_0 \geq 0$, $a, b, s \in \mathbb{R}$;
- 2) $F(s) = F_0(s) \operatorname{sign}(s) + as + b$, где $F_0 \in C(\mathbb{R})$, $F_0 \geq 0$, $a, b, s \in \mathbb{R}$, $a > 0$;
- 3) $g \in C(\mathbb{R})$, $g|_{(-\infty, 0)} \in L_1(-\infty, 0)$, $g|_{(0, +\infty)} \geq 0$ (например, $g(s) = \exp(s)$, $s \in \mathbb{R}$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.3. Ниже будет показано (см. п. 5), что, вообще говоря, и в случае нарушения условия (2.1) тем не менее справедлива априорная оценка решения задачи (1.1)–(1.3), но для более узких классов функций f , φ , ψ , β и ν по сравнению с теми, которые приведены в лемме 2.1.

§ 3. Редукция задачи (1.1)–(1.3)

к системе нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра

В области D_l рассмотрим следующую линейную смешанную задачу:

$$\square w := w_{tt} - w_{xx} = \tilde{f}(x, t), \quad (x, t) \in D_l, \quad (3.1)$$

$$w(x, 0) = \varphi(x), \quad w_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (3.2)$$

$$w_x(0, t) = \tilde{\beta}(t), \quad w(l, t) = \nu(t), \quad 0 \leq t \leq l, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{f} &\in C^1(\bar{D}_l), \quad \varphi \in C^2([0, l]), \quad \psi \in C^1([0, l]), \\ \tilde{\beta} &\in C^1([0, l]), \quad \nu \in C^2([0, l]) \end{aligned} \quad (3.4)$$

– заданные функции, удовлетворяющие следующим условиям согласования второго порядка:

$$\begin{aligned} \varphi'(0) &= \tilde{\beta}(0), \quad \psi'(0) = \tilde{\beta}'(0), \quad \varphi(l) = \nu(0), \\ \psi(l) &= \nu'(0), \quad \nu''(0) - \varphi''(l) = \tilde{f}(l, 0), \end{aligned} \quad (3.5)$$

а $w \in C^2(\bar{D}_l)$ – искомая функция.

Решение задачи (3.1)–(3.3) будем искать в квадратурах в удобной форме

$$w(x, t) = A_1(\tilde{f}, \tilde{\beta})(x, t) + B_1(\varphi, \psi, \nu)(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D}_l, \quad (3.6)$$

где операторы A_1 и B_1 будут построены ниже в явном виде.

С этой целью разобьем область D_l , являющуюся квадратом с вершинами в точках $O(0, 0)$, $A(0, l)$, $B(l, l)$ и $C(l, 0)$, на четыре прямоугольных треугольника $\Delta_1 := \triangle O O_1 C$, $\Delta_2 := \triangle O O_1 A$, $\Delta_3 := \triangle C O_1 B$ и $\Delta_4 := \triangle O_1 A B$, где точка $O_1(\frac{l}{2}, \frac{l}{2})$ – центр квадрата D_l . В треугольнике Δ_1 решение задачи (3.1)–(3.3), как известно, дается формулой [9; гл. V, § 1, п. 2, формула (18)]

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \frac{1}{2} [\varphi(x - t) + \varphi(x + t)] \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \psi(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{x,t}^1} \tilde{f}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \Delta_1, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $\Omega_{x,t}^1$ – треугольник с вершинами в точках (x, t) , $(x - t, 0)$ и $(x + t, 0)$.

Для получения решения задачи (3.1)–(3.3) в остальных треугольниках Δ_2 , Δ_3 и Δ_4 следует воспользоваться равенством [10; гл. III, § 15, п. 1, равенства (6)]

$$w(P) = w(P_1) + w(P_2) - w(P_3) + \frac{1}{2} \int_{PP_1P_2P_3} \tilde{f}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (3.8)$$

которое справедливо для любого характеристического для уравнения (3.1) прямоугольника $PP_1P_2P_3 \subset \bar{D}_l$, где P и P_3 , а также P_1 и P_2 – противоположные вершины этого прямоугольника, причем ордината точки P больше ординат остальных точек.

Пусть теперь точка $(x, t) \in \Delta_2$. Тогда, полагая

$$\tilde{\mu} := w|_{\Gamma_1} \quad (3.9)$$

и применяя равенство (3.8) для характеристического прямоугольника с вершинами в точках $P(x, t)$, $P_1(0, t - x)$, $P_2(t, x)$ и $P_3(t - x, 0)$, а формулу (3.7) для точки $P_2(t, x) \in \Delta_1$, получим

$$\begin{aligned} w(x, t) &= w(P_1) + w(P_2) - w(P_3) + \frac{1}{2} \int_{PP_1P_2P_3} \tilde{f}(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &= \tilde{\mu}(t - x) - \varphi(t - x) + \frac{1}{2} [\varphi(t - x) + \varphi(t + x)] + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \psi(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{1,x}^1} \tilde{f}(\xi, \tau) d\xi d\tau + \frac{1}{2} \int_{PP_1P_2P_3} \tilde{f}(\xi, \tau) d\xi d\tau \\ &= \tilde{\mu}(t - x) + \frac{1}{2} [\varphi(t + x) - \varphi(t - x)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \psi(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{x,t}^2} \tilde{f}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \Delta_2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь $\Omega_{x,t}^2$ – четырехугольник $P\tilde{P}_2P_3P_1$, где $\tilde{P}_2 = \tilde{P}_2(t + x, 0)$.

Аналогично будем иметь

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \nu(x + t - l) + \frac{1}{2} [\varphi(x - t) - \varphi(2l - x - t)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{2l-x-t} \psi(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{x,t}^3} \tilde{f}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \Delta_3, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \tilde{\mu}(t - x) + \nu(x + t - l) - \frac{1}{2} [\varphi(t - x) + \varphi(2l - t - x)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{2l-t-x} \psi(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{x,t}^4} \tilde{f}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \Delta_4. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Здесь $\Omega_{x,t}^3$ – четырехугольник с вершинами $P^3(x, t)$, $P_1^3(l, x + t - l)$, $P_2^3(x - t, 0)$ и $P_3^3(2l - x - t, 0)$, а $\Omega_{x,t}^4$ – пятиугольник с вершинами $P^4(x, t)$, $P_1^4(0, t - x)$, $P_2^4(t - x, 0)$, $P_3^4(2l - x - t, 0)$ и $P_4^4(l, x + t - l)$.

Принимая во внимание, что при $(x, t) \in \Delta_2$

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega_{x,t}^2} \tilde{f}(\xi, \tau) d\xi d\tau = \frac{1}{2} \int_0^{t-x} d\tau \int_{-x+t-\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\xi, \tau) d\xi + \frac{1}{2} \int_{t-x}^t d\tau \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} \tilde{f}(\xi, \tau) d\xi,$$

в силу (3.10) будем иметь

$$\begin{aligned} w_x(x, t) = & -\tilde{\mu}'(t-x) + \frac{1}{2}[\varphi'(t+x) + \varphi'(t-x) + \psi(t+x) + \psi(t-x)] \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{t-x} [\tilde{f}(x+t-\tau, \tau) + \tilde{f}(-x+t-\tau, \tau)] d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_{t-x}^t [\tilde{f}(x+t-\tau, \tau) - \tilde{f}(x-t+\tau, \tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Аналогично находим, что при $(x, t) \in \Delta_2$

$$\begin{aligned} w_t(x, t) = & \tilde{\mu}'(t-x) + \frac{1}{2}[\varphi'(t+x) - \varphi'(t-x) + \psi(t+x) - \psi(t-x)] \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{t-x} [\tilde{f}(x+t-\tau, \tau) - \tilde{f}(-x+t-\tau, \tau)] d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_{t-x}^t [\tilde{f}(x+t-\tau, \tau) + \tilde{f}(x-t+\tau, \tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Полагая $x = 0$ в равенстве (3.13) и учитывая краевое условие (3.3), для неизвестной функции $\tilde{\mu}$ получим равенство

$$-\tilde{\mu}'(t) + \varphi'(t) + \psi(t) + \int_0^t \tilde{f}(t-\tau, \tau) d\tau = \tilde{\beta}(t), \quad 0 \leq t \leq l,$$

интегрирование которого с учетом начального условия $\tilde{\mu}(0) = \varphi(0)$ дает

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(t) = & A_2(\tilde{f}, \tilde{\beta})(t) + B_2(\varphi, \psi, \nu)(t) := - \int_0^t \tilde{\beta}(\tau) d\tau + \varphi(t) + \int_0^t \psi(\tau) d\tau \\ & + \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \tilde{f}(\tau_1 - \tau, \tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq l. \end{aligned} \quad (3.15)$$

На основе формул (3.10), (3.12) решение задачи (3.1)–(3.3) в областях Δ_2 и Δ_4 с учетом (3.15) можно представить в виде

$$\begin{aligned} w(x, t) = & - \int_0^{t-x} \tilde{\beta}(\tau) d\tau + \int_0^{t-x} \psi(\tau) d\tau + \int_0^{t-x} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \tilde{f}(\tau_1 - \tau, \tau) d\tau \\ & + \frac{1}{2}[\varphi(t+x) + \varphi(t-x)] + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{t+x} \psi(\tau) d\tau \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{x,t}^2} \tilde{f}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \Delta_2, \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} w(x, t) = & - \int_0^{t-x} \tilde{\beta}(\tau) d\tau + \int_0^{t-x} \psi(\tau) d\tau + \nu(x+t-l) \\ & + \int_0^{t-x} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} \tilde{f}(\tau_1 - \tau, \tau) d\tau + \frac{1}{2}[\varphi(t-x) - \varphi(2l-t-x)] \\ & + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{2l-t-x} \psi(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_{\Omega_{x,t}^4} \tilde{f}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \Delta_4. \end{aligned} \quad (3.17)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Если w – решение задачи (3.1)–(3.3), то для пары функций $(w, \tilde{\mu} := w|_{\Gamma_1})$ в силу равенств (3.6) и (3.15) справедливо интегральное представление

$$(w, \tilde{\mu}) = A(\tilde{f}, \tilde{\beta}) + B(\varphi, \psi, \nu), \quad (3.18)$$

где $A := (A_1, A_2)$, $B := (B_1, B_2)$, причем операторы A_1, A_2 действуют на парах функций $(\tilde{f}, \tilde{\beta})$, а операторы B_1, B_2 – на тройках функций (φ, ψ, ν) согласно формулам (3.7), (3.11), (3.15)–(3.17).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Легко проверить, что в случае $\tilde{f} \in C(\bar{D}_l)$, $\varphi \in C^1([0, l])$, $\psi \in C([0, l])$, $\tilde{\beta} \in C([0, l])$, $\nu \in C^1([0, l])$, если выполнены условия согласования первого порядка: $\varphi'(0) = \tilde{\beta}(0)$, $\varphi(l) = \nu(0)$, $\psi(l) = \nu'(0)$, то с учетом формул (3.13), (3.14) для производных w_x, w_t в области Δ_2 и аналогичных им в остальных областях Δ_1, Δ_3 и Δ_4 пара функций $(w, \tilde{\mu})$, определенная равенством (3.18), принадлежит классу $C^1(\bar{D}_l) \times C^1([0, l])$ и, более того, линейный оператор

$$A: C(\bar{D}_l) \times C([0, l]) \rightarrow C^1(\bar{D}_l) \times C^1([0, l]) \quad (3.19)$$

из (3.18) является непрерывным. Аналогичное замечание справедливо для оператора B в соответствующих пространствах функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Аналогично предыдущему замечанию можно проверить, что если выполнены условия гладкости (3.4) и согласования второго порядка (3.5), то согласно (3.6) построенная нами функция w с учетом равенств (3.7), (3.11), (3.16) и (3.17) принадлежит классу $C^2(\bar{D}_l)$ и является классическим решением задачи (3.1)–(3.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Отметим, что в случае, когда задача (3.1)–(3.3) рассматривается в области D_T при $T \leq l$, для пары функций $(w, \tilde{\mu} := w|_{\Gamma_1})$ приведенное выше интегральное представление (3.18) остается в силе.

Теперь рассмотрим редукцию задачи (1.1)–(1.3) к системе нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра. Пусть u является сильным обобщенным решением этой задачи класса C в области D_T , $T \leq l$, т.е. $u \in C(\bar{D}_T)$, и существует такая последовательность функций $u_n \in C^2(\bar{D}_T)$, что справедливы предельные равенства (1.7)–(1.9). Рассмотрим функцию u_n как классическое решение задачи (3.1)–(3.3) при

$$\tilde{f} = -g(u_n) + f_n, \quad \varphi = \varphi_n, \quad \psi = \psi_n, \quad \tilde{\beta} = F(\mu_n) + \beta_n, \quad \nu = \nu_n,$$

где

$$\begin{aligned} f_n &:= Lu_n, & \varphi_n &:= u_n|_{\omega_0}, & \psi_n &:= u_n t|_{\omega_0}, \\ \mu_n &:= u_n|_{\Gamma_1}, & \beta_n &:= u_{nx}|_{\Gamma_1} - F(\mu_n), & \nu_n &:= u_n|_{\Gamma_2}. \end{aligned}$$

В силу равенства (3.18) для функции u_n и ее следа $\mu_n := u_n|_{\Gamma_1}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} u_n &= A_1(-g(u_n) + f_n, F(\mu_n) + \beta_n) + B_1(\varphi_n, \psi_n, \nu_n), \\ \mu_n &= A_2(-g(u_n) + f_n, F(\mu_n) + \beta_n) + B_2(\varphi_n, \psi_n, \nu_n). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Принимая во внимание замечание 3.2, равенства (1.7)–(1.9) и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в равенствах (3.20), получим, что пара функций $(u, \mu := u|_{\Gamma_1})$ в силу (3.18) удовлетворяет нелинейному операторному уравнению

$$(u, \mu) = A_0(u, \mu), \quad (3.21)$$

где

$$A_0(u, \mu) := A(-g(u), F(\mu)) + A(f, \beta) + B(\varphi, \psi, \nu). \quad (3.22)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.5. Легко видеть, что если $(\xi, \tau) \in \Omega_{x,t}^i$, $1 \leq i \leq 4$, то $\tau \leq t$, это в силу формул (3.7), (3.11), (3.15)–(3.17) позволяет нам рассматривать (3.21) как систему нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра относительно переменной t . Отметим, что в линейном случае для этой системы применим сходящийся метод последовательных приближений Пикара в соответствующих пространствах функций.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Аналогично замечанию 3.3 в силу уравнения (3.21) можно заключить, что если u – сильное обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) класса C в области D_T , $T \leq l$, причем выполнены дополнительные условия гладкости

$$\begin{aligned} f &\in C^1(\bar{D}_T), & g, F &\in C^1(\mathbb{R}), & \varphi &\in C^2([0, l]), \\ \psi &\in C^1([0, l]), & \beta &\in C^1([0, l]), & \nu &\in C^2([0, l]) \end{aligned} \quad (3.23)$$

и условия согласования второго порядка (1.4), то u будет классическим решением этой же задачи из пространства $C^2(\bar{D}_T)$.

ЛЕММА 3.1. Пусть выполнены условия гладкости (1.5) и согласования первого порядка (1.6). Функция u является сильным обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) класса C в области D_T в смысле определения 1.1 тогда и только тогда, когда пара функций $(u, \mu := u|_{\Gamma_1})$ является непрерывным решением нелинейного операторного уравнения (3.21).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть пара функций (u, μ) является непрерывным решением нелинейного операторного уравнения (3.21). Так как выполнены условия (1.6), то в силу замечания 3.2 и равенства (3.21) функция u будет принадлежать классу C^1 . Легко проверить, что

$$u|_{\Gamma_1} = \mu, \quad u|_{\omega_0} = \varphi, \quad u_t|_{\omega_0} = \psi, \quad u_x|_{\Gamma_1} = F(u)|_{\Gamma_1} + \beta, \quad u|_{\Gamma_2} = \nu. \quad (3.24)$$

Поскольку пространство $C^k(\bar{D}_T)(C^k([0, d]))$ плотно в $C^{k_1}(\bar{D}_T)(C^{k_1}([0, d]))$, где $k_1 < k$ [11; гл. I, § 6, теорема 1.6.2], найдутся такие последовательности функций

$$f_n \in C^1(\bar{D}_T), \quad w_n \in C^2(\bar{D}_T), \quad (3.25)$$

что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{C(\bar{D}_T)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - u\|_{C^1(\bar{D}_T)} = 0. \quad (3.26)$$

Аналогично, поскольку $g, F \in C(\mathbb{R})$, найдутся такие последовательности функций

$$g_n, F_n \in C^1(\mathbb{R}), \quad (3.27)$$

что для любого $M := \text{const} > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\|_{C([-M, M])} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|F_n - F\|_{C([-M, M])} = 0. \quad (3.28)$$

Положим

$$\begin{aligned} w_n|_{\omega_0} &=: \varphi_n \in C^2([0, l]), & w_{nt}|_{\omega_0} &=: \psi_n \in C^1([0, l]), \\ w_n|_{\Gamma_1} &=: \mu_n \in C^2([0, T]), & w_{nx}|_{\Gamma_1} - F_n(w_n)|_{\Gamma_1} &=: \beta_n \in C^1([0, T]), \\ w_n|_{\Gamma_2} &=: \nu_n \in C^2([0, T]). \end{aligned} \quad (3.29)$$

В силу (3.24), (3.26), (3.28) и (3.29) будем иметь

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\|_{C^1(\omega_0)} &= 0, & \lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n - \psi\|_{C(\omega_0)} &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mu_n - \mu\|_{C^1(\Gamma_1)} &= 0, & \lim_{n \rightarrow \infty} \|\beta_n - \beta\|_{C(\Gamma_1)} &= 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|\nu_n - \nu\|_{C^1(\Gamma_2)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Отметим, что последовательности функций f_n, w_n, g_n, F_n можно подобрать таким образом, чтобы были выполнены следующие равенства в точках $(0, 0)$ и $(l, 0)$:

$$\begin{aligned} \varphi'_n(0) &= F_n[\varphi_n(0)] + \beta_n(0), & \psi'_n(0) &= F'_n[\varphi_n(0)]\psi_n(0) + \beta'_n(0), \\ \varphi_n(l) &= \nu_n(0), & \psi_n(l) &= \nu'_n(0), & \nu''_n(0) - \varphi''_n(l) + g_n[\varphi_n(l)] &= f_n(l, 0). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Действительно, первые четыре равенства из (3.31) являются следствиями обозначений (3.29). Что же касается последнего равенства из (3.31), то оно может быть достигнуто, если от последовательности $w_n \in C^2(\bar{D}_T)$, кроме второго предельного равенства из (3.26), дополнительно потребовать в точке $(l, 0)$, чтобы

$$w_{ntt}(l, 0) - w_{nxx}(l, 0) + g_n[w_n(l, 0)] = f_n(l, 0). \quad (3.32)$$

Для этого заметим, поскольку $C^4(\bar{D}_T)$ плотно в $C^1(\bar{D}_T)$, для $u \in C^1(\bar{D}_T)$ найдется такая последовательность функций $\tilde{w}_n \in C^4(\bar{D}_T)$, что

$$\|\tilde{w}_n - u\|_{C^1(\bar{D}_T)} < \frac{1}{n}.$$

При $\delta \in (0, l)$ рассмотрим на $[0, l]$ непрерывную кусочно линейную функцию

$$h_\delta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x \leq l - \delta, \\ -\frac{x}{\delta} + \frac{l}{\delta} & \text{при } l - \delta \leq x \leq l. \end{cases}$$

В соответствии с очевидным равенством

$$\begin{aligned} \tilde{w}_n(x, t) &= \tilde{w}_n(x, 0) + t\tilde{w}_{nt}(x, 0) + \int_0^t (t - \tau)\tilde{w}_{ntt}(x, \tau) d\tau \\ &= \tilde{w}_n(l, 0) + (x - l)\tilde{w}_{nx}(l, 0) + \int_l^x (x - \xi)\tilde{w}_{nxx}(\xi, 0) d\xi \\ &\quad + t\tilde{w}_{nt}(x, 0) + \int_0^t (t - \tau)\tilde{w}_{ntt}(x, \tau) d\tau \end{aligned}$$

ПОЛОЖИМ

$$\begin{aligned}
 w_n(x, t) &= \tilde{w}_n(l, 0) + (x - l)\tilde{w}_{nx}(l, 0) + \int_l^x (x - \xi) [\tilde{w}_{nxx}(\xi, 0)h_\delta(\xi) \\
 &\quad + k(1 - h_\delta(\xi))] d\xi + t\tilde{w}_{nt}(x, 0) + \int_0^t (t - \tau)\tilde{w}_{ntt}(x, \tau) d\tau, \\
 k &:= \tilde{w}_{ntt}(l, 0) + g_n[\tilde{w}_n(l, 0)] - f_n(l, 0).
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

Очевидно, что функция w_n из (3.33) принадлежит классу $C^2(\bar{D}_T)$ и для нее выполнено условие (3.32). Далее,

$$\begin{aligned}
 |\tilde{w}_n(x, t) - w_n(x, t)| &\leq \left| \int_l^{\max(x, l-\delta)} (x - \xi)[1 - h_\delta(\xi)] [\tilde{w}_{nxx}(\xi, 0) - k] d\xi \right| \\
 &\leq \delta \left[\max_{0 \leq x \leq l} |\tilde{w}_{nxx}(x, 0)| + |k| \right], \\
 |\tilde{w}_{nx}(x, t) - w_{nx}(x, t)| &\leq \left| \int_l^{\max(x, l-\delta)} [1 - h_\delta(\xi)] [\tilde{w}_{nxx}(\xi, 0) - k] d\xi \right| \leq \delta \left[\max_{0 \leq x \leq l} |\tilde{w}_{nxx}(x, 0)| + |k| \right].
 \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом того, что $\tilde{w}_{nt} = w_{nt}$ при достаточно малом δ , следует, что $\|\tilde{w}_n - w_n\|_{C^1(\bar{D}_T)} < \frac{1}{n}$ и, тем самым,

$$\|w_n - u\|_{C^1(\bar{D}_T)} \leq \|\tilde{w}_n - u\|_{C^1(\bar{D}_T)} + \|\tilde{w}_n - w_n\|_{C^1(\bar{D}_T)} \leq \frac{2}{n}.$$

Поэтому построенная таким образом последовательность w_n будет искомой.

Теперь построим последовательность пар функций (u_n, μ_n) в соответствии с (3.21), (3.22), т.е.

$$u_n = A_1(-g_n(w_n) + f_n, F_n(\mu_n) + \beta_n) + B_1(\varphi_n, \psi_n, \nu_n), \tag{3.34}$$

$$\mu_n = A_2(-g_n(w_n) + f_n, F_n(\mu_n) + \beta_n) + B_2(\varphi_n, \psi_n, \nu_n), \tag{3.35}$$

где операторы $A_i, B_i, i = 1, 2$, определены в замечании 3.1.

В силу (3.25), (3.27), (3.29), (3.31) и замечания 3.3 пара функций (u_n, μ_n) , определенная равенствами (3.34), (3.35), принадлежит классу $C^2(\bar{D}_T) \times C^2([0, T])$ и удовлетворяет следующим равенствам:

$$\begin{aligned}
 \square u_n &= -g_n(w_n) + f_n, & u_n|_{\omega_0} &= \varphi_n, & u_{nt}|_{\omega_0} &= \psi_n, \\
 u_{nx}|_{\Gamma_1} &= F_n(\mu_n) + \beta_n, & u_n|_{\Gamma_2} &= \nu_n.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Приняв во внимание (3.21), (3.22), (3.26), (3.28), (3.30), а также замечания 3.2 и переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ в правых частях равенств (3.34), (3.35), получим

$$\begin{aligned}
 u_n &\rightarrow A_1(-g(u) + f, F(\mu) + \beta) + B_1(\varphi, \psi, \nu) = u, \\
 \mu_n &\rightarrow A_2(-g(u) + f, F(\mu) + \beta) + B_2(\varphi, \psi, \nu) = \mu.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_{C(\bar{D}_T)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mu_n - \mu\|_{C(\Gamma_1)} = 0. \tag{3.37}$$

С другой стороны, в силу (1.1), (3.1), (3.36), а также (3.26), (3.28) имеем: $Lu_n = \square u_n + g(u_n) = [g(u_n) - g_n(u_n)] + f_n \rightarrow f$ в пространстве $C(\bar{D}_T)$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда, а также из (3.24), (3.26), (3.29), (3.37) и замечания 3.2 вытекают предельные равенства (1.7)–(1.9). Таким образом, функция $u \in C(\bar{D}_T)$ является сильным обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) класса C в области D_T в смысле определения 1.1. Обратное утверждение нами уже было доказано выше.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.7. Ниже нам понадобятся следующие легко проверяемые неравенства. Поскольку при $(x, t) \in \bar{D}_l$ имеют место неравенства $x - t \leq 2l - x - t$, $t - x \leq 2l - t - x$, в случае, когда $\varphi_1 \leq \varphi_2$ и $\varphi'_1 \geq \varphi'_2$, где $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1$, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\varphi_1(x-t) + \varphi_1(x+t)] &\leq \frac{1}{2}[\varphi_2(x-t) + \varphi_2(x+t)], & (x, t) \in \bar{\Delta}_1, \\ \frac{1}{2}[\varphi_1(t+x) + \varphi_1(t-x)] &\leq \frac{1}{2}[\varphi_2(t+x) + \varphi_2(t-x)], & (x, t) \in \bar{\Delta}_2, \end{aligned}$$

и поскольку $(\varphi_2 - \varphi_1)' \leq 0$, $(\varphi_2 - \varphi_1)(x_1) \geq (\varphi_2 - \varphi_1)(x_2)$ при $x_1 < x_2$, т.е. $\varphi_1(x_1) - \varphi_1(x_2) \leq \varphi_2(x_2) - \varphi_2(x_2)$, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\varphi_1(x-t) - \varphi_1(2l-x-t)] &\leq \frac{1}{2}[\varphi_2(x-t) - \varphi_2(2l-x-t)], & (x, t) \in \bar{\Delta}_3, \\ \frac{1}{2}[\varphi_1(t-x) - \varphi_1(2l-t-x)] &\leq \frac{1}{2}[\varphi_2(t-x) - \varphi_2(2l-t-x)], & (x, t) \in \bar{\Delta}_4. \end{aligned}$$

§ 4. Теоремы сравнения решений некоторых вспомогательных смешанных задач. Единственность решения задачи (1.1)–(1.3)

Рассмотрим в области D_T , $T \leq l$, линейные смешанные задачи в следующей постановке

$$\begin{aligned} \square v &= a_i(x, t)v + \Phi_i(x, t), & (x, t) \in D_T, \\ v(x, 0) &= \tilde{\varphi}_i(x), \quad v_t(x, 0) = \tilde{\psi}_i(x), & 0 \leq x \leq l, \\ v_x(0, t) &= \gamma_i(t)v(0, t) + \tilde{\beta}_i(t), \quad v(l, t) = \tilde{\nu}_i(t), & 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $a_i, \Phi_i \in C(\bar{D}_T)$, $\tilde{\varphi}_i \in C^2([0, l])$, $\tilde{\psi}_i \in C^1([0, l])$, $\gamma_i, \tilde{\beta}_i \in C^1([0, T])$, $\tilde{\nu}_i \in C^2([0, T])$ – заданные функции, удовлетворяющие следующим условиям согласования второго порядка: $\tilde{\varphi}'_i(0) = \gamma_i(0)\tilde{\varphi}_i(0) + \tilde{\beta}_i(0)$, $\tilde{\psi}'_i(0) = \gamma'_i(0)\tilde{\varphi}_i(0) + \gamma_i(0)\tilde{\psi}_i(0) + \tilde{\beta}'_i(0)$, $\tilde{\varphi}_i(l) = \tilde{\nu}_i(0)$, $\tilde{\psi}_i(l) = \tilde{\nu}'_i(0)$, $\tilde{\nu}''_i(0) - \tilde{\varphi}''_i(l) = a_i(l, 0)\tilde{\nu}_i(0) + \Phi_i(l, 0)$, $i = 1, 2$, а $v \in C^2(\bar{D}_T)$ – искомая функция.

ТЕОРЕМА 4.1. Пусть v_1 и v_2 – решения задачи (4.1) класса $C^2(\bar{D}_T)$ соответственно при $i = 1$ и $i = 2$. Тогда если

$$\begin{aligned} a_1(x, t) &\leq a_2(x, t), \quad \Phi_1(x, t) \leq \Phi_2(x, t), & (x, t) \in \bar{D}_T, \\ \tilde{\varphi}_1(x) &\leq \tilde{\varphi}_2(x), \quad \tilde{\varphi}'_1(x) \geq \tilde{\varphi}'_2(x), \quad \tilde{\psi}_1(x) \leq \tilde{\psi}_2(x), & 0 \leq x \leq l, \\ \gamma_1(t) &\geq \gamma_2(t), \quad \tilde{\beta}_1(t) \geq \tilde{\beta}_2(t), \quad \tilde{\nu}_1(t) \leq \tilde{\nu}_2(t), & 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (4.2)$$

то

$$v_1(x, t) \leq v_2(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D}_T. \quad (4.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу замечания 3.5 пара функций $(v_i, \mu_i := v_i|_{\Gamma_1})$ удовлетворяет следующей системе линейных интегральных уравнений типа Вольterra:

$$\begin{aligned} v_i &= A_1(a_i v_i + \Phi_i, \gamma_i \mu_i + \tilde{\beta}_i) + B_1(\tilde{\varphi}_i, \tilde{\psi}_i, \tilde{\nu}_i), \\ \mu_i &= A_2(a_i v_i + \Phi_i, \gamma_i \mu_i + \tilde{\beta}_i) + B_2(\tilde{\varphi}_i, \tilde{\psi}_i, \tilde{\nu}_i), \end{aligned}$$

к которой в метрике пространства $C(\bar{D}_T) \times C([0, T])$ стремятся соответствующие последовательные приближения Пикара

$$\begin{aligned} v_{i,0} &= 0, \quad \mu_{i,0} = 0, \\ v_{i,m} &= A_1(a_i v_{i,m-1} + \Phi_i, \gamma_i \mu_{i,m-1} + \tilde{\beta}_i) + B_1(\tilde{\varphi}_i, \tilde{\psi}_i, \tilde{\nu}_i), \\ \mu_{i,m} &= A_2(a_i v_{i,m-1} + \Phi_i, \gamma_i \mu_{i,m-1} + \tilde{\beta}_i) + B_2(\tilde{\varphi}_i, \tilde{\psi}_i, \tilde{\nu}_i), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $i = 1, 2, m = 1, 2, \dots$.

В силу (4.2), представлений (3.7), (3.10)–(3.12) для решения w линейной задачи (3.1)–(3.3) и замечания 3.7 легко видеть, что последовательные приближения $v_{i,m}, \mu_{i,m}, i = 1, 2$, из (4.4) удовлетворяют следующим неравенствам

$$v_{1,m} \leq v_{2,m}, \quad \mu_{1,m} \leq \mu_{2,m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5)$$

Поскольку $(v_{i,m}, \mu_{i,m}) \rightarrow (v_i, \mu_i)$ в пространстве $C(\bar{D}_T) \times C([0, T])$ при $m \rightarrow \infty$, переходя к пределу в первом неравенстве из (4.5), получим (4.3). Что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим в области $D_T, T \leq l$, нелинейные смешанные задачи в следующей постановке:

$$\begin{aligned} L_i u &:= \square u + g_i(u) = f_i(x, t), \quad (x, t) \in D_T, \\ u(x, 0) &= \varphi_i(x), \quad u_t(x, 0) = \psi_i(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ u_x(0, t) &= F_i[u(0, t)] + \beta_i(t), \quad u(l, t) = \nu_i(t), \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где “данные” этой задачи (т.е. функции $f, \varphi, \psi, \beta, \nu, g$) удовлетворяют условиям гладкости и согласования, указанным в замечании 3.6.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть u_1 и u_2 – решения задачи (4.6) класса $C^2(\bar{D}_T)$ соответственно при $i = 1$ и $i = 2$. Тогда если

$$\begin{aligned} g_1, g_2 &\in C^1(\mathbb{R}); \quad g'_1(s) \leq 0 \quad \text{или} \quad g'_2(s) \leq 0; \quad g_1(s) \geq g_2(s), \quad s \in \mathbb{R}, \\ f_1(x, t) &\leq f_2(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D}_T, \\ \varphi_1(x) &\leq \varphi_2(x), \quad \varphi'_1(x) \geq \varphi'_2(x), \quad \psi_1(x) \leq \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ F_1, F_2 &\in C^1(\mathbb{R}); \quad F'_1(s) \leq 0 \quad \text{или} \quad F'_2(s) \leq 0; \quad F_1(s) \geq F_2(s), \quad s \in \mathbb{R}, \\ \beta_1(t) &\geq \beta_2(t), \quad \nu_1(t) \leq \nu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (4.7)$$

то

$$u_1(x, t) \leq u_2(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D}_T. \quad (4.8)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу равенств (4.6) разность $v_2 := u_2 - u_1$ можно рассматривать как решение следующей линейной смешанной задачи:

$$\begin{aligned} \square v_2 &= a_2(x, t)v_2 + \Phi_2(x, t), & (x, t) \in D_T, \\ v_2(x, 0) &= \tilde{\varphi}_2(x), \quad v_{2t}(x, 0) = \tilde{\psi}_2(x), & 0 \leq x \leq l, \\ v_{2x}(0, t) &= \gamma_2(t)v(0, t) + \tilde{\beta}_2(t), \quad v(l, t) = \tilde{\nu}_2(t), & 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь

$$a_2 := - \int_0^1 g'_2[u_1 + (u_2 - u_1)s] ds, \quad \Phi_2 := g_1(u_1) - g_2(u_1) + f_2 - f_1,$$

или

$$\begin{aligned} a_2 &:= - \int_0^1 g'_1[u_2 + (u_1 - u_2)s] ds, & \Phi_2 &:= g_1(u_2) - g_2(u_2) + f_2 - f_1, \\ \tilde{\varphi}_2 &:= \varphi_2 - \varphi_1, & \tilde{\psi}_2 &:= \psi_2 - \psi_1, \\ \gamma_2 &:= \int_0^1 F'_2[u_1 + (u_2 - u_1)s] ds, & \tilde{\beta}_2 &:= F_2(u_1) - F_1(u_1) + \beta_2 - \beta_1, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \gamma_2 &:= \int_0^1 F'_1[u_2 + (u_1 - u_2)s] ds, & \tilde{\beta}_2 &:= F_2(u_2) - F_1(u_2) + \beta_2 - \beta_1, \\ \tilde{\nu}_2 &:= \nu_2 - \nu_1. \end{aligned}$$

При этом в силу (4.7) будем иметь

$$\begin{aligned} a_2 \geq 0, & \quad \Phi_2 \geq 0, & \tilde{\varphi}_2 \geq 0, & \quad \tilde{\varphi}'_2 \leq 0, & \quad \tilde{\psi}_2 \geq 0, \\ \gamma_2 \leq 0, & \quad \tilde{\beta}_2 \leq 0, & \tilde{\nu}_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Если теперь сравнить решение v_2 линейной смешанной задачи (4.9) с решением $v_1 = 0$ соответствующей (4.9) однородной задачи, а также принять во внимание неравенства (4.10), то в силу теоремы сравнения 4.1 получим, что $v_2 \geq v_1 = 0$, т.е. имеет место (4.8). Этим теорема 4.2 доказана.

Из замечания 3.6 и теоремы 4.2 непосредственно вытекает следующее

СЛЕДСТВИЕ 4.1. Если u_1 и u_2 – сильные обобщенные решения задачи (4.6) класса C в области D_T в смысле определения 1.1 соответственно при $i = 1$ и $i = 2$ и справедливы условия (4.7), причем для $f = f_i$, $g = g_i$, $F = F_i$, $\varphi = \varphi_i$, $\psi = \psi_i$, $\beta = \beta_i$, $\nu = \nu_i$, $i = 1, 2$, выполнены условия гладкости (3.23) и согласования (1.4), то имеет место (4.8).

Теперь докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть u^i – сильное обобщенное решение задачи (1.1)–(1.3) класса C в области D_T в смысле определения 1.1 при $f = f_i$, $\varphi = \varphi_i$, $\psi = \psi_i$,

$\beta = \beta_i, \nu = \nu_i, g = g_i, F = F_i, i = 1, 2$. Тогда если

$$g_1, g_2 \in C^1(\mathbb{R}); \quad g'_1(s) \leq 0 \quad \text{или} \quad g'_2(s) \leq 0; \quad g_1(s) \geq g_2(s), \quad s \in \mathbb{R},$$

$$f_1(x, t) < f_2(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D}_T, \quad (4.11)$$

$$\varphi_1(x) < \varphi_2(x), \quad \varphi'_1(x) > \varphi'_2(x), \quad \psi_1(x) < \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4.12)$$

$$F_1, F_2 \in C^1(\mathbb{R}); \quad F'_1(s) \leq 0 \quad \text{или} \quad F'_2(s) \leq 0; \quad F_1(s) \geq F_2(s), \quad s \in \mathbb{R},$$

$$\beta_1(t) > \beta_2(t), \quad \nu_1(t) < \nu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.13)$$

то

$$u^1(x, t) \leq u^2(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D}_T. \quad (4.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В условиях теоремы 4.3 существует такая последовательность функций $u_n^i \in C^2(\bar{D}_T)$, $i = 1, 2$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n^i - u^i\|_{C(\bar{D}_T)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|L_i u_n^i - f_i\|_{C(\bar{D}_T)} = 0, \quad (4.15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n^i(\cdot, 0) - \varphi_i\|_{C^1(\omega_0)} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{nt}^i(\cdot, 0) - \psi_i\|_{C(\omega_0)} = 0, \quad (4.16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_{nx}^i(0, \cdot) - F_i[u_n^i(0, \cdot)] - \beta_i\|_{C(\Gamma_1)} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n^i(l, \cdot) - \nu_i\|_{C^1(\Gamma_2)} = 0. \quad (4.17)$$

Рассмотрим функцию $u_n^i \in C^2(\bar{D}_T)$, $i = 1, 2$, как решение следующей задачи:

$$L_i u_n^i = f_{in},$$

$$u_n^i|_{\omega_0} = \varphi_{in}, \quad u_{nt}^i|_{\omega_0} = \psi_{in}, \quad u_{nx}^i|_{\Gamma_1} = F_i(u_n^i)|_{\Gamma_1} + \beta_{in}, \quad u_n^i|_{\Gamma_2} = \nu_{in}. \quad (4.18)$$

Здесь при $i = 1, 2$

$$f_{in} := L_i u_n^i, \quad \varphi_{in} := u_n^i|_{\omega_0}, \quad \psi_{in} := u_{nt}^i|_{\omega_0},$$

$$\beta_{in} := u_{nx}^i|_{\Gamma_1} - F_i(u_n^i)|_{\Gamma_1}, \quad \nu_{in} := u_n^i|_{\Gamma_2}.$$

В силу условия (4.11) и $f_i \in C(\bar{D}_T)$, $i = 1, 2$, имеем $\inf_{(x,t) \in \bar{D}_T} (f_2(x, t) - f_1(x, t)) = 2\varepsilon = \text{const} > 0$ и, тем самым,

$$f_1(x, t) + \varepsilon \leq f_2(x, t) - \varepsilon, \quad (x, t) \in \bar{D}_T, \quad (4.19)$$

а в силу (4.15) и (4.18) найдется такое натуральное число n_1 , что при $n > n_1$ справедливы неравенства

$$f_{1n}(x, t) \leq f_1(x, t) + \varepsilon, \quad f_2(x, t) - \varepsilon \leq f_{2n}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D}_T. \quad (4.20)$$

Теперь из (4.19) и (4.20) следует, что

$$f_{2n}(x, t) \geq f_2(x, t) - \varepsilon \geq f_1(x, t) + \varepsilon \geq f_{1n}(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D}_T. \quad (4.21)$$

В силу (4.12), (4.13), (4.16)–(4.18) аналогичным образом найдется такое натуральное число n_2 , что при $n > n_2$ справедливы неравенства

$$\varphi_{1n}(x) \leq \varphi_{2n}(x), \quad \varphi'_{1n}(x) \geq \varphi'_{2n}(x), \quad \psi_{1n}(x) \leq \psi_{2n}(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$\beta_{1n}(t) \geq \beta_{2n}(t), \quad \nu_{1n}(t) \leq \nu_{2n}(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (4.22)$$

Поскольку u_n^1 и u_n^2 являются решениями задачи (4.18) соответственно при $i = 1$ и $i = 2$, причем справедливы неравенства (4.21), (4.22) при $n \geq n_0 := \max(n_1, n_2)$, в силу теоремы 4.2 будем иметь

$$u_n^1(x, t) \leq u_n^2(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D}_T, \quad n \geq n_0,$$

откуда при $n \rightarrow \infty$ следует (4.14). Что и требовалось доказать.

СЛЕДСТВИЕ 4.2. При выполнении условий (3.23), (1.4) и

$$g'(s) \leq 0, \quad F'(s) \leq 0, \quad s \in \mathbb{R}, \quad (4.23)$$

из доказанных выше теорем непосредственно вытекает единственность сильного обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3) класса C в области D_T в смысле определения 1.1.

Действительно, предположим, что задача (1.1)–(1.3) имеет два различных сильных обобщенных решения u_1 и u_2 класса C в области D_T . Полагая $f_1 = f_2 = f$, $g_1 = g_2 = g$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, $\psi_1 = \psi_2 = \psi$, $F_1 = F_2 = F$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, с учетом (4.23) и в силу следствия 4.1 будем иметь $u_1 \leq u_2$. Теперь, поменяв местами u_1 и u_2 и снова воспользовавшись следствием 4.1, получим $u_2 \leq u_1$. Отсюда следует $u_1 = u_2$, что противоречит нашему допущению.

Единственность сильного обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3) на самом деле справедлива при менее ограничительных условиях на “данные” этой задачи. Действительно, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 4.4. Задача (1.1)–(1.3) не может иметь более одного сильного обобщенного решения класса C в области D_T в смысле определения 1.1, если в (1.5) дополнительно потребовать, чтобы $g, F \in C^1(\mathbb{R})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что задача (1.1)–(1.3) имеет два возможных различных сильных обобщенных решения u_1 и u_2 класса C в области D_T . Тогда в силу леммы 3.1 пары функций $(u_1, \mu_1 := u_1|_{\Gamma_1})$ и $(u_2, \mu_2 := u_2|_{\Gamma_1})$ являются непрерывными решениями нелинейной системы интегральных уравнений (3.21). Положим $u_0 := u_2 - u_1$, $\mu_0 := \mu_2 - \mu_1$. С учетом (3.15) и (3.16) имеем

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= - \int_0^{t-x} [F(\mu_2) - F(\mu_1)](\tau) d\tau \\ &\quad - \int_0^{t-x} d\tau_1 \int_0^{\tau_1} [g(u_2) - g(u_1)](\tau_1 - \tau, \tau) d\tau \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega_{x,t}^2} [g(u_2) - g(u_1)](\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (x, t) \in \Delta_2, \\ \mu_0(t) &= - \int_0^t [F(\mu_2) - F(\mu_1)](\tau) d\tau \\ &\quad - \int_0^t d\tau_1 \int_0^{\tau_1} [g(u_2) - g(u_1)](\tau_1 - \tau, \tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} F(\mu_2) - F(\mu_1) &= \left[\int_0^1 F'[\mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)s] ds \right] \mu_0, \\ g(u_2) - g(u_1) &= \left[\int_0^1 g'[u_1 + (u_2 - u_1)s] ds \right] u_0, \end{aligned} \quad (4.25)$$

считая u_i, μ_i фиксированными функциями и полагая

$$\bar{u}_0(t) := \max_{0 \leq x \leq l} |u_0(x, t)|, \quad 0 \leq t \leq T,$$

в силу (4.24) и (4.25) получим

$$\begin{aligned} |u_0(x, t)| &\leq M_0 \int_0^t [|\mu_0(\tau)| + \bar{u}_0(\tau)] d\tau, \quad (x, t) \in \Delta_2 \cap \{t < T\}, \\ |\mu_0(t)| &\leq M_0 \int_0^t [|\mu_0(\tau)| + \bar{u}_0(\tau)] d\tau, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (4.26)$$

где M_0 – положительная постоянная, зависящая от g, F и фиксированных функций $u_i, \mu_i, i = 1, 2$. Аналогичные рассуждения, проведенные в остальных областях $\Delta_j \cap \{t < T\}$ при, быть может, увеличении M_0 , позволяют получить неравенства

$$|u_0(x, t)| \leq M_0 \int_0^t [|\mu_0(\tau)| + \bar{u}_0(\tau)] d\tau, \quad (x, t) \in \Delta_j \cap \{t < T\}, \quad j \neq 2. \quad (4.27)$$

Из (4.26) и (4.27) следует, что

$$|\mu_0(t)| + \bar{u}_0(t) \leq 2M_0 \int_0^t [|\mu_0(\tau)| + \bar{u}_0(\tau)] d\tau, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Отсюда в силу леммы Гронуолла получим, что $\bar{u}_0(t) = 0, 0 \leq t \leq T$, т.е. $u_1 = u_2$. Полученное противоречие доказывает теорему 4.4.

СЛЕДСТВИЕ 4.3. Теорема 4.1 и рассуждения, приведенных при доказательстве следствия 4.2 позволяют заключить, что линейная смешанная задача (4.1) не может иметь более одного классического решения.

§ 5. Случай разрешимости в целом в области D_T для любого $T \leq l$ задачи (1.1)–(1.3) в классе непрерывных функций

При $\tau \in [0, 1]$ и $T \leq l$ предположим, что $u = u_\tau$ является сильным обобщенным решением класса C в области $D_T, T \leq l$, следующей задачи:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= \tau[-g(u) + f(x, t)], \quad (x, t) \in D_T, \\ u(x, 0) &= \tau\varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \tau\psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ u_x(0, t) &= \tau\{F[u(0, t)] + \beta(t)\}, \quad u(l, t) = \tau\nu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где “данные” этой задачи удовлетворяют условиям гладкости (1.5) и согласования, аналогичным (1.6): $\varphi'(0) = F[\tau\varphi(0)] + \beta(0)$, $\varphi(l) = \nu(0)$, $\psi(l) = \nu'(0)$. Легко видеть, что эти условия будут выполнены, если

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = F(0) + \beta(0), \quad \varphi(l) = \nu(0), \quad \psi(l) = \nu'(0). \quad (5.2)$$

Аналогичные рассуждения показывают, что если $u = u_\tau$ является классическим решением задачи (5.1) для любого $\tau \in [0, 1]$, то в соответствии с замечанием 3.6 естественно потребовать, чтобы были выполнены условия гладкости (3.23), а вместо (1.4) имели место равенства

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0, \quad \varphi(l) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = F(0) + \beta(0), \\ \psi'(0) = \beta'(0), \quad \varphi(l) = \nu(0), \quad \psi(l) = \nu'(0), \quad \nu''(0) - \varphi''(l) + g(0) = f(l, 0). \end{aligned} \quad (5.3)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Отметим, что задача (5.1) совпадает с задачей (1.1)–(1.3) при $\tau = 1$ и аналогично определению 1.1 вводится понятие сильного обобщенного решения этой задачи класса C в области D_T .

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2. В силу леммы 3.1 задача (5.1) в классе непрерывных функций эквивалентным образом редуцируется к нелинейному операторному уравнению

$$(u, \mu) = \tau A_0(u, \mu), \quad (5.4)$$

где оператор A_0 , определенный в (3.22), в силу замечания 3.2 действует непрерывным образом из пространства $C(\bar{D}_T) \times C([0, T])$ в пространство $C^1(\bar{D}_T) \times C^1([0, T])$, $T \leq l$. Теперь, принимая во внимание, что вложение пространства $C^1(\bar{D}_T) \times C^1([0, T])$ в пространство $C(\bar{D}_T) \times C([0, T])$ является компактным [12; гл. VI, § 8, лемма 6.36], получим, что оператор

$$A_0: C(\bar{D}_T) \times C([0, T]) \rightarrow C(\bar{D}_T) \times C([0, T]) \quad (5.5)$$

является компактным.

Следствием замечаний 5.1, 5.2 и теоремы Лере–Шаудера [13; гл. VIII, § 35, п. 6, теорема 2] является следующая

ЛЕММА 5.1. Пусть выполнены условия (1.5) и (5.2). Если для любого сильного обобщенного решения $u = u_\tau$ задачи (5.1) класса C в области D_T при любом фиксированном $\tau \in [0, 1]$ имеет место априорная оценка

$$\|u\|_{C(\bar{D}_T)} \leq M_*, \quad (5.6)$$

где неотрицательная постоянная $M_* = M_*(g, f, \varphi, \psi, F, \beta, \nu)$ не зависит от τ , то задача (1.1)–(1.3) имеет по крайней мере одно сильное обобщенное решение класса C в области D_T .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в силу замечаний 5.1 и 5.2 функция $u \in C(\bar{D}_T)$ является сильным обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) класса C в области D_T тогда и только тогда, когда она является непрерывным решением нелинейного операторного уравнения (5.4) при $\tau = 1$. Но согласно условию

леммы 5.1 для любого решения $u \in C(\bar{D}_T)$ уравнения (5.4) с компактным оператором A_0 из (5.5) при любом фиксированном $\tau \in [0, 1]$ имеет место априорная оценка (5.6), и, следовательно, согласно теореме Лере–Шаудера уравнение (5.4) при $\tau = 1$ имеет хотя бы одно решение $u \in C(\bar{D}_T)$, которое является также и сильным обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3) класса C в области D_T , что и доказывает лемму 5.1.

Следствием лемм 2.1 и 5.1 и теоремы 4.4 является следующая

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $T \leq l$, выполнены условия (1.5), (5.2), а также условия леммы 2.1. Тогда задача (1.1)–(1.3) имеет хотя бы одно сильное обобщенное решение класса C в области D_T , которое будет единственным, если к тому же $g, F \in C^1(\mathbb{R})$. Если дополнительно потребовать выполнение условий гладкости (3.23) и равенств (1.4), то это решение будет и классическим.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если “данные” g, f, φ, ψ, F задачи (1.1)–(1.3) заменить на $\tau g, \tau f, \tau \varphi, \tau \psi, \tau F$, то для любого сильного обобщенного решения $u = u_\tau$ класса C в области D_T в силу (2.1), (2.2) и (2.19) имеет место следующая априорная оценка:

$$\begin{aligned} \|u\|_{C(\bar{D}_T)} &\leq c_1 \tau \|f\|_{C(\bar{D}_T)} + c_2 \tau \|\varphi\|_{C(\omega_0)} + c_3 \tau \|\psi\|_{C(\omega_0)} + c_4 \tau^{1/2} \|G(|g|; |\varphi|)\|_{C(\omega_0)}^{1/2} \\ &\quad + c_5 \tau \|F\|_{C([-|\varphi(0)|, |\varphi(0)|])} + \tau^{1/2} c_6 \\ &\leq c_1 \|f\|_{C(\bar{D}_T)} + c_2 \|\varphi\|_{C(\omega_0)} + c_3 \|\psi\|_{C(\omega_0)} + c_4 \|G(|g|; |\varphi|)\|_{C(\omega_0)}^{1/2} \\ &\quad + c_5 \|F\|_{C([-|\varphi(0)|, |\varphi(0)|])} + c_6. \end{aligned}$$

Теперь остается только сослаться на лемму 5.1 и теорему 4.4. То, что при выполнении условий (3.23) и (5.3) это решение будет классическим, следует из замечания 3.6.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3. Отметим, что существование единственного классического решения в области $D_{l,k} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < l, (k-1)l < t < kl\}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, смешанной задачи

$$\begin{aligned} Lu &= f(x, t), & (x, t) &\in D_{l,k}, \\ u|_{t=(k-1)l} &= \varphi, & u_t|_{t=(k-1)l} &= \psi, \\ u_x(0, t) &= F[u(0, t)] + \beta(t), & u(l, t) &= \nu(t), & (k-1)l &\leq t \leq kl, \end{aligned}$$

доказывается дословно аналогично, как в случае, когда $k = 1$, т.е. в области D_l . Отсюда в свою очередь следует, что все те построения структурного характера, которые были проведены в предыдущих параграфах в области D_T при $T \leq l$ (например, представление решений (3.10)–(3.12) линейной задачи (3.1)–(3.3) в виде системы нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра (3.21) относительно переменной t), аналогичным образом переносятся на случай области D_T при любом $T \geq l$. Поэтому если выполнены условия леммы 2.1, гладкости (3.23) при $T = \infty$ и согласования (1.4), то в области D_T при любом $T > 0$ (в частности, при $T = \infty$) существует единственное классическое решение $u \in C^2(\bar{D}_T)$ задачи (1.1)–(1.3).

ЗАМЕЧАНИЕ 5.4. Ниже мы рассмотрим случаи, когда хотя бы одно из условий (2.1), обеспечивающих наличие априорной оценки (2.2), на нелинейные функции g и F в задаче (1.1)–(1.3) нарушается. Тем не менее мы будем считать, что остается в силе априорная оценка решения этой задачи, из которой следует существование классического решения задачи (1.1)–(1.3) в целом в области D_T , $T \leq l$, но для более узких классов заданных функций f , φ , ψ , β и ν , по сравнению с теми, которые были приведены в лемме 2.1.

Заметим, что $u_1 \equiv 0$ является решением задачи (4.6) при $i = 1$, если

$$f_1 = g_1(0), \quad \varphi_1 = 0, \quad \psi_1 = 0, \quad \beta_1 = -F_1(0), \quad \nu_1 = 0.$$

Тогда в соответствии с условиями теоремы 4.2 если

$$\begin{aligned} g_1, g_2 \in C^1(\mathbb{R}); \quad g'_1(s) \leq 0 \quad \text{или} \quad g'_2(s) \leq 0; \quad g_1(s) \geq g_2(s), \quad s \in \mathbb{R}, \\ g_1(0) \leq f_2(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D}_T, \\ 0 \leq \varphi_2(x), \quad 0 \geq \varphi'_2(x), \quad 0 \leq \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ F_1, F_2 \in C^1(\mathbb{R}); \quad F'_1(s) \leq 0 \quad \text{или} \quad F'_2(s) \leq 0; \quad F_1(s) \geq F_2(s), \quad s \in \mathbb{R}, \\ -F_1(0) \geq \beta_2(t), \quad 0 \leq \nu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

то

$$0 \leq u_2(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D}_T. \quad (5.7)$$

Пусть теперь u_2 является классическим решением задачи (4.6) при $i = 2$,

$$\begin{aligned} g_2 = 0, \quad f_2 = 0, \quad \varphi_2 \in C^2([0, l]), \quad \psi_2 \in C^1([0, l]), \\ F_2(s) = -\delta|s|^\alpha, \quad \delta := \text{const} > 0, \quad \alpha := \text{const} > 1, \\ s \in \mathbb{R}, \quad \beta_2 = 0, \quad \nu_2 \in C^2([0, T]), \end{aligned}$$

причем выполнены соответствующие условия согласования. Легко проверить, что при $\psi_2 = -\varphi'_2$ решение u_2 этой задачи дается формулой

$$u_2(x, t) = \begin{cases} \varphi_2(x - t), & (x, t) \in \Delta_1, \\ \mu(t - x), & (x, t) \in \Delta_2, \\ \nu_2(x + t - l) + \varphi_2(x - t) - \varphi_2(2l - x - t), & (x, t) \in \Delta_3, \\ \mu(t - x) + \nu_2(x + t - l) - \varphi_2(2l - t - x), & (x, t) \in \Delta_4, \end{cases} \quad (5.8)$$

где

$$\mu(t) = \frac{\varphi_2(0)}{[1 - \delta(\alpha - 1)\varphi_2^{\alpha-1}(0)t]^{\frac{1}{\alpha-1}}}, \quad 0 \leq t < T^* := \frac{1}{\delta(\alpha - 1)\varphi_2^{\alpha-1}(0)} > l \quad (5.9)$$

является решением следующей задачи Коши:

$$\mu'(t) = \delta|\mu(t)|^\alpha, \quad 0 \leq t < T^*, \quad \mu(0) = \varphi_2(0) > 0.$$

Тогда в соответствии с условиями теоремы 4.2, если

$$\begin{aligned} g_1 \in C^1(\mathbb{R}), \quad g_1(s) \geq 0, \quad s \in \mathbb{R}, \quad f_1(x, t) \leq 0, \quad (x, t) \in \bar{D}_T, \\ \varphi_1(x) \leq \varphi_2(x), \quad \varphi'_1(x) \geq \varphi'_2(x), \quad \psi_1(x) \leq -\varphi'_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ F_1 \in C^1(\mathbb{R}), \quad F'_1(s) \leq 0, \quad F_1(s) \geq -\delta|s|^\alpha, \quad s \in \mathbb{R}, \\ \beta_1(t) \geq 0, \quad \nu_1(t) \leq \nu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

то

$$u_1(x, t) \leq u_2(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D}_T, \quad T \leq l, \quad (5.10)$$

где u_2 дается формулой (5.8).

Пусть выполнены условия (3.23), (5.3), и для решения $u = u_\tau$ задачи (5.1) выполнены все условия, налагаемые на “данные” этой задачи, которые обеспечивают выполнение как неравенства (5.7) при $u_2 = u_\tau$, так и неравенства (5.10) при $u_1 = u_\tau$, т.е.

$$0 \leq u_\tau(x, t) \leq u_2(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D}_T, \quad (5.11)$$

где u_2 из (5.11) дается формулой (5.8). Легко видеть, что этими условиями являются

$$\begin{aligned} g_1, \tau g &\in C^1(\mathbb{R}); \quad g'_1(s) \leq 0 \quad \text{или} \quad \tau g'(s) \leq 0; \quad g_1(s) \geq \tau g(s), \quad s \in \mathbb{R}, \\ g_1(0) &\leq \tau f(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D}_T, \\ 0 &\leq \tau \varphi(x), \quad 0 \geq \tau \varphi'(x), \quad 0 \leq \tau \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ F_1, \tau F &\in C^1(\mathbb{R}); \quad F'_1(s) \leq 0 \quad \text{или} \quad \tau F'(s) \leq 0; \quad F_1(s) \geq \tau F(s), \quad s \in \mathbb{R}, \\ -F_1(0) &\geq \tau \beta(t), \quad 0 \leq \tau \nu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \tau g &\in C^1(\mathbb{R}), \quad \tau g(s) \geq 0, \quad s \in \mathbb{R}; \quad \tau f(x, t) \leq 0, \quad (x, t) \in \bar{D}_T, \\ \tau \varphi(x) &\leq \varphi_2(x), \quad \tau \varphi'(x) \geq \varphi'_2(x), \quad \tau \psi(x) \leq -\varphi'_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ \tau F &\in C^1(\mathbb{R}), \quad \tau F'(s) \leq 0, \quad \tau F(s) \geq -\delta|s|^\alpha, \quad s \in \mathbb{R}, \\ \tau \beta(t) &\geq 0, \quad \tau \nu(t) \leq \nu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} g_1, \tau g &\in C^1(\mathbb{R}); \quad g'_1(s) \leq 0 \quad \text{или} \quad \tau g'(s) \leq 0; \quad 0 \leq \tau g(s) \leq g_1(s), \quad s \in \mathbb{R}, \\ g_1(0) &\leq \tau f(x, t) \leq 0, \quad (x, t) \in \bar{D}_T, \\ 0 &\leq \tau \varphi(x) \leq \varphi_2(x), \quad \varphi'_2(x) \leq \tau \varphi'(x) \leq 0, \quad 0 \leq \tau \psi(x) \leq -\varphi'_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ F_1, \tau F &\in C^1(\mathbb{R}); \quad \tau F'(s) \leq 0, \quad -\delta|s|^\alpha \leq \tau F(s) \leq F_1(s), \quad s \in \mathbb{R}, \\ 0 &\leq \tau \beta(t) \leq -F_1(0), \quad 0 \leq \tau \nu(t) \leq \nu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Легко проверить, что полученные выше условия будут выполнены при любом $\tau \in [0, 1]$, если

$$g_1, g \in C^1(\mathbb{R}); \quad g'_1(s) \leq 0 \quad \text{или} \quad g'(s) \leq 0; \quad 0 \leq g(s) \leq g_1(s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad (5.12)$$

$$g_1(0) \leq f(x, t) \leq 0, \quad (x, t) \in \bar{D}_T, \quad (5.13)$$

$$0 \leq \varphi(x) \leq \varphi_2(x), \quad \varphi'_2(x) \leq \varphi'(x) \leq 0, \quad (5.14)$$

$$0 \leq \psi(x) \leq -\varphi'_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5.15)$$

$$F_1, F \in C^1(\mathbb{R}); \quad F'(s) \leq 0, \quad -\delta|s|^\alpha \leq F(s) \leq F_1(s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad (5.16)$$

$$0 \leq \beta(t) \leq -F_1(0), \quad 0 \leq \nu(t) \leq \nu_2(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (5.17)$$

Из (5.12) и (5.13) следует, что $g_1(0) = 0$ и, следовательно, $f = 0$. Предполагая, что в (5.12) выполнено условие $g'_1(s) \leq 0$, $s \in \mathbb{R}$, то из того, что $g_1(0) = 0$, получаем $g_1(s) = 0$, $s \geq 0$, а потому и $g(s) = 0$, $s \geq 0$. Аналогично, из (5.16) и (5.17) следует, что $F_1(0) = 0$ и, следовательно, $\beta = 0$.

Легко проверить, что если функции g , f , φ , ψ , F , β и ν удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} g &\in C^1(\mathbb{R}), & g &\geq 0, & g(s) &= 0, & s &\geq 0, & f &= 0, \\ \varphi &\in C^2([0, l]), & \varphi &\geq 0, & \varphi' &\leq 0, & \psi &\in C^1([0, l]), & \psi &\geq 0, \\ F &\in C^1(\mathbb{R}), & F' &\leq 0, & F(0) &= 0, & F(s) &\geq -\delta s^\alpha, & s &\geq 0, \\ \beta &= 0, & \nu &\in C^2([0, T]), & \nu &\geq 0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

то найдутся такие функции g_1 , F_1 , φ_2 и ν_2 , что будут выполнены приведенные выше условия (5.12)–(5.17). В частности, такими функциями являются

$$\begin{aligned} g_1(s) &= \int_0^s [g']_-(s_1) ds_1, & s &\in \mathbb{R}, & F_1 &= F, \\ \varphi_2(x) &= \varphi(x) + k(l - x), & 0 &\leq x \leq l, & \nu_2 &= \nu, \end{aligned}$$

где $\chi_- := \min(\chi, 0)$, $k := \|\psi\|_{C([0, l])}$. Действительно, поскольку $g(s) = 0$, $s \geq 0$, $g_1(s) = 0$ при $s \geq 0$. Далее, принимая во внимание, что $[g']_- \leq g'$, при $s \leq 0$ будем иметь

$$g_1(s) \geq \int_0^s g'(s_1) ds_1 = g(s).$$

Аналогично проверяются остальные условия.

Из приведенных выше рассуждений, теоремы 4.4, неравенства (5.11) и леммы 5.1 следует справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 5.2. Пусть $\delta := \text{const} > 0$, $\alpha := \text{const} > 1$, выполнены условия (5.18) и (5.3). Тогда задача (1.1)–(1.3) имеет единственное классическое решение в области D_T , $T \leq l$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. Следует отметить, что если выполнены условия, налагаемые на функцию $g(F)$ из теоремы 5.2, то условия, налагаемые на эту же функцию $g(F)$ из теоремы 5.1, будут нарушены, за исключением тривиального случая $g = 0$ ($F = 0$).

§ 6. Локальная разрешимость по t и существование взрывного решения задачи (1.1)–(1.3)

ТЕОРЕМА 6.1. Пусть $T \leq l$ и функции $f \in C(\bar{D}_T)$, $g, F \in C(\mathbb{R})$, $\varphi \in C^1([0, l])$, $\psi \in C([0, l])$, $\beta \in C([0, T])$, $\nu \in C^1([0, T])$ удовлетворяют условиям согласования (1.6). Тогда найдется такое положительное число $T_0 := T_0(f, g, F, \varphi, \psi, \beta, \nu)$, что при $T \leq T_0$ задача (1.1)–(1.3) в области D_T будет иметь хотя бы одно сильное обобщенное решение и класса C . В случае, когда $g, F \in C^1(\mathbb{R})$, это решение будет единственным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В третьем параграфе задача (1.1)–(1.3) в пространстве $C(\bar{D}_T) \times C([0, T])$ эквивалентным образом была редуцирована к уравнению (3.21), где в силу замечания 5.2 оператор A_0 является непрерывным и компактным. Поэтому для разрешимости уравнения (3.21) согласно теореме Шаудера достаточно показать, что оператор A_0 переводит некоторый шар $B_{R_0}(u_0, \mu_0)$ с центром в точке (u_0, μ_0) и радиусом $R_0 > 0$ банахова пространства $C(\bar{D}_T) \times C([0, T])$ в себя. Покажем, что это имеет место при достаточно малых T . Действительно, в силу замечания 3.1 и равенства (3.22) операторное уравнение (3.21) можно переписать в виде

$$(u, \mu) = A_0(u, \mu) = (u_0, \mu_0) + A(-g(u), F(\mu)), \quad (6.1)$$

где

$$u_0 = A_1(f, \beta) + B_1(\varphi, \psi, \nu), \quad \mu_0 = A_2(f, \beta) + B_2(\varphi, \psi, \nu).$$

Легко видеть, что если пара $(\tilde{u}, \tilde{\mu})$ принадлежит шару $B_{R_0}(u_0, \mu_0)$, а линейный оператор A из (3.19) согласно замечанию 3.5 является интегральным оператором типа Вольтерра по переменной t , $t \leq T$, то

$$\|A(-g(\tilde{u}), F(\tilde{\mu}))\|_{C(\bar{D}_T) \times C([0, T])} \leq TM, \quad (6.2)$$

где $0 < M := M(\|g\|_{C([-R, R])}, \|F\|_{C([-R, R])}) < \infty$, $R := \|(u_0, \mu_0)\|_{C(\bar{D}_T) \times C([0, l])} + R_0$, а R_0 – произвольное фиксированное положительное число, причем функция $M = M(s_1, s_2)$ является непрерывной и неубывающей по каждому ее аргументу $s_i \geq 0$, $i = 1, 2$.

Взяв теперь $T \leq \min\{T_0, l\}$, где $T_0 := R_0/M$, из (6.1) и (6.2) получим, что при $(\tilde{u}, \tilde{\mu}) \in B_{R_0}(u_0, \mu_0)$ имеем $\|A_0(\tilde{u}, \tilde{\mu}) - (u_0, \mu_0)\|_{C(\bar{D}_T) \times C([0, T])} \leq R_0$, т.е. $A_0: B_{R_0}(u_0, \mu_0) \rightarrow B_{R_0}(u_0, \mu_0)$. В случае $g, F \in C^1(\mathbb{R})$ в силу теоремы 4.4 это решение будет единственным. Этим теорема 6.1 доказана полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Из рассуждений, приведенных выше при доказательстве теоремы 6.1, следует, что если

$$\|f\|_{C(\bar{D}_l)} + \|\varphi\|_{C(\omega_0)} + \|\psi\|_{C(\omega_0)} + \|\beta\|_{C([0, l])} + \|\nu\|_{C([0, l])} \leq d,$$

где d – некоторое положительное число, то найдется такая функция $\gamma = \gamma(d) > 0$, являющаяся непрерывной и неубывающей относительно переменной d , что задача (1.1)–(1.3) в области D_{T_1} , $T_1 = \gamma_0(d) := \min(\gamma(d), l)$, будет иметь хотя бы одно сильное обобщенное решение u класса C . Далее, если $T < l$ и выполнены условия гладкости (3.23) и согласования (1.4), то в силу замечания 3.6 и теоремы 4.4 в случае существования сильного обобщенного решения u задачи (1.1)–(1.3) в области D_T оно будет классическим и единственным, причем это решение может быть продолжено в замкнутую область $\bar{D}_{T_2}$, где $T_2 := \min(T + \Delta T, l)$, $\Delta T = \gamma_0(d_1)$, а

$$d_1 := \|f\|_{C(\bar{D}_l)} + \|u\|_{C(\omega_T)} + \|u_t\|_{C(\omega_T)} + \|\beta\|_{C([0, l])} + \|\nu\|_{C([0, l])}$$

как классическое решение этой задачи.

Пусть u_1 – решение задачи (4.6) в области D_T , $T \leq l$, при $i = 1$ и $g_1 = 0$, $f_1 = 0$, $\varphi_1 \in C^2([0, l])$, $\psi_1 \in C^1([0, l])$, $F_1(s) = -\delta|s|^\alpha s$, $\delta := \text{const} > 0$, $\alpha := \text{const} > 0$, $s \in \mathbb{R}$, $\beta_1 = 0$, $\nu_1 \in C^2([0, l])$, и выполнены соответствующие условия согласования, аналогичные (1.4). Легко проверить, что при $\psi_1 = -\varphi'_1$ решение u_1 этой задачи определяется теми же формулами (5.8), (5.9), в которых вместо φ_2 , ν_2 и α следует взять φ_1 , ν_1 и $\alpha + 1$ соответственно. При этом потребуем, чтобы величина T^* , определяемая равенством (5.9), удовлетворяла условию

$$T^* < l. \quad (6.3)$$

Решение u_1 является взрывным, поскольку

$$\lim_{T \rightarrow T^* - 0} \|u_1\|_{C(\bar{D}_T)} = \infty. \quad (6.4)$$

Поэтому при постановке этой задачи следует потребовать, чтобы $T < T^*$.

В качестве классического решения u_2 задачи (4.6) при $i = 2$ в области D_T , $T < T^*$, возьмем решение u задачи (1.1)–(1.3) при $g_2 = g$, $f_2 = f$, $\varphi_2 = \varphi$, $\psi_2 = \psi$, $F_2 = F$, $\beta_2 = \beta$ и $\nu_2 = \nu$. Тогда согласно теореме 4.2 при выполнении следующих условий:

$$\begin{aligned} g &\in C^1(\mathbb{R}), \quad g(s) \leq 0, \quad s \in \mathbb{R}, \quad f(x, t) \geq 0, \quad (x, t) \in \bar{D}_l, \\ \varphi_1(x) &\leq \varphi(x), \quad \varphi'_1(x) \geq \varphi'(x), \quad -\varphi'_1(x) \leq \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ F &\in C^1(\mathbb{R}), \quad F(s) \leq -\delta|s|^\alpha s, \quad \delta := \text{const} > 0, \quad \alpha := \text{const} > 0, \quad s \in \mathbb{R}, \\ \beta(t) &\leq 0, \quad \nu_1(t) \leq \nu(t), \quad 0 \leq t \leq l, \end{aligned} \quad (6.5)$$

справедливо неравенство

$$u_1(x, t) \leq u(x, t), \quad (x, t) \in \bar{D}_T. \quad (6.6)$$

Согласно теореме 6.1, если выполнены условия (3.23) и (1.4) для задачи (4.6) при $i = 2$, то найдется такое число T_0 , что при $T \leq T_0$ эта задача имеет единственное классическое решение в замкнутой области $\bar{D}_T$. Поэтому в силу (6.3), (6.4) и (6.6) из теоремы 4.2 следует, что $T_0 < T^*$. Обозначим через T_* верхнюю грань тех значений T , для которых задача (1.1)–(1.3) имеет единственное классическое решение u в замкнутой области $\bar{D}_T$. Очевидно, что $T_* \leq T^*$, и, более того, докажем, что

$$\lim_{T \rightarrow T_* - 0} (\|u\|_{C(\bar{D}_T)} + \|u_t\|_{C(\bar{D}_T)}) = \infty. \quad (6.7)$$

Действительно, предположим, что условие (6.7) нарушено. Тогда

$$d_0 := \sup_{0 < T < T_*} [\|f\|_{C(\bar{D}_l)} + \|u\|_{C(\omega_T)} + \|u_t\|_{C(\omega_T)} + \|\beta\|_{C([0, l])} + \|\nu\|_{C([0, l])}] < \infty. \quad (6.8)$$

Согласно определению T_* задача (1.1)–(1.3) имеет единственное классическое решение u в замкнутой области $\bar{D}_T$ при $T_* - \frac{\Delta_0}{2} < T < T_*$, где $\Delta_0 = \gamma_0(d_0)$. В силу (6.8) из замечания 6.1 следует, что это решение продолжается как классическое решение в $\bar{D}_{T_3}$, где $T_3 := T + \Delta_0 > T_* + \frac{\Delta_0}{2}$, что противоречит определению числа T_* .

Легко проверить, что условия (6.5) будут выполнены, если для фиксированных функций φ , ψ и ν в качестве функций φ_1 и ν_1 взять

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - k(l - x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad \text{где } k := \max_{0 \leq x \leq l} |\varphi'(x) + \psi(x)|, \quad \nu_1 = \nu.$$

Таким образом, нами доказана следующая

ТЕОРЕМА 6.2. Пусть выполнены условия (1.4), (6.3), (6.5) и (3.23) при $T = \infty$. Тогда в области D_{T_*} , где $T_* \leq T^*$, существует единственное решение задачи (1.1)–(1.3) класса $C^2(\bar{D}_{T_*} \setminus \omega_{T_*})$, являющееся взрывным, т.е. удовлетворяющим условию (6.7).

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Отметим, что вопрос несуществования глобального решения задачи (1.1)–(1.3) в области D_∞ в случае отсутствия априорной оценки можно исследовать методом пробных функций, который изложен в работе [14].

Список литературы

- [1] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, 5-е изд., Наука, М., 1977, 735 с.; англ. пер. 2-го изд.: A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii, *Equations of mathematical physics*, The Macmillan Co., New York, 1963, xvi+765 pp.
- [2] В. Б. Колмановский, В. Р. Носов, *Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием*, Теоретические основы кибернетики, Наука, М., 1981, 448 с.
- [3] S. A. Rodríguez, J.-M. Dion, L. Dugard, “Stability of neutral time delay systems: a survey of some results”, *Advances in automatic control*, Kluwer Internat. Ser. Engrg. Comput. Sci., **754**, Kluwer Acad. Publ., Boston, MA, 2004, 315–335.
- [4] A. S. Ackleh, Keng Deng, “Existence and nonexistence of global solutions of the wave equation with a nonlinear boundary condition”, *Quart. Appl. Math.*, **59**:1 (2001), 153–158.
- [5] E. Vitillaro, “Global existence for the wave equation with nonlinear boundary damping and source term”, *J. Differential Equations*, **186**:1 (2002), 259–298.
- [6] J. Serrin, G. Todorova, E. Vitillaro, “Existence for a nonlinear wave equation with damping and source terms”, *Differential Integral Equations*, **16**:1 (2003), 13–50.
- [7] Hongwei Zhang, Qingying Hu, “Asymptotic behaviour and nonexistence of wave equation with nonlinear boundary condition”, *Commun. Pure Appl. Anal.*, **4**:4 (2005), 861–896.
- [8] A. Nowakowski, “Solvability and stability of a semilinear wave equation with nonlinear boundary conditions”, *Nonlinear Anal.*, **73**:6 (2010), 1495–1514.
- [9] В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, М., 1976, 391 с.; англ. пер.: V. P. Mikhailov, *Partial differential equations*, Mir, Chicago, Ill.; distributed by Imported Publications, Inc., 1978, 397 pp.
- [10] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, 2-е изд., Наука, М., 1971, 512 с.; англ. пер. 1-го изд.: V. S. Vladimirov, *Equations of mathematical physics*, Pure and Applied Mathematics, **3**, Marcel Dekker, Inc., New York, 1971, vi+418 pp.
- [11] Р. Нарасимхан, *Анализ на действительных и комплексных многообразиях*, Мир, М., 1971, 232 с.; пер. с англ.: R. Narasimhan, *Analysis on real and complex manifolds*, Adv. Stud. Pure Math., **1**, Masson & Cie, Éditeurs, Paris; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1968, x+246 pp.

- [12] Д. Гильбарг, Н. С. Трудингер, *Эллиптические уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989, 464 с.; пер. с англ.: D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, 2nd ed., Grundlehren Math. Wiss., **224**, Springer-Verlag, Berlin, 1983, xiii+513 pp.
- [13] В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, 2-е изд., Наука, М., 1993, 440 с.
- [14] Э. Митидиери, С. И. Похожаев, “Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных”, Тр. МИАН, **234**, Наука, М., 2001, 3–383; англ. пер.: E. Mitidieri, S. I. Pokhozhaev, “A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial differential equations and inequalities”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **234** (2001), 1–362.

Сергей Сергеевич Харибегашвили
(Sergei S. Kharibegashvili)

Математический институт им. А. Размадзе

АН Грузии, г. Тбилиси;

Грузинский технический университет, г. Тбилиси

E-mail: kharibegashvili@yahoo.com

Поступила в редакцию
30.05.2013

Отар Михайлович Джохадзе
(Otar M. Jokhadze)

Математический институт им. А. Размадзе

АН Грузии, г. Тбилиси;

Тбилисский государственный университет

им. Ив. Джавахишвили

E-mail: ojokhadze@yahoo.com