Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Б. Жеглов, О диких алгебрах с делением над полями степенных рядов, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 6, 21–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm825>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 14:02:25

УДК 512.552.32

А. Б. Жеглов

О диких алгебрах с делением над полями степенных рядов

В статье изучаются некоторые специальные классы алгебр с делением над полем лорановских степенных рядов с произвольным полем вычетов. Алгебры из таких классов мы называем расщепимыми и хорошо расщепимыми. В статье показано, что эти классы содержат группу ручных алгебр с делением. Для класса хорошо расщепимых алгебр с делением доказана теорема о разложении, которая является обобщением известных теорем Джекоба и Вэдсворта о разложении для ручных алгебр с делением. Для обоих классов мы вводим понятие δ -отображения и развиваем технику δ -отображений для алгебр с делением из этих классов. С помощью этой техники мы доказываем теоремы о разложении, передоказываем несколько старых хорошо известных результатов Салтмана, а также доказываем гипотезу М. Артина о периоде и индексе в локальном случае: экспонента алгебры с делением A над C_2 -полем F равна ее индексу, если $F = F_1((t))$, где F_1 – C_1 -поле. Кроме этого в работе получены несколько результатов о расщепимых алгебрах с делением, которые, как мы надеемся, помогут дальнейшему исследованию диких алгебр с делением.

Библиография: 13 названий.

§ 1. Введение

В этой работе мы исследуем некоторый класс алгебр с делением над полем степенных рядов от одной переменной с произвольным полем вычетов. А именно мы изучаем тела, удовлетворяющие следующему условию: существует сечение $\overline{D} \hookrightarrow D$ гомоморфизма вычетов $D \rightarrow \overline{D}$, где D – центральная алгебра с делением над полным полем дискретного нормирования $F = k((t))$. Такие тела мы будем называть *расщепимыми*. В случае $\text{char } k = 0$ все такие тела являются ручными (см. ниже) и, следовательно, принадлежат подгруппе ручных алгебр в группе Брауэра $\text{Br}(F)$, которая была тщательно изучена в работах [1] и [2] (и даже в намного более общей ситуации гензелева поля F произвольной характеристики). Таким образом, мы будем изучать в основном дикие алгебры с делением.

Дикие алгебры с делением степени p над полным полем F дискретного нормирования ранга 1 с полем вычетов характеристики $\text{char}(\overline{F}) = p$ были исследованы Салтманом в [3] (Тиньоль в [4] исследовал более общий случай бездефектных алгебр с делением степени p над гензелевым полем F). В этой работе мы изучаем расщепимые алгебры с делением произвольного индекса. Класс таких тел (который, однако, не является подгруппой в группе Брауэра $\text{Br}(F)$) содержит подкласс

Работа выполнена при поддержке Graduiertenkolleg “Geometrie und Nichtlineare Analysis” фонда DFG.

хорошо расщепимых тел (см. определение в § 3), которые обладают рядом замечательных свойств. В частности, для таких алгебр мы докажем теорему о разложении. Эта теорема является обобщением теорем о разложении для ручных алгебр с делением, доказанных Джэкобом и Вэдсвортом в [1].

Для произвольных расщепимых алгебр с делением мы дадим здесь лишь несколько разрозненных результатов, и кажется, что изучение даже этого класса тел еще далеко от своего завершения. Тем не менее, мы развиваем здесь технику для произвольных расщепимых тел и доказываем несколько фундаментальных свойств таких, например, как соотношение между высотами для расщепимой алгебры с делением (см. § 6). Мы надеемся, что эта техника позволит в дальнейшем ответить на вопрос о цикличности некоторых тел степени p^k .

В качестве приложения мы приведем несколько результатов, некоторые из которых уже были известны, а некоторые являются новыми. В частности, мы докажем, что справедлива следующая гипотеза: экспонента алгебры с делением A над C_2 -полем $F = F_1((t))$, где $F_1 - C_1$ -поле, равна ее индексу.

Приведем краткое описание результатов статьи.

В § 2 мы даем определение расщепимых и хорошо расщепимых алгебр с делением и доказываем, что все ручные алгебры с делением над $F = k((t))$ хорошо расщепимы.

В § 3 мы развиваем упомянутую выше технику для изучения расщепимых алгебр с делением. Мы вводим понятие δ -отображений и развиваем теорию таких отображений на расщепимых алгебрах. В этом параграфе мы определяем также понятие локальной высоты, которое является одним из возможных обобщений определенного Салтманом уровня.

В § 4 мы доказываем указанную выше гипотезу о периоде и индексе. Параграф содержит также краткую историю вопроса, известную автору. Отметим, что доказательство использует далеко не все результаты из § 3.

В § 5 изучаются хорошо расщепимые тела и доказывается теорема о разложении.

В § 6 мы передоказываем некоторые результаты Салтмана о полуразветвленных алгебрах с делением индекса p над полем F , используя технику § 3. Также мы вводим понятие высшего уровня и доказываем несколько общих результатов о расщепимых телах, удовлетворяющих следующему условию: $Z(\overline{D})/\overline{F}$ – простое расщепление. В частности, мы доказываем, что высший уровень строго больше высоты, если высота взаимно проста с характеристикой центра тела (теорема 4). В конце параграфа мы указываем некоторые открытые вопросы.

В этой работе мы пользуемся обозначениями из статьи [1]. Всегда D будет обозначать алгебру с делением, конечномерную над своим центром $F = k((t)) = Z(D)$. Напомним, что произвольное гензелево нормирование поля F однозначно продолжается до нормирования тела D . Мы будем обозначать через v нормирование на F и через w – его продолжение на D .

Мы будем обозначать через Γ_D группу значений w , через V_D – его кольцо нормирования, через M_D – его максимальный идеал и через $\overline{D} = V_D/M_D$ – тело вычетов.

Известно [5; с. 21], что выполняется следующее фундаментальное неравенство:

$$[D : F] \geq |\Gamma_D : \Gamma_F| \cdot [\overline{D} : \overline{F}].$$

Тело D называется *бездефектным над F* , если выполняется равенство, и *дефектным* в противном случае. Известно, что тело D бездефектно, если на нем существует дискретное нормирование ранга 1.

В работе [1] авторы ввели понятие основного гомоморфизма

$$\theta_D: \Gamma_D / \Gamma_F \rightarrow \text{Gal}(Z(\overline{D})/\overline{F}),$$

которое определяется с помощью сопряжения элементами из D . Они показали, что θ_D сюръективен и что $Z(\overline{D})$ является композитом абелева и чисто несепарабельного расширений поля $\overline{F}$.

Алгебра с делением D называется *ручной*, если $\text{char}(\overline{F}) = 0$ или если $\text{char}(\overline{F}) = q \neq 0$, D бездефектна над F , $Z(\overline{D})$ сепарабельно над $\overline{F}$ и $q \nmid |\ker(\theta_D)|$. Алгебра D называется *дикой* в противном случае.

Алгебра D называется *инерциально расщепимой*, если поле $Z(\overline{D})$ сепарабельно над $\overline{F}$, отображение θ_D — изоморфизм и D бездефектна над F .

В заключение автор хотел бы поблагодарить А. Н. Паршина, Е.-В. Цинка и М. Грабца за полезные обсуждения и внимание к этой работе. Особую признательность мне хотелось бы выразить А. Вэдсворту за внимательное прочтение и указание ошибки в первой версии этой статьи, а также В. И. Янчевскому за активную совместную работу во время его визита в Берлин.

§ 2. Теорема Коэна

Напомним определение из работы [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Алгебру с делением D назовем *расщепимой*, если существует гомоморфизм $\overline{D} \hookrightarrow \mathcal{O}_D \subset D$, являющийся сечением отображения $\mathcal{O}_D \rightarrow \overline{D}$.

Возникает естественный вопрос, существует ли обобщение теоремы Коэна, т.е. расщепима ли произвольная центральная алгебра с делением. Это не так, если алгебра с делением не является конечномерной над своим центром, как показывает пример Дубровина в [6]. Это также неверно для некоторых конечномерных алгебр с делением, как видно из примера к теореме 2.7 в [3]. Но ответ на вопрос положителен для диких алгебр с делением над полными дискретно нормированными полями. Это непосредственно следует из результатов Джэкоба и Вэдсворта [1] (ср. с [6; теорема 1]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть (F, v) — поле, полное относительно дискретного нормирования v ранга 1. Пусть $\text{char } F = \text{char } \overline{F}$, и пусть D — ручная алгебра с делением, $Z(D) = F$ и $[D : F] < \infty$.

Тогда существует сечение $\overline{D} \hookrightarrow D$ гомоморфизма вычетов $D \rightarrow \overline{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как F — полное поле, то F является гензелевым, и v однозначно продолжается до нормирования w тела D . Так как D — ручная алгебра, то $Z(\overline{D})/\overline{Z(D)}$ есть циклическое расширение Галуа. Тогда существует неразветвленный подъем Z поля $Z(\overline{D})$ над F , причем Z есть расширение Галуа над F , и по классической теореме Коэна существует сечение $\overline{Z} \hookrightarrow Z$.

Рассмотрим централизатор $C = C_D(Z)$ поля Z в D . Тогда имеем $\overline{C} = \overline{D}$.

Действительно, по теореме о централизаторе имеем $[D : F] = [C : F][Z : F]$ и $[Z : F] = |\text{Gal}(Z(\overline{D})/\overline{F})|$. В силу [1; предложение 1.7] гомоморфизм

$$\theta_D: \Gamma_D / \Gamma_F \rightarrow \text{Gal}(Z(\overline{D})/\overline{F})$$

сюръективен, поэтому для любого параметра z выполняется $\theta_D(w(z)) = \sigma$, где $\langle \sigma \rangle = \text{Gal}(Z(\overline{D})/\overline{F})$. Ясно, что $z \notin C$.

Теперь пусть $u_1, \dots, u_{[C:F]} - F$ -базис C . Легко видеть, что элементы $u_j, zu_j, \dots, z^{n-1}u_j$, $j = 1, \dots, [C:F]$, где $n = \text{ord}(\sigma)$ – порядок σ , линейно независимы, т.е. они составляют базис D над F . Так как

$$w(F\langle zu_j, \dots, z^{n-1}u_j, j = 1, \dots, [C:F] \rangle) \cap \Gamma_C = 0,$$

где $F\langle zu_j, \dots, z^{n-1}u_j, j = 1, \dots, [C:F] \rangle$ обозначает векторное пространство в D над F , порожденное элементами $u_j z^i$, то имеем, что для любого элемента $x \in D$ с $w(x) = 0$ можно найти элементы $r_1, \dots, r_{[C:F]} \in F$ такие, что $x = r_1 u_1 + \dots + r_{[C:F]} u_{[C:F]} \pmod{M_D}$. Отсюда $\overline{C} = \overline{D}$.

Заметим, что C – неразветвленная алгебра с делением. В самом деле, в силу теорем 2.8, 2.9 из [1] C содержит копию неразветвленного подъема максимального сепарабельного подполя в $\overline{C}$. Обозначим ее через $\tilde{C}$. Тогда централизатор $C_C(\tilde{C})$ должен быть вполне разветвленной алгеброй с делением, а значит, он тривиален и $\tilde{C}$ – максимальное подполе. Следовательно, C должна быть неразветвленной алгеброй.

Рассмотрим вложение $i: \overline{F} \hookrightarrow F$. Оно может быть расширено до вложения $i': \overline{Z} \hookrightarrow Z$, $i'|_{\overline{F}} = i$, по лемме Гензеля. Теперь рассмотрим алгебру $A = \overline{C} \otimes_{\overline{Z}} Z(C)$. Легко видеть, что A – неразветвленная алгебра с делением и $\overline{A} = \overline{C} = \overline{D}$. Поэтому по [7; теорема 31] имеем $A \cong C$; следовательно, существует сечение $\overline{D} \hookrightarrow C$.

Теорема доказана.

Ниже будет показано, что гораздо больше может быть сказано про хорошо расщепимые алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Алгебра с делением D называется *хорошо расщепимой*, если существует сечение $s: \overline{D} \hookrightarrow D$, согласованное с вложением $i: \overline{Z(D)} \hookrightarrow Z(D)$, т.е. $s(\overline{Z(D)}) = i(\overline{Z(D)}) \subset Z(D)$.

Легко видеть, что все ручные алгебры с делением хорошо расщепимы, потому что по лемме Гензеля любое вложение $\overline{Z(D)} \hookrightarrow Z(D)$ однозначно продолжается на любое сепарабельное расширение $Z(D)$.

Возникает естественный вопрос, какие из расщепимых алгебр с делением являются хорошо расщепимыми.

По теореме 3.9 из [3] известно, что даже расщепимая алгебра с делением D степени $p = \text{char } D$ не является хорошо расщепимой, если уровень D (определение уровня мы напомним в §3, см. замечание к лемме 7) делится на p . Тем не менее, вопрос является открытым, например для алгебр с делением таких, что $\overline{D} = Z(\overline{D})$, $\overline{D}/\overline{F}$ – простое расширение и локальная высота (см. определение в том же замечании) не делится на p . Этот вопрос мы еще обсудим в §6.

§3. Дельта-отображения расщепимых алгебр

В настоящем параграфе мы развиваем некоторые идеи из [6], где были изучены определенные свойства δ -отображений для некоторых видов многомерных локальных тел. Ключевую роль во всех наших дальнейших результатах будут играть технические свойства δ -отображений, поэтому ниже мы перечислим все эти свойства.

Пусть D – конечномерная алгебра с делением над полным нормированным полем $F = k((t))$. Пусть w – единственное продолжение нормирования v на D . Через z мы будем обозначать произвольный параметр D , т.е. произвольный элемент с $\langle w(z) \rangle = \Gamma_D$. Рассмотрим кольцо $\mathbb{Z}\langle \alpha, \delta \rangle$ некоммутативных полиномов от двух переменных. Для любого слова из $\mathbb{Z}\langle \alpha, \delta \rangle$ определим отображение

$$\begin{aligned} \sigma: \mathbb{Z}\langle \alpha, \delta \rangle &\rightarrow \mathbb{Z}\langle \alpha, \delta, \delta_i; i \geq 1 \rangle, \\ \sigma(\alpha^{a_1} \delta^{b_1} \dots \alpha^{a_n} \delta^{b_n}) &= \alpha^{a_1} \delta_{b_1} \dots \delta_{b_{n-1}} \alpha^{a_n-1} \delta^{b_n}, \end{aligned}$$

где $a_1, b_n \geq 0$, $a_i, b_j \geq 1$, $i > 1, j < n$.

Пусть $S_i^k \in \mathbb{Z}\langle \alpha, \delta \rangle$, $i \geq k, i \geq 1$, – полиномы, задаваемые следующей формулой:

$$S_i^k = \sum_{\tau \in S_i/G} \tau(\underbrace{\alpha \dots \alpha}_{i-k} \underbrace{\delta \dots \delta}_k),$$

где S_i – группа подстановок и G – изотропная подгруппа.

ЛЕММА 1 [6; лемма 2]. *Полиномы S_i^k удовлетворяют следующему свойству:*

$$S_i^i = \delta^i, \quad S_i^0 = \alpha^i, \quad S_{i+1}^{k+1} = \alpha S_i^{k+1} + \delta S_i^k.$$

Для любой расщепимой алгебры с делением можно ввести понятие δ -отображений:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [6; предложения 1, 2]. *Пусть D – расщепимая алгебра с делением. Зафиксируем параметр z и вложение $u: \overline{D} \hookrightarrow D$. Тогда D изоморфна алгебре с делением $\overline{D}((z))$, которую зададим как векторное пространство рядов с умножением, определенным формулой*

$$zaz^{-1} = \alpha(a) + \delta_1(a)z + \delta_2(a)z^2 + \dots, \quad a \in \overline{D},$$

где $\alpha: \overline{D} \rightarrow \overline{D}$ – автоморфизм и $\delta_i: \overline{D} \rightarrow \overline{D}$ – линейные отображения такие, что отображение δ_i удовлетворяет тождеству

$$\delta_i(ab) = \sum_{k=0}^i \sigma(\delta^{i-k} \alpha)(a) \sigma(S_i^k \alpha)(b), \quad a, b \in \overline{D}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Заметим, что значения $\sigma(S_i^k \alpha)$ и $\sigma(\delta^{i-k} \alpha)$ принадлежат подкольцу $\mathbb{Z}\langle \alpha, \delta_i; i \geq 1 \rangle$, поэтому формула корректно определена. Также заметим, что δ -отображения зависят от выбора параметра и вложения. Автоморфизм α , как легко видеть, зависит только от выбора параметра. В предложении мы отождествили $\overline{D}$ с $u(\overline{D})$.

СЛЕДСТВИЕ 1 [6; следствие 1]. *Пусть $\alpha = \text{id}$. Тогда*

$$\delta_i(ab) = \delta_i(a)b + \sum_{k=1}^i \delta_{i-k}(a) \sum_{(j_1, \dots, j_l)} C_{i-k+1}^l \delta_{j_1} \dots \delta_{j_l}(b),$$

где $\delta_0 = \alpha$ и вторая сумма берется по всем векторам $(j_1, \dots, j_l)$ таким, что $0 < l \leq \min\{i-k+1, k\}$, $j_m \geq 1$, $\sum j_m = k$.

В дальнейшем нам понадобится еще более общее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. В предположениях предложения 1 определим отображения $(z, u)_m \delta_i: \overline{D} \rightarrow \overline{D}$, $m \in \mathbb{Z}$, $i \in \mathbb{N}$, следующим образом:

$$z^m a z^{-m} = u((z) \alpha^m(\bar{a})) + u((z, u)_m \delta_1(\bar{a}))z + u((z, u)_m \delta_2(\bar{a}))z^2 + \dots, \quad a \in u(\overline{D}).$$

Если $m = 0$, положим $(z, u)_m \delta_i = 0$.

Заметим, что $(z) \alpha|_{Z(\overline{D})}$ не зависит от выбора z .

Отметим также, что если $(z) \alpha = \text{id}$, то $(z, u)_m \delta_i = 0$ для $m = p^k$, где k достаточно большое и зависит от i . Более того, $(z, u)_m \delta_i = (z, u)_{m+p^k} \delta_i$ для достаточно больших k . В дальнейшем мы будем также иногда использовать следующие обозначения:

$$(z, u)_m \widetilde{\delta}_i = (z, u)_{-m} \delta_i, \quad (z, u)_1 \delta_i = (z, u) \delta_i.$$

Иногда, если это ясно из контекста, мы будем писать $_m \delta_i$ вместо $(z, u)_m \delta_i$ и $(z, u)_m \delta_i(a)$ вместо $u((z, u)_m \delta_i(\bar{a}))$.

Сразу из определения следует

ЛЕММА 2. В обозначениях определения 3

i) для $|m| > 1$ имеем

$$\begin{aligned} (z, u)_m \delta_i(a) &= (z) \alpha^{\text{sign}(m)} \left(\text{sign}(m)(|m|-1) \delta_i(a) \right) + \text{sign}(m) \delta_i \left((z) \alpha^{\text{sign}(m)(|m|-1)}(a) \right) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{i-1} \text{sign}(m) \delta_j \left(\text{sign}(m)(|m|-1) \delta_{i-j}(a) \right), \end{aligned}$$

$$\text{где } \text{sign}(m) = m/|m|, \quad a \in \overline{D};$$

ii) для любого $m \neq 0$ имеем

$$(z) \alpha^{-m} \left((z, u)_m \delta_i \right) + (z, u)_{-m} \delta_i \left((z) \alpha^m \right) + \sum_{j=1}^{i-1} (z, u)_{-m} \delta_j \left((z, u)_m \delta_{i-j} \right) = 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для фиксированных z, u из предложения 1 справедливо следующее:

i) отображения $(z, u)_m \delta_i$ удовлетворяют тождествам

$$_m \delta_i(ab) = _m \delta_i(a) \alpha^{i+m}(b) + \alpha^m(a) _m \delta_i(b) + \sum_{k=1}^{i-1} _m \delta_{i-k}(a) _{i-k+m} \delta_k(b);$$

ii) пусть $\alpha = \text{id}$, тогда отображения $(z, u)_m \delta_i$ удовлетворяют тождествам

$$\begin{aligned} _m \delta_i(ab) &= _m \delta_i(a)b + a _m \delta_i(b) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{i-1} _m \delta_{i-k}(a) \sum_{(j_1, \dots, j_l)} C_{i-k+m}^l \delta_{j_1} \dots \delta_{j_l}(b), \end{aligned}$$

где вторая сумма берется по всем векторам $(j_1, \dots, j_l)$ таким, что $0 < l \leq \min\{i-k+m, k\}$, $j_m \geq 1$, $\sum j_m = k$; $C_j^k = 0$, если $j = 0$, и $C_j^k = C_{j+p^q}^k$ для $q \gg 0$, если $j \leq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых $a, b \in \overline{D}$ имеем

$$\begin{aligned} \alpha^m(ab)z^m + {}_m\delta_1(ab)z^{m+1} + {}_m\delta_2(ab)z^{m+2} + \dots &= z^m(ab) \\ &= (\alpha^m(a)z^m + {}_m\delta_1(a)z^{m+1} + {}_m\delta_2(a)z^{m+2} + \dots)b. \end{aligned} \quad (1)$$

Если правую сторону равенства (1) записать в виде ряда с коэффициентами слева и затем сравнить соответствующие коэффициенты в правой и левой частях равенства, то мы получим формулы для ${}_m\delta_i(ab)$. Нам остается только доказать, что эти формулы суть те же самые, что и в предложении.

Пусть

$$z^{i+m-k}b = \alpha^{i+m-k}(b)z^{i+m-k} + \dots + x'_k z^{i+m} + \dots$$

и

$$\begin{aligned} (\alpha^m(a)z^m + {}_m\delta_1(a)z^{m+1} + {}_m\delta_2(a)z^{m+2} + \dots)b \\ = \alpha^m(ab)z^m + y_{m+1}z^{m+1} + y_{m+2}z^{m+2} + \dots. \end{aligned}$$

Тогда имеем, что

$$y_{i+m} = \alpha^m(a)x'_i + \sum_{k=0}^{i-1} {}_m\delta_{i-k}(a)x'_k.$$

В доказательстве предложения 2 из [6] было показано, что

$$z^{i+1-k}b = \alpha^{i+1-k}(b)z^{i+1-k} + \dots + \sigma(S_i^k \alpha)(b)z^{i+1} + \dots.$$

Следовательно, $x'_k = \sigma(S_{i+m-1}^k \alpha)(b)$ для $k < i$. Легко видеть, что $x'_i = {}_m\delta_i(b)$, $x'_0 = \alpha^{i+m}(b)$ и $\sigma(S_{i+m-1}^k \alpha) = {}_{i+m-k}\delta_k$, что доказывает п. i).

Для $\alpha = \text{id}$ в силу следствия 1 имеем

$$\sigma(S_{i+m-1}^k \alpha)(b) = \sum_{(j_1, \dots, j_l)} C_{i-k+m}^l \delta_{j_1} \dots \delta_{j_l}(b),$$

где $l, j_1, \dots, j_l$ были определены в нашем утверждении. Этим доказан п. ii).

Предложение доказано.

ЛЕММА 3 [6; лемма 3]. В предположениях предложения 1 пусть $(z, u)_i \delta_j$ – первое отображение такое, что $(z, u)_i \delta_j(a) \neq 0$ для данного $a \in \overline{D}$, $i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, т.е. $(z, u)_i \delta_1(a) = \dots = (z, u)_i \delta_{j-1}(a) = 0$, $(z, u)_i \delta_j(a) \neq 0$ (таким образом, имеем отображение $i \mapsto j(i)$). Справедливо следующее.

i) Для $z' = z + u(b)z^{q+1}$, $b \in \overline{D}$, имеем

$$(z')\alpha^i(a) = (z)\alpha^i(a), \quad (z', u)_i \delta_k(a) = (z, u)_i \delta_k(a), \quad k < q,$$

и

$$(z', u)_i \delta_q(a) = (z, u)_i \delta_q(a) + b' (z)\alpha^{q+i}(a) - (z)\alpha^i(a)b',$$

где $b' = \sum_{k=0}^{i-1} (z)\alpha^k(b)$.

ii) Предположим, что $(z)\alpha^n|_{Z(\overline{D})} = \text{id}$, $n \geq 1$, $a \in Z(\overline{D})$ и

$$(z, u)_1 \delta_1((z)\alpha^k(a)) = \dots = (z, u)_1 \delta_{j-1}((z)\alpha^k(a)) = 0$$

для любого k .

Тогда для $z' = z + u(b)z^{q+1}$, $b \in \overline{D}$, имеем

$$(z')\alpha^i(a) = (z)\alpha^i(a), \quad (z', u)_i \delta_k(a) = (z, u)_i \delta_k(a), \quad k < q + j,$$

u

$$\begin{aligned} (z', u)_i \delta_{q+j}(a) &= (z, u)_i \delta_{q+j}(a) + b' (z) \alpha^q((z, u)_i \delta_j(a)) - (z, u)_i \delta_j(a) (z) \alpha^j(b') \\ &+ b' \sum_{k=1}^q (z) \alpha^{q-k}((z, u)_i \delta_j((z) \alpha^{k+i-1}(a))) - (z, u)_i \delta_j(a) \sum_{k=0}^{j-1} (z) \alpha^k(b), \end{aligned}$$

где $b' = \sum_{k=0}^{i-1} (z) \alpha^k(b)$, если $n \mid q$ или если $(z) \alpha(a) = a$.

В частности, если $(z) \alpha = \text{id}$ и $(i, p) = 1$, то

$$(z', u)_i \delta_{q+j}(a) = (z, u)_i \delta_{q+j}(a) + (q - j) (z, u)_i \delta_j(a) b.$$

iii) Для $z' = u(b)z$, $b \in Z(\overline{D})$, $b \neq 0$, имеем

$$(z')\alpha(a) = (z)\alpha(a), \quad (z', u)_i \delta_k(a) = (z, u)_i \delta_k(a), \quad k < j,$$

u

$$(z', u)_i \delta_j(a) = (z, u)_i \delta_j(a) (z) \alpha(b^{-1}) \dots (z) \alpha^j(b^{-1}),$$

если $i = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Имеем

$$\begin{aligned} z'^i a z'^{-i} &= (1 + b' z^q + \dots) z^i a z^{-i} (1 + b' z^q + \dots)^{-1} \\ &= (z^i a z^{-i} + b' z^q z^i a z^{-i} + \dots) (1 - b' z^q + \dots) \\ &= (z^i a z^{-i} - z^i a z^{-i} b' z^q + \dots + b' z^q z^i a z^{-i} - \dots) \\ &= (z^i a z^{-i} - ((z) \alpha^i(a) + (z, u)_i \delta_j(a) z^j + \dots) b' z^q \\ &\quad + b' z^q ((z) \alpha^i(a) + (z, u)_i \delta_j(a) z^j + \dots) + \dots) \\ &= (z^i a z^{-i} - ((z) \alpha^i(a) b' + (z, u)_i \delta_j(a) (z) \alpha^j(b') z^j + \dots) z^q \\ &\quad + b' (z) \alpha^{q+i}(a) z^q + \dots) \\ &= (z^i a z^{-i} + (- (z) \alpha^i(a) b' + b' (z) \alpha^{q+i}(a)) z^q + \dots) \\ &= (z) \alpha^i(a) + \dots + (z, u)_i \delta_{q-1}(a) z'^{q-1} \\ &\quad + ((z, u)_i \delta_q(a) + b' (z) \alpha^{q+i}(a) - (z) \alpha^i(a) b') z'^q + \dots \end{aligned}$$

ii) Положим $c = z'^i z^{-i} - 1 - b' z^{q+i}$. Тогда $w(c) > q + i$. Заметим, что $c (z) \alpha^k(a) = (z) \alpha^k(a) c$, так как $n \mid q$ или $(z) \alpha(a) = a$ и $a \in Z(\overline{D})$. Имеем

$$\begin{aligned} z'^i a z'^{-i} &= (1 + b' z^q + c) z^i a z^{-i} (1 + b' z^q + c)^{-1} \\ &= (z^i a z^{-i} + b' z^q z^i a z^{-i} + c z^i a z^{-i}) (1 + b' z^q + c)^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left({}^{(z)}\alpha^i(a) + (z, u)_i \delta_j(a) z^j + \dots + (z, u)_i \delta_{q+j}(a) z^{q+j} \right. \\
&\quad \left. + \dots + b' z^q \left({}^{(z)}\alpha^i(a) + (z, u)_i \delta_j(a) z^j + \dots \right) \right) (1 + b' z^q + c)^{-1} \\
&= \left({}^{(z)}\alpha^i(a) + b' {}^{(z)}\alpha^{q+i}(a) z^q + {}^{(z)}\alpha^i(a) c + (z, u)_i \delta_j(a) z^j \right. \\
&\quad \left. + \dots + (z, u)_i \delta_{q+j}(a) z^{q+j} \right. \\
&\quad \left. + \dots + b' \sum_{k=1}^q \left({}^{(z)}\alpha^{q-k} \left((z, u) \delta_j \left({}^{(z)}\alpha^{k+i-1}(a) \right) \right) \right) \right) z^{q+j} \\
&\quad \left. + b' \left({}^{(z)}\alpha^q \left((z, u)_i \delta_j(a) \right) \right) z^{q+j} + \dots \right) (1 + b' z^q + c)^{-1} \\
&= {}^{(z)}\alpha^i(a) + \left((z, u)_i \delta_j(a) z^j + \dots + (z, u)_i \delta_{q+j}(a) z^{q+j} \right. \\
&\quad \left. + \dots + b' \sum_{k=1}^q \left({}^{(z)}\alpha^{q-k} \left((z, u) \delta_j \left({}^{(z)}\alpha^{k+i-1}(a) \right) \right) \right) \right) z^{q+j} \\
&\quad \left. + b' \left({}^{(z)}\alpha^q \left((z, u)_i \delta_j(a) \right) \right) z^{q+j} + \dots \right) (1 - b' z^q - c + \dots) \\
&= {}^{(z)}\alpha^i(a) + (z, u)_i \delta_j(a) z^j + \dots + (z, u)_i \delta_{q+j}(a) z^{q+j} \\
&\quad + \dots + b' \sum_{k=1}^q \left({}^{(z)}\alpha^{q-k} \left((z, u) \delta_j \left({}^{(z)}\alpha^{k+i-1}(a) \right) \right) \right) z^{q+j} \\
&\quad + b' \left({}^{(z)}\alpha^q \left((z, u)_i \delta_j(a) \right) \right) z^{q+j} + \dots - (z, u)_i \delta_j(a) {}^{(z)}\alpha^j(b') z^{q+j} + \dots \\
&= {}^{(z)}\alpha^i(a) + \dots + (z, u)_i \delta_{q+j-1}(a) z'^{q+j-1} \\
&\quad + \left((z, u)_i \delta_{q+j}(a) + b' {}^{(z)}\alpha^q \left((z, u)_i \delta_j(a) \right) - (z, u)_i \delta_j(a) {}^{(z)}\alpha^j(b') \right. \\
&\quad \left. + b' \sum_{k=1}^q {}^{(z)}\alpha^{q-k} \left((z, u) \delta_j \left({}^{(z)}\alpha^{k+i-1}(a) \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - (z, u)_i \delta_j(a) \sum_{k=0}^{j-1} {}^{(z)}\alpha^k(b) \right) z'^{q+j} + \dots,
\end{aligned}$$

так как $z'^j = z^j + \sum_{k=0}^{j-1} {}^{(z)}\alpha^k(b) z^{q+j} + \dots$.

iii) В этом случае выполняется

$$\begin{aligned}
z' a z'^{-1} &= b z a z^{-1} b^{-1} = {}^{(z)}\alpha(a) + b (z, u) \delta_j(a) {}^{(z)}\alpha^j(b^{-1}) z^j + \dots \\
&= {}^{(z)}\alpha(a) + (z, u) \delta_j(a) {}^{(z)}\alpha(b^{-1}) \dots {}^{(z)}\alpha^j(b^{-1}) z'^j + \dots,
\end{aligned}$$

так как ${}^{(z')} \alpha|_{Z(\overline{D})} = {}^{(z)} \alpha|_{Z(\overline{D})}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. В обозначениях леммы 3 имеет место равенство

$$j = j(i) = w(xu(a)x^{-1} - u(a)),$$

где $x \in D$ есть произвольный элемент с $w(x) = i$, если $a \in Z(\overline{D})$, $\alpha(a) = a$ и $(i, p) = 1$, где $p = \text{char } D$.

Если $i = 1$, мы будем обозначать j через $j(u, a)$ или $i(u, a)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как для некоторого параметра z выполняется

$$x = b(1 + x_1 z + \dots)z^i,$$

где $b, x_k \in u(\overline{D})$, то следствие легко вытекает из доказательства п. ii) леммы 3.

В дальнейшем нам понадобится следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Пусть (α, β) – некоторые эндоморфизмы алгебры с делением D . Отображение $\delta: D \rightarrow D'$, где $D \subset D'$ – некоторые алгебры, называется (α, β) -дифференцированием, если оно линейно и удовлетворяет следующему условию:

$$\delta(ab) = \delta(a)\alpha(b) + \beta(a)\delta(b),$$

где $a, b \in D$.

Будем говорить, что $(\alpha, 1)$ -дифференцирование есть α -дифференцирование.

ЛЕММА 4 (ср. [6; лемма 4]). Пусть δ – (α, β) -дифференцирование произвольной алгебры с делением D такое, что α, β сохраняют $Z(D)$ и $\alpha|_{Z(D)} \neq \beta|_{Z(D)}$.

Тогда δ является внутренним дифференцированием, т.е. существует такой элемент $d \in D$, что

$$\delta(a) = d\alpha(a) - \beta(a)d$$

для всех $a \in D$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $d = \delta(a)(a^\alpha - a^\beta)^{-1}$, где $a \in Z(D)$ – произвольный элемент такой, что $\alpha(a) \neq \beta(a)$. Положим $\delta_{\text{in}}(x) = d\alpha(x) - \beta(x)d$. Мы утверждаем, что $\delta = \delta_{\text{in}}$. Действительно, рассмотрим отображение $\overline{\delta} = \delta - \delta_{\text{in}}$. Это (α, β) -дифференцирование. Возьмем произвольный элемент $b \in D$. Тогда $\overline{\delta}(ab) = \overline{\delta}(ba)$. Но у нас

$$\overline{\delta}(ab) = \overline{\delta}(a)\alpha(b) + \beta(a)\overline{\delta}(b) = \beta(a)\overline{\delta}(b)$$

и

$$\overline{\delta}(ba) = \overline{\delta}(b)\alpha(a) + \beta(b)\overline{\delta}(a) = \alpha(a)\overline{\delta}(b).$$

Отсюда $\overline{\delta}(b) = 0$ для любого b .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3 (ср. [6; лемма 10]). Пусть D – расщепимая алгебра с делением. Пусть $n = \text{Gal}(Z(\overline{D})/\overline{Z(D)})$. Тогда существует параметр z' такой, что

$$(z', u)_m \delta_j = 0$$

для произвольного m , если $n \nmid j$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как при $n = 1$ утверждение в доказательстве не нуждается, предположим, что $n > 1$. Пусть z – некий фиксированный параметр. По [1; предложение 1.7] ${}^{(z)}\alpha|_{Z(\overline{D})}$ имеет порядок n .

По предложению 2 ${}^{(z,u)}\delta_1$ является $({}^{(z)}\alpha^2, {}^{(z)}\alpha)$ -дифференцированием. Так как $n > 1$, имеем ${}^{(z)}\alpha^2|_{Z(\overline{D})} \neq {}^{(z)}\alpha|_{Z(\overline{D})}$. Отсюда по лемме 4 ${}^{(z,u)}\delta_1$ – внутреннее дифференцирование и ${}^{(z,u)}\delta_1(a) = d({}^{(z)}\alpha^2(a) - {}^{(z)}\alpha(a)d, a \in \overline{D})$. Положим $z_1 = z - u(d)z^2$. По лемме 3, i) имеем, что для любого $a \in \overline{D}$ ${}^{(z_1,u)}\delta_1(a) = 0$ и ${}^{(z)}\alpha(a) = {}^{(z_1)}\alpha(a)$. Следовательно, ${}^{(z_1,u)}\delta_1 = 0$ и ${}^{(z)}\alpha = {}^{(z_1)}\alpha$.

В силу предложения 2 ${}^{(z_1,u)}\delta_2$ есть $({}^{(z_1)}\alpha^3, {}^{(z_1)}\alpha)$ -дифференцирование. Если $n \neq 2$, то оно внутреннее и мы можем применить лемму 3. Действуя по аналогии, получаем, что существует параметр z_{n-1} такой, что ${}^{(z_{n-1},u)}\delta_j = 0$ для $j < n$ и ${}^{(z)}\alpha = {}^{(z_{n-1})}\alpha$. Легко видеть, что тогда ${}^{(z_{n-1},u)}\delta_j = 0$ для $j < n$ и всех $m \in \mathbb{Z}$. Заметим, что ${}^{(z_{n-1},u)}\delta_n$ есть $({}^{(z_{n-1})}\alpha^{n+1}, {}^{(z_{n-1})}\alpha)$ -дифференцирование, т.е. ${}^{(z_{n-1},u)}\delta_n({}^{(z_{n-1})}\alpha^{-1})$ – дифференцирование.

Заметим также, что ${}^{(z_{n-1},u)}\delta_{n+1}$ есть $({}^{(z_{n-1})}\alpha^2, {}^{(z_{n-1})}\alpha)$ -дифференцирование. Это следует из предложения 2, так как ${}^{(z_{n-1},u)}\delta_j = 0$ для $j < n$ и всех $m \in \mathbb{Z}$. Следовательно, по лемме 4 ${}^{(z_{n-1},u)}\delta_{n+1}$ – внутреннее дифференцирование. Используя лемму 3, i) при $z_{n+1} = z_{n-1} + bz_{n-1}^{n+2}$ для соответствующего b , мы имеем, что ${}^{(z_{n+1},u)}\delta_j = 0$ для $j < n+2$, $n \nmid j$ и ${}^{(z)}\alpha = {}^{(z_{n+1})}\alpha$. Более того, ${}^{(z_{n+1},u)}\delta_j = 0$ для $j < n+2$, $n \nmid j$ и всех $m \in \mathbb{Z}$. Это легко следует из леммы 2.

Предположим по индукции, что существует такой параметр z_k , что ${}^{(z_k,u)}\delta_j = 0$ для $j < k+1$, $n \nmid j$ и всех $m \in \mathbb{Z}$ и ${}^{(z)}\alpha = {}^{(z_k)}\alpha$.

Следовательно, по предложению 2, если $n \nmid (k+1)$, имеем, что ${}^{(z_k,u)}\delta_{k+1}$ – внутреннее $({}^{(z_k)}\alpha^{k+2}, {}^{(z_k)}\alpha)$ -дифференцирование. И если $n \mid (k+1)$, мы можем с помощью аналогичных рассуждений заключить, что ${}^{(z_k,u)}\delta_{k+2}$ есть $({}^{(z_k)}\alpha^{k+2}, {}^{(z_k)}\alpha)$ -дифференцирование. Поэтому по лемме 3 существует параметр $z_{k+1} = z_k + bz_k^{k+2}$ ($z_k + bz_k^{k+3}$, если $n \mid (k+1)$) такой, что ${}^{(z_{k+1},u)}\delta_j = 0$ для $j < k+2$, $n \nmid j$ и всех $m \in \mathbb{Z}$ и ${}^{(z)}\alpha = {}^{(z_{k+1})}\alpha$ (или ${}^{(z_{k+1},u)}\delta_j = 0$ для $j < k+3$, $n \nmid j$ и всех $m \in \mathbb{Z}$ и ${}^{(z)}\alpha = {}^{(z_{k+1})}\alpha$, если $n \mid (k+1)$).

Так как $z_{l+1} = (1 + b_l z_l^{k_l})z_l$ для любого l , последовательность $\{z_l\}_{l=1}^\infty$ сходится в D , что завершает доказательство утверждения.

ЛЕММА 5. В ситуации предложения 1 пусть D – расщепимая алгебра с делением характеристики $p > 0$. Пусть $t \in Z(\overline{D})$ – такой элемент, что $\alpha(t) = t$.

Пусть $j = i(u, t)$ – минимальное положительное целое число такое, что ${}^{(z,u)}\delta_j|_{\mathbb{F}_p(t)} \neq 0$ (см. следствие 2), и предположим, что $j < \infty$. Тогда отображения ${}^{(z,u)}\delta_m$, $kj \leq m < (k+1)j$, $k \in \{1, \dots, p-1\}$, удовлетворяют следующим свойствам.

i) Существуют элементы $c_{n,m,k} \in \overline{D}$ такие, что

$${}^{(z,u)}\delta_m|_{\mathbb{F}_p(t)} = c_{n,m,1}\delta + \dots + c_{n,m,k}\delta^k,$$

где $\delta: \mathbb{F}_p(t) \rightarrow \mathbb{F}_p(t)$ – такое дифференцирование, что $\delta(t) = 1$, и

$$c_{n,kj,k} = (k!)^{-1} {}^{(z,u)}\delta_j(t) {}^{(z,u)}\delta_j(t) \dots {}^{(z,u)}\delta_j(t).$$

- ii) Пусть $\zeta = \text{ord}({}^{(z)}\alpha|_{Z(\overline{D})})$. Тогда $\zeta \mid j$ и $c_{n,kj,k} \neq 0$, если $(n,j) = 1$ и ${}^{(z)}\alpha({}^{(z,u)}\delta_j(t)) \neq {}^{(z,u)}\delta_j(t)$; $c_{n,kj,k} \neq 0$, если ${}^{(z)}\alpha({}^{(z,u)}\delta_j(t)) = {}^{(z,u)}\delta_j(t)$ и $n, (n+j), \dots, (n+(k-1)j) \not\equiv 0 \pmod{p}$.
 Если ${}^{(z)}\alpha = \text{id}$, то $c_{n,kj,k} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $n, (n+j), \dots, (n+(k-1)j) \not\equiv 0 \pmod{p}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Доказываем по индукции по k . Пусть $a, b \in \mathbb{F}_p(t)$. Для $k = 1$ по предложению 2, ii) имеем, что

$${}_n\delta_m(ab) = {}_n\delta_m(a)b + a{}_n\delta_m(b),$$

потому что все отображения δ_q , $q < j$, равны на $\mathbb{F}_p(t)$ нулю. Отсюда ${}_n\delta_m$ — дифференцирование на $\mathbb{F}_p(t)$, ${}_n\delta_m|_{\mathbb{F}_p(t)} = c_{n,m,1}\delta$ и $c_{n,j,1} = {}_n\delta_j(t)$.

Для произвольного k из предложения 2, i) и по предположению индукции имеем, что

$$\begin{aligned} {}_n\delta_m(t^q) &= q{}_n\delta_m(t)t^{q-1} \\ &+ {}_n\delta_j(t)\left(\sum_{l=0}^{q-2}(c_{n+j,m-j,1}\delta + \dots + c_{n+j,m-j,k-1}\delta^{k-1})(t^{q-1-l})t^l\right) \\ &+ \dots + {}_n\delta_{m-j}(t)\left(\sum_{l=0}^{q-2}(c_{m-j+n,m-s,1}\delta)(t^{q-1-l})t^l\right). \end{aligned} \quad (2)$$

Следовательно, ${}_n\delta_m(t^p) = 0$, потому что $k \leq p-1$ и $\sum_{l=0}^{p-2}\delta^i(t^{p-1-l})t^l = 0$ для $i \leq p-2$. Отсюда ${}_n\delta_m|_{\mathbb{F}_p(t)} = c_{n,m,1}\delta + \dots + c_{n,m,p-1}\delta^{p-1}$ и нам осталось только показать, что $c_{n,m,q} = 0$ при $q > k$.

Используя формулу (2), мы можем вычислить $c_{n,m,j}$. Получаем

$$\begin{aligned} c_{n,m,1} &= {}_n\delta_m(t), \\ c_{n,m,2} &= \frac{1}{2!}({}_n\delta_m(t^2) - 2c_{n,m,1}t) \\ &= \frac{1}{2}({}_n\delta_j(t)(c_{n+j,m-j,1}\delta(t)) + \dots + {}_n\delta_s(t)(c_{s+n,m-s,1}\delta(t))), \\ &\dots \dots \dots \\ c_{n,m,q} &= \frac{1}{q!}\left({}_n\delta_j(t)\left(\sum_{l=0}^{q-2}c_{n+j,m-j,q-1}\delta^{q-1}(t^{q-1-l})t^l\right) \right. \\ &\quad \left. + \dots + {}_n\delta_{m-(q-1)j}(t)\left(\sum_{l=0}^{q-2}c_{m+n-(q-1)j,(q-1)j,q-1}\delta^{q-1}(t^{q-1-l})t^l\right)\right) \\ &= \frac{1}{q}({}_n\delta_j(t)c_{n+j,m-j,q-1} + \dots + {}_n\delta_{m-(q-1)j}(t)c_{m+n-(q-1)j,(q-1)j,q-1}). \end{aligned} \quad (3)$$

Отсюда $c_{n,m,k+1} = \dots = c_{n,m,p-1} = 0$ и

$$c_{n,kj,k} = q^{-1}{}_n\delta_j(t)c_{n+j,kj-j,k-1} = (k!)^{-1}{}^{(z,u)}_n\delta_j(t){}^{(z,u)}_{n+j}\delta_j(t) \dots {}^{(z,u)}_{n+(k-1)j}\delta_j(t).$$

ii) Сначала докажем, что ζ делит i . В случае, когда i не делится на ζ , по предложению 2 имеем, что

$$\begin{aligned} {}^{(z,u)}\delta_j(tx) &= {}^{(z,u)}\delta_j(t) {}^{(z)}\alpha^{j+1}(x) + {}^{(z)}\alpha(t) {}^{(z,u)}\delta_j(x) = {}^{(z,u)}\delta_j(xt) \\ &= {}^{(z,u)}\delta_j(x) {}^{(z)}\alpha^{j+1}(t) + {}^{(z)}\alpha(x) {}^{(z,u)}\delta_j(t), \end{aligned}$$

где $x \in Z(\overline{D})$, $\alpha(x) \neq x$. Но тогда ${}^{(z)}\alpha^{j+1}(x) = {}^{(z)}\alpha(x)$. Противоречие.

Если ${}^{(z)}\alpha = \text{id}$, аналогично получаем, что ${}^{(z,u)}\delta_j(t) \in Z(\overline{D})$.

Если $x \in \overline{D}$ — произвольный элемент, эти формулы показывают, что ${}^{(z)}\alpha^j$ есть внутренний автоморфизм $i_{(z,u)\delta_j(t)-1}$. Следовательно,

$${}^{(z)}\alpha^j({}^{(z,u)}\delta_j(t)) = {}^{(z,u)}\delta_j(t).$$

Предположим, что ${}^{(z)}\alpha({}^{(z,u)}\delta_j(t)) \neq {}^{(z,u)}\delta_j(t)$. Очевидно, что

$${}^{(z,u)}_{n+qj}\delta_j(t) = \sum_{l=0}^{n+qj-1} {}^{(z)}\alpha^l({}^{(z,u)}\delta_j(t)) \neq 0,$$

если $(n, j) = 1$. Итак, в этом случае $c_{n,kj,k} \neq 0$ по i).

Если же ${}^{(z)}\alpha({}^{(z,u)}\delta_j(t)) = {}^{(z,u)}\delta_j(t)$, то ${}^{(z,u)}_{n+qj}\delta_j(t) = (n+qj){}^{(z,u)}\delta_j(t) \neq 0$ тогда и только тогда, когда p не является делителем $(n+qj)$. Следовательно, по i) $c_{n,kj,k} \neq 0$ в этом случае тогда и только тогда, когда $n, (n+j), \dots, (n+(k-1)j) \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Лемма доказана.

ЛЕММА 6. Пусть D — расщепимая алгебра с делением, как в лемме 5. Пусть $s \in Z(\overline{D})$ — такой элемент, что $\alpha(s) = s$. Пусть $i = i(u, s)$ — минимальное положительное целое число такое, что ${}^{(z,u)}\delta_i(s) \neq 0$ (см. следствие 2).

Если $p \mid i$, то для любого целого положительного k существует отображение ${}^{(z,u)}\delta_{j(k)}$ такое, что ${}^{(z,u)}\delta_{j(k)}(s^{p^k}) \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы утверждаем, что ${}^{(z,u)}\delta_{p^q i}$ — первое такое отображение, что ${}^{(z,u)}\delta_{p^q i}|_{\mathbb{F}_p(s^{p^q})} \neq 0$. Доказательство проводим по индукции по q . Для $q = 0$ утверждение в доказательстве не нуждается. Для произвольного q положим $t = s^{p^{q-1}}$. По предложению 2 имеем

$$\begin{aligned} \delta_{p^q i}(t^p) &= \delta_{p^{q-1} i}(t) \sum_{r=0}^{p-2} {}_{1+p^{q-1} i} \delta_{p^{q-1} i(p-1)}(t^{p-1-r}) t^r \\ &\quad + \sum_{l=p^{q-1} i+1}^{p^q i-1} \delta_l(t) \sum_{r=0}^{p-2} {}_{1+l} \delta_{p^q i-l}(t^{p-1-r}) t^r. \end{aligned}$$

По индукции и лемме 5 $1+l\delta_{p^q i-l}|_{\mathbb{F}_p(t)} = c_{1+l,p^q i-l,1}\delta + \dots + c_{1+l,p^q i-l,p-2}\delta^{p-2}$ для $l > p^{q-1}i$. Следовательно, $\sum_{r=0}^{p-2} 1+l\delta_{p^q i-l}(t^{p-1-r})t^r = 0$. По лемме 5, ii)

$$\begin{aligned} & 1+p^{q-1}i\delta_{p^{q-1}i(p-1)}|_{\mathbb{F}_p(t)} \\ &= c_{1+p^{q-1}i,p^{q-1}i(p-1),1}\delta + \dots + c_{1+p^{q-1}i,p^{q-1}i(p-1),p-1}\delta^{p-1}, \end{aligned}$$

где $c_{1+p^{q-1}i,p^{q-1}i(p-1),p-1} \neq 0$. Отсюда

$$\delta_{p^q i}(t^p) = -c_{1+p^{q-1}i,p^{q-1}i(p-1),p-1}\delta_{p^{q-1}i}(t) \neq 0.$$

Аналогично получаем, что ${}^{(z,u)}\delta_j(t^p) = 0$ при $j < p^q i$. Итак, ${}^{(z,u)}\delta_{p^q i}$ есть первое ненулевое отображение на $\mathbb{F}_p(s^{p^q})$.

ЛЕММА 7. Пусть D – расщепимая алгебра с делением. Пусть z – фиксированный параметр и ${}^{(z)}\alpha = \text{id}$, пусть u – некоторое фиксированное вложение $u: \overline{D} \hookrightarrow D$.

Пусть ${}^{(z,u)}\delta_i$, $i \in \mathbb{N} \cup \infty$, – первое ненулевое отображение на $\overline{D}$. Предположим, что $(i, p) = 1$, где $p = \text{char } D$. Пусть ${}^{(z,u)}\delta_j$, $j > i$, $j \in \mathbb{N} \cup \infty$, – первое отображение такое, что ${}^{(z,u)}\delta_j \neq 0$, если j не делится на i , и ${}^{(z,u)}\delta_j \neq c_{j/i} {}^{(z,u)}\delta_i^{j/i}$ для некоторого $c_{j/i} \in \overline{D}$ в противном случае. Тогда

- а) для $k < p = \text{char } D$ (k произвольное, если $\text{char } D = 0$) имеем ${}^{(z,u)}\delta_{ki} = c_k {}^{(z,u)}\delta_i^k$, где

$$c_k = \frac{(i+1) \cdots (i(k-1)+1)}{k!}, \quad (4)$$

если $ki < j$;

- б) если условие (4) верно для любого k такого, что $ki < j$, то ${}^{(z,u)}\delta_q = 0$ для $i < q < j$ и ${}^{(z,u)}\delta_j$ – дифференцирование.

ЗАМЕЧАНИЕ. Число $i(u, z) = \min_{a \in \overline{D}} \{w(zu(a)z^{-1} - u(a))\}$, определенное в этой лемме, будем называть *локальной высотой*. Число $i = i(z, u)$ в лемме совпадает с уровнем D , определенном в [3], если индекс D есть $p = \text{char } D$ и D расщепима. Как следует из лемм 3, 10 (см. ниже), $i(z, u)$ в этом случае не зависит от z, u . Следствие 2 завершает доказательство того факта, что i совпадает с уровнем, определенным Салтманом, в случае расщепимой алгебры D . Это число будет играть важную роль в настоящей работе. Оно также было одним из основных параметров в [6]. Напомним определение *уровня*: $h(D) = \min_{a,b \in D} \{w(ab - ba) - w(a) - w(b)\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сравнивая коэффициенты в формуле для $\delta_{ki}(ab)$ из предложения 2 с коэффициентами в формуле для $\delta_i^k(ab)$, умноженных на c_k , получаем

$$c_k k = ((k-1)i+1)c_{k-1},$$

откуда следует а).

С другой стороны, если ${}_i\delta_q$, $q > i$, – первое ненулевое отображение после ${}_i\delta_i$, то оно должно быть дифференцированием в силу предложения 2, i). Заметим, что в случае характеристики нуль это может иметь место, только если $q \geq j$, так как

отображение $s\delta_i^k$ не может являться дифференцированием при $k > 1$, что в этом случае доказывает б).

Так как отображения δ_q однозначно определяются по лемме 2 отображениями $\tilde{\delta}_l$, $l \leq q$, а отображения $\tilde{\delta}_q$ однозначно определяются отображениями $_{-i}\delta_l$, $l \leq q$, и $_{-i}\delta_q$ являются линейными комбинациями δ_l , $l \leq q$, с целыми коэффициентами, получаем, что б) имеет место в случае произвольной характеристики.

ЗАМЕЧАНИЕ. Итак, мы видим, что отображения $_i\delta_q$ в этой лемме удовлетворяют тем же тождествам, что и δ_q/i . Это может рассматриваться как возможная редукция с уровня i до уровня 1.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Пусть D – расщепимая алгебра с делением. Пусть u – некоторое фиксированное вложение $u: \overline{D} \hookrightarrow D$. Пусть $s \in Z(\overline{D})$ – такой элемент, что $\alpha(s) = s$. Пусть $i = i(u, s)$ – такое минимальное положительное целое число, что $^{(z,u)}_{-i}\delta_i(s) \neq 0$ (следствие 2 показывает, что i не зависит от z). Предположим, что $(i, p) = 1$, где $p = \text{char } D$. Определим

$$d(u, s) = \max_z \{w(z^{-i}u(s)z^i - u(s) - u(^{(z,u)}_{-i}\delta_i(s))z^i)\} \in \mathbb{N} \cup \infty.$$

Легко заметить, что при некоторых условиях $d(u, s)$ можно интерпретировать как число j из леммы 7, б) (т.е. это определение было мотивировано указанной леммой).

ЛЕММА 8. В предыдущем определении в случае, если $p = \text{char } D > 0$ и $^{(z,u)}_{-i}\delta_i(s) \neq 0$, имеем

- i) $d(u, s) = 2i \pmod{p}$, если $d(u, s) < \infty$;
- ii) если $^{(z,u)}_{-i}\delta_i(s) \neq 0$, то для любого z отображение $^{(z,u)}_{-i}\delta_{d(u,s)+(p-1)i}$ есть первое отображение такое, что $^{(z,u)}_{-i}\delta_{d(u,s)+(p-1)i}(s^p) \neq 0$; в частности, если $d(u, s) = \infty$, то $[u(s^p), z^i] = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ii) Пусть $^{(z,u)}_{-i}\delta_\kappa$ – первое отображение такое, что

$$^{(z,u)}_{-i}\delta_\kappa(s^p) \neq 0.$$

По следствию 2 κ не зависит от z . По той же причине для любого z $^{(z,u)}_{-i}\delta_i$ есть первое такое отображение, что $^{(z,u)}_{-i}\delta_i(s) \neq 0$.

Положим $w := d(u, s) + (p-1)i$ и зафиксируем u, z . Из предложения 2 получаем

$$\begin{aligned} _{-i}\delta_w(s^p) &= _{-i}\delta_{d(u,s)}(s) \sum_{q=0}^{p-2} d(u,s)_{-i}\delta_{(p-1)i}(s^{p-1-q})s^q \\ &+ \sum_{k=d(u,s)+1}^{w-1} _{-i}\delta_k(s) \sum_{q=0}^{p-2} k_{-i}\delta_{w-k}(s^{p-1-q})s^q. \end{aligned}$$

По лемме 5 $k_{-i}\delta_{w-k}|_{\mathbb{F}_p(s)} = c_{k-i, w-k, 1}\delta + \dots + c_{k-i, w-k, p-2}\delta^{p-2}$ для $w-k < (p-1)i$ и $d(u,s)_{-i}\delta_{(p-1)i}|_{\mathbb{F}_p(s)} = c_{d(u,s)-i, (p-1)i, 1}\delta + \dots + c_{d(u,s)-i, (p-1)i, p-1}\delta^{p-1}$

с $c_{d(u,s)-i,(p-1)i,p-1} \neq 0$, если $d(u,s) - i = i \pmod{p}$. Действительно, как было показано при доказательстве леммы 5, ii), i должно делиться на порядок n автоморфизма ${}^{(z,u)}\alpha$ на ${}^{(z,u)}\delta_i(s)$, поэтому $(n, p) = 1$. Теперь возникают две возможности: $n \nmid d(u, s)$ и $n \mid d(u, s)$.

В первом случае, чтобы показать, что $c_{d(u,s)-i,(p-1)i,p-1} \neq 0$, мы можем повторить рассуждения из первого утверждения леммы 5, ii). Во втором случае имеем $d(u,s)-i+qi\delta_i(s) = (d(u,s) - i + qi)/(i\delta_i(s)) \neq 0$, если $d(u,s) - i + qi$ не делится на p . Следовательно, по лемме 5, i) $c_{d(u,s)-i,(p-1)i,p-1} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $d(u,s) - i = i \pmod{p}$.

Отсюда

$$-i\delta_w(s^p) = -i\delta_{d(u,s)}(s)c_{d(u,s)-i,(p-1)i,p-1} \neq 0,$$

если $d(u,s) - i = i \pmod{p}$.

Это также показывает, что $-i\delta_w$ есть *первое* отображение такое, что

$$-i\delta_w|_{\mathbb{F}_p(s^p)} \neq 0,$$

если $d(u,s) - i = i \pmod{p}$.

i) По теореме Сколема–Нетёр существует такой параметр z' в D , что ${}^{(z')}\alpha = \text{id}$. Положим

$$d'(u, z', s) = w(z'^{-j}u(s)z'^j - u(s) - u({}^{(z',u)}\delta_i(s))z'^i).$$

Так как ${}^{(z')}\alpha = \text{id}$, отображение ${}^{(z',u)}\delta_i$ является первым отображением таким, что ${}^{(z',u)}\delta_i(s) \neq 0$. Если $d'(u, z', s) \neq 2i \pmod{p}$, мы можем найти такой параметр z'' , что $d'(u, z'', s) > d'(u, z', s)$ (используя лемму 3, ii)). Продолжая эту процедуру, мы в конце концов найдем такой параметр z , что $d'(u, z, s) = 2i \pmod{p}$ либо $d'(u, z, s) = \infty$.

Используя рассуждения п. ii), получаем, что отображение ${}^{(z,u)}\delta_{d'(u,z,s)+(p-1)i}$ является первым таким, что ${}^{(z,u)}\delta_{d'(u,z,s)+(p-1)i}(s^p) \neq 0$ для параметра z . Как было замечено в начале доказательства, число $\kappa = d'(u, z, s) + (p-1)i$ не зависит от параметра. Так как $d'(u, z, s) \leq d(u, s)$, получаем, что $d'(u, z, s) = d(u, s)$. Иначе мы можем повторить рассуждения п. ii) и получить, что ${}^{(z,u)}\delta_{d(u,s)+(p-1)i}(s^p) = 0$. Противоречие. Лемма доказана.

Было бы интересно узнать больше про поведение отображения ${}^{(z,u)}\delta_j$ относительно вложения u . Нами будет рассмотрен один специальный случай, а именно когда $\overline{D} = Z(\overline{D})$ и $Z(\overline{D})/Z(D)$ – простое расширение.

ЛЕММА 9. Пусть D – такая алгебра с делением, что $\text{char } D = p > 0$, $\overline{D} = Z(\overline{D})$, $Z(\overline{D})$ – несовершенное поле, и пусть $Z(\overline{D})/Z(D)$ – простое расширение (таким образом, D расщепима). Пусть $\overline{u}$ – примитивный элемент расширения $Z(\overline{D})/Z(D)$ такой, что $\overline{u} \notin (Z(\overline{D}))^p$, и пусть u – произвольный подъем $\overline{u}$ в D .

Тогда существует такое вложение $u: \overline{D} \hookrightarrow D$, что $u(\overline{u}) = u$, и любое отображение ${}^{(z,u)}\delta_j$ однозначно определяется значениями ${}^{(z,u)}\delta_j(u^q)$, или, что эквивалентно, значениями ${}^{(z,u)}\delta_k(u)$, $k \leq j$.

В частности, если ${}^{(z,u)}\delta_k(u) = 0$ при $k \leq j$, то ${}^{(z,u)}\delta_j = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим поле $Z(D)(u)$. Это также полное поле дискретного нормирования, так как оно есть конечное расширение $Z(D)$. По классической теореме Козна существует вложение $\overline{Z(D)(u)} = \overline{D} \hookrightarrow Z(D)(u) \subset D$. По [8; леммы 11, 12] вложение полностью определяется p -базисом Γ поля $Z(D)(u)$. То есть для любого подъема G данного p -базиса Γ существует такое вложение s , что $G \subset s(\overline{Z(D)(u)})$.

Покажем, что существует такой p -базис Γ поля $\overline{D}$, что $\overline{u} \in \Gamma$ и $\Gamma \ni \gamma \in \overline{Z(D)}$, если $\gamma \neq \overline{u}$.

Рассмотрим множество всех непустых множеств Γ' элементов $\gamma_\tau \in \overline{D}$, удовлетворяющих следующему свойству:

- А) $\overline{u} \in \Gamma'$, $\Gamma' \ni \gamma \in \overline{Z(D)}$, если $\gamma \neq \overline{u}$, и $[\overline{D}^p(\gamma_1, \dots, \gamma_r) : \overline{D}^p] = p^r$ для любых r различных элементов из Γ' .

Это множество непусто, так как содержит множество $\Gamma' = \{\overline{u}\}$. По лемме Цорна существует некоторое максимальное множество Γ , $\Gamma' \subset \Gamma$, удовлетворяющее А). Тогда $\overline{D} = \overline{D}^p(\Gamma)$. Действительно, так как $\overline{Z(D)}^p(\overline{u}) \subset \overline{D}^p(\Gamma)$, нам достаточно показать, что любой элемент из $\overline{Z(D)}$ лежит в $\overline{D}^p(\Gamma)$. Предположим, $a \in \overline{Z(D)}$, $a \notin \overline{D}^p(\Gamma)$. Тогда множество $\Gamma' = \{a \cup \Gamma\}$ удовлетворяет А), что противоречит тому, что Γ – максимальное множество.

Теперь мы можем выбрать подъем Γ следующим образом. Возьмем u в качестве подъема $\overline{u}$ и возьмем подъемы всех остальных элементов так, чтобы они лежали в $Z(D)$. Такой подъем определяет вложение $u: \overline{D} \hookrightarrow D$.

Покажем, что любое отображение ${}^{(z,u)}_m \delta_j$ (для некоторого фиксированного z) однозначно определяется значениями ${}^{(z,u)}_l \delta_k(u)$, $k \leq j$. Имеем, что $u(\overline{D}) = u(\overline{Z(D)})(u)$ и любой элемент $a \in u(\overline{D})$ может быть представлен как многочлен от конечного числа элементов из Γ с коэффициентами из $u(\overline{D})^{p^k}$ для любого $k > 0$.

Заметим, что для любого j существует $k > 0$ такое, что для любого $b \in \overline{Z(D)}^{p^k}$ ${}^{(z,u)}_l \delta_q(b) = 0$ для всех $q \leq j$ и всех l . Действительно, предположим, что ${}^{(z,u)}_l \delta_q(b) \neq 0$ для некоторых $q \leq j$, $b \in \overline{Z(D)}^{p^k}$ и ${}^{(z,u)}_s \delta_s(c) = 0$ для всех l , всех $c \in \overline{Z(D)}^{p^k}$ и всех $s < q$. Тогда ввиду ${}^{(z)}\alpha|_{\overline{Z(D)}} = \text{id}$ и по предложению 2 ${}^{(z,u)}_l \delta_s(b^p) = 0$ для всех $b \in \overline{Z(D)}^{p^k}$, всех l и всех $s \leq q$.

Далее, так как $u(\overline{D})^{p^k} = u(\overline{Z(D)})^{p^k}(u^{p^k})$, то любой элемент $a \in u(\overline{D})$ может быть представлен в виде многочлена от конечного числа элементов из Γ с коэффициентами из $u(\overline{Z(D)})^{p^k}$. Так как все, кроме u , элементы из Γ принадлежат центру $Z(D)$, то значение ${}^{(z,u)}_m \delta_j(a)$ однозначно определяется значениями ${}^{(z,u)}_m \delta_j(u^l)$, которые, в свою очередь, по предложению 2 однозначно определяются величинами ${}^{(z,u)}_l \delta_k(u)$, $k \leq j$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае совершенного поля $Z(\overline{D})$ существует единственное вложение u , согласованное с вложением $\overline{Z(D)} \hookrightarrow Z(D)$. Таким образом, утверждение леммы в этом случае очевидно.

ЛЕММА 10 (ср. [6; лемма 8]). В ситуации леммы 9 предположим, что ${}^{(z,u)}_m \delta_1 = \dots = {}^{(z,u)}_m \delta_{j-1} = 0$, ${}^{(z,u)}_m \delta_j \neq 0$. Пусть n – порядок ${}^{(z)}\alpha$. Справедливо следующее.

i) Для $u' = u + bz^q$, $b \in u(\overline{D})$, $n \mid q$, имеем $(z, u'_m)\delta_l = (z, u)_m\delta_l$, $l < q$, u

$$(z, u'_m)\delta_q(\overline{u}) = (z, u)_m\delta_q(\overline{u}) + (z)\alpha^m(\overline{b}) - \frac{\partial}{\partial \overline{u}}((z)\alpha^m(\overline{u}))\overline{b},$$

где производная берется в поле $\overline{D} = \overline{D}^p(\Gamma)$.

ii) Пусть $(z)\alpha = \text{id}$. Тогда для $u' = u + bz^q$, $b \in u(\overline{D})$, имеем $(z, u'_m)\delta_l = (z, u)_m\delta_l$, $l < q + j$, u

$$(z, u'_m)\delta_{q+j}(\overline{u}) = (z, u)_m\delta_{q+j}(\overline{u}) + (z, u)_m\delta_j(\overline{b}) - \frac{\partial}{\partial \overline{u}}((z, u)_m\delta_j(\overline{u}))\overline{b},$$

где производная берется в поле $\overline{D} = \overline{D}^p(\Gamma)$.

iii) Пусть $(z)\alpha = \text{id}$. Пусть $\overline{u'} \in \overline{D}$ – произвольный примитивный элемент расширения $\overline{D}/\overline{Z(\overline{D})}$, удовлетворяющий условиям леммы 9, и пусть $u' \in D$ – произвольный подъем $\overline{u'}$. Тогда имеем $(z, u'_m)\delta_l = (z, u)_m\delta_l$, $l < j$, u

$$(z, u'_m)\delta_j(\overline{u'}) = (z, u)_m\delta_j(\overline{u})\frac{\partial}{\partial \overline{u}}(\overline{u'}),$$

где производная берется в поле $\overline{D} = \overline{D}^p(\Gamma)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, заметим, что существует такое $k \in \mathbb{N}$, что для любого $a \in \overline{Z(D)}^{p^k}$ выполняется $u(a) - u'(a) = 0 \pmod{M_D^{q+1}}$, где u' – другое вложение, $q \in \mathbb{N}$ – произвольное заданное число.

Действительно, предположим, что для любого $c \in \overline{Z(D)}^{p^s}$ выполняется $u(c) - u'(c) = 0 \pmod{M_D^l}$, т.е. $u(c) = u'(c) + c_l z^l + \dots$, где $c_l \in u'(\overline{D})$. Тогда $u(c^p) = (u(c))^p = (u'(c))^p + pu'(c)^{p-1}c_l z^l + \dots$ и $u(c^p) - u'(c^p) = 0 \pmod{M_D^{l+1}}$.

Отсюда сразу следует, что $u(a) - u'(a) = 0 \pmod{M_D^q}$ для любого $a \in \overline{D}$, если u' определяется элементом $u' = u + bz^q$, потому что $u(\overline{u}) - u'(\overline{u}) = bz^q$. Более того, если мы представим a в форме некоторого многочлена $P(\gamma_1, \dots, \gamma_r, \overline{u})$ с коэффициентами из $\overline{Z(D)}^{p^k}$, то станет ясно, что

$$(u(a) - u'(a))z^{-q} = -\frac{\partial}{\partial \overline{u}}(P(\gamma_1, \dots, \gamma_r, \overline{u}))\overline{b} \pmod{M_D},$$

если $n \mid q$, так как $u(\gamma_l) = u'(\gamma_l)$ для любого l и $z^q u z^{-q} = u \pmod{M_D}$. Также ясно, что производную можно брать даже в поле $\overline{D}^p(\Gamma)$. Следовательно, получаем i)

$$\begin{aligned} z^m u' z^{-m} &= z^m (u + bz^q) z^{-m} \\ &= u((z)\alpha^m(\overline{u})) + u((z, u)_m\delta_j(\overline{u}))z^j + \dots + (u((z)\alpha^m(\overline{b})) + u((z, u)_m\delta_j(\overline{b})))z^j + \dots z^q \\ &= u((z)\alpha^m(\overline{u})) + \dots + (u((z, u)_m\delta_q(\overline{u})) + u((z)\alpha^m(\overline{b})))z^q + \dots \\ &= u'((z)\alpha^m(\overline{u})) + \dots + \left(u'((z, u)_m\delta_q(\overline{u})) + u'((z)\alpha^m(\overline{b})) \right. \\ &\quad \left. - u'\left(\frac{\partial}{\partial \overline{u}}((z)\alpha^m(\overline{u})\overline{b})\right) \right) z^q + \dots \end{aligned}$$

ii) Здесь мы имеем, что

$$\begin{aligned}
z^m u' z^{-m} &= z^m (u + bz^q) z^{-m} \\
&= u(\bar{u}) + u\binom{(z,u)}{m} \delta_j(\bar{u}) z^j + \dots + (u(\bar{b}) + u\binom{(z,u)}{m} \delta_j(\bar{b})) z^j + \dots z^q \\
&= u(\bar{u}) + u\binom{(z,u)}{m} \delta_j(\bar{u}) z^j + \dots + (u\binom{(z,u)}{m} \delta_q(\bar{u}) + u(\bar{b})) z^q + u\binom{(z,u)}{m} \delta_{q+1}(\bar{u}) z^{q+1} \\
&\quad + \dots + u\binom{(z,u)}{m} \delta_{q+j-1}(\bar{u}) z^{q+j-1} \\
&\quad + (u\binom{(z,u)}{m} \delta_{q+j}(\bar{u}) + u\binom{(z,u)}{m} \delta_j(\bar{b})) z^{q+j} + \dots \\
&= u'(\bar{u}) + u'\binom{(z,u)}{m} \delta_j(\bar{u}) z^j + \dots + u'\binom{(z,u)}{m} \delta_{q+j-1}(\bar{u}) z^{q+j-1} \\
&\quad + \left(u'\binom{(z,u)}{m} \delta_{q+j}(\bar{u}) + u'\binom{(z,u)}{m} \delta_j(\bar{b}) - u' \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}} \binom{(z,u)}{m} \delta_j(\bar{u}) \bar{b} \right) \right) z^{q+j} + \dots.
\end{aligned}$$

iii) Пусть $u' = u(\bar{u}') + a_1 z + \dots$, где $a_i \in u(\bar{D})$. Так как согласно предложению 2 отображение $\binom{(z,u)}{m} \delta_j$ является дифференцированием, то

$$\begin{aligned}
z^m u' z^{-m} &= (u(\bar{u}') + u\binom{(z,u)}{m} \delta_j(\bar{u}') z^j + \dots) \\
&\quad + (a_1 + u\binom{(z,u)}{m} \delta_j(a_1) z^j + \dots) z + \dots \\
&= u' + u\binom{(z,u)}{m} \delta_j(\bar{u}') z^j + \dots = u' + u\binom{(z,u)}{m} \delta_j(\bar{u}) \frac{\partial}{\partial \bar{u}}(\bar{u}') z^j + \dots \\
&= u' + u'\binom{(z,u)}{m} \delta_j(\bar{u}) \frac{\partial}{\partial \bar{u}}(\bar{u}') z^j + \dots.
\end{aligned}$$

§ 4. Гипотеза о периоде и индексе

В этом параграфе мы докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2. *Гипотеза о том, что для произвольной алгебры с делением A над C_2 -полем F экспонента A равна ее индексу, верна для $F = F_1((t))$, где F_1 – произвольное C_1 -поле.*

Напомним, что поле F называется C_i -полем, если всякий однородный многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ степени d от $n > d^i$ переменных с коэффициентами в F представляет (нетривиально) нуль в поле F . Некоторые основные свойства C_i -полей можно найти, например, в [2].

Эта гипотеза была выдвинута М. Артином и была решена для некоторых других примеров поля F большим числом авторов. Насколько известно автору, положительный ответ для всех алгебр с делением индекса $\text{ind } A = 2^a 3^b$ над произвольным C_2 -полем был дан в [2], для алгебр с делением над полем $F = k((X))((Y))$, где k – совершенное поле характеристики $p \neq 0$ такое, что $\dim_{\mathbb{F}_p} k/\wp(k) = 1$, был дан Тиньоле в приложении к [9], для алгебр с делением взаимно простого с характеристикой поля F индекса, где F – поле функций поверхности, был дан в [10]. Кажется, что справедливость гипотезы была также известна для алгебр с делением над полем $F = F_1((t))$ характеристики 0. Здесь мы дадим доказательство теоремы для произвольной характеристики.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Напомним, что любое конечное расширение C_1 -поля является простым. Действительно, предположим, что $E = F_1(u_1, \dots, u_r)$, $r \geq 2$. Рассмотрим поле $K = F_1(u_1^p, \dots, u_r^p)$. По теореме Тзена K и E являются C_1 -полями. Следовательно, форма $x_1^p + x_2^p u_1 + \dots + x_p^p u_1^{p-1} + x_{p+1}^p u_2$ представляет нетривиально нуль в E . Но $x_i^p \in K$ и элементы $1, u_1, \dots, u_1^{p-1}, u_2$ линейно независимы над K . Противоречие.

2) Предположим, что теорема верна для случая, когда экспонента – простое число. Мы докажем теорему индукцией по $e = \exp A$. Если e – не простое число, то будем писать $e = lm$. По предположению индукции $A^{\otimes m}$ расщепляется расширением $F \subset F'$ поля F степени l . Следовательно, экспонента $A_{F'}$ является делителем m . Заметим, что F' является также полем лорановских степенных рядов. Применяя предположение индукции к паре $(F', A_{F'})$, получаем, что существует расширение $F' \subset L$ поля F' степени, являющейся делителем m , расщепляющее $A_{F'}$. Следовательно, A расщепляется расширением $F \subset L$ степени, являющейся делителем lm , и мы получаем утверждение теоремы.

3) Итак, пусть $\exp A = l$ – простое число. По основным свойствам экспоненты и индекса (см., например, [2]) получаем, что $\text{ind } A = l^k$ для некоторого натурального k .

Предположим, что $(l, p = \text{char } F) = 1$.

Известно, что гипотеза верна для всех алгебр с делением индекса $\text{ind } A = 2^a 3^b$, поэтому мы можем положить $l \neq 2, 3$. Можем предположить также, что F содержит группу μ_l корней из единицы степени l , так как $[F(\mu_l) : F] < l$, и мы можем, таким образом, свести задачу к алгебре $A \otimes_F F(\mu_l)$. Тогда по теореме Меркурьева–Суслина A подобна тензорному произведению символ-алгебр индекса l .

Чтобы получить утверждение теоремы, достаточно доказать, что любые две символ-алгебры A_1, A_2 содержат F -изоморфные максимальные подполя.

Так как любая алгебра с делением над C_1 -полем тривиальна и любое расширение этого поля простое, то каждая символ-алгебра индекса l над F расщепима. Ввиду того, что $(l, p) = 1$, она хорошо расщепима, и ее поле вычетов есть циклическое расширение поля $\overline{F}$. Следовательно, если z_i – параметр из предложения 3 алгебры A_i , то z_i ведет себя на $\overline{A}_i$ как автоморфизм Галуа, и $z_i^l \in F$. Имеем тогда $v(z_i^l) = 1$ (напомним, что v – нормирование на F).

Покажем, что A_1 содержит корень степени l из любого элемента u в F с $v(u) \neq 0$. Из этого следует, что A_1 должна содержать подполе, изоморфное $F(z_2)$. Ввиду того, что для любого элемента $1 + b$, $v(b) > 0$, существует корень степени l $(1 + b)^{1/l} \in F$, достаточно показать, что A_1 содержит корень степени l из любых элементов вида ct , где $c \in u(\overline{F})$, u – некое фиксированное вложение $u: \overline{A}_1 \hookrightarrow A_1$.

Положим $z_1^l = c_1 t$, $c_1 \in u(\overline{F})$. Заметим, что для любого элемента $b \in u(\overline{A}_1)$ выполняется $(bz_1)^l = u(N_{\overline{A}_1/\overline{F}}(b))z_1^l$. Но отображение нормы $N_{\overline{A}_1/\overline{F}}$ сюръективно, так как $\overline{F}$ является C_1 -полем (см., например, [2; 3.4.2]), поэтому существует такое b , что $(bz)^l = ct$.

4) Предположим теперь, что $\exp A = p$. Тогда $\text{ind } A = p^k$.

По теореме Алберта [11] существует поле $F' = F(u_1^{1/p}, \dots, u_k^{1/p})$, расщепляющее A . Такими же рассуждениями, что и в п. 1), можно показать, что каждое такое поле имеет максимум два порождающих, скажем $F' = F(u_1^{1/p}, u_2^{1/p})$. Следовательно, $\text{ind } A \leq p^2$. Если $\text{ind } A = p$, утверждение не требует доказательства,

поэтому можно считать, что $\text{ind } A = p^2$ и F' есть максимальное подполе в A .

5) Предположим, что F_1 – совершенное поле.

По теореме Алберта $A \cong A_1 \otimes_F A_2$, где A_1, A_2 – циклические алгебры степени p , $A_1 = (L_1/F, \sigma_1, u_1)$, $A_2 = (L_2/F, \sigma_2, u_2)$. Так как F_1 – совершенное поле, то $\overline{A_1}/\overline{F}$, $\overline{A_2}/\overline{F}$ – расширения Галуа. Следовательно, A_1, A_2 хорошо расщепимы. Покажем теперь, что A_1, A_2 имеют общее расщепляющее поле степени p над F . Это ведет к противоречию.

Согласно предложению 3 существуют параметры $z_1 \in A_1, z_2 \in A_2$, ведущие себя на $\overline{A_1}, \overline{A_2}$ как автоморфизмы Галуа. Заметим, что $z_1^p, z_2^p \in F$, и покажем, что $F(z_1)$ расщепляет A_2 .

Рассмотрим централизатор $D = C_A(F(z_1))$ и элемент $t_1 = z_2 z_1^{-1}$. Имеем, что $t_1^p \in F$, $w(t_1) = 0$ (напомним, что под w понимается единственное продолжение нормирования v на F). Так как $\overline{D}/\overline{Z(D)}$ – расширение Галуа, то существует такой элемент $b_1 \in F$, что $w(t_1 - b_1) > 0$. Ввиду того, что $(t_1 - b_1)^p \in F$, существует натуральное k_1 такое, что $w((t_1 - b_1)z_1^{-k_1}) = 0$. Обозначим $t_2 = (t_1 - b_1)z_1^{-k_1}$. Тогда опять получается, что $t_2^p \in F$. Повторяя рассуждения и используя свойство полноты тела $D \subset A$, получаем

$$z_2 = t_1 z_1 = (t_2 z_1^{k_1} + b_1) z_1 = \dots = b_1 z_1 + b_2 z_1^{k_1+1} + \dots,$$

следовательно, $z_2 \in F(z_1) = Z(D)$.

6) Предположим, что F_1 несовершенно.

Так как F' порождается двумя элементами над F , оно содержит все корни степени p поля F . Тогда любые два элемента $u, z \in F$ такие, что $z^{1/p} \notin F(u^{1/p})$, где $z^{1/p}, u^{1/p} \in F'$, также порождают F' над F . Это доказывается такими же рассуждениями, как и в пп. 1), 4).

Теперь возьмем $u \in F_1 \setminus F_1^p, z = u + t$. Ясно, что корни степени p из этих элементов порождают F' над F . Более того, поля $F(u^{1/p}), F(z^{1/p})$ являются “неразветвленными” над F , т.е.

$$[\overline{F(u^{1/p})} : \overline{F}] = p = [F(u^{1/p}) : F], \quad [\overline{F(z^{1/p})} : \overline{F}] = p.$$

Обозначим $u_1 = u^{1/p}, u_2 = z^{1/p}$ в F' . Тогда по теореме Алберта $A \cong A_1 \otimes_F A_2$, где A_1, A_2 – циклические алгебры степени p , $A_1 = (L_1/F, \sigma_1, u)$, $A_2 = (L_2/F, \sigma_2, z)$.

Рассмотрим централизатор $D = C_A(F(u_1))$. Предположим, что $\overline{D}/\overline{Z(D)}$ есть сепарабельное расширение. Тогда существует подъем $u: \overline{D} \hookrightarrow D$ произвольного вложения $u': \overline{F(u_1)} \hookrightarrow F(u_1)$. Рассмотрим вложение $u' = u_1$, определенное в лемме 9. Так как $F(u_1)/F$ есть чисто несепарабельное расширение, то u' – хорошее вложение и u – хорошее вложение $\overline{D} = \overline{A}$ в $D \subset A$. Отсюда получаем, что A – хорошо расщепимая алгебра и $u(\overline{A})$ содержит чисто несепарабельный над F элемент. Но это противоречит лемме 6. Следовательно, $\overline{A}/\overline{F}$ не может содержать сепарабельного подрасширения, потому что в этом случае сепарабельное расширение должно существовать у $\overline{D}/\overline{Z(D)}$.

Теперь, для краткости, применим леммы А.4, А.6 Тиньоля из приложения к статье [9]. Эти леммы говорят о том, что тензорное произведение $A_1 \otimes A_2$ любых двух символов A_1, A_2 подобно либо одному символу в группе $\text{Br}(F)$ (и в этом случае теорема доказана), либо произведению двух символов уровня нуль. Напомним, что из результатов Салтмана в [3] следует, что любая алгебра с делением уровня нуль

является ручной, что в нашем случае означает, что тело вычетов есть сепарабельное расширение над $\overline{F}$. Определение уровня уже обсуждалось выше в замечании к лемме 7.

Итак, пусть $A \sim D_1 \otimes D_2$, где D_1, D_2 – ручные алгебры с делением степени p над F . Мы можем считать, что $A, D_1 \otimes D_2$ – тела. Тогда $A \cong D_1 \otimes D_2$. Так как D_1, D_2 ручные, заключаем, что поле $\overline{A}$ должно содержать сепарабельный элемент, что ведет к противоречию.

Теорема доказана.

§ 5. Хорошо расщепимые алгебры

В этом параграфе мы докажем теорему о разложении для хорошо расщепимых алгебр с делением. Эта теорема показывает, как изучение хорошо расщепимых алгебр с делением может быть сведено к изучению алгебр с делением с просто описываемой структурой. Таким образом, хорошо расщепимые алгебры являются наиболее простыми и удобными в изучении алгебрами.

ЛЕММА 11. *Пусть D – хорошо расщепимая алгебра с делением, $F = Z(D)$, и пусть $Z(\overline{D}) = \overline{F}(s)$ – чисто несепарабельное над $\overline{F}$ поле степени $p = \text{char } D > 0$. Пусть $u: \overline{D} \hookrightarrow D$ – хорошее вложение.*

Тогда существует такой параметр z , что ${}^{(z,u)}\delta_j = 0$ при $j > i$, где $i = i(z, u)$ – локальная высота, и $u({}^{(z,u)}\delta_i(s)) = x$, где $x \in Z(D)$. Более того, $(i, p) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $Z(\overline{D})/\overline{F}$ – чисто несепарабельное расширение, то ${}^{(z)}\alpha|_{Z(\overline{D})} = \text{id}$ для любого параметра z . По теореме Сколема–Нётер существует такой параметр z в D , что ${}^{(z)}\alpha = \text{id}$. Предположим, что ${}^{(z,u)}\delta_i(s) = 0$, где $i = i(z, u)$. Тогда ${}^{(z,u)}\delta_i|_{Z(\overline{D})} = 0$, так как u – хорошее вложение и $Z(\overline{D})/\overline{F}$ – простое расширение. Следовательно, по теореме Сколема–Нётер ${}^{(z,u)}\delta_i$ – внутреннее дифференцирование, и по лемме 3, i) существует такой параметр z' , что ${}^{(z',u)}\delta_i = 0$, ${}^{(z')} \alpha = \text{id}$.

Следовательно, мы можем предположить, что ${}^{(z,u)}\delta_i(s) \neq 0$ для некоторого параметра z . Так как $s^p \in Z(D)$, то по лемме 6 имеем $(i, p) = 1$. Ввиду того, что ${}^{(z,u)}\delta_i$ – дифференцирование, имеем ${}^{(z,u)}\delta_i(s) \in Z(\overline{D})$ (см. рассуждения при доказательстве леммы 5, ii)). Так как $(i, p) = 1$, существует такое k , что $p \mid (1 - ki)$. Следовательно, по лемме 3, iii) для параметра $z' = ({}^{(z,u)}\delta_i(s))^k$ имеем ${}^{(z')} \alpha = \text{id}$, ${}^{(z',u)}\delta_i(s) \in \overline{F}$, т.е. $u({}^{(z',u)}\delta_i(s)) \in Z(D)$. Так как $s^p \in Z(D)$, по лемме 8 должно выполняться $d(u, s) = \infty$. При доказательстве леммы 8, i) было показано, что $d(u, s) = d'(u, z, s)$ для некоторого параметра z , и конструкция этого элемента использует лемму 3, ii), что гарантирует, что начальные значения ${}^{(z')} \alpha$, ${}^{(z',u)}\delta_i$ сохраняются. Следовательно, ${}^{(z,u)}\delta_j = 0$ для $j > i$, и лемма доказана.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Пусть D – расщепимая алгебра с делением. Тогда имеем $D \cong D_1 \otimes_F D_2$, где D_1, D_2 – расщепимые алгебры с делением и D_1 – инерциально расщепимая алгебра.*

Если D – хорошо расщепимая алгебра с делением, то $Z(\overline{D}_2)/\overline{F}$ – чисто несепарабельное расширение и D_2 – хорошо расщепимая алгебра (D_1 или D_2 могут быть тривиальными).

Следовательно, $D \sim A \otimes_F B \otimes_F D_2$, где A – циклическая алгебра с делением и B – неразветвленная алгебра с делением.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\text{char } D = 0$, то утверждение очевидно, поэтому будем считать, что $\text{char } D > 0$.

По [12; с. 261] имеем $D \cong D_1 \otimes_F \cdots \otimes_F D_k$, где $[D : F] = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ и $[D_i : F] = p_i^{r_i}$. Пусть $p_2 = p$. Так как D_i бездефектны над F , то $D_1, D_3, \dots, D_k$ инерциально расщепимы. Следовательно, по теореме 1 алгебра $B = D_1 \otimes D_3 \otimes \cdots \otimes D_k$ хорошо расщепима.

Предположим сначала, что D хорошо расщепима. По предложению 1.7 из [1], если $s \in Z(\overline{D})$ – такой элемент, что $\alpha(s) = s$, то это чисто несепарабельный элемент над $\overline{F}$. Следовательно, если D – хорошо расщепимая алгебра с делением, то по лемме 6 либо D_2 является инерциально расщепимой алгеброй, либо $Z(\overline{D}_2)/\overline{F}$ – чисто несепарабельное расширение. Действительно, в противном случае существует описанный выше элемент $s \in Z(\overline{D}_2) \subset Z(\overline{D})$, и в силу предложения 3 $p \mid i(u, s)$ для любого вложения u . Если u – хорошее вложение, то $s^{p^k} \in Z(D)$ для некоторого k . Противоречие.

Итак, ниже будем предполагать $Z(\overline{D}_2)/\overline{F}$ чисто несепарабельным расширением. Тогда имеем (см., например, [13; теорема 1]), что $\overline{D} \cong \overline{D}_2 \otimes_{\overline{F}} \overline{B}$, и поэтому $u(\overline{D}) \cong u(\overline{D}_2) \otimes_{u(\overline{F})} u(\overline{B})$, где u – хорошее вложение. Следовательно, $E = u(Z(\overline{D}_2))$ – чисто несепарабельное поле над $u(\overline{F}) \subset Z(D)$.

Рассмотрим поле $E' = u(K) \otimes_{u(\overline{F})} F$, где K – некоторое максимальное сепарабельное подполе в $\overline{B}$. Это неразветвленный подъем поля K в D . Рассмотрим централизатор $C = C_D(E') \cong D_2 \otimes_F E'$. Пусть M – некоторое максимальное подполе в $\overline{D}_2$. Заметим, что $u(\overline{D}_2) \subset C$, т.е. $L \subset C$, где $L = u(M)F$ – композит $u(M)$ и F , и $E \subset L$. Заметим также, что $[L : F] = \text{ind } D_2 = \text{ind } C$. Поле L расщепляет C из соображений размерности. Следовательно, оно должно расщеплять и D_2 , так как $([E' : F], p) = 1$ и D_2 – p -алгебра. Отсюда L изоморфно максимальному подполю в D_2 , значит, D_2 содержит копию чисто несепарабельного “неразветвленного” подполя, поле вычетов которого изоморфно $Z(\overline{D}_2)$. Следовательно, D_2 – хорошо расщепимая алгебра. Действительно, централизатором этого поля является неразветвленная алгебра с делением, поэтому по теореме 1 он расщепим. Отсюда следует, что D_2 хорошо расщепима, если чисто несепарабельное поле хорошо расщепимо. Оно же, в свою очередь, хорошо расщепимо, потому что содержит подполе, изоморфное $u(Z(\overline{D}_2))$ по построению. (Это можно увидеть и другим путем, используя рассуждения леммы 9, чтобы показать, что существует подходящий p -базис.)

Пусть D – расщепимая алгебра. Тогда такими же рассуждениями, что и в предыдущем абзаце, можно показать, что L изоморфно максимальному подполю в D_2 (не имеет значения, что $Z(\overline{D}_2)/\overline{F}$ может не быть чисто несепарабельным расширением). Далее, композит $EF \subset L$, $EF \neq L$, так как любой элемент из E коммутирует с $u(\overline{D}_2)$, где u есть некое фиксированное вложение. Поэтому должно выполняться $\overline{C_{D_2}(EF)} = \overline{D}_2$ и $C_{D_2}(EF)$ – неразветвленная алгебра с делением. Следовательно, D_2 есть расщепимая алгебра с делением.

Теоремы о разложении [1; теоремы 5.6–5.15] завершают доказательство.

Это предложение показывает, что изучение расщепимых алгебр с делением мо-

жет быть сведено к изучению расщепимых p -алгебр. Поэтому далее в этом и следующем параграфах будем рассматривать только p -алгебры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть D — хорошо расщепимая алгебра с делением, причем $Z(\overline{D})/\overline{Z(D)}$ — чисто несепарабельное расширение. Тогда $D \cong D_1 \otimes_{Z(D)} D_2$, где D_1 — неразветвленная алгебра с делением и D_2 — хорошо расщепимая алгебра с делением такая, что $\overline{D_2}$ — поле, $\overline{D_2}/\overline{Z(D)}$ — чисто несепарабельное расширение, $[\overline{D_2} : \overline{Z(D)}] = [\Gamma_{D_2} : \Gamma_{Z(D)}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказываем по индукции по степени $[Z(\overline{D}) : \overline{Z(D)}]$.

Положим $[Z(\overline{D}) : \overline{Z(D)}] = p$. Пусть ${}^{(z,u)}\delta_i$ — отображение из леммы 11. Тогда ${}^{(z,u)}\delta_i^p$ — дифференцирование, тривиальное на центре $Z(D)$, откуда по теореме Сколема–Нётер следует, что это внутреннее дифференцирование.

Докажем, что $z^p \in Z(D)$. Имеем

$$z^{-i}az^i = a + {}_{-i}\delta_i(a)z^i, \quad a \in u(\overline{D}).$$

Следовательно,

$$z^{-pi}az^{pi} = a + {}_{-i}\delta_i^p(a)z^{pi}, \quad a \in u(\overline{D}),$$

и

$$z^{pi}az^{-pi} = a + \delta_1'(a)z^{pi} + \delta_1'^2(a)z^{2pi} + \dots,$$

где $\delta_1' = (-1){}_{-i}\delta_i^p = i^p\delta_i^p$. Отсюда

$$z^paz^{-p} = a + \frac{1}{i}\delta_1'(a)z^{pi} + c_2\frac{1}{2}\delta_1'^2(a)z^{2pi} + \dots,$$

где c_k задаются формулой (4) (лемма 7). Следовательно, $z^p \in Z(D)$ тогда и только тогда, когда $\delta_i^p = 0$. Предположим, что $\delta_i^p \neq 0$. Рассмотрим элемент $Y \in Z(D)$, $w(Y) > 0$. Пусть

$$Y = a_1z^p + \dots, \quad a_1 \in u(\overline{D}).$$

Сначала заметим, что

$$Y = a_1z^p + a_2z^{2p} + a_3z^{3p} + \dots, \quad a_i \in u(\overline{D}).$$

В самом деле, Y должен удовлетворять $[Y, s] = 0$, где s есть порождающая поля $u(Z(\overline{D}))$ над $u(\overline{Z(D)})$. Так как $s \in u(Z(\overline{D}))$ и $w([z^k, s]) = k + i$ при $(k, p) = 1$ и $w([z^k, s]) = \infty$ в противном случае, имеем, что $[z^{ik}, s] = 0$ для любого k , где

$$Y = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{ik}.$$

Следовательно, $p \mid i_k$.

Далее, Y должен удовлетворять $Ya = aY$ для любого $a \in u(\overline{D})$. Поэтому $a_1, \dots, a_i \in u(Z(\overline{D}))$ и должно выполняться

$$aa_{i+1} - a_{i+1}a = \frac{a_1\delta_1'(a)}{i}$$

и

$$aa_{2i+1} - a_{2i+1}a = a_i\delta'_1(a) + a_1c_2\delta'^2_1(a).$$

Ввиду того, что $\Delta(a) = aa_{2i+1} - a_{2i+1}a$ есть внутреннее дифференцирование, получаем $\delta'^2_1 = \delta$, где δ – дифференцирование, что приводит к противоречию, если $\delta \neq 0$ и $\text{char } D \neq 2$. В последнем случае можно применить те же аргументы для a_{3i+1} . Следовательно, $\delta'^2_1 = \delta = 0$, $\delta'_1 = 0$ и $z^p \in Z(D)$.

Рассмотрим алгебру $W = u(\overline{Z(D)})((z))$. Из того, что $z^p \in Z(D)$ и $u(\overline{Z(D)}) \subset Z(D)$, следует, что $Z(W) = u(\overline{Z(D)})((z^p)) = Z(D)$. Следовательно, по теореме о централизаторе $D \cong W \otimes_F C_D(W)$. Очевидно, что $C_D(W)$ – неразветвленная алгебра с делением.

Предположим теперь, что предложение доказано для $[Z(\overline{D}) : \overline{Z(D)}] = p^{k-1}$. По теореме Алберта [11; теорема 13] D_2 является циклической алгеброй как произведение циклических подалгебр D_i , где $\overline{D_i}/\overline{F}$ есть простое чисто несепарабельное расширение и D_i – хорошо расщепимая алгебра.

Пусть $[Z(\overline{D}) : \overline{Z(D)}] = p^k$. Для хорошего вложения существует подъем $\tilde{K}$ такого подполя $\overline{Z(D)} \subset K \subset Z(\overline{D})$, что расширение $K/\overline{Z(D)}$ имеет степень p , т.е. $\tilde{K} = K$, $\Gamma_{\tilde{K}} = \Gamma_{Z(D)}$, $u(K) \subset \tilde{K}$, $\tilde{K}/Z(D)$ – чисто несепарабельное расширение степени p . По предположению индукции $C_D(\tilde{K}) \cong A_1 \otimes_{\tilde{K}} A_2$, где A_2 есть циклическая алгебра с делением и $\overline{A_2}$ – поле. Заметим, что $\overline{A_2} = Z(\overline{D})$.

По теореме 6 из [11] мы можем взять $A_2 = (L/\tilde{K}, \sigma, a)$, где a порождает $\tilde{K}$ над $Z(D)$. Итак, A_2 содержит максимальное чисто несепарабельное подполе $E = \tilde{K}(y)$ с $y^{p^{k-1}} = a$, поэтому $E = Z(D)(y)$. По теореме 3 из [11] $L = L_0 \times \tilde{K}$, где L_0 – циклическое поле степени p^{k-1} над $Z(D)$, и $yx_0 = \sigma(x_0)y$, где $x_0 \in L_0$.

Рассмотрим централизатор $B = C_D(L_0)$. Докажем, что $B \cong B_1 \otimes_{L_0} B_2$, где B_2 – циклическая алгебра с делением степени p и B_2 содержит $\tilde{K}$.

Заметим, что B содержит $Z(D)(a) = \tilde{K}$ и A_1 . Если $\tilde{K}L_0 = L$ “не разветвлено” над L_0 , то мы можем применить рассуждения первого шага индукции к алгебре B . По построению B_2 содержит L , поэтому – и $\tilde{K}$. Предположим, что L вполне разветвлено над L_0 , и пусть z – параметр L , т.е. элемент с наименьшим возможным положительным значением нормирования на L . Так как L чисто несепарабельно над L_0 , то z^p есть параметр L_0 .

Имеем, что $W := C_B(L) = C_D(L) \cong A_1 \otimes_{\tilde{K}} L$ – неразветвленная алгебра с делением. Рассмотрим вложение $u': \overline{L} = \overline{L_0} \hookrightarrow L_0$. Как было показано при доказательстве теоремы 1, существует подъем $\tilde{u}'$ элемента u' , $\tilde{u}': \overline{W} \hookrightarrow W$. Рассмотрим теперь подалгебру $W' = \tilde{u}'(\overline{W})((z^p))$. Имеем $Z(W') = u'(\overline{L})((z^p)) = L_0$, поэтому W' есть неразветвленная подалгебра в B . По теореме о централизаторе $B \cong W' \otimes_{L_0} C_B(W')$, где $C_B(W')$ – алгебра с делением степени p , содержащая $L_0(z) = L$, а следовательно, и $\tilde{K}$, и циклическая по теореме Алберта [11; теорема 12]).

Теперь можно повторить буквально доказательство теоремы 12 из [11], чтобы показать, что существует циклическое расширение Галуа L' поля L_0 , которое является циклическим над $Z(D)$, и y ведет себя как автоморфизм Галуа на $L'/Z(D)$, порождающий $\text{Gal}(L'/Z(D))$. Следовательно, существует циклическая подалгебра $D_2 = (L'/Z(D), \sigma, y^{p^k})$ в D , где σ – автоморфизм Галуа поля L' , порождаемый внутренним автоморфизмом i_y . Заметим, что $A_2 \subset D_2$ и A_2 является хорошо рас-

шешимой алгеброй с $[\overline{A}_2 : \overline{Z(A_2)}] = [\Gamma_{A_2} : \Gamma_{Z(A_2)}]$. Так как $\overline{A}_2 = \overline{D}_2$ и $Z(A_2) = \tilde{K}$ есть чисто несепарабельное расширение $Z(D)$, то D_2 — хорошо расщепимая алгебра такая, что $\overline{D}_2$ есть поле и $[\overline{D}_2 : \overline{Z(D)}] = [\Gamma_{D_2} : \Gamma_{Z(D)}]$. По теореме о центральном делении $D \cong D_1 \otimes_{Z(D)} D_2$, где $D_1 = C_D(D_2)$ должна быть неразветвленной алгеброй с делением, что завершает доказательство.

Объединяя все результаты данного параграфа, получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть D — конечномерная хорошо расщепимая центральная алгебра с делением над полем $F = k((t))$.

Если $\text{char } F = p > 0$, то $D \cong D_1 \otimes_F D_2 \otimes_F A_1 \otimes_F \cdots \otimes_F A_m$, где A_i — такие циклические алгебры с делением, что $[\overline{A}_i : \overline{Z(D)}] = [\Gamma_{A_i} : \Gamma_{Z(D)}]$ и $\overline{A}_i/\overline{Z(D)}$ — простые чисто несепарабельные расширения, D_1 — инерциально расщепимая алгебра с делением, $(\text{ind}(D_1), p) = 1$, D_2 — неразветвленная алгебра с делением (D_1, D_2, A_i могут быть тривиальными).

Если $\text{char } F = 0$, то D — инерциально расщепимая алгебра с делением.

§6. Расщепимость и хорошая расщепимость

В этом параграфе мы приведем некоторые разрозненные результаты, касающиеся взаимосвязи между расщепимыми и хорошо расщепимыми алгебрами с делением. Мы будем рассматривать здесь только алгебры с делением, удовлетворяющие следующему свойству: $Z(\overline{D})/\overline{Z(D)}$ — простое расширение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть D — центральная алгебра с делением над F характеристики $\text{char } D = p > 0$, причем $Z(\overline{D}) = \overline{D}$ и $[Z(\overline{D}) : \overline{F}] = p$.

Тогда D — расщепимая алгебра и локальная высота $i = i(u, z)$ (если она определена, т.е. когда $\alpha = \text{id}$) не зависит от u и z . Это хорошо расщепимая алгебра, если $(i, p) = 1$. Если же $p \mid i$, то существует параметр z такой, что $z^p \in Z(D)$, и любое “неразветвленное” максимальное подполе циклическое.

Следовательно, в обоих случаях D есть циклическая алгебра с делением степени p .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $\overline{D}/\overline{F}$ — простое расширение, то $[\overline{D} : \overline{F}] = [\Gamma_D : \Gamma_F]$. Действительно, рассмотрим поля $E = F(s)$ и $E' = F(z)$, где s — произвольный элемент такой, что $\overline{s}$ — примитивный элемент расширения $\overline{D}/\overline{F}$, и z — произвольный параметр D . Тогда $[\overline{D} : \overline{F}] \leq [E : F] \leq [D : F]^{1/2} = ([\overline{D} : \overline{F}][\Gamma_D : \Gamma_F])^{1/2}$, поэтому $[\overline{D} : \overline{F}] \leq [\Gamma_D : \Gamma_F]$. С другой стороны, $[\Gamma_D : \Gamma_F] \leq [E' : F] \leq ([\overline{D} : \overline{F}] \times [\Gamma_D : \Gamma_F])^{1/2}$, поэтому $[\overline{D} : \overline{F}] = [\Gamma_D : \Gamma_F]$. Следовательно, D — расщепимая алгебра с делением степени p .

Если $Z(\overline{D})/\overline{F}$ — сепарабельное расширение, то по теореме 1 D — хорошо расщепимая алгебра. Поэтому далее будем предполагать, что это чисто несепарабельное расширение, $Z(\overline{D}) = \overline{F}(\overline{u})$. Для любого подъема u элемента $\overline{u}$ будем считать u вложением, построенным по лемме 9, т.е. $^{(z,u)}\delta_j$ определяется значениями $^{(z,u)}\delta_j(u^k)$ для любого j . По следствию 2 локальная высота $i(u, z)$ не зависит от z , а по лемме 10 $i(u, z)$ не зависит от u . Для произвольного вложения u' отображение $^{(z,u')}\delta_{i(u',z)}$ полностью определяется значением в $\overline{u}$, так как $^{(z,u')}\delta_{i(u',z)}$ — дифференцирование и $\overline{D}/\overline{F}$ — простое расширение. Следовательно, $i(u', z) = w(zu'(\overline{u})z^{-1} - u'(\overline{u}))$ и $i(u', z)$ полностью определяется подъемом $u'(\overline{u})$.

Но произвольный подъем на $\bar{u}$ задает вложение, от которого, как мы доказали, i не зависит. Соответственно, $i(u, z)$ не зависит от z и u .

Предположим теперь, что $p \mid i$.

Используя лемму 3, без ограничения общности можно считать, что ${}^{(z,u)}\delta_j = 0$, если j не делится на p .

В самом деле, если ${}^{(z,u)}\delta_j \neq 0$, то можно применить лемму 3, ii), чтобы получить, что существует такой параметр z_j , что ${}^{(z_j,u)}\delta_j(u) = 0$ и ${}^{(z_j,u)}\delta_k = {}^{(z,u)}\delta_k$ при $k < j$, ${}^{(z_j)}\alpha = \text{id}$. Так как по предложению 2 и по предположению индукции ${}^{(z_j,u)}\delta_j$ является дифференцированием (аналогичные рассуждения были использованы при доказательстве предложения 3), а также так как оно задается значениями на u^k , т.е. значениями на u , имеем ${}^{(z,u)}\delta_j = 0$. Ввиду того, что для $j_1 > j_2$ справедливо $w(z_{j_1} - z_{j_2}) > j_1 - i$, последовательность $\{z_j\}$ сходится к параметру z' , который удовлетворяет нашему условию.

Следовательно, существует подалгебра $A = u(\bar{D})((z^p))$. Покажем теперь, что $Z(D) \subset A$. Заметим, что любой элемент $a \in D$ может быть записан как $a = a_0 + a_1 z + \dots + a_{p-1} z^{p-1}$, где $a_i \in A$. Заметим также, что $z^k A z^{-k} \subset A$ для любого k . Отсюда, если $a \in Z(D)$, то $z a_j z^{-1} = a_j$ и $u a_j z^j u^{-1} = a_j z^j$ для любого j . Для $j > 0$ имеем $a_j z^j = \sum_k a_{jk} z^{kp+j}$, поэтому по следствию 2 $u a_j z^j u^{-1} \neq a_j z^j$. Следовательно, $a = a_0 \in A$.

Так как $A \neq D$, A должна быть коммутативной, отсюда $z^p \in Z(D)$. Более того, расширение $A/Z(D)$ циклично. Так как рассуждения верны для любого подъема u элемента $\bar{u}$, то произвольное “неразветвленное” максимальное подполе в D должно быть циклично над F .

Пусть теперь $(i, p) = 1$.

Используя лемму 3, iii), можем найти такие параметр z и примитивный элемент $s \in \bar{D}$, что ${}^{(z,u)}\delta_i(s) = sc$, где $c \in \bar{F}$. В самом деле, так как $(i, p) = 1$, то найдется такое k , что $1 - ki$ делится на p . Следовательно, по лемме 3, iii) для параметра $z' = u({}^{(z,u)}\delta_i(\bar{u})^k)z$ выполняется ${}^{(z',u)}\delta_i(\bar{u}) \in \bar{F}$, поэтому по лемме 10, iii) ${}^{(z',u)}\delta_i(s) = 1$, где $s = \bar{u}({}^{(z',u)}\delta_i(\bar{u}))^{-1}$. Это значит, что существует k_1 такое, что $-ik_1 - 1$ делится на p , поэтому для $z'' = s^{k_1} z'$ выполняется ${}^{(z'',u)}\delta_i(s) = sc$, где $c = s^{-ik_1-1} \in \bar{F}$. Легко видеть, что ввиду $s = \bar{u}a$, где $a \in \bar{F}$, отображение ${}^{(z,u)}\delta_j$ однозначно определяется также по ${}^{(z,u)}\delta_j(s^k)$, т.е. и по ${}^{(z,u)}\delta_l(s)$ при $l \leq j$. Поэтому без ограничения общности можем считать, что $s = \bar{u}$, $z = z''$.

Используя лемму 10, ii), можем отыскать такую сходящуюся последовательность $\{u_j\}$, $u_j \in D$, $j \geq i$, что $u_{j+1} = u_j + b_j z^{j+1-i}$, $u_i = u$, $b_j \in u_j(\bar{D})$ (здесь под u_j понимаем вложение, задаваемое u_j , см. лемму 9), и ${}^{(z,u_j)}\delta_k(\bar{u})\bar{u}^{-1} \in \bar{F}$ для всех $k \leq j$ и всех m .

В самом деле, предположим, что это верно для $j \geq i$. Пусть ${}^{(z,u_j)}\delta_{j+1}(\bar{u}) = a_0 + \dots + a_{p-1} \bar{u}^{p-1}$, $a_k \in \bar{F}$. Так как ${}^{(z,u_j)}\delta_i = {}^{(z,u)}\delta_i = m({}^{(z,u)}\delta_i)$, то имеем

$${}^{(z,u_j)}\delta_i(a_k \bar{u}^k) - \frac{\partial}{\partial \bar{u}}({}^{(z,u_j)}\delta_i(\bar{u}))a_k \bar{u}^k = (k-1)mca_k \bar{u}^k.$$

Следовательно, $u_{j+1} = u_j - u_j(\sum_{k,k \neq 1} (k-1)^{-1} m^{-1} c^{-1} a_k \bar{u}^k) z^{j+1-i}$ удовлетворяет нашему условию.

Обозначим через u предел последовательности $\{u_j\}$. По индукции и по предположению 2 легко можно показать, что ${}^{(z,u)}\delta_j(\bar{u}^k)\bar{u}^{-k} \in \bar{F}$ для любого целого k .

Следовательно, существует подалгебра $A = u(\overline{F})((z))$ в D . Рассуждениями, аналогичными случаю $p \nmid i$, можно показать, что A содержит $Z(D)$. Так как $A \neq D$, она должна быть коммутативной, поэтому $u^p \in Z(D)$. Тогда u – хорошее вложение. Предложение доказано.

Пусть D – расщепимая алгебра с делением, и пусть $Z(\overline{D})/\overline{Z(D)}$ – чисто несепарабельное расширение. Как было показано при доказательстве леммы 11, тогда существует такой параметр z в D , что ${}^{(z,u)}\delta_i|_{Z(\overline{D})} \neq 0$, где $i = i(u, z)$ – локальная высота. Хотя D может и не являться хорошо расщепимой, рассуждения леммы верны для любой расщепимой алгебры. Мы будем называть такой параметр *подходящим параметром*, а число $i(u) = \max_z i(u, z) = i(u, z)$ для подходящего параметра – *полулокальной высотой*. Теперь докажем следующую простую лемму.

ЛЕММА 12. Пусть D – расщепимая центральная p -алгебра с делением над F , где $p = \text{char } D > 0$, и пусть $Z(\overline{D}) = \overline{F}(s)$ – простое расширение над $\overline{F}$. Тогда

- i) существует такое вложение u , что ${}^{(z,u)}\delta_j|_{Z(\overline{D})}$ определяется значениями ${}^{(z,u)}\delta_j(s^k)$ для любых j, l, z (как в лемме 9);
- ii) $[Z(\overline{D}) : \overline{F}] = [\Gamma_D : \Gamma_F]$;
- iii) если $\alpha|_{Z(\overline{D})} \neq \text{id}$ или $i(u)$ делится на p , то существует подалгебра $A = u(\overline{D})((z))$ для такого подходящего параметра z , что $Z(D) \subset Z(A)$, более того, $Z(A)$ есть циклическое расширение Галуа над $Z(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. i) Для произвольного вложения u рассмотрим поле $E = u(Z(\overline{D}))F \subset D$ и централизатор $W = C_D(E)$. Тогда $\overline{W} = \overline{D}$ и $Z(\overline{W}) = \overline{E}$. Следовательно, W должна быть неразветвленной алгеброй с делением, и по теореме 1 существует подъем на $\overline{W}$ произвольного вложения $\overline{E} \hookrightarrow E$. Далее, возьмем вложение, определяемое элементом s , как в лемме 9. Его подъем будет искомым вложением. Это вложение также будем обозначать через s .

ii) По предложению 1.7 из [1] основной гомоморфизм θ_D (см. введение) сюръективен. Поэтому достаточно доказать утверждение только для централизатора $C_D(K)$, где K – подъем циклического подрасширения расширения $Z(\overline{D})/\overline{F}$. Ниже будем поэтому полагать $Z(\overline{D})/\overline{F}$ чисто несепарабельным расширением.

Рассмотрим максимальное сепарабельное подполе M в $\overline{D}$, и пусть $M'/\overline{F}$ – сепарабельное подрасширение расширения $M/\overline{F}$. Из [1; теоремы 2.8, 2.9] следует, что существует неразветвленный подъем M' в D , скажем, $\widetilde{M}$. Рассмотрим централизатор $B = C_D(\widetilde{M})$. Тогда $\overline{B}$ – поле. Требуемое утверждение будет доказано, если удастся доказать его для B , так как $[\widetilde{M} : F] = \text{ind}(\overline{D})$ и $[D : F] = \text{ind}(\overline{D})^2 [Z(\overline{D}) : \overline{F}] [\Gamma_D : \Gamma_F]$. Так как $\overline{B}/\overline{Z(B)}$ – простое расширение, для этого можно повторить рассуждения начала доказательства предложения 6.

iii) Если $\alpha|_{Z(\overline{D})} \neq \text{id}$, рассмотрим параметр z из предложения 3. Очевидно, что $A = u(\overline{D})((z))$ – подалгебра с центром K , который является неразветвленным подъемом циклического подрасширения расширения $Z(\overline{D})/\overline{F}$.

Предположим, что $\alpha|_{Z(\overline{D})} = \text{id}$ и $i(u)$ делится на p . Пусть z – подходящий параметр. Используя лемму 3, можно доказать, что ${}^{(z,u)}\delta_j = 0$, если j не делится на p .

В самом деле, пусть ${}^{(z,u)}\delta_j \neq 0$ – первое отображение, обладающее этим свойством, и $(j, p) = 1$. Если ${}^{(z,u)}\delta_j|_{Z(\overline{D})} = 0$, то, применяя лемму 3, i), можно показать существование параметра z_j такого, что ${}^{(z_j,u)}\delta_j = 0$ и ${}^{(z_j,u)}\delta_k = {}^{(z,u)}\delta_k$ для $k < j$, ${}^{(z_j)}\alpha = \text{id}$, так как ${}^{(z,u)}\delta_j$ – дифференцирование по предложению 2 и по индукции (подобные рассуждения уже использовались при доказательстве предложения 3), и, следовательно, по теореме Сколема–Нетёр это – внутреннее дифференцирование.

Если ${}^{(z,u)}\delta_j|_{Z(\overline{D})} \neq 0$, то применяем лемму 3, ii) и имеем, что существует параметр z_j такой, что ${}^{(z_j,u)}\delta_j(s) = 0$ и ${}^{(z_j,u)}\delta_k = {}^{(z,u)}\delta_k$ для $k < j$, ${}^{(z_j)}\alpha = \text{id}$. Так как ${}^{(z_j,u)}\delta_j$ – дифференцирование и его ограничение на $Z(\overline{D})$ определяется значениями на s^k , т.е. значениями на s , то выполняется ${}^{(z,u)}\delta_j|_{Z(\overline{D})} = 0$ и задача сводится к предыдущему случаю. Так как при $j_1 > j_2$ выполняется $w(z_{j_1} - z_{j_2}) > j_1 - i$, то последовательность $\{z_j\}$ сходится к параметру z' , который удовлетворяет нашему условию.

Следовательно, существует подалгебра $A = u(\overline{D})(z')$ в D . Рассуждениями, аналогичными использованным при доказательстве предложения 6, получаем, что $Z(D) \subset Z(A)$. Так как z' сохраняет A , то он сохраняет центр $Z(A)$. С другой стороны, он на нем действует нетривиально. Следовательно, $Z(A)$ есть циклическое расширение Галуа степени p и внутренний автоморфизм $i_{z'}$, ограниченный на $Z(A)$, порождает его группу Галуа.

Эта лемма показывает, что изучение расщепимых p -алгебр над F может быть сведено к изучению расщепимых p -алгебр с чисто несепарабельным расширением $Z(\overline{D})/\overline{F}$ и $(i(u), p) = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Пусть D – расщепимая p -алгебра с делением с чисто несепарабельным расширением $Z(\overline{D})/\overline{F}$. Для любого элемента $a \in \overline{D}$ определим число

$$d_D(a) = \max_{u, z} w(z^{-i(u,a)} u(a) z^{i(u,a)} - u(a) - u(-i_{(u,a)}^{(z,u)} \delta_{i(u,a)}(a)) z^{i(u,a)}) \in \mathbb{N} \cup \infty,$$

где параметры z берутся из множества подходящих параметров, а $i(u, a)$ был определен в следствии 2.

Как нам кажется, число $d_D(a)$ может играть роль уровня высшего порядка в расщепимой алгебре с делением. Ниже мы покажем, что оно содержит в себе часть информации об алгебре с делением.

ЛЕММА 13. Пусть D – расщепимая p -алгебра с делением, $p > 2$, с чисто несепарабельным простым расширением $Z(\overline{D})/\overline{F}$.

Пусть u – некое фиксированное вложение $u: \overline{D} \hookrightarrow D$. Положим $Z(\overline{D}) = \overline{F}(a)$, $(i(u, a), p) = 1$; $d(u, a) \leq 2i(u, a)$.

Пусть z – такой параметр, что ${}^{(z,u)}\delta_{i(u,a)}(-i_{(u,a)}^{(z,u)} \delta_{i(u,a)}(a)) = 0$, ${}^{(z)}\alpha = \text{id}$ и ${}^{-i_{(u,a)}^{(z,u)} \delta_q}|_{\mathbb{F}_p(a)} = 0$ для $i(u, a) < q < d(u, a)$. Положим $j(k) := i(u, a^{p^k})$.

Предположим, что для любого $k \geq 1$ параметр z_k такой, что

$${}^{(z_k, u)}\delta_r|_{\mathbb{F}_p(a^{p^k})} = 0$$

для $j(k) < r < d(u, a^{p^k})$, удовлетворяет условию ${}^{(z_k, u)}\delta_{i(u, a)} = {}^{(z, u)}\delta_{i(u, a)}$, ${}^{(z_k)}\alpha = {}^{(z)}\alpha$. Пусть также для любого $k \geq 1$ выполняется $d(u, a^{p^k}) - j(k) = d(u, a) - j(0)$.

Тогда отображения ${}_{w+(p-1-r)j(k)}^{(z, u)}\delta_\zeta$, $rj(k) < \zeta \leq (r-1)j(k) + d(u, a^{p^k})$, $r \in \{1, \dots, p-1\}$, $k \geq 0$, удовлетворяют

$${}_{w+(p-1-r)j(k)}^{(z, u)}\delta_\zeta|_{\mathbb{F}_p(a^{p^k})} = c_{w+(p-1-r)j(k), \zeta, 1}\delta + \dots + c_{w+(p-1-r)j(k), \zeta, r}\delta^r,$$

где дифференцирование δ было определено в лемме 5, $c_{w+(p-1-r)j(k), \zeta, r} \in Z(\overline{D})$, $c_{w+(p-1-r)j(k), \zeta, r} \neq 0$, только если $\zeta = (r-1)j(k) + d(u, a^{p^k})$.

Более того, $c_{w+(p-1-r)j(k), (r-1)j(k)+d(u, a^{p^k}), r} \neq 0$, если $w = i(u, a) \pmod{p}$;

$$\begin{aligned} & c_{w+(p-1-r)j(k), (r-1)j(k)+d(u, a^{p^k}), r} \\ &= r! c_{w+(p-r)j(k), (r-2)j(k)+d(u, a^{p^k}), r-1} {}_{w+(p-1-r)j(k)}\delta_{j(k)}(a^{p^k}), \end{aligned}$$

$$a {}_{w+(p-2)j(k)}^{(z_k, u)}\delta_{d(u, a^{p^k})}(a^{p^k}) = {}_{-j(k)}^{(z_k, u)}\delta_{d(u, a^{p^k})}(a^{p^k}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Лемма доказывается аналогично лемме 5, i) индукцией по r одновременно для всех $k \geq 0$.

Для $r = 1$ легко показать, используя лемму 2, что

$${}^{(z_k, u)}\delta_q(a^{p^k}) = -(j(k))^{-1} {}_{-j(k)}^{(z_k, u)}\delta_q(a^{p^k})$$

для $j(k) \leq q < d(u, a^{p^k})$ (полагаем здесь $z_0 = z$). По лемме 8, i) имеем, что $d(u, a) - i(u, a) = i(u, a) \pmod{p}$. По утверждению ii) леммы 8 и по индукции по k тогда получаем $j(k) = j(0) \pmod{p}$.

Следовательно,

$${}_{w+(p-2)j(k)}^{(z_k, u)}\delta_q|_{\mathbb{F}_p(a^{p^k})} = 0,$$

если $j(k) < q < d(u, a^{p^k})$, и

$${}_{w+(p-2)j(k)}^{(z_k, u)}\delta_q|_{\mathbb{F}_p(a^{p^k})} \neq 0,$$

только если $q = d(u, a^{p^k})$.

Так как ${}_{-j(k)}^{(z_k, u)}\delta_{j(k)}|_{\mathbb{F}_p(a^{p^k})}$ — дифференцирование и по предложению 2, i) отображение ${}_{-j(k)}^{(z_k, u)}\delta_{d(u, a^{p^k})}|_{\mathbb{F}_p(a^{p^k})}$ тоже должно быть дифференцированием, получаем ${}_{w+(p-2)j(k)}^{(z_k, u)}\delta_{d(u, a^{p^k})}(a^{p^k}) \in Z(\overline{D})$. Действительно, как было показано при доказательстве леммы 5, ii), для любого дифференцирования δ выполняется $\delta(b) \in Z(\overline{D})$ для любого $b \in Z(\overline{D})$. Так как ${}_{w+(p-2)j(k)}^{(z_k, u)}\delta_{d(u, a^{p^k})}(a^{p^k}) = q_1 {}_{-j(k)}^{(z_k, u)}\delta_{d(u, a^{p^k})}(a^{p^k}) + q_2 {}_{-j(k)}^{(z_k, u)}\delta_{j(0)}({}_{-j(k)}^{(z_k, u)}\delta_{j(k)}(a^{p^k}))$ для некоторых целых q_1, q_2, m , наше утверждение доказано. Поэтому $c_{w+(p-2)j(k), d(u, a^{p^k}), 1} \in Z(\overline{D})$.

Если $w = j(0) \pmod{p}$, то $w + (p-2)j(k) \delta_{d(u, a^{p^k})}(a^{p^k}) = \binom{z_k, u}{-j(k)} \delta_{d(u, a^{p^k})}(a^{p^k})$, так как $w + (p-1)j(0) = 0 \pmod{p}$ и $\text{char } D > 2$. Следовательно, имеем $c_{w+(p-2)j(k), d(u, a^{p^k}), 1} \neq 0$.

Положим теперь $t = a^{p^k}$. По предложению 2, i) для любого r имеем

$$\begin{aligned} w + (p-1-r)j(k) \delta_{\zeta}(t^q) &= q w + (p-1-r)j(k) \delta_{\zeta}(t) t^{q-1} \\ &+ w + (p-1-r)j(k) \delta_{j(k)}(t) \sum_{l=0}^{q-2} w + (p-r)j(k) \delta_{\zeta-j(k)}(t^{q-1-l}) t^l \\ &+ w + (p-1-r)j(k) \delta_{d(u, t)}(t) \sum_{l=0}^{q-2} w + (p-1-r)j(k) + d(u, t) \delta_{\zeta-d(u, t)}(t^{q-1-l}) t^l \\ &+ \sum_{i=d(u, t)+1}^{\zeta-1} w + (p-1-r)j(k) \delta_i(t) \sum_{l=0}^{q-2} w + (p-1-r)j(k) + i \delta_{\zeta-i}(t^{q-1-l}) t^l. \end{aligned} \quad (5)$$

С помощью тех же рассуждений, что были использованы при доказательстве леммы 5, i), получаем, что $w + (p-1-r)j(k) \delta_{\zeta}(t^p) = 0$ и

$$w + (p-1-r)j(k) \delta_{\zeta} \big|_{\mathbb{F}_p(t)} = c_{w+(p-1-r)j(k), \zeta, 1} \delta + \cdots + c_{w+(p-1-r)j(k), \zeta, p-1} \delta^{p-1}.$$

Для того чтобы показать, что $c_{w+(p-1-r)j(k), \zeta, i} = 0$ для $i > r$, достаточно с помощью (3) проверить, что все отображения в (5) представляются в виде $c_1 \delta + \cdots + c_{r-1} \delta^{r-1}$. Сделаем это подробно.

Так как $\zeta - d(u, t) - 1 < (r-1)j(k)$, то по лемме 5, ii) $m \delta_{\zeta-i} \big|_{\mathbb{F}_p(t)} = c_{m, \zeta-i, 1} \delta + \cdots + c_{m, \zeta-i, r-2} \delta^{r-2}$ для всех $i > d(u, t)$.

Если $w = j(0) \pmod{p}$, то $w + (p-1-r)j(k) + d(u, t) + (r-2)j(k) = 0 \pmod{p}$. Так как $\zeta - d(u, t) \leq (r-1)j(k)$, по лемме 5, ii) получаем

$$\begin{aligned} w + (p-1-r)j(k) + d(u, t) \delta_{\zeta-d(u, t)} \big|_{\mathbb{F}_p(t)} \\ = c_{w+(p-1-r)j(k)+d(u, t), \zeta-d(u, t), 1} \delta \\ + \cdots + c_{w+(p-1-r)j(k)+d(u, t), \zeta-d(u, t), r-2} \delta^{r-2}. \end{aligned}$$

Если $w \neq j(0) \pmod{p}$, то отсюда же получаем, что

$$\begin{aligned} w + (p-1-r)j(k) + d(u, t) \delta_{\zeta-d(u, t)} \big|_{\mathbb{F}_p(t)} \\ = c_{w+(p-1-r)j(k)+d(u, t), \zeta-d(u, t), 1} \delta \\ + \cdots + c_{w+(p-1-r)j(k)+d(u, t), \zeta-d(u, t), r-1} \delta^{r-1}, \end{aligned}$$

и по лемме 5, i) $c_{w+(p-1-r)j(k)+d(u, t), \zeta-d(u, t), r-1} \in Z(\overline{D})$ как произведение элементов из $Z(\overline{D})$.

Наконец, по предположению индукции

$$\begin{aligned} w + (p-r)j(k) \delta_{\zeta-j(k)} \big|_{\mathbb{F}_p(t)} \\ = c_{w+(p-r)j(k), \zeta-j(k), 1} \delta + \cdots + c_{w+(p-r)j(k), \zeta-j(k), r-1} \delta^{r-1}, \end{aligned}$$

где $c_{w+(p-r)j(k), \zeta-j(k), r-1} \neq 0$, только если $\zeta - j(k) = (r-2)j(k) + d(u, t)$, и $c_{w+(p-r)j(k), \zeta-j(k), r-1} \in Z(\overline{D})$. Так как $w+(p-1-r)j(k)\delta_{j(k)}(t) \in Z(\overline{D})$, по формуле (3) получаем $c_{w+(p-1-r)j(k), \zeta, r} \in Z(\overline{D})$, и если $w = j(0) \pmod{p}$, то $c_{w+(p-1-r)j(k), \zeta, r} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\zeta = (r-1)j(k) + d(u, t)$,

$$\begin{aligned} & c_{w+(p-1-r)j(k), (r-1)j(k)+d(u, t), r} \\ &= r! c_{w+(p-r)j(k), (r-2)j(k)+d(u, t), r-1} w+(p-1-r)j(k)\delta_{j(k)}(t) \neq 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ЛЕММА 14. Пусть D – алгебра с делением, как в лемме 13. Предположим, что $d(u, a) \leq 2i(u, a)$ и $\text{char } D > 2$.

Тогда для любого k существует такой параметр z_k , что $\binom{z_k, u}{-j(k)}\delta_r|_{\mathbb{F}_p(a^{p^k})} = 0$ для $j(k) < r < d(u, a^{p^k})$, и $\binom{z_k, u}{-j(k)}\alpha = \binom{z, u}{-j(k)}\alpha$, $\binom{z_k, u}{-j(k)}\delta_{j(l)} = \binom{z, u}{-j(k)}\delta_{j(l)}$ для всех $l \leq k$ (используемые обозначения были введены в лемме 13).

Более того, для любого $k \geq 1$ выполняется $d(u, a^{p^k}) - j(k) = d(u, a) - j(0)$ и

$$\binom{z_k, u}{-j(k)}\delta_{d(u, a^{p^k})}(a^{p^k}) = -\binom{z_{k-1}, u}{-j(k-1)}\delta_{d(u, a^{p^{k-1}})}(a^{p^k})c_{d(u, t)-j(k-1), j(k)-j(k-1), p-1},$$

где $c_{d(u, t)-j(k-1), j(k)-j(k-1), p-1}$ было определено в лемме 13.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказываем индукцией по k . По лемме 8 $d(u, a) = 2j(0) \pmod{p}$ и $j(1) = d(u, a) + (p-1)j(0)$. Поэтому по предположению индукции можем считать, что для произвольного k выполняется $d(u, a^{p^{k-1}}) = 2j(0) \pmod{p}$ и $j(k-1) = j(0) \pmod{p}$, $j(k) = d(u, a^{p^{k-1}}) + (p-1)j(k-1)$.

Начнем для удобства с параметра $z = z_0$, удовлетворяющего условиям леммы 13. Покажем, что такой параметр существует. Действительно, выбрав некоторый подходящий параметр z и изменив его, если нужно, на параметр $u(c)z$ для подходящего $c \in Z(\overline{D})$ (как при доказательстве предложения 6), мы можем положить, что $\binom{z, u}{-j(0)}\delta_{j(0)}(a) \in Z(\overline{D})^p$. Далее, используя рассуждения доказательства леммы 8, i), находим искомый параметр z_0 .

Идея доказательства теперь в следующем: сначала докажем, что

$$\binom{z_{k-1}, u}{-j(k-1)}\delta_{j(k)+d(u, a)-j(0)}(a^{p^k}) \neq 0.$$

Далее мы докажем существование параметра z_k такого, что $\binom{z_k, u}{-j(k)}\delta_{\zeta}(a^{p^k}) = 0$ для $j(k) < \zeta < j(k) + d(u, a) - j(0)$ и $\binom{z_k, u}{-j(k)}\delta_{j(k)+d(u, a)-j(0)}(a^{p^k}) \neq 0$. Будет показано, что z_k удовлетворяет условиям леммы.

Итак, предположим, что $j(k) \leq \zeta \leq j(k) + d(u, a) - j(0) = j(k) + d(u, a^{p^{k-1}}) - j(k-1)$. Положим $t = a^{p^{k-1}}$. По предложению 2, i) имеем

$$\begin{aligned} \binom{z_{k-1}, u}{-j(k-1)}\delta_{\zeta}(t^p) &= \binom{z_{k-1}, u}{-j(k-1)}\delta_{d(u, t)}(t) \sum_{l=0}^{p-2} d(u, t) \binom{z_{k-1}, u}{-j(k-1)}\delta_{\zeta-d(u, t)}(t^{p-1-l})t^l \\ &+ \dots + \binom{z_{k-1}, u}{-j(k-1)}\delta_{\zeta-(p-1)j(k-1)}(t) \sum_{l=0}^{p-2} \zeta - p j(k-1) \binom{z_{k-1}, u}{-j(k-1)}\delta_{(p-1)j(k-1)}(t^{p-1-l})t^l \\ &+ \sum_{i=\zeta-(p-1)j(k-1)+1}^{\zeta-1} \binom{z_{k-1}, u}{-j(k-1)}\delta_i(t) \sum_{l=0}^{p-2} \binom{z_{k-1}, u}{-j(k-1)}\delta_{\zeta-i}(t^{p-1-l})t^l. \end{aligned}$$

По лемме 5, i) в последней сумме имеем $\binom{z_{k-1}, u}{i-j(k-1)} \delta_{\zeta-i} \big|_{\mathbb{F}_p(t)} = c_{i-j(k-1), \zeta-i, 1} \delta + \dots + c_{i-j(k-1), \zeta-i, p-2} \delta^{p-2}$, так как $\zeta - i < (p-1)j(k-1)$. Следовательно, эта сумма равна нулю.

По утверждению ii) леммы 5 имеем

$$\begin{aligned} \binom{z_{k-1}, u}{-pj(k-1)} \delta_{(p-1)j(k-1)} \big|_{\mathbb{F}_p(t)} &= c_{\zeta-pj(k-1), (p-1)j(k-1), 1} \delta \\ &+ \dots + c_{\zeta-pj(k-1), (p-1)j(k-1), p-1} \delta^{p-1}, \end{aligned}$$

где $c_{\zeta-pj(k-1), (p-1)j(k-1), p-1} \neq 0$, тогда и только тогда, когда $\zeta = j(k-1) = j(0) \pmod{p}$.

По лемме 5, i) выполняется $\binom{z_{k-1}, u}{m} \delta_q \big|_{\mathbb{F}_p(t)} = c_{m, q, 1} \delta + \dots + c_{m, q, p-1} \delta^{p-1}$ для $(p-1)j(k-1) < q < (p-1)j(k-1) + d(u, a) - j(0)$, и по лемме 13 $c_{m, q, p-1} = 0$, а также $\binom{z_{k-1}, u}{d(u, t)-j(k-1)} \delta_{\zeta-d(u, t)} \big|_{\mathbb{F}_p(t)} = c_{d(u, t)-j(k-1), \zeta-d(u, t), 1} \delta + \dots + c_{d(u, t)-j(k-1), \zeta-d(u, t), p-1} \delta^{p-1}$ с $c_{d(u, t)-j(k-1), \zeta-d(u, t), p-1} \neq 0$, если $\zeta - d(u, t) = j(0)$.

Итак, получается следующая картина: $\binom{z_{k-1}, u}{-j(k-1)} \delta_{\zeta}(t^p) \neq 0$, только если $\zeta = j(0) \pmod{p}$ или если $\zeta = j(k) + d(u, a) - j(0)$. В последнем случае

$$\binom{z_{k-1}, u}{-j(k-1)} \delta_{\zeta}(t^p) = -\binom{z_{k-1}, u}{-j(k-1)} \delta_{d(u, t)}(t^p) c_{d(u, t)-j(k-1), j(k)-j(k-1), p-1},$$

где $c_{d(u, t)-j(k-1), j(k)-j(k-1), p-1}$ может быть вычислено с помощью леммы 13.

Теперь покажем существование такого параметра z_k , что $\binom{z_k, u}{-j(k-1)} \delta_{\zeta}(t^p) = 0$ для $j(k) < \zeta < j(k) + d(u, a) - j(0)$. По лемме 3, ii) существует такая замена параметров $z_{k-1} \mapsto z' = z_{k-1} + bz_{k-1}^{p+1}$, что $\binom{z', u}{-j(k-1)} \delta_{j(k)+p}(t^p) = 0$. Достаточно доказать, что любая такая замена, как в лемме 3, ii), при $p \mid q$ меняет только значения отображений $_{-j(k-1)} \delta_{\zeta}$, где $\zeta = j(0) \pmod{p}$. Действительно, если это так, мы можем сделать несколько замен и “убить” все ненулевые отображения $\binom{z_{k-1}, u}{-j(k-1)} \delta_{\zeta}$ при $j(k) < \zeta < j(k) + d(u, a) - j(0)$ ввиду того, что они все являются дифференцированиями и потому полностью определяются их значениями в t^p .

Для доказательства этого факта используем вычисления из доказательства п. ii) леммы 3. Так как $d(u, a) - j(0) \leq j(0)$, легко видеть, что для замены $z \mapsto z' = z + bz^{kp+1}$, $p > 2$, там выполняется

$$\begin{aligned} z'^{-j(k-1)} t^p z'^{j(k-1)} &= t^p + \binom{z, u}{-j(k-1)} \delta_{j(k)}(t^p) z^{j(k)} \\ &+ \dots + \binom{z, u}{-j(k-1)} \delta_{j(k)+j(0)}(t^p) z^{j(k)+j(0)} + \dots \end{aligned}$$

Так как $z' = z + bz^{kp+1}$, каждый элемент z^l может быть записан в виде ряда по z' , где всякая степень равна l по модулю p . Следовательно, эта замена коснется только отображений с правыми индексами, равными $j(k)$ по модулю p . Так как $\binom{z_{k-1}, u}{-j(k-1)} \delta_{\zeta}(t^p) \neq 0$, только если $\zeta = j(0) \pmod{p}$ при $\zeta < j(k) + d(u, a) - j(0)$, наше утверждение доказано.

Итак, существует такой параметр z_k , что $\binom{z_k, u}{-j(k-1)} \delta_{\zeta}(t^p) \neq 0$, только если $\zeta = j(k) + d(u, a) - j(0)$ или $\zeta = j(k)$. Так как z_k был построен как последовательность замен таких, как в лемме 3, ii), то $\binom{z_k}{(z_k)} \alpha = \binom{z_{k-1}}{(z_{k-1})} \alpha$ и $\binom{z_k, u}{(z_k)} \delta_{j(q)} = \binom{z_{k-1}, u}{(z_{k-1})} \delta_{j(q)}$ для всех $q \leq k$.

Наконец, докажем, что $\binom{z_k, u}{-j(k)} \delta_\zeta(t^p) \neq 0$, только если $\zeta = j(k) + d(u, a) - j(0)$ или $\zeta = j(k)$. Но это следует прямо из определения этих отображений, так как $j(k) = j(k-1) \pmod{p}$, $d(u, a) - j(0) \leq j(0)$ и $\text{char } D > 2$. В частности,

$$\begin{aligned} \binom{z_k, u}{-j(k)} \delta_{j(k)}(t^p) &= \binom{z_k, u}{-j(k-1)} \delta_{j(k)}(t^p), \\ \binom{z_k, u}{-j(k)} \delta_{j(k)+d(u, a)-j(0)}(t^p) &= \binom{z_k, u}{-j(k-1)} \delta_{j(k)+d(u, a)-j(0)}(t^p). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Теперь мы можем приступить к доказательству следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть D – p -алгебра с делением характеристики $\text{char } D = p > 2$ с центром $Z(D) = F$. Предположим, что $Z(\overline{D}) = \overline{D}$ и $\overline{D}/\overline{F}$ – простое чисто несепарабельное расширение, $\overline{D} = \overline{F}(a)$. Предположим, что полулокальная высота $i(u)$, не зависящая в этом случае от вложения u , не делится на p .

Тогда $d_D(a) > i(u)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По лемме 12, ii) $[\overline{D} : \overline{F}] = [\Gamma_D : \Gamma_F]$. Следовательно, поле $F(\tilde{a})$, где $\tilde{a}$ – подъем a , есть максимальное “неразветвленное” подполе и D – расщепимая алгебра с делением. Очевидно, что $\alpha = \text{id}$.

Так как $\binom{z, u}{i(u, z)} \delta_{i(u, z)}$ – дифференцирование и $\overline{D}/\overline{F}$ – простое расширение, то $\binom{z, u}{i(u, z)} \delta_{i(u, z)}$ полностью определяется значением в a . Поэтому по лемме 3 $i(u, z)$ не зависит от z , и $i(u, z) = i(u)$. Следовательно, $i(u) = w(zu(a)z^{-1} - u(a))$ и $i(u)$ полностью определяется подъемом $u(a)$. С другой стороны, любой подъем $\tilde{a}$ элемента a определяет согласно лемме 9 вложение $\tilde{u}$, и по лемме 10 $i(\tilde{a})$ не зависит от $\tilde{a}$. Следовательно, $i(u)$ не зависит от u .

Идея доказательства теперь заключается в следующем: мы рассмотрим линейные пространства, являющиеся образами отображений $\binom{z, u}{j(k)} \delta_{j(k)}|_{\overline{F}(a^{p^k})}$ в $\overline{D}$, где $j(k)$ были определены в лемме 14 и z, u фиксированы. Покажем, что любое такое пространство имеет нулевое пересечение с остальными, если $d_D(a) \leq i(u)$. Затем покажем, что этот факт противоречит тому, что $u(a)$ порождает конечномерное пространство над F .

Итак, предположим $d_D(a) \leq i(u)$. Для вычисления пространств

$$\binom{z, u}{j(k)} \delta_{j(k)}(\overline{F}(a^{p^k})) \in \overline{D}$$

воспользуемся леммами 8, 13 и 14. Фиксируем параметр z , определенный в лемме 13. Согласно леммам 9, 10, iii) можно найти такой примитивный элемент $\overline{u} \in \overline{D}$ расширения $\overline{D}/\overline{F}$, что $\binom{z, u}{j(0)} \delta_{j(0)}(\overline{u}) = 1$, где u – вложение, определенное леммой 9 для некоторого подъема u элемента $\overline{u}$. Используя лемму 3, ii), можно найти такое вложение u , что $\binom{z, u}{d(u, \overline{u})} \delta_{d(u, \overline{u})}(\overline{u}) \notin \binom{z, u}{j(0)} \delta_{j(0)}(\overline{D})$. Зафиксируем это вложение. Непосредственно из лемм 3, 10 следует, что $d(u, \overline{u}) = d_D(\overline{u}) = d_D(a)$. Таким образом, без ограничения общности можно положить $a = \overline{u}$.

Положим

$$\begin{aligned} J(k) &:= \binom{z, u}{j(k)} \delta_{j(k)}(a^{p^k}), & A(k) &:= \binom{z, u}{j(k)} \delta_{j(k)}(\overline{F}(a^{p^k})), \\ A'(k) &:= \overline{F}(a^{p^{k+1}}) \cdot a^{p^k(p-1)} J(k). \end{aligned}$$

Имеем

$$A(k) = \bigoplus_{q=0}^{p-2} \overline{F}(a^{p^{k+1}}) \cdot a^{p^k q} J(k), \quad \overline{D} \cdot J(k) = A(k) \oplus A'(k)$$

как $\mathbb{F}_p$ -линейные пространства.

Из леммы 8 следует, что

$$\begin{aligned} (z, u) \delta_{j(k)}(a^{p^k}) &= (z_k, u) \delta_{j(k)}(a^{p^k}) \\ &= q_{-j(k-1)}^{(z_{k-1}, u)} \delta_{d(u, a^{p^{k-1}})}(a^{p^{k-1}}) c_{d(u, a^{p^{k-1}}) - j(k-1), (p-1)j(k-1), p-1}, \end{aligned}$$

где $q \in \mathbb{F}_p^*$, z_k определялись в лемме 13, $c_{d(u, a^{p^{k-1}}) - j(k-1), (p-1)j(k-1), p-1}$ вычислялся в лемме 5, i) и он не равен нулю согласно лемме 5, ii), а $_{-j(k-1)}^{(z_{k-1}, u)} \delta_{d(u, a^{p^{k-1}})}(a^{p^{k-1}})$ вычислялся в лемме 14. По последней лемме имеем

$$_{-j(k-1)}^{(z_{k-1}, u)} \delta_{d(u, a^{p^{k-1}})}(a^{p^{k-1}}) = -j(k-1) (z, u) \delta_{d(u, a^{p^{k-1}})}(a^{p^{k-1}}).$$

Собирая все эти вычисления вместе и используя индукцию, получаем, что $J(k) = q_k J(k-1)^p J(1) = \tilde{q}_k J(1)^{p^{k-1} + p^{k-2} + \dots + 1}$ для $k \geq 1$, где $q_k \in \mathbb{F}_p$.

Следовательно, имеет место следующая фильтрация:

$$\overline{F} \subset \dots \subset \overline{F}(a^{p^{k+1}}) J(k+1) \subset \overline{F}(a^{p^k}) J(k) \subset \dots \subset \overline{D}$$

и для любого $k \geq 1$ имеем $\overline{F}(a^{p^k}) \cdot J(k) \subset A'(k-1)$. Поэтому $A(k) \cap A(k_1) = \{0\}$, если $k \neq k_1$.

Рассмотрим теперь элемент $b \in F$ такой, что $\bar{b} = a^{p^l}$ для некоторого $l > 0$. Будем считать l минимальным возможным. Такое число существует, потому что D – конечномерная алгебра с делением над F . Пусть $b = u(a^{p^l}) + b_1 z + \dots$, где $b_k \in u(\overline{D})$. Пусть $I := \min_k \{w(z b_k z^{k-1} - b_k z^k)\}$ (предполагаем здесь, что $b_0 = u(a^{p^l})$). Заметим, что $I < \infty$, так как по лемме 14 $j(l) < \infty$, т.е. $_{j(l)}^{(z, u)} \delta_{j(l)}(a^{p^l}) \neq 0$. Тогда выполняется

$$z b z^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z b_k z^{k-1} = b + \sum_r (z, u) \delta_{j(r)}(b_{q_r}) z^I + \dots = b,$$

где $b_{q_r} \in \overline{F}(a^{p^r})$ и $b_{q_r} \notin \overline{F}(a^{p^{r+1}})$. Итак, $\sum_r (z, u) \delta_{j(r)}(b_{q_r}) = 0$, но этого не может быть, так как $A(k) \cap A(k_1) = \{0\}$, если $k \neq k_1$. Противоречие.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Было бы интересно получить ответы на следующие вопросы.

i) Пусть D – алгебра с делением, как в теореме 4. Существует ли такая пара (z, u) , что все ненулевые отображения $_{j(q)}^{(z, u)} \delta_q$ удовлетворяют условию $i(u) \mid q$? Если да, то должна существовать подалгебра $D' \subset D$ уровня 1 с $[D : D'] < \infty$ (см. замечание перед леммой 8). Тогда можно было бы свести изучение алгебры D к изучению алгебры уровня 1.

ii) Верно ли, что D – хорошо расщепимая алгебра, т.е. циклическая? Вероятно, технические результаты из этой статьи помогут дать ответ на этот вопрос, по крайней мере, в случае уровня 1.

Список литературы

1. *Jacob B., Wadsworth A.* Division algebras over Henselian fields // J. Algebra. 1990. V. 128. P. 126–179.
2. *Платонов В. П., Янчевский В. И.* Конечномерные алгебры с делением // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фундамент. направления. Т. 77. М.: ВИНТИ, 1991. С. 144–262.
3. *Saltman D. J.* Division algebras over discrete valued fields // Comm. Algebra 1980. V. 8. P. 1749–1774.
4. *Tignol J.-P.* Algebres a division et extensions de corps sauvagement ramifiees de degre premier // J. Reine Angew. Math. 1990. V. 404. P. 1–38.
5. *Schilling O. F. S.* The theory of valuations. Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1950. (Math. Surveys Monogr. V. 4.)
6. *Жеглов А. Б.* О классификации двумерных локальных тел // Изв. РАН. Сер. матем. 2001. Т. 65. №1. С. 25–60.
7. *Azumaya G.* On maximally central algebras // Nagoya J. Math. 1951. V. 2. P. 119–150.
8. *Cohen I.* On the structure and ideal theory of complete local rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1946. V. 59. P. 54–106.
9. *Aravire R., Jacob B.* p -algebras over maximally complete fields // K-theory and algebraic geometry: connections with quadratic forms and division algebras. Summer Research Institute on quadratic forms and division algebras, July 6–24, 1992, University of California, Santa Barbara, CA (USA). / ed. B. Jacob et al. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. P. 27–49. (Proc. Symp. Pure Math. V. 58. Part 2.)
10. *de Jong A. J.* The period-index problem for the Brauer group of an algebraic surface // Preprint; <http://www-math.mit.edu/~dejong>.
11. *Albert A. A.* Simple algebras of degree p^e over a centrum of characteristic p // Trans. Amer. Math. Soc. 1936. V. 40. P. 112–126.
12. *Pierce R. S.* Associative algebras. New York: Springer-Verlag, 1982.
13. *Morandi P.* Henselisation of a valued division algebra // J. Algebra. 1989. V. 122. P. 232–243.

Университет Гумбольдта, Берлин, Германия
E-mail: azheglov@mathematik.hu-berlin.de

Поступила в редакцию
 20.05.2003