Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Николаенко, Топологическая классификация систем Чаплыгина в динамике твердого тела в жидкости, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 2, 75–122

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8251>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 13:06:54

УДК 517.938.5

С. С. Николаенко

Топологическая классификация систем Чаплыгина в динамике твердого тела в жидкости

Работа посвящена топологическому анализу интегрируемого случая Чаплыгина в динамике твердого тела в жидкости. На основе теории Фоменко–Цишанга получен полный перечень топологических типов систем Чаплыгина в зависимости от уровня энергии. Также дается эффективное описание топологии слоения Лиувилля в терминах естественных координат, доставляющее прямой способ вычисления топологических инвариантов. Оказалось, что системы Чаплыгина на всех неособых уровнях энергии лиувиллево эквивалентны известному случаю Эйлера в динамике твердого тела с неподвижной точкой.

Библиография: 23 названия.

Ключевые слова: уравнения Кирхгофа, случай Чаплыгина, интегрируемая гамильтонова система, слоение Лиувилля, инвариант Фоменко–Цишанга.

DOI: 10.4213/sm8251

§ 1. Введение

Рассмотрим уравнения Кирхгофа

$$\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{s}} + \mathbf{r} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}}, \quad \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \times \frac{\partial H}{\partial \mathbf{s}}, \quad (1.1)$$

описывающие движение твердого тела в безграничном объеме идеальной несжимаемой жидкости. При этом предполагаем, что тело движется по инерции, жидкость находится в состоянии покоя на бесконечности, а ее течение является безвихревым. Векторы $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3)$, $\mathbf{r} = (r_1, r_2, r_3)$ в уравнениях (1.1) носят название импульсивного момента и импульсивной силы, а функция H имеет смысл полной энергии.

Систему (1.1) можно рассматривать как гамильтонову (с гамильтонианом H) на коалгебре $e(3)^*$, на которой имеется структура скобки Ли–Пуассона. Для этого нужно взять $\mathbf{s}$, $\mathbf{r}$ в качестве естественных координат на $e(3)^*$. Тогда базисные скобки запишутся следующим образом:

$$\{s_i, s_j\} = -\varepsilon_{ijk} s_k, \quad \{s_i, r_j\} = -\varepsilon_{ijk} r_k, \quad \{r_i, r_j\} = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-01-00664а), Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1410.2012.1) и гранта Правительства РФ (договор № 11.G34.31.0054).

Скобка на $e(3)^*$ вырождена и имеет две функции Казимира

$$f_1 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2, \quad f_2 = s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3,$$

являющиеся, таким образом, первыми интегралами системы (1.1) для любого вида гамильтониана H . Они называются интегралами импульсивной силы и импульсивного момента. На симплектическом листе $M_{a,g}^4 = \{f_1 = a^2, f_2 = g\}$ скобка Ли–Пуассона задает невырожденную симплектическую структуру, а система (1.1) имеет две степени свободы. Следовательно, для ее интегрируемости по Лиувиллю необходимо иметь дополнительный первый интеграл, почти всюду функционально независимый с H .

Предположим, что нам удалось найти такой интеграл K . Тогда на фазовом пространстве $M_{a,g}^4$ (диффеоморфном T^*S^2) возникает слоение Лиувилля, слоями которого служат связные компоненты совместных поверхностей уровня $\{H = h, K = k\}$. Известная теорема Лиувилля утверждает, что в компактном случае почти все слои являются двумерными торами (торами Лиувилля), в окрестности которых слоение тривиально. Имеются также особые слои, которые можно понимать как бифуркации (перестройки) лиувиллевых торов.

В нерезонансном случае слоение Лиувилля является инвариантом гамильтоновой системы в том смысле, что определяется только гамильтоновым потоком $\text{sgrad } H$ и не зависит от конкретного выбора дополнительного интеграла. Поэтому возникает естественная задача описания топологии этого слоения. Для этого удобно рассмотреть отображение момента $F = (H, K): M_{a,g}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Пусть Z – множество его критических точек. Их образ $\Sigma = F(Z)$ называется *бифуркационной диаграммой*. Как правило, Σ состоит из набора гладких дуг, разбивающих образ отображения момента на плоскости $\mathbb{R}^2(H, K)$ на несколько областей. Эти области будем называть *камерами*. Прообразы точек камер состоят из некоторого числа торов Лиувилля, постоянного в пределах одной камеры. Прообразами точек из Σ являются особые слои.

Нас будет интересовать топология слоения Лиувилля на неособых изокэнергетических поверхностях $Q^3 = \{H = h\}$ (т.е. таких, что $dH|_{Q^3} \neq 0$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Две интегрируемые гамильтоновы системы с двумя степенями свободы, рассматриваемые на изокэнергетических поверхностях Q_1^3 и Q_2^3 , будем называть *лиувиллево эквивалентными*, если существует диффеоморфизм Q_1^3 на Q_2^3 , переводящий слоение Лиувилля первой системы в слоение Лиувилля второй системы и, кроме того, сохраняющий ориентацию поверхностей Q_1^3 , Q_2^3 и ориентацию замкнутых критических траекторий.

Теория топологической классификации интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы была создана А. Т. Фоменко и развита им совместно с другими авторами (в частности, Х. Цишангом, А. В. Болсиновым, А. А. Ошемковым) в [1]–[13] и других работах. В [1], [2] построен полный инвариант лиувиллевой эквивалентности на изокэнергетической поверхности, называемый *меченой молекулой*, или *инвариантом Фоменко–Цишанга*.

Пусть Q^3 – неособая связная компактная изоэнергетическая поверхность, и пусть дополнительный интеграл K является функцией Ботта на ней, т.е. множество критических точек функции K на Q^3 состоит из несвязного объединения невырожденных критических подмногообразий (в типичных случаях такими подмногообразиями являются критические окружности). Меченая молекула, отвечающая поверхности Q^3 , представляет собой граф, являющийся базой слоения Лиувилля на Q^3 . Ребра этого графа соответствуют однопараметрическим семействам торов Лиувилля, а каждой вершине сопоставлен 3-атом – инвариант лиувиллева слоения в окрестности особого слоя. 3-атом имеет структуру расслоения Зейферта над 2-мерной поверхностью с краем (2-атомом), причем все особые слои этого расслоения (если таковые существуют) имеют тип $(2, 1)$. Граница 3-атома состоит из нескольких торов, каждому из которых ставится в соответствие ребро, выходящее из данной вершины-атома.

Кроме этого, для полного описания структуры лиувиллева слоения на Q^3 нужно указать, каким образом отдельные атомы “склеиваются” между собой, т.е. задать диффеоморфизмы, отождествляющие пары граничных торов атомов. Каждый такой диффеоморфизм однозначно с точностью до изотопии определяется изоморфизмом фундаментальных групп склеиваемых торов. Если на торах фиксированы базисные циклы, то этот изоморфизм, в свою очередь, задается целочисленной матрицей с определителем, равным -1 (будем называть ее матрицей склейки). При этом предполагается, что на каждом ребре фиксирована некоторая ориентация. Таким образом, для завершения построения меченой молекулы нужно снабдить граф с вершинами-атомами некоторыми числовыми метками r, ε, n , определяемыми по матрицам склейки. По этим меткам матрицы склейки восстанавливаются однозначно с точностью до допустимых замен координат (см. [14; т. 1, гл. 4]).

Дадим определение меток r, ε, n . Пусть для каждого ребра e_i известна матрица склейки $C_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Рациональной меткой r_i на ребре e_i называется*

$$r_i = \begin{cases} \frac{\alpha_i}{\beta_i} \bmod 1 \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, & \text{если } \beta_i \neq 0, \\ \infty, & \text{если } \beta_i = 0. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Целочисленной меткой ε_i на ребре e_i называется*

$$\varepsilon_i = \begin{cases} \text{sign } \beta_i, & \text{если } \beta_i \neq 0, \\ \text{sign } \alpha_i, & \text{если } \beta_i = 0. \end{cases}$$

Определим теперь метку n_k . Если разрезать молекулу по всем ребрам с конечной r -меткой, то она распадется на несколько связных кусков. Назовем *семьями* те из них, которые не содержат атомов A . Рассмотрим теперь отдельную семью. Все ребра, имеющие в ней хотя бы одну вершину, можно разделить на три класса (с учетом имеющейся на них ориентации): входящие, выходящие и внутренние.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Сопоставим каждому ребру e_i данной семьи целое число θ_i по следующему правилу:

$$\theta_i = \begin{cases} \left[\frac{\alpha_i}{\beta_i} \right], & \text{если } e_i - \text{выходящее ребро,} \\ \left[-\frac{\delta_i}{\beta_i} \right], & \text{если } e_i - \text{входящее ребро,} \\ \left[-\frac{\gamma_i}{\alpha_i} \right], & \text{если } e_i - \text{внутреннее ребро.} \end{cases}$$

Метка n_k , отвечающая данной семье, определяется как сумма чисел θ_i по всем ребрам этой семьи.

Таким образом, меченая молекула представляет собой граф с вершинами-атомами, снабженный числовыми метками r, ε, n .

ТЕОРЕМА 1 (А. Т. Фоменко, Х. Цишанг). *Две гамильтоновы системы с двумя степенями свободы, рассматриваемые на неособых компактных связных изоэнергетических поверхностях и интегрируемые с помощью боттовских интегралов, лиувиллево эквивалентны тогда и только тогда, когда их меченые молекулы совпадают.*

Основной целью настоящей работы является вычисление меченых молекул для случая Чаплыгина интегрируемости уравнений Кирхгофа (1.1). При этом молекулы (без меток) фактически были получены в работе [15]. Таким образом, задача сводится к отысканию меток. Общего алгоритма вычисления меток не существует, однако имеются некоторые приемы, во многих случаях облегчающие их нахождение.

В § 2 даются формулировки основных результатов работы. В § 3 приводится короткое доказательство основной теоремы, использующее некоторые стандартные методы вычисления меток (метод круговых молекул [16], [10], формула Топалова [17] и др.). Параграф 4 посвящен эффективному описанию топологии слоения Лиувилля случая Чаплыгина с точки зрения естественных координат s_i, r_i в $\mathbb{R}^6$. Как следствие, получено альтернативное доказательство основного результата. Наконец, в § 5 на примере данной задачи демонстрируется применение разделения переменных к вычислению меток.

Автор выражает глубокую благодарность А. Т. Фоменко, А. А. Ошемкову и А. М. Изосимову за ценные обсуждения и постоянное внимание к работе.

§ 2. Основные результаты

В [18] С. А. Чаплыгиным найден случай интегрируемости уравнений (1.1) на $M_{a,0}^4$ (т.е. при нулевой постоянной интеграла импульсивного момента), в котором

$$H = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2) + \frac{c}{2}(r_1^2 - r_2^2).$$

Дополнительный интеграл при этом является полиномом четвертой степени

$$K = (s_1^2 - s_2^2 + cr_3^2)^2 + 4s_1^2 s_2^2.$$

В [18] также выполнено разделение переменных, сводящее задачу к эллиптическим квадратурам.

В [15] исследована фазовая топология этого интегрируемого случая, в частности, построены бифуркационные диаграммы, описаны бифуркации лиувилевых торов.

Далее будем рассматривать случай $c \neq 0$. Более того, можно считать $a = 1$ и $c = 1$. Этого можно добиться заменой $\mathbf{s} = a\sqrt{|c|}\tilde{\mathbf{s}}$, $\mathbf{r} = a\tilde{\mathbf{r}}$, приводящей к умножению первых интегралов на константу и потому не влияющей на топологию слоения Лиувилля. Таким образом, получим систему без параметров.

ТЕОРЕМА 2 (О. Е. Орел, П. Е. Рябов; см. [15]). *Бифуркационная диаграмма отображения момента $F = (H, K)$ для случая Чаплыгина имеет вид, изображенный на рис. 1, и состоит из трех кривых*

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \left\{ k = 0, h \geq -\frac{1}{2} \right\} = \Sigma_1^{(1)} \cup \Sigma_1^{(2)}, \\ \Sigma_2 &= \{ k = (2h - 1)^2, h \geq 0 \} = \Sigma_2^{(1)} \cup \Sigma_2^{(2)}, \\ \Sigma_3 &= \left\{ k = (2h + 1)^2, h \geq -\frac{1}{2} \right\} = \Sigma_3^{(1)} \cup \Sigma_3^{(2)}.\end{aligned}$$

Кривым Σ_1, Σ_3 соответствуют бифуркации типа атома A , кривой Σ_2 – типа атома C_2 . Множество регулярных значений отображения момента состоит из трех камер I, II, III, в прообразе каждой точки которых – два тора Лиувилля. Изоэнергетические поверхности $Q^3 = \{H = h\}$ имеют следующий топологический тип:

- $\emptyset$ при $h < -1/2$;
- $2S^3$ при $h \in (-1/2, 0)$;
- $S^1 \times S^2$ при $h \in (0, 1/2)$;
- $\mathbb{R}P^3$ при $h > 1/2$.

Теорема 2 позволяет выделить три зоны энергий (1) = $(-1/2, 0)$, (2) = $(0, 1/2)$, (3) = $(1/2, +\infty)$ и предъявить для них молекулы без меток W_1, W_2, W_3 (рис. 2). В зоне (1) поверхность Q^3 состоит из двух компонент (являющихся 3-сферами), при этом молекула W_1 отвечает каждой компоненте.

С формальной точки зрения, прежде чем применять к рассматриваемому интегрируемому случаю описанную выше теорию топологической классификации, нужно убедиться в существовании боттовского интеграла на всех неособых изоэнергетических поверхностях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. 1. *В случае Чаплыгина на фазовом многообразии $M_{1,0}^4$ имеется шесть критических точек функции H*

$$P_1^\pm = (0, 0, 0, \pm 1, 0, 0), \quad P_2^\pm = (0, 0, 0, 0, \pm 1, 0), \quad P_3^\pm = (0, 0, 0, 0, 0, \pm 1),$$

Рис. 1

Рис. 2

которые лежат в прообразе точек z_1, z_2, z_3 бифуркационной диаграммы. В точках $P_1^\pm, P_2^\pm, P_3^\pm$ ранг дифференциала dF отображения момента равен нулю. Если взять в качестве дополнительного интеграла функцию $K' = \sqrt{K + (2H + f_1)^2}$, то точки $P_1^\pm$ будут вырожденными, точки $P_2^\pm$ будут иметь тип центр-центр, а точки $P_3^\pm$ – тип центр-седло.

2. На неособых уровнях энергии $Q^3 = \{H = h\}$ интеграл K' является функцией Ботта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1. Точка многообразия $M^4_{1,0}$ является критической для функции H , если в ней выполнено соотношение

$$\text{grad } H = \lambda_1 \text{grad } f_1 + \lambda_2 \text{grad } f_2. \quad (2.1)$$

Отсюда легко найти указанные выше шесть точек. То, что в этих точках ранг отображения момента равен нулю, следует из аналогичного соотношения для K

$$\text{grad } K = \mu_1 \text{grad } f_1 + \mu_2 \text{grad } f_2.$$

Рассмотрим точки $P_1^\pm$. Их невырожденность означала бы, что подалгебра в $\text{sp}(4, \mathbb{R})$, порождаемая линейными частями $A_H, A_{K'}$ векторных полей $\text{sgrad } H, \text{sgrad } K'$ в точках $P_1^\pm$, является картановской. Иными словами, операторы $A_H, A_{K'}$, рассматриваемые на $T_{P_1^\pm} M_{1,0}^4$, были бы линейно независимы, и среди их линейных комбинаций нашелся бы оператор с различными собственными значениями. Однако непосредственное вычисление показывает, что операторы $A_H, A_{K'}$, записанные в координатах $(\mathbf{s}, \mathbf{r})$, имеют в точках $P_1^\pm$ следующий вид:

$$A_H = \frac{1}{2} A_{K'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mp 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mp 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, A_H и $A_{K'}$ линейно зависимы и особые точки $P_1^\pm$ являются вырожденными.

В точках $P_2^\pm$ имеем

$$A_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mp 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{K'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mp 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mp 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что подалгебра в $\text{sp}(4, \mathbb{R})$, порождаемая операторами $A_H, A_{K'}$, состоит из всевозможных матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -A \\ 0 & 0 & B & 0 \\ 0 & -B & 0 & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и является картановской, а точки $P_2^\pm$ имеют тип центр-центр.

Аналогично устанавливаются невырожденность и тип точек $P_3^\pm$.

2. Докажем боттовость функции K' на неособой изоэнергетической поверхности $Q^3 = \{H = h\}$, $h \neq 0, \pm 1/2$. Пусть P – точка критической окружности, содержащейся в Q^3 . Тогда в точке P векторы $\text{sgrad } H, \text{sgrad } K'$ линейно зависимы,

$$\lambda \text{sgrad } H + \mu \text{sgrad } K' = 0.$$

Данная критическая окружность будет невырожденной, если ранг оператора $\lambda A_H + \mu A_{K'}$, ограниченного на касательное пространство к Q^3 в точке P , равен 2.

Проверим невырожденность критической окружности атома A , отвечающего кривой Σ_3 . Возьмем точку $P = (\sqrt{2h+1}, 0, 0, 0, 1, 0)$. В этой точке имеем $\text{sgrad } K' = 2\sqrt{2} \text{sgrad } H = (0, 0, 0, 0, 0, 2\sqrt{2}\sqrt{2h+1})$,

$$A_{K'} - 2\sqrt{2}A_H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2}\sqrt{2h+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве базиса в $T_P Q^3$ возьмем векторы $\frac{\partial}{\partial s_3}$, $\frac{\partial}{\partial r_3}$, $\sqrt{2h+1} \frac{\partial}{\partial s_2} - \frac{\partial}{\partial r_1}$. Получим

$$(A_{K'} - 2\sqrt{2}A_H)|_{T_P Q^3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, рассматриваемая критическая окружность невырожденная минимаксная.

Аналогично проверяется невырожденность критических окружностей, отвечающих кривым Σ_2 , Σ_3 бифуркационной диаграммы.

Предложение 1 доказано.

Сформулируем теперь основной результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА 3. Меченые молекулы W_1^* , W_2^* , W_3^* систем типа Чаплыгина, отвечающие зонам энергии (1), (2), (3), имеют вид, показанный на рис. 3. При этом молекула W_1^* отвечает обоим изоэнергетическим 3-сферам.

Рис. 3

Напомним, что молекулы с метками W_1^* , W_2^* , W_3^* описывают слоение Ливилля соответственно на S^3 , $S^1 \times S^2$, $\mathbb{R}P^3$. На S^3 это слоение соответствует расслоению Хопфа.

В динамике твердого тела с неподвижной точкой хорошо известен случай Эйлера, в котором также имеется три зоны неособых значений энергии H . Если сопоставить этим зонам номера 1, 2, 3 в порядке возрастания энергии, то зонам с одинаковыми номерами в случае Эйлера и в случае Чаплыгина будут отвечать одни и те же меченые молекулы.

СЛЕДСТВИЕ 1. На уровнях энергии с одинаковыми номерами системы типа Чаплыгина в динамике твердого тела в жидкости лиувиллево эквивалентны системам типа Эйлера в динамике твердого тела с неподвижной точкой.

В [19] А. В. Болсиновым и А. Т. Фоменко доказана лиувиллева и даже непрерывная траекторная эквивалентность случая Эйлера (при нулевой постоянной площадей) еще одной классической интегрируемой системе, а именно задаче Якоби о геодезических на 2-мерном эллипсоиде в $\mathbb{R}^3$. Таким образом, случай Чаплыгина лиувиллево эквивалентен (при больших энергиях) также геодезическому потоку эллипсоида.

§ 3. Доказательство теоремы 3

Торы Лиувилля в прообразах камер I, II, III будем называть соответственно I-торами, II-торами и III-торами. Напомним, что камеры I, II, III в образе отображения момента на плоскости $\mathbb{R}^2(H, K)$ задаются соответственно следующими тремя условиями:

$$h > \frac{1}{2}, \quad 0 < k < (2h - 1)^2; \quad (3.1)$$

$$h > 0, \quad (2h - 1)^2 < k < (2h + 1)^2; \quad (3.2)$$

$$-\frac{1}{2} < h < \frac{1}{2}, \quad 0 < k < \min\{(2h - 1)^2, (2h + 1)^2\}. \quad (3.3)$$

Ясно, что два тора Лиувилля в прообразе регулярного значения (h, k) отображения момента выделяются в $\mathbb{R}^6(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ четырьмя уравнениями

$$r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1, \quad (3.4)$$

$$s_1 r_1 + s_2 r_2 + s_3 r_3 = 0, \quad (3.5)$$

$$s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2 + r_1^2 - r_2^2 = 2h, \quad (3.6)$$

$$(s_1^2 - s_2^2 + r_3^2)^2 + 4s_1^2 s_2^2 = k. \quad (3.7)$$

ЛЕММА 1. Для точки $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$ I-тора выполнены неравенства а) $r_1^2 + r_2^2 \neq 0$, б) $s_3 \neq 0$, в) $s_1^2 + s_2^2 \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Предположим, что $r_1 = r_2 = 0$. Тогда из (3.5) и (3.4) $s_3 = 0$, $r_3^2 = 1$ и $k = (s_1^2 + s_2^2)^2 + 2(s_1^2 - s_2^2) + 1 \geq (s_1^2 + s_2^2 - 1)^2 = (2h - 1)^2$, что противоречит (3.1).

б) Пусть $s_3 = 0$. Тогда из (3.5) $s_1 r_1 + s_2 r_2 = 0$. Так как в силу а) $r_1^2 + r_2^2 \neq 0$, то найдется такое число j , что $s_1 = j r_2$, $s_2 = -j r_1$. С учетом (3.1), (3.6), (3.7),

(3.4) будем иметь

$$\begin{aligned} 0 < (2h - 1)^2 - k &= (s_1^2 + s_2^2 - 2r_2^2 - r_3^2)^2 - ((s_1^2 + s_2^2)^2 + 2(s_1^2 - s_2^2)r_3^2 + r_3^4) \\ &= -4s_1^2r_3^2 + 4r_2^2(r_2^2 + r_3^2 - s_1^2 - s_2^2) = 4r_2^2(r_2^2 + r_3^2 - j^2). \end{aligned}$$

Отсюда получаем $j^2 < r_2^2 + r_3^2$ и

$$2h = j^2r_2^2 + j^2r_1^2 + r_1^2 - r_2^2 < (r_2^2 + r_3^2)(r_1^2 + r_2^2) + r_1^2 - r_2^2 = r_1^2(1 + r_3^2) \leq 1,$$

что противоречит (3.1).

в) Если $s_1 = s_2 = 0$, то из (3.5) и б) следует $r_3 = 0$. Но тогда $k = 0$, что снова противоречит (3.1). Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Для точки $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$ II-тора выполнены неравенства

а) $s_1 \neq 0$, б) $r_2^2 + r_3^2 \neq 0$, в) $s_2^2 + s_3^2 \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $s_1 = 0$. Тогда из (3.6), (3.7) имеем $2h - 1 = (s_2^2 - r_3^2) + 2(s_3^2 - r_2^2)$, $k = (s_2^2 - r_3^2)^2$. Из (3.2) следует $4(s_3^2 - r_2^2)(s_3^2 - r_2^2 + s_2^2 - r_3^2) = (2h - 1)^2 - k < 0$. Отсюда $(s_3^2 - r_2^2)(s_2^2 - r_3^2) < 0$ и либо $r_2^2 < s_3^2$, $s_2^2 < r_3^2$, либо $r_2^2 > s_3^2$, $s_2^2 > r_3^2$. В обоих случаях получаем противоречие с равенством $r_2^2s_2^2 = r_3^2s_3^2$, следующим из (3.5).

б) Пусть $r_2 = r_3 = 0$. Тогда из (3.5) получаем $r_1 = 0$ или $s_1 = 0$. Но первое невозможно в силу (3.4), а второе – в силу а).

в) Пусть $s_2 = s_3 = 0$. Тогда из (3.5) и а) следует $r_1 = 0$. Но в таком случае $k = (s_1^2 + r_3^2)^2 = (2h + 1)^2$, что противоречит (3.2). Лемма доказана.

ЛЕММА 3. Для точки $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$ III-тора выполнены неравенства

а) $r_2 \neq 0$, б) $r_1^2 + s_3^2 \neq 0$, в) $s_1^2 + r_3^2 \neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Предположим, что $r_2 = 0$. Тогда (3.5) дает $s_1r_1 + s_3r_3 = 0$. Поскольку в силу (3.4) $r_1^2 + r_3^2 \neq 0$, то найдется такое число j , что $s_1 = jr_3$, $s_3 = -jr_1$. Из (3.6), (3.7) имеем

$$\begin{aligned} 2h - 1 &= j^2r_3^2 + s_2^2 + 2j^2r_1^2 - r_3^2 = 2j^2 + (s_2^2 - (j^2 + 1)r_3^2), \\ k &= (j^2r_3^2 - s_2^2 + r_3^2)^2 + 4j^2r_3^2s_2^2 = (s_2^2 - (j^2 + 1)r_3^2)^2 + 4j^2r_3^2s_2^2 \end{aligned}$$

и $0 < (2h - 1)^2 - k = 4j^4 + 4j^2(s_2^2 - (j^2 + 1)r_3^2) - 4j^2r_3^2s_2^2 \leq 8j^4 + 4j^2(s_2^2 - (j^2 + 1)r_3^2) = 4j^2(2h - 1)$. Отсюда $2h - 1 > 0$, что противоречит (3.3).

б) Пусть $r_1 = s_3 = 0$. Тогда из (3.5) и а) следует $s_2 = 0$. В таком случае имеем $k = (s_1^2 + r_3^2)^2 = (2h + 1)^2$, что противоречит (3.3).

в) Аналогично, если $s_1 = r_3 = 0$, то $s_2 = 0$. Отсюда $k = 0$, что снова противоречит (3.3). Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ 2. Два тора Лиувилля в прообразе регулярного значения (h, k) отображения момента различаются соответственно камерам знаками переменных s_3 , s_1 , r_2 . Для каждой камеры, очевидно, существует инволюция, меняющая местами два тора Лиувилля в прообразе точек этой камеры.

I -торы будем называть I^+ -торами, если на них $s_3 > 0$, и I^- -торами, если на них $s_3 < 0$. Аналогично определим Π^+ -торы, Π^- -торы, Π^+ -торы и Π^- -торы. I^+ -, Π^+ - и Π^+ -торы в прообразе точки (h, k) будем обозначать через $T_{h,k}^+$, I^- -, Π^- - и Π^- -торы – через $T_{h,k}^-$.

ЛЕММА 4. *Критические окружности в прообразах дуг $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ бифуркационной диаграммы задаются следующим образом:*

$$\begin{aligned}\Sigma_1: & \left\{ s_1 = s_2 = r_3 = 0, r_1^2 + r_2^2 = 1, r_1^2 + s_3^2 = h + \frac{1}{2} \right\}, \\ \Sigma_2: & \{ s_1 = r_2 = s_3 = 0, r_1^2 + r_3^2 = 1, r_1^2 + s_2^2 = 2h \}, \\ \Sigma_3: & \{ r_1 = s_2 = s_3 = 0, r_2^2 + r_3^2 = 1, s_1^2 + r_3^2 = 2h + 1 \}.\end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим критическую окружность в прообразе точки $(h, 0)$ кривой Σ_1 ($h \neq 1/2$). Из того, что $K = 0$, следует $s_1 = 0$ и $s_2^2 = r_3^2$. Тогда из (3.6) получаем $s_3^2 - r_2^2 = h - 1/2 \neq 0$, а (3.5) дает $s_2^2 r_2^2 = s_3^2 r_3^2$. Значит, $s_2 = r_3 = 0$.

Критическую окружность в прообразе точки $(h, (2h - 1)^2)$ кривой Σ_2 можно приблизить как Π^+ -торами, так и Π^- -торами, поэтому на ней $s_1 = 0$. Тогда непременно $r_2^2 = s_3^2$ (см. доказательство п. а) леммы 2). Если $r_2^2 = s_3^2 \neq 0$, то из (3.5) $s_2^2 = r_3^2$, что вместе с $s_1 = 0$ дает $K = 0$. Значит, $r_2 = s_3 = 0$.

Для критической окружности в прообразе точки $(h, (2h + 1)^2)$ кривой Σ_3 имеем $(2h + 1)^2 = (s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2 + 2r_1^2 + r_3^2) = K \leq (s_1^2 + s_2^2 + r_3^2)^2$. Отсюда $r_1 = s_3 = s_2^2 r_3^2 = 0$ и $s_2 = 0$. Лемма доказана.

Для дальнейшего будет полезно переписать уравнения (1.1) в скалярном виде

$$\begin{aligned}\dot{s}_1 &= s_2 s_3 + r_2 r_3, & \dot{r}_1 &= -s_2 r_3 + 2s_3 r_2, \\ \dot{s}_2 &= -s_1 s_3 + r_1 r_3, & \dot{r}_2 &= s_1 r_3 - 2s_3 r_1, \\ \dot{s}_3 &= -2r_1 r_2, & \dot{r}_3 &= -s_1 r_2 + s_2 r_1.\end{aligned}\tag{3.8}$$

Приступим к вычислению меток. Для удобства будем обозначать ребра молекул так же, как и соответствующие торы Лиувилля: I^+ -ребро, I^- -ребро и т.д.

Начнем с простейшего случая молекулы W_1^* . Знания молекулы без меток и топологического типа поверхности Q^3 здесь достаточно для вычисления меток (см. [14; т. 2, предложение 1.1]). А именно, если молекула A — A задает изоэнергетическую сферу S^3 , то метка r на единственном ребре равна 0, а метку ε можно сделать равной 1 выбором подходящей ориентации на S^3 . С другой стороны, молекулу W_1^* позволяет сразу предъявить тот факт, что она является круговой молекулой особенности типа центр-центр (отвечающей точке z_2 бифуркационной диаграммы).

Рассмотрим теперь молекулу W_2^* . Пусть W' – круговая молекула особой точки z_3 бифуркационной диаграммы. Так как этой точке отвечает особенность типа центр-седло, то r -метки на всех ребрах молекулы W' равны бесконечности (см. [14; т. 1, теорема 9.2]). Отсюда немедленно следует, что $r = \infty$ на Π -ребрах

молекулы W_2^* . Для определения r -меток на III-ребрах нужно воспользоваться правилом сложения меток. Это правило позволяет вычислить r -метки на III-ребрах молекулы W_2^* , зная r -метки на III-ребрах молекулы W' и ребрах молекулы W_1^* . Так как на ребрах молекулы W' $r = \infty$, то r -метки на III-ребрах молекулы W_2^* совпадают с r -метками на ребрах молекулы W_1^* (см. [14; т. 1, следствие из предложения 1.2]) и равны нулю.

Вычислим ε -метки молекулы W_2^* . На II-ребрах (где $r = \infty$) они зависят от ориентации многообразия $Q^3 \cong S^1 \times S^2$. Поэтому, меняя при необходимости ориентацию Q^3 , можно считать их равными 1. На III-ребрах ε -метки имеют естественный топологический смысл. Равенство нулю r -меток на III-ребрах означает гомотопичность критических окружностей атомов A и C_2 . Следовательно, можно сравнить естественные ориентации этих окружностей, задаваемые гамильтоновым потоком. Если ориентации совпадают, то $\varepsilon = 1$, если противоположны, то $\varepsilon = -1$.

Предъявим изотопию критических окружностей

$$S_0^1 = \left\{ s_1 = s_2 = r_3 = 0, r_1^2 + s_3^2 = h + \frac{1}{2}, r_2 = \sqrt{1 - r_1^2} \right\},$$

$$S_{(1-2h)^2}^1 = \left\{ s_1 = r_2 = s_3 = 0, r_1^2 + s_2^2 = 2h, r_3 = \sqrt{1 - r_1^2} \right\}$$

атомов A и C_2 . Проверим, что при каждом $k \in (0, (2h - 1)^2)$ условие

$$\{s_1 = 0, r_3 > 0\} \quad (3.9)$$

высекает на соответствующем торе $T_{h,k}^+$ цикл, непрерывно зависящий от k и гомотопичный окружностям S_0^1 и $S_{(1-2h)^2}^1$. Для этого перейдем в плоскости $\mathbb{R}^2(r_1, s_3)$ к полярным координатам

$$\begin{cases} r_1 = u \cos \varphi, \\ s_3 = u \sin \varphi. \end{cases} \quad (3.10)$$

Лемма 3 гарантирует, что такая замена корректно определена на III-торах. Покажем, что условие (3.9) задает вложение $i_k: S^1(\varphi) \rightarrow T_{h,k}^+$. Уравнения (3.5)–(3.7) на образе отображения i_k переписываются следующим образом:

$$s_2 r_2 + s_3 r_3 = 0, \quad (3.11)$$

$$s_2^2 + 2s_3^2 - 2r_2^2 - r_3^2 = 2h - 1, \quad (3.12)$$

$$(r_3^2 - s_2^2)^2 = k. \quad (3.13)$$

Из (3.4), (3.10), (3.12), (3.13) находим выражения для s_2^2 , r_2^2 , r_3^2 через u , φ

$$s_2^2 = \frac{2h + 1 - \sqrt{k}}{2} - u^2, \quad (3.14)$$

$$r_2^2 = u^2 \sin^2 \varphi + \frac{1 - 2h - \sqrt{k}}{2}, \quad r_3^2 = \frac{2h + 1 + \sqrt{k}}{2} - u^2.$$

Из (3.11) получаем

$$\left(\frac{2h+1-\sqrt{k}}{2} - u^2\right) \left(u^2 \sin^2 \varphi + \frac{1-2h-\sqrt{k}}{2}\right) = u^2 \sin^2 \varphi \left(\frac{2h+1+\sqrt{k}}{2} - u^2\right),$$

откуда находим выражение для u через φ

$$u = \left(\frac{(2h+1-\sqrt{k})(1-2h-\sqrt{k})}{2(1-2h-\sqrt{k}\cos 2\varphi)}\right)^{1/2}. \quad (3.15)$$

Подставляя (3.15) в (3.14), можно однозначно выразить s_2, r_2, r_3 через φ . При этом r_2, r_3 положительны, а знак s_2 противоположен знаку s_3 . Таким образом, переменные $\mathbf{s}, \mathbf{r}$ выражаются как однозначные гладкие функции от φ и k . Следовательно, отображение i_k задает гладкое вложение окружности в тор Лиувилля и, кроме того, гладко зависит от k .

Обозначим образ i_k через S_k^1 . Несложно видеть, что $S_k^1 \rightarrow S_0^1$ при $k \rightarrow 0$. Поэтому ориентация, заданная на окружностях S_k^1 параметром φ , возникает и на S_0^1 . Чтобы сравнить ее с естественной ориентацией, задаваемой гамильтоновым потоком, рассмотрим проекцию окружности S_0^1 на плоскость $\mathbb{R}^2(r_1, s_3)$. Из (3.8) имеем $\dot{r}_1 = 2s_3r_2$. Учитывая, что $r_2 > 0$ на S_0^1 , заключаем, что ориентация, задаваемая на S_0^1 углом φ , противоположна естественной (рис. 4).

Рис. 4

Устремим теперь k к $(1-2h)^2$. Рассмотрим на окружности $S_{(1-2h)^2}^1$ четыре точки

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow (1-2h)^2} i_k(0) &= P_0 : & r_1 &= \sqrt{2h}, & s_2 &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow (1-2h)^2} i_k\left(\frac{\pi}{2}\right) &= P_{\pi/2} : & r_1 &= 0, & s_2 &= -\sqrt{2h}, \\ \lim_{k \rightarrow (1-2h)^2} i_k(\pi) &= P_\pi : & r_1 &= -\sqrt{2h}, & s_2 &= 0, \\ \lim_{k \rightarrow (1-2h)^2} i_k\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= P_{3\pi/2} : & r_1 &= 0, & s_2 &= \sqrt{2h}. \end{aligned}$$

Ориентация, заданная на S_k^1 параметром φ , переходит и на $S_{(1-2h)^2}^1$. При этой ориентации точки $P_0, P_{\pi/2}, P_\pi, P_{3\pi/2}$ обходятся именно в таком порядке. Чтобы сравнить ее с естественной ориентацией на $S_{(1-2h)^2}^1$, спроектируем $S_{(1-2h)^2}^1$ на плоскость $\mathbb{R}^2(r_1, s_2)$. Из системы (3.8) имеем $\dot{r}_1 = -s_2 r_3$. Так как $r_3 > 0$ на $S_{(1-2h)^2}^1$, то две рассматриваемые ориентации противоположны (рис. 5).

Рис. 5

Таким образом, естественные ориентации на окружностях S_0^1 и $S_{(1-2h)^2}^1$ совпадают. Следовательно, ε -метка на Π^+ -ребре молекулы W_2^* равна 1. Аналогично проверяется, что и на Π^- -ребре $\varepsilon = 1$.

Вычислим наконец метки молекулы W_3^* . Для вычисления r -меток воспользуемся методом, изложенным в [17]. Этот метод основывается на связи меток с топологией изоэнергетического многообразия Q^3 .

Напомним понятие существенного ребра, введенное в [17]. Если разрезать молекулу по всем ребрам с конечной r -меткой, то она распадется на несколько связных кусков. Те из них, которые не содержат атомов A , были названы семьями. В каждом из оставшихся кусков, отличном от атома A , зафиксируем произвольное ребро. Ребро, не являющееся фиксированным, назовем *существенным*, если обе его вершины не принадлежат семьям.

ТЕОРЕМА 4 (см. [17]). *Каждое существенное ребро e дает в группе $H_1(Q^3)$ прямое слагаемое $\mathbb{Z}_{\beta(e)}$, где $\beta(e)$ – знаменатель r -метки на ребре e (при $\beta(e) = 0$ полагаем $\mathbb{Z}_{\beta(e)} = \mathbb{Z}$).*

Из этой теоремы следует, что все r -метки молекулы W_3^* конечны. Дело в том, что в силу имеющейся симметрии (см. следствие 2) r -метки как на двух I-ребрах, так и на двух II-ребрах молекулы W_3^* совпадают (по крайней мере с точностью до знака). Поэтому если бы существовало ребро с бесконечной r -меткой, то таких ребер было бы как минимум два. Следовательно, нашлось бы существенное ребро с бесконечной r -меткой, которое давало бы прямое слагаемое $\mathbb{Z}$ в группе $H_1(Q^3)$. Но $Q^3 \cong \mathbb{RP}^3$ и $H_1(Q^3) = \mathbb{Z}_2$. Значит, все r -метки конечны и имеется семья, состоящая из одного атома C_2 .

Введем согласно [17] для молекулы W_3^* понятие *полной энергии кручения*. Ориентируем все ребра в сторону атома A . Пусть $(\alpha_{11}, \beta_{11}), (\alpha_{12}, \beta_{12}), (\alpha_{21}, \beta_{21}),$

$(\alpha_{22}, \beta_{22})$ – первые строки матриц склейки соответственно на Γ^+ -ребре, Γ^- -ребре, Π^+ -ребре и Π^- -ребре. Введем полную энергию кручения молекулы W_3^* по формуле

$$N(W_3^*) = \beta_{11}\beta_{12}\beta_{21}\beta_{22}E(C_2), \quad (3.16)$$

где $E(C_2) = \alpha_{11}/\beta_{11} + \alpha_{12}/\beta_{12} + \alpha_{21}/\beta_{21} + \alpha_{22}/\beta_{22}$ – энергия семьи, отличающаяся от n -метки на сумму r -меток всех ребер, выходящих из семьи.

ТЕОРЕМА 5 (см. [17]). *Для произвольной молекулы W^* имеет место формула*

$$N(W^*) = \begin{cases} 0, & \text{если } \text{rank } H_1(Q^3) > b_1(G) + 2 \sum_{U \neq A} g(U), \\ \pm \text{card}(\text{Tor } H_1(Q^3)) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь $b_1(G)$ – первое число Бетти графа G , получающегося из молекулы W^* отождествлением каждой ее семьи в точку, U – вершины графа G , $g(U)$ – род вершины U (т.е. род 2-мерной поверхности, получающейся из базы соответствующего расслоения Зейферта путем заклейки дисками всех ее граничных окружностей).

В нашем случае теорема 5 дает $N(W_3^*) = \pm 2$. Из равенства r -меток на двух Γ -ребрах и на двух Π -ребрах следует $\beta_{11} = \pm\beta_{12}$, $\beta_{21} = \pm\beta_{22}$. Таким образом, из формулы (3.16) получаем

$$\beta_{11}\beta_{21}((\alpha_{11} \pm \alpha_{12})\beta_{21} + (\alpha_{21} \pm \alpha_{22})\beta_{11}) = \pm 2. \quad (3.17)$$

Отсюда $\beta_{11} = \pm 1$ или $\beta_{21} = \pm 1$. Пусть, например, $\beta_{11} = \pm 1$. Если предположить, что $\beta_{21} = \pm 2$, то $\alpha_{21} \equiv \alpha_{22} \pmod{2}$. Поэтому левая часть (3.17) была бы кратна 4. Значит, и $\beta_{21} = \pm 1$. Таким образом, все r -метки равны нулю. Из этого следует, что n -метка совпадает с энергией семьи $E(C_2)$, равной ± 2 вследствие формулы (3.16). Меняя, если потребуется, ориентацию Q^3 , можно считать, что $n = 2$.

Вычисление ε -меток молекулы W_3^* проводится аналогично тому, как это было сделано при вычислении ε -меток молекулы W_2^* . При этом для Γ -ребер вложение i_k задается условием $\{s_1 = 0, s_2 > 0\}$, а переход к полярным координатам осуществляется в плоскости $\mathbb{R}^2(r_1, r_2)$. Для Π -ребер вложение i_k задается условием $\{s_3 = 0, s_2 > 0\}$, а переход к полярным координатам осуществляется в плоскости $\mathbb{R}^2(r_2, r_3)$.

Теорема 3 доказана.

§ 4. Эффективное описание топологии случая Чаплыгина

Топология слоения Лиувилля на неособых изоэнергетических поверхностях Q^3 в случае Чаплыгина допускает весьма наглядное описание в терминах координат $(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ из объемлющего пространства $\mathbb{R}^6$. Оказывается, для каждой камеры существуют две координатные плоскости в $\mathbb{R}^6(\mathbf{s}, \mathbf{r})$ такие, что проекции соответствующих торов Лиувилля на эти плоскости являются кольцами,

охватывающими начало координат. С помощью этого факта для каждого тора будет построен его диффеоморфизм на модельный тор $T_{\text{can}}^2 = S^1(\varphi) \times S^1(\psi)$, задаваемый двумя 2π -периодическими координатами φ, ψ . Тем самым на всех торах Лиувилля будут определены две независимые гладкие функции φ, ψ , задающие два базисных цикла $\varphi = \{\psi = \text{const}\}$, $\psi = \{\varphi = \text{const}\}$. Более того, эти циклы окажутся гладко зависящими от тора. По крайней мере одна из функций φ, ψ может быть продолжена на особые слои (другую же можно продолжить на регулярное множество особого слоя атома C_2). Это позволит выбрать допустимые системы координат на граничных торах атомов и в явном виде выписать матрицы склейки на ребрах молекул. Таким образом будет получено еще одно, конструктивное, доказательство теоремы 3.

4.1. Параметризация I-торов. В плоскостях $\mathbb{R}^2(r_1, r_2)$, $\mathbb{R}^2(s_1, s_2)$ перейдем к полярным координатам

$$\begin{cases} r_1 = u \cos \varphi, \\ r_2 = u \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} s_1 = v \cos \psi, \\ s_2 = v \sin \psi. \end{cases} \quad (4.1)$$

Лемма 1 гарантирует регулярность этой замены на I-торах. Следовательно, на I-торах $u, \varphi, v, \psi, s_3, r_3$ являются гладкими функциями, две из которых можно выбрать в качестве локальных координат (в окрестности произвольной точки тора). Рассмотрим при фиксированном $h > 1/2$ отображения $\alpha_1^\pm = \alpha_{1,h,k}^\pm: T_{h,k}^\pm \rightarrow T_{\text{can}}^2(\varphi, \psi)$, ставящие в соответствие точке на торе Лиувилля значения в ней угловых координат (φ, ψ) .

ТЕОРЕМА 6. 1. Введенные выше отображения $\alpha_{1,h,k}^\pm$ – диффеоморфизмы.

2. Отображения $\nu_{1,h}^\pm: T_{\text{can}}^2 \times (0, (2h-1)^2) \rightarrow Q^3$, определенные следующим образом: $\nu_{1,h}^\pm(\cdot, k) = (\alpha_{1,h,k}^\pm)^{-1}(\cdot)$, являются гладкими (т.е. задают изотопию торов в Q^3).

Таким образом, теорема 6 позволяет определить на I-торах две независимые периодические координаты, гладко зависящие от значения интеграла K .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. С учетом замены (4.1) уравнения (3.4)–(3.7) переписываются в виде

$$u^2 + r_3^2 = 1, \quad (4.2)$$

$$uv \cos(\varphi - \psi) + r_3 s_3 = 0, \quad (4.3)$$

$$v^2 + 2s_3^2 + 2u^2 \cos^2 \varphi + r_3^2 = 2h + 1, \quad (4.4)$$

$$v^4 + r_3^4 + 2v^2 r_3^2 \cos 2\psi = k. \quad (4.5)$$

Нужно показать, что для любых φ, ψ уравнения (4.2)–(4.5) однозначно разрешимы относительно u, v, r_3, s_3 , причем зависимость u, v, r_3, s_3 от φ, ψ и k является гладкой.

Обозначим $r_3^2 = x, v^2 = y$ и выразим u^2 из (4.2). Подставляя в (4.4), получим

$$y + 2s_3^2 + 2(1-x) \cos^2 \varphi + x = 2h + 1. \quad (4.6)$$

Из (4.6) можно выразить s_3^2 через x, y, φ . В итоге уравнения (4.3), (4.5) дадут

$$(1-x)y \cos^2(\varphi - \psi) = (2h - (1-x) \cos 2\varphi - y) \frac{x}{2}, \quad (4.7)$$

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos 2\psi = k. \quad (4.8)$$

Уравнения (4.7), (4.8) задают на плоскости (x, y) две кривые 2-го порядка $\gamma_1 = \{\Gamma_1(x, y) = 0\}$, $\gamma_2 = \{\Gamma_2(x, y) = 0\}$, где

$$\begin{aligned} \Gamma_1(x, y) &= ((2h - \cos 2\varphi) + x \cos 2\varphi - y) \frac{x}{2} - (1-x)y \cos^2(\varphi - \psi), \\ \Gamma_2(x, y) &= x^2 + y^2 + 2xy \cos 2\psi - k. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получили два алгебраических уравнения 2-го порядка (4.7), (4.8) относительно двух неизвестных x, y , которые должны удовлетворять естественным требованиям

$$0 \leq x < 1, \quad y > 0. \quad (4.9)$$

Докажем существование единственного решения $(x(\varphi, \psi, k), y(\varphi, \psi, k))$ уравнений (4.7), (4.8), удовлетворяющего (4.9) и гладко зависящего от φ, ψ, k . Тогда $u = \sqrt{1-x}$ и $v = \sqrt{y}$ также будут однозначными и гладкими функциями от φ, ψ, k . Таковыми будут и функции $s_3 = \pm \sqrt{((2h - \cos 2\varphi) + x \cos 2\varphi - y)/2}$ и $r_3 = -(uv \cos(\varphi - \psi))/s_3$.

Шаг 2. Существование. При фиксированных φ, ψ, k рассмотрим 2 случая.

1) $\cos(\varphi - \psi) = 0$. Так как $s_3 \neq 0$ на I-торах, то из (4.3) следует $r_3 = x = 0$, а тогда из (4.8) $y = \sqrt{k}$.

2) $\cos(\varphi - \psi) \neq 0$. Выразим из (4.7) y как однозначную функцию x ,

$$y = \tilde{\Gamma}_1(x) := \frac{(2h - \cos 2\varphi(1-x))x}{2(1-x) \cos^2(\varphi - \psi) + x}. \quad (4.10)$$

Знаменатель положителен на отрезке $[0, 1]$ (он линеен по x и положителен в точках 0 и 1), поэтому функция $\tilde{\Gamma}_1(x)$ корректно определена на $[0, 1]$. Более того, она неотрицательна на $[0, 1]$ и обращается в нуль только при $x = 0$. Действительно, если $\cos 2\varphi \leq 0$, то $2h - \cos 2\varphi(1-x) > 0$ при $x \in [0, 1]$. Если $\cos 2\varphi > 0$, то $2h - \cos 2\varphi(1-x) > (1 - \cos 2\varphi) + x \cos 2\varphi \geq 0$ (так как $h > 1/2$).

Рассмотрим дугу кривой γ_1 между точками $(0, 0)$ и $(1, 2h)$. Имеем

$$\Gamma_2(x, \tilde{\Gamma}_1(x))|_{x=0} = \Gamma_2(0, 0) = -k < 0,$$

$$\Gamma_2(x, \tilde{\Gamma}_1(x))|_{x=1} = \Gamma_2(1, 2h) = 1 + 4h^2 + 2h \cos 2\psi - k \geq (2h - 1)^2 - k > 0.$$

Следовательно, найдется такая точка $x_0 \in (0, 1)$, что $\Gamma_2(x, \tilde{\Gamma}_1(x))|_{x=x_0} = 0$. Таким образом, $(x_0, \tilde{\Gamma}_1(x_0))$ является точкой пересечения квадрик γ_1, γ_2 и удовлетворяет (4.9).

Шаг 3. Единственность. Достаточно рассмотреть случай $\cos(\varphi - \psi) \neq 0$.

Через $\gamma'_i(P)$ ($\gamma'_i(x, y)$) будем обозначать угловой коэффициент касательной к кривой γ_i в точке P (в точке (x, y)). Воспользуемся простым соображением:

если кривые γ_1, γ_2 (точнее, их связные части) пересекаются в точках P_1 и P_2 , то на дугах P_1P_2 кривых γ_1, γ_2 найдутся точки P', P'' такие, что $\gamma'_1(P') = \gamma'_2(P'')$. Назовем это соображение принципом параллельности.

Положим $D = [0, 1) \times (0, +\infty)$. Из доказательства существования точки пересечения кривых γ_1, γ_2 в D явствует, что число таких точек нечетное (с учетом кратности). Предположим, что их больше одной. Тогда их в точности три (в D). Обозначим их P_1, P_2, P_3 . Рассмотрим два случая.

1) Две из этих трех точек (пусть P_1, P_2) лежат не ниже прямой $y = x$. Тогда в соответствии с принципом параллельности должны найтись точки $P' \in \gamma_1 \cap D \cap \{y \geq x\}$, $P'' \in \gamma_2 \cap D \cap \{y \geq x\}$ такие, что $\gamma'_1(P') = \gamma'_2(P'')$. Покажем, что это не так. Действительно, $\gamma'_2 \in [-1, 1]$ в $D \cap \{y \geq x\}$ (так как γ_2 является либо эллипсом с центром в начале координат и главными направлениями $(1 : 1), (1 : -1)$, либо парой параллельных прямых, имеющих одно из этих направлений). Поскольку кривая γ_2 лежит в D не выше прямой $y = x + \sqrt{k}$, то точки P_1, P_2 , а следовательно, и P', P'' содержатся в полосе $D \cap \{x \leq y \leq x + \sqrt{k}\}$. Учитывая, что кривые 2-го порядка имеют однозначный характер выпуклости, рассмотрим две возможности.

1.1) γ_1 выпукла вверх в D (рис. 6). Тогда $\gamma'_1(x, \tilde{\Gamma}_1(x)) = \tilde{\Gamma}'_1(x)$ не возрастает на $[0, 1]$. Кроме того, точки $(0, 0)$ и $(1, 2h)$, соединяемые графиком функции $\tilde{\Gamma}_1(x)$ на $[0, 1]$, лежат по разные стороны прямой $y = x + \sqrt{k}$ (так как $2h - 1 > \sqrt{k}$). Поэтому график $\tilde{\Gamma}_1$ на $(0, 1)$ пересекает прямую $y = x + \sqrt{k}$ в некоторой точке $\tilde{P} = (\tilde{x}, \tilde{\Gamma}_1(\tilde{x}))$, в которой $\gamma'_1(\tilde{P}) > 1$, причем $\tilde{\Gamma}_1(x) < x + \sqrt{k}$ при $x < \tilde{x}$ и $\tilde{\Gamma}_1(x) > x + \sqrt{k}$ при $x > \tilde{x}$. Отсюда вследствие невозрастания $\tilde{\Gamma}'_1(x)$ имели бы $\gamma'_1(P') \geq \gamma'_1(\tilde{P}) > 1 \geq \gamma'_2(P'')$.

1.2) γ_1 выпукла вниз в D (рис. 7). Тогда $\gamma'_1(x, \tilde{\Gamma}_1(x)) = \tilde{\Gamma}'_1(x)$ не убывает на $[0, 1]$. Пусть

$$\hat{x} = \max\{x : (x, \tilde{\Gamma}_1(x)) \in \gamma_1 \cap \{y = x\}\}$$

(если $\gamma'_1(0, 0) \geq 1$, то $\hat{x} = 0$, иначе $0 < \hat{x} < 1$). Ясно, что $\tilde{\Gamma}_1(x) > x$ при $x > \hat{x}$, $\tilde{\Gamma}_1(x) < x$ при $0 < x < \hat{x}$ (если $\hat{x} > 0$) и $\gamma'_1(\hat{x}, \tilde{\Gamma}_1(\hat{x})) \geq 1$. В силу неубывания $\tilde{\Gamma}'_1(x)$ имеем $\gamma'_1(P') \geq \gamma'_1(\hat{x}, \tilde{\Gamma}_1(\hat{x})) \geq 1 \geq \gamma'_2(P'')$, причем равенство возможно лишь при $P' = (\hat{x}, \tilde{\Gamma}_1(\hat{x})) = (0, 0)$. Но $(0, 0)$ не содержится в D .

2) Две из трех точек пересечения γ_1 с γ_2 в D (пусть P_1, P_2) лежат ниже прямой $y = x$ (рис. 8). Пусть точка P_1 лежит на прямой $y = t_1x$, а точка P_2 – на прямой $y = t_2x$. Поскольку точки P_1, P_2 и $(0, 0)$ не лежат на одной прямой (все они принадлежат квадрике γ_1), то можно считать, что $t_1 < t_2$. Воспользуемся принципом параллельности в усиленном виде, утверждающим, что в этом случае найдется такое $\tilde{t} \in (t_1, t_2)$, что $\gamma'_1(P') = \gamma'_2(P'')$, где P', P'' – точки пересечения прямой $y = \tilde{t}x$ с γ_1 и γ_2 в D . Покажем, однако, что $\gamma'_1(P) \neq \gamma'_2(Q)$ для любых точек $P \in \gamma_1 \cap D \cap \{y < x\}$, $Q \in \gamma_2 \cap D \cap \{y < x\}$.

Ясно, что в этом случае γ_1 должна быть выпукла вниз и

$$\gamma'_1(0, 0) = \frac{h + 1/2 - \cos^2 \varphi}{\cos^2(\varphi - \psi)} < 1. \quad (4.11)$$

Рис. 6

Рис. 7

Рис. 8

Следовательно, $\gamma'_1(x, \tilde{\Gamma}_1(x)) \geq \gamma'_1(0, 0) > 0$ при $x \in [0, 1)$, т.е. $\gamma'_1 \in (0, +\infty)$ в $D \cap \{y < x\}$. Для эллипса (пары прямых) γ_2 , в зависимости от вытянутости вдоль прямой $y = x$ либо $y = -x$, будем иметь два варианта:

- а) $\gamma'_2 \in [-\infty, -1]$ в $D \cap \{y < x\}$, если $\cos 2\psi \geq 0$ (в этом случае все доказано);
- б) $\gamma'_2 \in [-\infty, -1] \cup [1, +\infty]$ в $D \cap \{y < x\}$, если $\cos 2\psi < 0$.

Рассмотрим случай б). Через P_{1t} , P_{2t} будем обозначать точки пересечения прямой $y = tx$ с γ_1 и γ_2 в D . Имеем

$$\gamma'_2(P_{2t}) = -\frac{\partial \Gamma_2 / \partial x}{\partial \Gamma_2 / \partial y} \Big|_{(x,y)=P_{2t}} = -\frac{x + y \cos 2\psi}{x \cos 2\psi + y} \Big|_{(x,y)=P_{2t}} = \frac{1 + t \cos 2\psi}{|\cos 2\psi| - t}.$$

При $t = |\cos 2\psi|$ касательная к γ_2 в точке P_{2t} вертикальна. При $t > |\cos 2\psi|$ $\gamma'_2(P_{2t}) \in (-\infty, -1)$, поэтому $\gamma'_2(P_{2t}) < \gamma'_1(P_{1t})$. Остается рассмотреть случай $t \in [\gamma'_1(0, 0), |\cos 2\psi|)$, предполагая, что этот промежуток непуст.

ЛЕММА 5. Для любого $t \in [\gamma'_1(0, 0), |\cos 2\psi|)$ $\gamma'_1(P_{1t}) < \gamma'_2(P_{2t})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P_{1t} = (x_t, y_t)$. Используя (4.10), находим

$$x_t = \frac{2t \cos^2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi - 2h}{t \cos 2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi}.$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} \gamma'_1(P_{1t}) &= \tilde{\Gamma}'_1(x_t) = t + \frac{(2t \cos^2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi - 2h)(t \cos 2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi)}{2h \cos 2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi} \\ &< t + t \cos 2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi = 2t \cos^2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi \end{aligned}$$

(воспользовались неравенством

$$\frac{2t \cos^2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi - 2h}{2h \cos 2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi} < 1,$$

следующим из того факта, что $t \leq 1 < 2h$). Заметим, что $2h \cos 2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi > 0$, а также $t \cos 2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi > 0$, что легко выводится из (4.11).

Теперь достаточно показать, что

$$2t \cos^2(\varphi - \psi) + \cos 2\varphi \leq \frac{1 + t \cos 2\psi}{|\cos 2\psi| - t},$$

или

$$2 \cos^2(\varphi - \psi) t^2 + (\cos 2\psi (2 \cos^2(\varphi - \psi) + 1) + \cos 2\varphi) t + (1 + \cos 2\varphi \cos 2\psi) \geq 0.$$

Это следует из неположительности дискриминанта квадратного трехчлена, стоящего в левой части, в чем можно убедиться непосредственной проверкой. Лемма доказана.

Таким образом, однозначная разрешимость уравнений (4.7), (4.8) относительно x, y доказана.

Шаг 4. Гладкость. Покажем гладкость функций x, y в произвольной точке (φ_0, ψ_0, k_0) . Локально эти функции задаются неявно следующей системой уравнений (рассмотренной при фиксированном h):

$$\begin{cases} \Gamma_{1,h}(\varphi, \psi, x, y) = 0, \\ \Gamma_2(\varphi, \psi, k, x, y) = 0. \end{cases}$$

Поэтому гладкость x, y следует из теоремы о неявном отображении, применимость которой гарантируется условием

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x} & \frac{\partial \Gamma_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x} & \frac{\partial \Gamma_2}{\partial y} \end{pmatrix} \bigg|_{(\varphi_0, \psi_0, k_0)} \neq 0.$$

Действительно, при $\cos(\varphi_0 - \psi_0) \neq 0$ это равносильно трансверсальности пересечения кривых γ_1, γ_2 в точке $(x(\varphi_0, \psi_0, k_0), y(\varphi_0, \psi_0, k_0))$, которая фактически была показана на шаге 3. При $\cos(\varphi_0 - \psi_0) = 0$ имеем $x = 0, y = \sqrt{k}, \frac{\partial \Gamma_1}{\partial y} = 0$.

Поэтому

$$\Delta = \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x} \bigg|_{(\varphi_0, \psi_0, k_0)} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial y} \bigg|_{(\varphi_0, \psi_0, k_0)} = \sqrt{k} ((2h - 1 - \sqrt{k}) + 2 \sin^2 \varphi_0) > 0.$$

Теорема 6 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Легко видеть, что при $k \rightarrow 0$ цикл $\psi = \{\varphi = \text{const}\}$ на I-торах стягивается в точку, а цикл $\varphi = \{\psi = \text{const}\}$ накладывается на критическую окружность атома A .

4.2. Параметризация II-торов. Общая схема рассуждений аналогична случаю I-торов. Перейдем к полярным координатам в плоскостях $\mathbb{R}^2(r_2, r_3), \mathbb{R}^2(s_2, s_3)$

$$\begin{cases} r_2 = u \cos \varphi, \\ r_3 = u \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} s_2 = v \cos \psi, \\ s_3 = v \sin \psi. \end{cases} \quad (4.12)$$

Регулярность этой замены на II-торах гарантируется леммой 2. Переменные $u, \varphi, v, \psi, s_1, r_1$ на II-торах являются гладкими функциями, две из которых всегда можно выбрать в качестве локальных координат. Определим при фиксированном $h > 0$ отображения $\alpha_2^\pm = \alpha_{2,h,k}^\pm: T_{h,k}^\pm \rightarrow T_{\text{can}}^2(\varphi, \psi)$, ставящие в соответствие точке на торе Лиувилля значения в ней координат φ, ψ .

ТЕОРЕМА 7. 1. *Отображения $\alpha_{2,h,k}^\pm$ – диффеоморфизмы.*

2. *Отображения $\nu_{2,h}^\pm: T_{\text{can}}^2 \times ((2h - 1)^2, (2h + 1)^2) \rightarrow Q^3$, определенные формулой $\nu_{2,h}^\pm(\cdot, k) = (\alpha_{2,h,k}^\pm)^{-1}(\cdot)$, являются гладкими (т.е. задают изотопию торов в Q^3).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. С учетом замены (4.12) уравнения (3.4)–(3.7) переписываются в виде

$$r_1^2 + u^2 = 1, \quad (4.13)$$

$$s_1 r_1 + uv \cos(\varphi - \psi) = 0, \quad (4.14)$$

$$s_1^2 + v^2(1 + \sin^2 \psi) - u^2(1 + \cos^2 \varphi) = 2h - 1, \quad (4.15)$$

$$(s_1^2 + v^2 \cos^2 \psi)^2 + 2(s_1^2 - v^2 \cos^2 \psi)u^2 \sin^2 \varphi + u^4 \sin^4 \varphi = k. \quad (4.16)$$

Обозначим $u^2 = x$, $v^2 = y$ и выразим r_1^2 из (4.13), а s_1^2 — из (4.15). Тогда уравнения (4.14), (4.16) дадут

$$((2h - 1) + x(1 + \cos^2 \varphi) - y(1 + \sin^2 \psi))(1 - x) = xy \cos^2(\varphi - \psi), \quad (4.17)$$

$$(2h - 1 + x(1 + \cos^2 \varphi) - 2y \sin^2 \psi)^2 + 2(2h - 1 + x(1 + \cos^2 \varphi) - 2y)x \sin^2 \varphi + x^2 \sin^4 \varphi = k. \quad (4.18)$$

Уравнения (4.17), (4.18) задают на плоскости (x, y) две кривые 2-го порядка $\gamma_1 = \{\Gamma_1(x, y) = 0\}$, $\gamma_2 = \{\Gamma_2(x, y) = 0\}$, где

$$\Gamma_1(x, y) = ((2h - 1) + x(1 + \cos^2 \varphi) - y(1 + \sin^2 \psi))(1 - x) - xy \cos^2(\varphi - \psi),$$

$$\Gamma_2(x, y) = (2h - 1 + x(1 + \cos^2 \varphi) - 2y \sin^2 \psi)^2 + 2(2h - 1 + x(1 + \cos^2 \varphi) - 2y)x \sin^2 \varphi + x^2 \sin^4 \varphi - k.$$

Докажем существование и единственность решения $x(\varphi, \psi, k)$, $y(\varphi, \psi, k)$ уравнений (4.17), (4.18), удовлетворяющего естественному требованию

$$0 < x \leq 1, \quad y > 0 \quad (4.19)$$

и гладко зависящего от φ, ψ, k . Тогда $u = \sqrt{x}$ и $v = \sqrt{y}$ также будут однозначными и гладкими функциями φ, ψ, k . Таковыми будут и функции $s_1 = \pm \sqrt{2h - 1 + u^2(1 + \cos^2 \varphi) - v^2(1 + \sin^2 \psi)}$ и $r_1 = -(uv \cos(\varphi - \psi))/s_1$.

Шаг 2. Существование. Рассмотрим при фиксированных φ, ψ, k два случая.

1) $\cos(\varphi - \psi) = 0$. Так как $s_1 \neq 0$ на Π -торах, то из (4.14) следует $r_1 = 0$. Тогда из (4.13) $x = 1$. Теперь нужно показать разрешимость уравнения (4.18) относительно y при $x = 1$. Положим $y_0 = (2h + \cos^2 \varphi)/(1 + \sin^2 \psi)$. Имеем

$$\Gamma_2(1, y)|_{y=0} = (2h - 1 + 2x)^2|_{x=1} - k = (2h + 1)^2 - k > 0,$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2(1, y)|_{y=y_0} &= \left(\frac{2h + \cos^2 \varphi}{1 + \sin^2 \psi} \cos^2 \psi \right)^2 - 2 \frac{2h + \cos^2 \varphi}{1 + \sin^2 \psi} \cos^2 \psi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi - k \\ &= (2h - 1)^2 \left(\frac{\sin^2 \varphi}{1 + \cos^2 \varphi} \right)^2 - k \leq (2h - 1)^2 - k < 0 \end{aligned}$$

(воспользовались тем, что $\varphi - \psi = \pm \pi/2$). Следовательно, найдется такое $\hat{y} \in (0, y_0)$, что $\Gamma_2(1, \hat{y}) = 0$. Тогда $y(\varphi, \psi, k) = \hat{y}$.

2) $\cos(\varphi - \psi) \neq 0$. Из (4.17) можно выразить y как однозначную функцию x

$$y = \tilde{\Gamma}_1(x) := \frac{(2h - 1 + x(1 + \cos^2 \varphi))(1 - x)}{x \cos^2(\varphi - \psi) + (1 + \sin^2 \psi)(1 - x)}.$$

Знаменатель положителен на отрезке $[0, 1]$ (он линеен по x и положителен в точках $0, 1$). Поэтому функция $\tilde{\Gamma}_1(x)$ корректно определена на $[0, 1]$ и неотрицательна на $[\tau, 1]$, где $\tau = \max\{0, \tau_0\}$, $\tau_0 = (1 - 2h)/(1 + \cos^2 \varphi)$.

Рассмотрим дугу кривой γ_1 между точками $(\tau, \tilde{\Gamma}_1(\tau))$ и $(1, \tilde{\Gamma}_1(1))$. Имеем

$$\Gamma_2(x, \tilde{\Gamma}_1(x))|_{x=0} = (2h - 1)^2 \left(\frac{\cos^2 \psi}{1 + \sin^2 \psi} \right)^2 - k \leq (2h - 1)^2 - k < 0,$$

$$\Gamma_2(x, \tilde{\Gamma}_1(x))|_{x=\tau_0} = (2h - 1)^2 \left(\frac{\sin^2 \varphi}{1 + \cos^2 \varphi} \right)^2 - k \leq (2h - 1)^2 - k < 0$$

(таким образом, $\Gamma_2(\tau, \tilde{\Gamma}_1(\tau)) < 0$),

$$\Gamma_2(x, \tilde{\Gamma}_1(x))|_{x=1} = (2h + 1)^2 - k > 0.$$

Следовательно, найдется такое $\hat{x} \in (\tau, 1)$, что $\Gamma_2(\hat{x}, \tilde{\Gamma}_1(\hat{x})) = 0$. В таком случае $(\hat{x}, \tilde{\Gamma}_1(\hat{x}))$ является искомой точкой пересечения кривых γ_1 и γ_2 .

Шаг 3. Единственность. В случае $\cos(\varphi - \psi) = 0$ имеем $x = 1$, а из (4.15) получаем $y \leq y_0$. Так как $\Gamma_2(1, 0)\Gamma_2(1, y_0) < 0$, то число точек пересечения кривой γ_2 с прямой $x = 1$ при $0 < y \leq y_0$ нечетно. С другой стороны, будучи кривой 2-го порядка, γ_2 не может пересекаться с прямой $x = 1$ более чем в двух точках. Тем самым $y(\varphi, \psi, k)$ определяется однозначно.

Рассмотрим случай $\cos(\varphi - \psi) \neq 0$. Исследуем более подробно кривые γ_1 и γ_2 . Начнем с γ_1 .

Кривая γ_1 пересекает ось абсцисс в точках $(\tau_0, 0)$, $(1, 0)$, а ось ординат – в точке $P_{1y} = (0, (2h - 1)/(1 + \sin^2 \psi))$. Матрица квадратичной части многочлена Γ_1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} -(1 + \cos^2 \varphi) & \frac{1}{2}(\sin^2(\varphi - \psi) + \sin^2 \psi) \\ \frac{1}{2}(\sin^2(\varphi - \psi) + \sin^2 \psi) & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $\sin(\varphi - \psi) = \sin \psi = 0$, то γ_1 – парабола, задаваемая уравнением

$$y = \tilde{\Gamma}_1(x) = (2h - 1 + x(1 + \cos^2 \varphi))(1 - x).$$

Ветви этой параболы направлены вниз, следовательно, она выпукла вверх.

Если $\sin(\varphi - \psi) \neq 0$ или $\sin \psi \neq 0$, то γ_1 – гипербола, имеющая одной из асимптот прямую

$$x = x_0 := \frac{1 + \sin^2 \psi}{\sin^2(\varphi - \psi) + \sin^2 \psi}.$$

Так как $\cos(\varphi - \psi) \neq 0$, то $x_0 > 1$ и в дальнейшем имеет смысл интересоваться только левой ветвью гиперболы γ_1 . Несложно видеть, что она имеет выпуклость вверх.

Кривая γ_2 пересекает ось абсцисс в точках $P_{2x}^{\pm} = ((\pm\sqrt{k} - (2h-1))/2, 0)$, а ось ординат – либо в точках $P_{2y}^{\pm} = (0, (2h-1 \pm \sqrt{k})/(2\sin^2 \psi))$, если $\sin \psi \neq 0$, либо не пересекает вообще, если $\sin \psi = 0$. Матрицу квадратичной части многочлена Γ_2 можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} 4 & -2(\sin^2 \varphi \cos^2 \psi + 2\sin^2 \psi) \\ -2(\sin^2 \varphi \cos^2 \psi + 2\sin^2 \psi) & 4\sin^4 \psi \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен $-4\sin^2 \varphi \cos^2 \psi (\sin^2 \varphi \cos^2 \psi + 4\sin^2 \psi) \leq 0$. Поэтому γ_2 имеет либо параболический, либо гиперболический тип. Рассмотрим три случая.

2.1) $\sin \varphi = 0$. Тогда γ_2 – это пара параллельных прямых $l^{\pm} = \{2h-1+2x-2y\sin^2 \psi = \pm\sqrt{k}\}$ (рис. 9).

Рис. 9

ЛЕММА 6. Пусть $D = (0, 1] \times (0, +\infty)$. Тогда пересечение $l^- \cap \gamma_1 \cap D$ пусто.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\sin \psi = 0$, то прямая l^- вертикальна, лежит левее оси y и потому не пересекает D . Поэтому рассмотрим случай, когда $\sin \psi \neq 0$. В этом случае l^- пересекает ось y в точке P_{2y}^+ . Так как функция $\tilde{\Gamma}_1(x)$ выпукла вверх (на $[0, 1]$), то ее график (т.е. кривая γ_1) лежит не выше касательной к нему в точке P_{1y} . Следовательно, для доказательства леммы достаточно проверить, что, во-первых, точка P_{2y}^+ лежит выше точки P_{1y} на оси y , а во-вторых – что $\gamma_2'(P_{2y}^+) \geq \gamma_1'(P_{1y})$. Первое из этих условий выполняется, так как

$$\frac{2h-1+\sqrt{k}}{2\sin^2 \psi} > \frac{2h-1}{1+\sin^2 \psi}.$$

Проверим второе условие. Учитывая, что $\sin \varphi = 0$ и $h > 0$, имеем

$$\gamma_1'(P_{1y}) = \tilde{\Gamma}_1'(0) = \frac{2(1+\sin^2 \psi) - (2h-1)\cos^2 \psi}{(1+\sin^2 \psi)^2} \leq \frac{1}{\sin^2 \psi} = \gamma_2'(P_{2y}^+).$$

Лемма доказана.

Из леммы 6 следует, что $\gamma_1 \cap \gamma_2 \cap D = \gamma_1 \cap l^+ \cap D$. Но точек пересечения прямой l^+ с γ_1 в D может быть не больше двух. С другой стороны, их должно быть нечетное количество (см. шаг 2). Следовательно, $\#\{\gamma_1 \cap \gamma_2 \cap D\} = 1$.

2.2) $\cos \psi = 0$, тогда γ_2 – пара параллельных прямых $l^\pm = \{2h - 1 + 2x - 2y = \pm\sqrt{k}\}$. Этот случай рассматривается по аналогии с предыдущим.

2.3) $\sin \varphi \neq 0$, $\cos \psi \neq 0$. В этом случае γ_2 имеет гиперболический тип.

ЛЕММА 7. Если $\sin \psi \neq 0$, то $\gamma'_2(P_{2y}^-) > 1/\sin^2 \psi > \gamma'_2(P_{2x}^+)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственным вычислением получаем

$$\gamma'_2(P_{2y}^-) = \frac{((1 + \cos^2 \varphi) \sin^2 \psi + \sin^2 \varphi) \sqrt{k} - \sin^2 \varphi \cos^2 \psi (2h - 1)}{2 \sin^4 \psi \sqrt{k}},$$

$$\gamma'_2(P_{2x}^+) = \frac{2\sqrt{k}}{((1 + \cos^2 \varphi) \sin^2 \psi + \sin^2 \varphi) \sqrt{k} - \sin^2 \varphi \cos^2 \psi (2h - 1)}.$$

Оба неравенства из условия сводятся к неравенству

$$((1 + \cos^2 \varphi) \sin^2 \psi + \sin^2 \varphi) \sqrt{k} - \sin^2 \varphi \cos^2 \psi (2h - 1) > 2 \sin^2 \psi \sqrt{k}$$

$$\iff \sin^2 \psi \cos^2 \varphi (\sqrt{k} - (2h - 1)) > 0,$$

что выполнено в силу (3.2). Лемма доказана.

При $\sin \psi \neq 0$ кривая γ_2 пересекает координатные оси лишь в точках $P_{2x}^\pm$, $P_{2y}^\pm$, а $1/\sin^2 \psi$ – угловой коэффициент прямой $P_{2y}^- P_{2x}^+$. Поэтому из леммы 7 следует, что γ_2 – гипербола, одна из ветвей которой (обозначим ее γ_2^+) проходит через точки P_{2y}^- , P_{2x}^+ и имеет выпуклость вверх. Соответственно, другая ветвь (обозначим ее γ_2^-) проходит через точки P_{2y}^+ , P_{2x}^- и имеет выпуклость вниз (рис. 10). Поскольку асимптоты γ_2 проходят между парами точек P_{2y}^- , P_{2x}^+ и P_{2y}^+ , P_{2x}^- , то угловой коэффициент каждой из них принадлежит интервалу $(0, +\infty)$.

Рис. 10

В случае $\sin \psi = 0$ кривая γ_2 не пересекает ось y и поэтому является гиперболой, имеющей ось y своей асимптотой. Одна из ветвей (γ_2^+) проходит через точку P_{2x}^+ и имеет выпуклость вверх, другая (γ_2^-) проходит через точку P_{2x}^- и имеет выпуклость вниз. Угловой коэффициент второй асимптоты, естественно, принадлежит интервалу $(0, +\infty)$.

ЛЕММА 8. Пусть κ – меньший из угловых коэффициентов асимптот гиперболы γ_2 . Тогда $\kappa \geq \tilde{\Gamma}'(\tau)$. (Напомним, что $\tau = \max\{0, \tau_0\}$, где $\tau_0 = (1 - 2h)/(1 + \cos^2 \varphi)$.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выделим два случая.

1) $h \geq 1/2$. Тогда $\tau = 0$ и

$$\tilde{\Gamma}'_1(\tau) = \tilde{\Gamma}'_1(0) = \frac{(1 + \cos^2 \varphi)(1 + \sin^2 \psi) - (2h - 1) \cos^2(\varphi - \psi)}{(1 + \sin^2 \psi)^2} \leq \frac{1 + \cos^2 \varphi}{1 + \sin^2 \psi}.$$

Из матрицы квадратичной части многочлена Γ_2 находим

$$\begin{aligned} \kappa &= \left(\sin^2 \varphi \cos^2 \psi + 2 \sin^2 \psi - |\sin \varphi \cos \psi| \sqrt{\sin^2 \varphi \cos^2 \psi + 4 \sin^2 \psi} \right) (2 \sin^4 \psi)^{-1} \\ &= 2 \left(\sin^2 \varphi \cos^2 \psi + 2 \sin^2 \psi + |\sin \varphi \cos \psi| \sqrt{\sin^2 \varphi \cos^2 \psi + 4 \sin^2 \psi} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Знаменатель последнего выражения преобразуем и оценим. Имеем

$$\sin^2 \varphi \cos^2 \psi + 4 \sin^2 \psi = \cos^2 \psi (\sin^2 \varphi - \cos^2 \psi) + (1 + \sin^2 \psi)^2.$$

С использованием неравенства $\xi \eta \leq (\xi^2 + \eta^2)/2$ получим

$$\sqrt{\sin^2 \varphi \cos^2 \psi + 4 \sin^2 \psi} (1 + \sin^2 \psi) \leq \frac{\cos^2 \psi (\sin^2 \varphi - \cos^2 \psi) + 2(1 + \sin^2 \psi)^2}{2},$$

откуда

$$\sqrt{\sin^2 \varphi \cos^2 \psi + 4 \sin^2 \psi} \leq \frac{\cos^2 \psi (\sin^2 \varphi - \cos^2 \psi)}{2(1 + \sin^2 \psi)} + 1 + \sin^2 \psi.$$

Далее, можно показать, что

$$\begin{aligned} &\sin^2 \varphi \cos^2 \psi + 2 \sin^2 \psi + |\sin \varphi \cos \psi| \sqrt{\sin^2 \varphi \cos^2 \psi + 4 \sin^2 \psi} \\ &\leq \frac{\sin^2 \varphi - \cos^2 \psi}{2} \left(\frac{\cos^2 \psi (\sin^2 \varphi - \cos^2 \psi)}{2(1 + \sin^2 \psi)} + \frac{4}{1 + \sin^2 \psi} \right) + 2. \end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned} &(\sin^2 \varphi \cos^2 \psi + 2 \sin^2 \psi \\ &\quad + |\sin \varphi \cos \psi| \sqrt{\sin^2 \varphi \cos^2 \psi + 4 \sin^2 \psi}) (1 + \cos^2 \varphi) - 2(1 + \sin^2 \psi) \\ &\leq \frac{\sin^2 \varphi - \cos^2 \psi}{2} \left(\frac{\cos^2 \psi (\sin^2 \varphi - \cos^2 \psi) (1 + \cos^2 \varphi)}{2(1 + \sin^2 \psi)} + \frac{4(1 + \cos^2 \varphi)}{1 + \sin^2 \psi} \right) \\ &\quad + 2((1 + \cos^2 \varphi) - (1 + \sin^2 \psi)) \\ &= (\sin^2 \varphi - \cos^2 \psi)^2 \frac{\cos^2 \psi (1 + \cos^2 \varphi) - 8}{4(1 + \sin^2 \psi)} \leq 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\kappa &= 2 \left(\sin^2 \varphi \cos^2 \psi + 2 \sin^2 \psi + |\sin \varphi \cos \psi| \sqrt{\sin^2 \varphi \cos^2 \psi + 4 \sin^2 \psi} \right)^{-1} \\ &\geq \frac{1 + \cos^2 \varphi}{1 + \sin^2 \psi} = \tilde{\Gamma}'_1(\tau),\end{aligned}$$

что и требовалось.

2) $0 < h < 1/2$. В этом случае $\tau = \tau_0 = (1 - 2h)/(1 + \cos^2 \varphi)$ и

$$\tilde{\Gamma}'_1(\tau) = \frac{(1 + \cos^2 \varphi)(2h + \cos^2 \varphi)}{(1 + \sin^2 \psi)(2h + \cos^2 \varphi) + (1 - 2h) \cos^2(\varphi - \psi)} \leq \frac{1 + \cos^2 \varphi}{1 + \sin^2 \psi} \leq \kappa$$

(последнее неравенство доказано при рассмотрении первого случая). Лемма доказана.

ЛЕММА 9. *Пересечение $\gamma_2^- \cap \gamma_1 \cap D$ пусто.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\sin \psi = 0$, то ветвь γ_2^- лежит левее оси y и, следовательно, не пересекает D . Поэтому рассмотрим случай, когда $\sin \psi \neq 0$.

Так как γ_1 выпукла вверх в D , то $\gamma_1 \cap D$ лежит не выше касательной к γ_1 в точке $(\tau, \tilde{\Gamma}_1(\tau))$. Аналогично, поскольку γ_2^- выпукла вниз, $\gamma_2^- \cap D$ лежит не ниже касательной к γ_2^- в точке P_{2y}^+ . Таким образом, достаточно показать, что вторая из упомянутых касательных лежит выше первой в D .

Пусть касательная к γ_1 в $(\tau, \tilde{\Gamma}_1(\tau))$ пересекает ось y в точке $(0, \tilde{y})$. Тогда, как и при доказательстве леммы 6, нужно проверить выполнение двух условий.

1. Точка P_{2y}^+ должна лежать выше точки $(0, \tilde{y})$ на оси y , т.е.

$$\frac{2h - 1 + \sqrt{k}}{2 \sin^2 \psi} > \tilde{y}.$$

Действительно, если $\tau = \tau_0$, то

$$\tilde{y} < 0 < \frac{2h - 1 + \sqrt{k}}{2 \sin^2 \psi}.$$

Если же $\tau = 0$, то

$$\tilde{y} = \tilde{\Gamma}_1(0) = \frac{2h - 1}{1 + \sin^2 \psi} < \frac{2h - 1 + \sqrt{k}}{2 \sin^2 \psi}.$$

2. Должно выполняться $\gamma'_2(P_{2y}^+) \geq \gamma'_1(\tau, \tilde{\Gamma}_1(\tau)) = \tilde{\Gamma}'_1(\tau)$. Это следует из леммы 8, так как $\gamma'_2(P_{2y}^+) > \kappa > \tilde{\Gamma}'_1(\tau)$. Лемма 9 доказана.

Из леммы 9 следует, что $\gamma_1 \cap \gamma_2 \cap D = \gamma_1 \cap \gamma_2^+ \cap D$. Остается проверить, что γ_1 и γ_2^+ не могут пересекаться в D более чем в одной точке. Но это следует из принципа параллельности, уже использованного при доказательстве теоремы 6. А именно если бы γ_1 и γ_2^+ пересекались в D в двух различных точках $(x_1, \tilde{\Gamma}_1(x_1))$ и $(x_2, \tilde{\Gamma}_1(x_2))$, то при некотором $\tilde{x} \in [x_1, x_2]$ касательные

к γ_1 и γ_2^+ в точках P', P'' пересечения с прямой $x = \tilde{x}$ были бы параллельны (т.е. $\gamma_1'(P') = \gamma_2'(P'')$). Заметим, однако, что $(\tau, \tilde{\Gamma}_1(\tau))$ – “самая левая” точка кривой γ_1 в $\bar{D}$. Поэтому в силу выпуклости вверх γ_1 и γ_2^+ , а также в силу леммы 8 имеем $\gamma_2'(P'') > \kappa \geq \tilde{\Gamma}_1'(\tau) \geq \gamma_1'(P')$. Таким образом, $\#\{\gamma_1 \cap \gamma_2 \cap D\} = \#\{\gamma_1 \cap \gamma_2^+ \cap D\} = 1$.

Итак, существование обратного отображения $(\alpha_2^\pm)^{-1}: T_{\text{can}}^2 \rightarrow T_{h,k}^\pm$ доказано.

Шаг 4. Гладкость. Как и в теореме 6, гладкость x и y по φ, ψ, k следует из теоремы о неявном отображении, применимость которой обеспечивается условием

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x} & \frac{\partial \Gamma_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \Gamma_2}{\partial x} & \frac{\partial \Gamma_2}{\partial y} \end{pmatrix} \neq 0.$$

При $\cos(\varphi - \psi) \neq 0$ это равносильно трансверсальности пересечения кривых γ_1, γ_2 в точке $(x(\varphi, \psi, k), y(\varphi, \psi, k))$, фактически показанной на шаге 3. При $\cos(\varphi - \psi) = 0$ имеем $x = 1, \frac{\partial \Gamma_1}{\partial y} = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial y} = (2h + \cos^2 \varphi - y(\varphi, \psi, k)(1 + \sin^2 \psi)) \\ &\quad \times 4(\sin^2 \psi (2h + \cos^2 \varphi - 2y(\varphi, \psi, k) \sin^2 \psi) + \sin^2 \varphi) > 0, \end{aligned}$$

так как $y(\varphi, \psi, k) < \frac{2h + \cos^2 \varphi}{1 + \sin^2 \psi}$.

Теорема 7 теперь полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При $k \rightarrow (2h + 1)^2$ цикл $\psi = \{\varphi = \text{const}\}$ на II-торах стягивается в точку, а цикл $\varphi = \{\psi = \text{const}\}$ накладывается на критическую окружность атома A .

4.3. Параметризация III-торов. Перейдем теперь к полярным координатам в плоскостях $\mathbb{R}^2(r_1, s_3), \mathbb{R}^2(s_1, r_3)$:

$$\begin{cases} r_1 = u \cos \varphi, \\ s_3 = u \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} s_1 = v \cos \psi, \\ r_3 = v \sin \psi. \end{cases} \quad (4.20)$$

Лемма 3 обеспечивает регулярность этой замены на III-торах. Тем самым переменные $u, \varphi, v, \psi, s_2, r_2$ на III-торах являются гладкими функциями. Как и выше, определим при фиксированном $h \in [-1/2, 1/2]$ отображения $\alpha_3^\pm = \alpha_{3,h,k}^\pm: T_{h,k}^\pm \rightarrow T_{\text{can}}^2(\varphi, \psi)$, ставящие в соответствие точке на торе Лиувилля значения в ней координат φ, ψ .

ТЕОРЕМА 8. 1. *Отображения $\alpha_{3,h,k}^\pm$ – диффеоморфизмы.*

2. *Отображения $\nu_{3,h}^\pm: T_{\text{can}}^2 \times (0, \min\{(2h - 1)^2, (2h + 1)^2\}) \rightarrow Q^3$, определенные формулой $\nu_{3,h}^\pm(\cdot, k) = (\alpha_{3,h,k}^\pm)^{-1}(\cdot)$, являются гладкими (т.е. задают изотопию торов в Q^3).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Шаг 1. С учетом замены (4.20) уравнения (3.4)–(3.7) переписываются в виде

$$u^2 \cos^2 \varphi + r_2^2 + v^2 \sin^2 \psi = 1, \quad (4.21)$$

$$uv \cos(\varphi - \psi) + r_2 s_2 = 0, \quad (4.22)$$

$$2u^2 + v^2 + s_2^2 = 2h + 1, \quad (4.23)$$

$$v^4 + s_2^4 + 2v^2 s_2^2 \cos 2\psi = k. \quad (4.24)$$

Обозначим $s_2^2 = x$, $v^2 = y$ и выразим u^2 из (4.23). Подставляя в (4.21), найдем выражение для r_2^2 через x , y , φ , ψ

$$r_2^2 = 1 - \frac{1}{2}(2h + 1 - x - y) \cos^2 \varphi - y \sin^2 \psi. \quad (4.25)$$

Уравнения (4.22), (4.24) в итоге дадут

$$\frac{1}{2}(2h + 1 - x - y)y \cos^2(\varphi - \psi) = \left(1 - \frac{1}{2}(2h + 1 - x - y) \cos^2 \varphi - y \sin^2 \psi\right)x, \quad (4.26)$$

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos 2\psi = k. \quad (4.27)$$

Уравнения (4.26), (4.27) задают на плоскости (x, y) две кривые 2-го порядка $\gamma_1 = \{\Gamma_1(x, y) = 0\}$, $\gamma_2 = \{\Gamma_2(x, y) = 0\}$, где

$$\begin{aligned} \Gamma_1(x, y) &= \left(1 - \frac{1}{2}(2h + 1 - x - y) \cos^2 \varphi - y \sin^2 \psi\right)x \\ &\quad - \frac{1}{2}(2h + 1 - x - y)y \cos^2(\varphi - \psi), \\ \Gamma_2(x, y) &= x^2 + y^2 + 2xy \cos 2\psi - k. \end{aligned}$$

Получили два алгебраических уравнения 2-го порядка (4.26), (4.27) относительно неизвестных x , y , которые должны удовлетворять условиям

$$x \geq 0, \quad y > 0, \quad x + y < 2h + 1. \quad (4.28)$$

Докажем существование единственного решения $(x(\varphi, \psi, k), y(\varphi, \psi, k))$ уравнений (4.26), (4.27), удовлетворяющего (4.28) и гладко зависящего от φ , ψ , k . В таком случае $u = \sqrt{(2h + 1 - x - y)/2}$ и $v = \sqrt{y}$ будут однозначными и гладкими функциями от φ, ψ, k . Таковыми будут и функции r_2 (в силу (4.25)) и $s_2 = -(uv \cos(\varphi - \psi))/r_2$.

Шаг 2. Существование. Рассмотрим при фиксированных φ, ψ, k два случая.

1) $\cos(\varphi - \psi) = 0$. Поскольку $r_2 \neq 0$ на III-торах, то из (4.22) следует $s_2 = x = 0$. Тогда из (4.27) $y = \sqrt{k}$. Очевидно, условие (4.28) выполнено.

2) $\cos(\varphi - \psi) \neq 0$. Положим $D = \{x \geq 0, y > 0, x + y < 2h + 1\}$. Выделим три подслучая.

2.1) $\cos 2\psi \in (-1, 1)$. Тогда γ_2 – эллипс с центром в начале координат и главными направлениями $(1 : 1)$, $(1 : -1)$. Этот эллипс пересекает границу множества D в точках $(\sqrt{k}, 0)$, $(0, \sqrt{k})$ и, возможно, в точках прямой $x + y = 2h + 1$. Рассмотрим отдельно эти две возможности.

а) γ_2 не имеет общих точек с прямой $x + y = 2h + 1$ (рис. 11). Имеем

$$\begin{aligned}\Gamma_1(0, \sqrt{k}) &= -\frac{1}{2}(2h + 1 - \sqrt{k})\sqrt{k}\cos^2(\varphi - \psi) < 0, \\ \Gamma_1(\sqrt{k}, 0) &= \left(1 - \frac{1}{2}(2h + 1 - \sqrt{k})\cos^2\varphi\right)\sqrt{k} \geq \frac{1}{2}(1 - 2h)\sqrt{k} > 0.\end{aligned}$$

Значит, на дуге эллипса γ_2 , заключенной в D (и имеющей точки $(0, \sqrt{k})$, $(\sqrt{k}, 0)$ своими концами), найдется такая точка (x_0, y_0) , что $\Gamma_1(x_0, y_0) = 0$. Очевидно, точка (x_0, y_0) искомая.

б) γ_2 пересекает прямую $x + y = 2h + 1$ в двух (возможно совпадающих) точках $P^\pm = (x^\pm, y^\pm)$, где

$$\begin{aligned}x^+ = y^- &= h + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(2h + 1)^2 - \frac{(2h + 1)^2 - k}{\sin^2\psi}}, \\ x^- = y^+ &= h + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(2h + 1)^2 - \frac{(2h + 1)^2 - k}{\sin^2\psi}}.\end{aligned}$$

Покажем, что $\Gamma_1(P^-) > 0$. Тогда из того факта, что $\Gamma_1(0, \sqrt{k}) < 0$, будет следовать, что на дуге эллипса γ_2 , лежащей в D и имеющей точки P^- , $(0, \sqrt{k})$ своими концами, найдется точка $(x_0, y_0) \in \gamma_1$, которая и будет искомой (рис. 12). Итак,

Рис. 11

Рис. 12

имеем

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1(P^-) &= (1 - y \sin^2 \psi)x|_{(x,y)=P^-}, \\
 \Gamma_1(P^-) > 0 &\iff 1 - \left(h + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(2h+1)^2 - \frac{(2h+1)^2 - k}{\sin^2 \psi}}\right) \sin^2 \psi > 0 \\
 &\iff \left(\frac{2}{\sin^2 \psi} - (2h+1)\right)^2 > (2h+1)^2 - \frac{(2h+1)^2 - k}{\sin^2 \psi} \\
 &\iff \frac{4}{\sin^2 \psi} - 4(2h+1) + (2h+1)^2 - k > 0.
 \end{aligned}$$

Последнее неравенство выполнено в силу (3.3).

2.2) $\cos 2\psi = 1$, γ_2 – пара параллельных прямых $l^\pm = \{x+y = \pm\sqrt{k}\}$ (рис. 13). Прямая l^+ проходит через точки $(0, \sqrt{k})$, $(\sqrt{k}, 0)$, и к ее отрезку с концами в этих точках применимы рассуждения случая 2.1), а).

2.3) $\cos 2\psi = -1$, γ_2 – пара прямых $l^\pm = \{x - y = \pm\sqrt{k}\}$ (рис. 14). В этом случае можно применить рассуждения случая 2.1), б) к отрезку прямой l^- с концами в точках $(0, \sqrt{k})$ и $((2h+1 - \sqrt{k})/2, (2h+1 + \sqrt{k})/2) = l^- \cap \{x+y = 2h+1\}$.

Рис. 13

Рис. 14

Шаг 3. Единственность. При $\cos(\varphi - \psi) = 0$ единственность искомого решения уравнений (4.27), (4.28) вытекает из доказательства существования. Поэтому рассмотрим случай $\cos(\varphi - \psi) \neq 0$.

Кривая γ_1 пересекает ось x в точках $O = (0, 0)$ и $(2h+1 - 2/\cos^2 \varphi, 0)$, если $\cos \varphi \neq 0$, ось y – в точках O , $Q_1 = (0, 2h+1)$, прямую $x+y = 2h+1$ – в точках Q_1 и $Q_2 = (2h+1 - 1/\sin^2 \psi, 1/\sin^2 \psi)$, если $\sin \psi \neq 0$. Так как $2h+1 - 2/\cos^2 \varphi < 0$, то γ_1 пересекает границы D в точках O , Q_1 и, возможно, Q_2 , если $1/\sin^2 \psi \leq 2h+1$. Так как

$$\gamma_1'(O) = -\frac{\partial \Gamma_1 / \partial x}{\partial \Gamma_1 / \partial y} \Big|_{(0,0)} = \frac{1 - (h+1/2) \cos^2 \varphi}{(h+1/2) \cos^2(\varphi - \psi)} > 0, \quad (4.29)$$

то γ_1 “входит” в треугольник D через точку O , а “выходить” может лишь через точки Q_1, Q_2 .

Как и выше, рассмотрим три подслучая.

1) $\cos 2\psi = 1$, γ_2 – пара параллельных прямых $l^\pm = \{x + y = \pm\sqrt{k}\}$ (рис. 13). Тогда $l^- \cap D = \emptyset$. Прямая l^+ может пересекать γ_1 в D не более чем в двух точках. С другой стороны, так как $\Gamma_1(0, \sqrt{k})\Gamma_1(\sqrt{k}, 0) < 0$, то число пересечений l^+ с γ_1 в D нечетно. Следовательно, $\#\{\gamma_1 \cap \gamma_2 \cap D\} = \#\{\gamma_1 \cap l^+ \cap D\} = 1$.

2) $\cos 2\psi = -1$, $\gamma_2 = l^\pm = \{x - y = \pm\sqrt{k}\}$ (рис. 14). В таком случае (4.29) дает

$$\gamma'_1(O) = \frac{1 - (h + 1/2) \cos^2 \varphi}{(h + 1/2) \sin^2 \varphi} > 1. \quad (4.30)$$

Поскольку $1/\sin^2 \psi \geq 1 > h + 1/2$, то точка Q_2 лежит выше прямой $y = x$. Поэтому из (4.30) следует, что $\gamma_1 \cap D$ лежит не ниже прямой $y = x$. Отсюда $\gamma_1 \cap l^+ \cap D = \emptyset$. Таким образом, $\#\{\gamma_1 \cap \gamma_2 \cap D\} = \#\{\gamma_1 \cap l^- \cap D\} = 1$ (так как это число нечетно и не превосходит двух).

3) $\cos 2\psi \in (-1, 1)$, γ_2 – эллипс с центром в начале координат и главными направлениями $(1 : 1)$, $(1 : -1)$. Пустим в ход использованный при доказательстве теорем 6, 7 принцип параллельности: если P_1 и P_2 – две различные точки пересечения γ_1 и γ_2 в D , то найдутся точки P', P'' , лежащие на дугах кривых γ_1, γ_2 с концами P_1, P_2 , такие, что $\gamma'_1(P') = \gamma'_2(P'')$. Рассмотрим две возможности.

3.1) γ_1 выпукла вверх, “входит” в D через точку O и “выходит” через точку Q_2 (рис. 15). Тогда $\gamma'_1(P)$ не возрастает при движении точки P от O к Q_2 . Легко видеть, что в этом случае точка Q_2 лежит выше прямой $y = x + \sqrt{k}$. Поэтому γ_1 пересекает прямую $y = x + \sqrt{k}$ в некоторой точке $\tilde{P}$ такой, что $\gamma'_1(\tilde{P}) > 1$. Ясно, что $\gamma_1 \cap \gamma_2 \cap D \subset D \cap \{x \leq y \leq x + \sqrt{k}\}$, но в $D \cap \{x \leq y \leq x + \sqrt{k}\}$ имеем $\gamma'_1 > 1$, а $\gamma'_2 \in [-1, 1)$. В соответствии с принципом параллельности γ_1 и γ_2 не могут пересекаться в D более чем в одной точке.

Рис. 15

3.2) γ_1 выпукла вправо, “входит” в D через точку O и “выходит” через Q_1 либо Q_2 (рис. 11). Из доказательства существования точки пересечения γ_1 с γ_2 в D понятно, что таких точек нечетное число (с учетом кратности). Следовательно, если их больше одной, то их в точности три. Пусть это точки P_1, P_2, P_3 (возможно, какие-то из них совпадают). Рассмотрим два случая.

а) Две из этих точек лежат в $D \cap \{y \geq x\}$. Но тогда получаем противоречие с принципом параллельности, ибо $\gamma'_1 \in [-\infty, -1) \cup (1, +\infty]$, а $\gamma'_2 \in [-1, 1]$ в $D \cap \{y \geq x\}$.

б) Две из точек P_1, P_2, P_3 (пусть P_1 и P_2) лежат в области $D \cap \{y < x\}$. Сделаем замену координат

$$\begin{cases} x = u - v, \\ y = u + v. \end{cases}$$

Тогда в новых координатах будем иметь $D = \{-u < v \leq u, u < h + 1/2\}$, $\gamma_1 = \{\tilde{\Gamma}_1(u, v) = 0\}$, $\gamma_2 = \{\tilde{\Gamma}_2(u, v) = 0\}$, где

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_1(u, v) &= \left(1 - \left(h + \frac{1}{2} - u\right) \cos^2 \varphi - (u + v) \sin^2 \psi\right)(u - v) \\ &\quad - \left(h + \frac{1}{2} - u\right)(u + v) \cos^2(\varphi - \psi), \\ \tilde{\Gamma}_2(u, v) &= u^2 \cos^2 \psi + v^2 \sin^2 \psi - \frac{k}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом, новая система координат является канонической для эллипса γ_2 (рис. 16).

Рис. 16

Имеем

$$\gamma'_1(0, 0) = -\frac{\partial \tilde{\Gamma}_1 / \partial u}{\partial \tilde{\Gamma}_1 / \partial v} \Big|_{(0,0)} = -\frac{X}{Y},$$

где

$$X = \left(h + \frac{1}{2}\right)(\cos^2(\varphi - \psi) + \cos^2 \varphi) - 1, \quad Y = \left(h + \frac{1}{2}\right)(\cos^2(\varphi - \psi) - \cos^2 \varphi) + 1.$$

(Здесь и ниже под $\gamma'_i(P)$ понимаем угловой коэффициент касательной к γ_i в точке P в новых координатах (u, v) .)

Точки P_1, P_2 принадлежат области $D \cap \{v < 0\}$. Поскольку $\gamma_1 \cap D \cap \{v < 0\} \neq \emptyset$, то $\gamma'_1(O) = -X/Y < 0$. Кроме того, $Y > 1 - (h + 1/2) \cos^2 \varphi > 0$, поэтому $X > 0$.

Ясно, что точки O, P_1, P_2 не лежат на одной прямой (так как все они принадлежат кривой 2-го порядка γ_1). Пусть P_1 лежит на прямой $v = -t_1 u$, P_2 — на прямой $v = -t_2 u$, $t_1, t_2 \in (0, X/Y)$, и пусть $t_1 < t_2$. Воспользуемся усилением принципа параллельности, гласящим, что в этом случае найдется такое $\tilde{t} \in (t_1, t_2)$, что касательные к γ_1 и γ_2 в точках P', P'' их пересечения с прямой $v = -\tilde{t} u$ параллельны (т.е. $\gamma'_1(P') = \gamma'_2(P'')$). Противоречие с этим даст следующее утверждение.

ЛЕММА 10. Пусть P_{1t}, P_{2t} — точки пересечения прямой $v = -tu$ с кривыми γ_1 и γ_2 в области $\{-u < v < 0\}$. Тогда $\gamma'_1(P_{1t}) < \gamma'_2(P_{2t})$ для любого $t \in (0, X/Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $P_{1t} = (u_t, -tu_t)$. Из равенства $\tilde{\Gamma}_1(u_t, -tu_t) = 0$ находим $u_t = (X - Yt)/Z$, где

$$Z = (1 + t) \cos^2 \varphi + (1 - t) \cos^2(\varphi - \psi) - (1 - t^2) \sin^2 \psi.$$

Из того, что $X - Yt > 0$ и $u_t > 0$, следует $Z > 0$. Далее находим $\tilde{\Gamma}'_1(P_{1t}) = (\alpha + \gamma)/(\beta + \delta)$, $\tilde{\Gamma}'_2(P_{2t}) = \gamma/\delta$, где

$$\begin{aligned} \alpha &= -XZ + (X - Yt)[(2 + t) \cos^2 \varphi + (2 - t) \cos^2(\varphi - \psi) - 2], \\ \beta &= YZ + (X - Yt)[\cos^2 \varphi - \cos^2(\varphi - \psi)], \\ \gamma &= 2(X - Yt) \cos^2 \psi, \quad \delta = 2(X - Yt)t \sin^2 \psi. \end{aligned}$$

Воспользуемся тем фактом, что

$$\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} < \frac{\gamma}{\delta} \iff \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\gamma}{\delta},$$

если только $\beta(\beta + \delta) > 0$. Так как $\delta = 2(X - Yt)t \sin^2 \psi \geq 0$, то достаточно проверить, что $\beta = Z(Y + u_t[\cos^2 \varphi - \cos^2(\varphi - \psi)]) > 0$. Поскольку $0 < u_t < h + 1/2$ и β линейно по u_t , то положительность β следует из того, что $\beta|_{u_t=0} = ZY > 0$, $\beta|_{u_t=h+1/2} = Z > 0$. Таким образом, получаем

$$\tilde{\Gamma}'_1(P_{1t}) < \tilde{\Gamma}'_2(P_{2t}) \iff \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\cos^2 \psi}{t \sin^2 \psi}.$$

Несложно проверить, что

$$\begin{aligned} \alpha &= (X - Yt)(2 \sin(\psi - \varphi) \cos \psi \sin \varphi - t^2 \sin^2 \psi) - YZt, \\ \beta &= 2 \cos^2(\varphi - \psi) - Y(1 - t^2) \sin^2 \psi. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\cos^2 \psi}{t \sin^2 \psi} &\iff (X - Yt)t(2 \sin(\psi - \varphi) \cos \psi \sin \varphi - t^2 \sin^2 \psi) - YZt^2 \\ &< 2 \cos^2(\varphi - \psi) \operatorname{ctg}^2 \psi - Y(1 - t^2) \cos^2 \psi. \end{aligned}$$

Имеем

$$(X - Yt)t \leq \frac{X^2}{4Y} \leq \frac{X}{4} \frac{\cos^2(\varphi - \psi) - \sin^2 \varphi}{\cos^2(\varphi - \psi) + \sin^2 \varphi} = \frac{X}{4} \frac{\cos \psi \cos(2\varphi - \psi)}{\cos^2(\varphi - \psi) + \sin^2 \varphi}.$$

Далее, несложно показать, что

$$\cos \psi \cos(2\varphi - \psi) \sin(\psi - \varphi) \cos \psi \sin \varphi < 2 \operatorname{ctg}^2 \psi (\cos^2(\varphi - \psi) + \sin^2 \varphi).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} (X - Yt)t(2 \sin(\psi - \varphi) \cos \psi \sin \varphi - t^2 \sin^2 \psi) - YZt^2 &\leq (X - Yt)t \cdot 2 \sin(\psi - \varphi) \cos \psi \sin \varphi \\ &\leq \frac{X}{4} \frac{\cos \psi \cos(2\varphi - \psi)}{\cos^2(\varphi - \psi) + \sin^2 \varphi} 2 \sin(\psi - \varphi) \cos \psi \sin \varphi \\ &< X \operatorname{ctg}^2 \psi \leq X \operatorname{ctg}^2 \psi + Y(\operatorname{ctg}^2 \psi - \cos^2 \psi) + Yt^2 \cos^2 \psi \\ &= 2 \left(h + \frac{1}{2} \right) \cos^2(\varphi - \psi) \operatorname{ctg}^2 \psi - Y(1 - t^2) \cos^2 \psi \\ &\leq 2 \cos^2(\varphi - \psi) \operatorname{ctg}^2 \psi - Y(1 - t^2) \cos^2 \psi, \end{aligned}$$

что и требовалось. Лемма доказана.

Итак, существование обратного отображения $(\alpha_3^\pm)^{-1}: T_{\text{can}}^2 \rightarrow T_{h,k}^\pm$ полностью доказано.

Шаг 4. Гладкость. Гладкость функций x, y по φ, ψ, k проверяется точно так же, как и при доказательстве теорем 6, 7. В частности, при $\cos(\varphi - \psi) = 0$ имеем $x(\varphi, \psi) = 0$, $y(\varphi, \psi) = \sqrt{k}$, $\frac{\partial \Gamma_1}{\partial y} = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x} \frac{\partial \Gamma_2}{\partial y} = \left(1 - \frac{1}{2}(2h + 1 - \sqrt{k}) \cos^2 \varphi - \sqrt{k} \sin^2 \psi \right) 2\sqrt{k} \\ &= \sqrt{k} (2 - (2h + 1 + \sqrt{k}) \cos^2 \varphi) \geq \sqrt{k} (1 - 2h - \sqrt{k}) > 0. \end{aligned}$$

Теорема 8 полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $k \rightarrow 0$ цикл $\psi = \{\varphi = \text{const}\}$ на III-торах стягивается в точку, а цикл $\varphi = \{\psi = \text{const}\}$ накладывается на критическую окружность атома A . При $k \rightarrow (2h + 1)^2$ ($h < 0$), наоборот, цикл φ стягивается в точку, а цикл ψ накладывается на критическую окружность атома A .

4.4. Другой способ доказательства теоремы 3, вытекающий из явного описания топологии. Теоремы 6–8 позволяют предъявить базисные циклы на граничных торах атомов. Для этого нужно понять, как функции φ , ψ , определенные выше на всех торах Лиувилля, “сшиваются” на особых слоях. Опишем формальные правила выбора базисных циклов на граничных торах атомов в двух случаях.

1) Для атома A , являющегося полноторием, в качестве первого базисного цикла на граничном торе следует взять меридиан полнотория (т.е. цикл, стягивающийся в точку внутри полнотория). В качестве второго цикла можно взять любой цикл, дополняющий первый до базиса (он будет изотопен критической окружности). При этом ориентация второго цикла определяется естественной ориентацией на критической окружности, задаваемой гамильтоновым потоком. Ориентацию первого цикла определяем ориентацией изоэнергетического многообразия (определяющей ориентацию всех атомов и их границ), требуя, чтобы выбранный базис на торе имел положительную ориентацию.

2) Для седлового атома без звездочек (в частности, C_2) в качестве первого базисного цикла берется слой соответствующего расслоения Зейферта. Он изотопен критическим окружностям, и потому имеет естественную ориентацию. Вторые циклы на каждом из граничных торов должны высекаться глобальным сечением атома (как тривиального расслоения Зейферта). Ориентация на вторых базисных циклах определяется ориентацией изоэнергетического многообразия.

Отныне циклы φ , ψ (а также функции φ , ψ), построенные выше на всех торах Лиувилля, будем снабжать соответствующими индексами: φ_1 , ψ_1 для I-торов, φ_2 , ψ_2 для II-торов и φ_3 , ψ_3 для III-торов.

ЛЕММА 11. Пусть точка $(s_1, s_2, s_3, r_1, r_2, r_3)$ лежит на особом слое $\{H = h, K = (2h - 1)^2\}$, $h \in (0, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$ (т.е. в прообразе дуг $\Sigma_2^{(1)}$, $\Sigma_2^{(2)}$ бифуркационной диаграммы). Тогда:

- а) если $s_3 = 0$ и $h > 1/2$, то $s_1 = r_2 = 0$;
- б) если $r_2 = 0$ и $0 < h < 1/2$, то $s_1 = s_3 = 0$;
- в) если $s_1 = 0$, то $r_2 = s_3 = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть $s_3 = 0$, $h > 1/2$. Тогда из (3.5) $s_1 r_1 + s_2 r_2 = 0$. Предположим, что $r_2 \neq 0$. Тогда найдется такое j , что $s_1 = j r_2$, $s_2 = -j r_1$. Следуя доказательству п. б) леммы 1, будем иметь $j^2 = r_2^2 + r_3^2$ и $2h = r_1^2(1 + r_3^2) \leq 1$. Получаем противоречие с $h > 1/2$. Таким образом, $r_2 = 0$. Из (3.5) теперь следует $s_1 r_1 = 0$, откуда легко находится, что $s_1 = 0$.

Утверждение п. б) легко выводится из доказательства п. а) леммы 3, а п. в) был рассмотрен при доказательстве леммы 4. Лемма доказана.

Вычислим метки молекулы W_3^* . Рассмотрим изоэнергетическую поверхность $Q_h^3 = \{H = h\}$, $h > 1/2$. Пусть L – особый слой, соответствующий атому C_2 . Напомним (см. лемму 4), что его критические окружности задаются

следующим образом:

$$S^\pm = \left\{ s_1 = r_2 = s_3 = 0, r_1^2 + r_3^2 = 1, s_2 = \pm \sqrt{2h - r_1^2} \right\}.$$

В силу леммы 11 $s_1 \neq 0$, $s_3 \neq 0$ на $L \setminus S^\pm$. Особый слой L без критических окружностей распадается на несвязное объединение четырех колец $R^{\pm\pm}$. В этом обозначении первый знак верхнего индекса совпадает со знаком s_1 на данном кольце, второй знак – со знаком s_3 (например, на R^{+-} $s_1 > 0$, $s_3 < 0$). При $k \rightarrow (2h-1)^2 - 0$ предельное множество для I^+ -торов – $R^{++} \sqcup R^{-+} \sqcup S^+ \sqcup S^-$, для I^- -торов – $R^{+-} \sqcup R^{-+} \sqcup S^+ \sqcup S^-$. При $k \rightarrow (2h-1)^2 + 0$ предельное множество для Π^+ -торов – $R^{++} \sqcup R^{+-} \sqcup S^+ \sqcup S^-$, для Π^- -торов – $R^{-+} \sqcup R^{--} \sqcup S^+ \sqcup S^-$.

Так как на кольцах $R^{\pm\pm}$ $s_1 \neq 0$ и $r_1^2 + r_2^2 \neq 0$ (ибо $s_3 \neq 0$), то определены отображения

$$\tilde{\alpha}_1^\pm = \tilde{\alpha}_{1,h}^\pm: R^{+\pm} \sqcup R^{-\pm} \rightarrow S^1(\varphi) \times \left(S^1(\psi) \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2} \right\} \right),$$

задаваемые так же, как и отображения $\alpha_1^\pm$ (см. п. 4.1).

ТЕОРЕМА 9. а) Отображения $\tilde{\alpha}_{1,h}^\pm$ – диффеоморфизмы.

б) Отображения

$$\tilde{\nu}_1^\pm = \tilde{\nu}_{1,h}^\pm: S^1(\varphi) \times \left(S^1(\psi) \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2} \right\} \right) \times (0, (2h-1)^2] \rightarrow Q_h^3,$$

определенные формулой

$$\tilde{\nu}_{1,h}^\pm(\cdot, k) = \begin{cases} \nu_{1,h}^\pm(\cdot, k), & \text{если } k < (2h-1)^2, \\ (\tilde{\alpha}_{1,h}^\pm)^{-1}(\cdot), & \text{если } k = (2h-1)^2, \end{cases}$$

являются гладкими (т.е. продлевают гомотопию, задаваемую отображениями $\nu_{1,h}^\pm$ до особого слоя атома C_2).

Доказательство является почти дословным повторением доказательства теоремы 6 с учетом того, что $\psi \neq \pm\pi/2$.

Теорема 9 позволяет продолжить цикл φ_1 с I -торов на кольца $R^{\pm\pm}$. Более того, утверждается, что этот цикл изотопен критическим окружностям, и поэтому его следует взять в качестве первого базисного цикла на граничных I -торах атома C_2 .

Сравним ориентацию цикла $\varphi_1 = \varphi_1^+$ на граничном I^+ -торе с естественной ориентацией критической окружности S^+ . Рассмотрим на S^+ четыре точки

$$\lim_{\psi \rightarrow \pi/2} (\tilde{\alpha}_1^+)^{-1} \left(\psi - \frac{\pi}{2}, \psi \right) = P_0^+ : r_1 = 1, \quad r_3 = 0,$$

$$\lim_{\psi \rightarrow \pi/2} (\tilde{\alpha}_1^+)^{-1} \left(\psi + \frac{\pi}{2}, \psi \right) = P_\pi^+ : r_1 = -1, \quad r_3 = 0,$$

$$\lim_{\psi \rightarrow \pi/2} (\tilde{\alpha}_1^+)^{-1} \left(\frac{\pi}{2}, \psi \right) = P_{\pi/2}^+ : r_1 = 0, \quad r_3 = -1,$$

$$\lim_{\psi \rightarrow \pi/2} (\tilde{\alpha}_1^+)^{-1} \left(\frac{3\pi}{2}, \psi \right) = P_{3\pi/2}^+ : r_1 = 0, \quad r_3 = 1.$$

Цикл φ_1 задает на S^+ ориентацию: положительным направлением обхода S^+ считается такое, при котором точки P_0^+ , $P_{\pi/2}^+$, P_π^+ , $P_{3\pi/2}^+$ следуют именно в таком порядке. Рассмотрим окружность S^+ в проекции на плоскость (r_1, r_3) и с помощью уравнений (3.8) сравним естественную ориентацию на ней с ориентацией, задаваемой циклом φ_1^+ . Из (3.8) при $s_1 = r_2 = s_3 = 0$ имеем $\dot{r}_1 = -s_2 r_3$. Так как $s_2 > 0$ на S^+ , то ориентация цикла φ_1^+ противоположна естественной ориентации на S^+ и в качестве первого базисного цикла на граничном Γ^+ -торе атома C_2 нужно брать цикл $-\varphi_1$.

Определим ориентацию первого базисного цикла на граничном Γ^- -торе. Рассмотрим точки

$$\begin{aligned} P_0^- &:= \lim_{\psi \rightarrow \pi/2} (\tilde{\alpha}_1^-)^{-1} \left(\psi - \frac{\pi}{2}, \psi \right), & P_{\pi/2}^- &:= \lim_{\psi \rightarrow \pi/2} (\tilde{\alpha}_1^-)^{-1} \left(\frac{\pi}{2}, \psi \right), \\ P_\pi^- &:= \lim_{\psi \rightarrow \pi/2} (\tilde{\alpha}_1^-)^{-1} \left(\psi + \frac{\pi}{2}, \psi \right), & P_{3\pi/2}^- &:= \lim_{\psi \rightarrow \pi/2} (\tilde{\alpha}_1^-)^{-1} \left(\frac{3\pi}{2}, \psi \right). \end{aligned}$$

Несложно видеть, что $P_0^- = P_0^+$, $P_{\pi/2}^- = P_{3\pi/2}^+$, $P_\pi^- = P_\pi^+$, $P_{3\pi/2}^- = P_{\pi/2}^+$. Следовательно, ориентация на S^+ , задаваемая циклом φ_1^- , совпадает с естественной и в качестве первого базисного цикла на граничном Γ^- -торе атома C_2 следует брать $+\varphi_1$.

Посмотрим теперь, как можно продлить на кольца $R^{\pm\pm}$ циклы φ_2 , ψ_2 с Π -торов. Так как на $R^{\pm\pm}$ $s_3 \neq 0$ и $r_2^2 + r_3^2 \neq 0$ (ибо $s_1 \neq 0$), то определены отображения

$$\tilde{\alpha}_2^\pm = \tilde{\alpha}_{2,h}^\pm: R^{\pm+} \sqcup R^{\pm-} \rightarrow S^1(\varphi) \times (S^1(\psi) \setminus \{0, \pi\}),$$

задаваемые так же, как и отображения $\alpha_2^\pm$.

ТЕОРЕМА 10. а) $\tilde{\alpha}_{2,h}^\pm$ – диффеоморфизмы.

б) Отображения $\tilde{\nu}_2^\pm = \tilde{\nu}_{2,h}^\pm: S^1(\varphi) \times (S^1(\psi) \setminus \{0, \pi\}) \times [(2h-1)^2, (2h+1)^2] \rightarrow Q_h^3$, определенные формулой

$$\tilde{\nu}_{2,h}^\pm(\cdot, k) = \begin{cases} \nu_{2,h}^\pm(\cdot, k), & \text{если } k > (2h-1)^2, \\ (\tilde{\alpha}_{2,h}^\pm)^{-1}(\cdot), & \text{если } k = (2h-1)^2, \end{cases}$$

являются гладкими.

Доказательство получается из доказательства теоремы 7 с учетом того, что $\psi \neq 0, \pi$.

Теорема 10 позволяет определить на кольцах $R^{\pm\pm}$ циклы $\varphi_2^\pm$, которые изотопны, с одной стороны, циклам φ_2 на Π -торах, а с другой – критическим окружностям $S^\pm$. Поэтому в качестве первого базисного цикла на граничных Π -торах атома C_2 нужно брать $\pm\varphi_2$. Для определения его ориентации (на Π^+ -торе), как и выше, рассмотрим четыре точки

$$\begin{aligned} \tilde{P}_0^+ &:= \lim_{\psi \rightarrow 0} (\tilde{\alpha}_2^+)^{-1}(0, \psi), & \tilde{P}_{\pi/2}^+ &:= \lim_{\psi \rightarrow 0} (\tilde{\alpha}_2^+)^{-1} \left(\psi + \frac{\pi}{2}, \psi \right), \\ \tilde{P}_\pi^+ &:= \lim_{\psi \rightarrow 0} (\tilde{\alpha}_2^+)^{-1}(\pi, \psi), & \tilde{P}_{3\pi/2}^+ &:= \lim_{\psi \rightarrow 0} (\tilde{\alpha}_2^+)^{-1} \left(\psi + \frac{3\pi}{2}, \psi \right). \end{aligned}$$

Цикл φ_2^+ задает на S^+ ориентацию: положительным направлением считается то, при котором точки $\tilde{P}_0^+, \tilde{P}_{\pi/2}^+, \tilde{P}_\pi^+, \tilde{P}_{3\pi/2}^+$ обходятся именно в таком порядке. Несложно заметить, что $\tilde{P}_0^+ = P_\pi^+, \tilde{P}_{\pi/2}^+ = P_{3\pi/2}^+, \tilde{P}_\pi^+ = P_0^+, \tilde{P}_{3\pi/2}^+ = P_{\pi/2}^+$. Следовательно, ориентация цикла φ_2^+ противоположна естественной ориентации окружности S^+ и в качестве первого базисного цикла на граничном Π^+ -торе атома C_2 нужно взять $-\varphi_2$.

Аналогично, рассматривая точки

$$\begin{aligned}\tilde{P}_0^- &:= \lim_{\psi \rightarrow 0} (\tilde{\alpha}_2^-)^{-1}(0, \psi) = P_0^+, & \tilde{P}_{\pi/2}^- &:= \lim_{\psi \rightarrow 0} (\tilde{\alpha}_2^-)^{-1}\left(\psi + \frac{\pi}{2}, \psi\right) = P_{3\pi/2}^+, \\ \tilde{P}_\pi^- &:= \lim_{\psi \rightarrow 0} (\tilde{\alpha}_2^-)^{-1}(\pi, \psi) = P_\pi^+, & \tilde{P}_{3\pi/2}^- &:= \lim_{\psi \rightarrow 0} (\tilde{\alpha}_2^-)^{-1}\left(\psi + \frac{3\pi}{2}, \psi\right) = P_{\pi/2}^+, \end{aligned}$$

заключаем, что ориентация на S^+ , задаваемая циклом φ_2^- , совпадает с естественной и в качестве первого базисного цикла на граничном Π^- -торе атома C_2 нужно брать $+\varphi_2$.

Определим вторые базисные циклы на граничных торах атома C_2 . Они должны высекаться на граничных торах некоторым глобальным сечением атома. Возьмем сечение, задаваемое условием $\{r_1 = 0\}$ и проходящее через точку $P_{\pi/2}^+$ (тем самым сечение определено однозначно). Это сечение высекает на I-торах циклы $\pm\psi_1$, а на II-торах – циклы $\pm(\varphi_2 + \psi_2)$ (см. (4.1), (4.12)). Для согласования ориентаций этих циклов рассмотрим изотопные им циклы на особом слое L .

Рассматриваемое сечение атома пересекает кольца $R^{\pm\pm}$ по следующим кривым:

$$\begin{aligned}\Delta^{++} &= \left\{ (\tilde{\alpha}_1^+)^{-1}\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right), \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right\} \\ &= \left\{ (\tilde{\alpha}_2^+)^{-1}\left(\psi + \frac{3\pi}{2}, \psi\right), \psi \in (0, \pi) \right\} \subset R^{++}, \\ \Delta^{-+} &= \left\{ (\tilde{\alpha}_1^+)^{-1}\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right), \psi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \right\} \\ &= \left\{ (\tilde{\alpha}_2^-)^{-1}\left(\psi + \frac{3\pi}{2}, \psi\right), \psi \in (0, \pi) \right\} \subset R^{-+}, \\ \Delta^{+-} &= \left\{ (\tilde{\alpha}_1^-)^{-1}\left(\frac{3\pi}{2}, \psi\right), \psi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right\} \\ &= \left\{ (\tilde{\alpha}_2^+)^{-1}\left(\psi + \frac{3\pi}{2}, \psi\right), \psi \in (\pi, 2\pi) \right\} \subset R^{+-}, \\ \Delta^{--} &= \left\{ (\tilde{\alpha}_1^-)^{-1}\left(\frac{3\pi}{2}, \psi\right), \psi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \right\} \\ &= \left\{ (\tilde{\alpha}_2^-)^{-1}\left(\psi + \frac{3\pi}{2}, \psi\right), \psi \in (\pi, 2\pi) \right\} \subset R^{--}. \end{aligned}$$

Эти кривые имеют по одной (общей) предельной точке на S^+ (это $P_{\pi/2}^+$) и на S^- . Цикл $\overline{\Delta^{++} \cup \Delta^{-+}}$ изотопен циклу $\pm\psi_1$ на I^+ -торах, $\overline{\Delta^{+-} \cup \Delta^{--}}$ – циклу $\pm\psi_1$ на I^- -торах, $\overline{\Delta^{++} \cup \Delta^{+-}}$ – циклу $\pm(\varphi_2 + \psi_2)$ на Π^+ -торах, $\overline{\Delta^{-+} \cup \Delta^{--}}$ – циклу $\pm(\varphi_2 + \psi_2)$ на Π^- -торах. Отметим также, что поскольку $s_2 > 0$ на S^+ и $s_2 < 0$ на S^- , то в силу (4.1), (4.12) окружности S^+ соответствуют значения $\psi_1 = \pi/2$, $\psi_2 = 0, 2\pi$, а окружности S^- – значения $\psi_1 = -\pi/2, 3\pi/2$, $\psi_2 = \pi$.

Возьмем на граничном I^+ -торе в качестве второго базисного цикла $-\psi_1$ (тем самым мы выбрали ориентацию на всей поверхности Q_h^3). Изотопный ему цикл на L состоит из кривых Δ^{++} и Δ^{-+} . Ориентации цикла $-\psi_1$ соответствует убывание функции ψ_1 и, следовательно, движение по кривой Δ^{++} в направлении от S^+ к S^- , а по кривой Δ^{-+} – от S^- к S^+ (рис. 17). Такие ориентации на Δ^{++} и Δ^{-+} позволяют однозначно определить ориентации на кривых Δ^{+-} , Δ^{--} , отвечающие некоторым ориентациям циклов $\pm\psi_1$, $\pm(\varphi_2 + \psi_2)$: на Δ^{+-} – от S^- к S^+ , на Δ^{--} – от S^+ к S^- . Таким ориентациям отвечают следующие ориентации циклов на торах Лиувилля: $-\psi_1$ на I^+ -торах, ψ_1 на I^- -торах, $\varphi_2 + \psi_2$ на Π^+ -торах и $-(\varphi_2 + \psi_2)$ на Π^- -торах. Учитывая, что ориентация вторых базисных циклов на граничных торах атома выбирается с помощью внешней нормали, делаем вывод, что в качестве вторых базисных циклов нужно взять $-\psi_1$ на I^+ -торе, ψ_1 на I^- -торе, $-(\varphi_2 + \psi_2)$ на Π^+ -торе и $\varphi_2 + \psi_2$ на Π^- -торе.

Рис. 17

Итак, мы получили следующие базисы фундаментальных групп граничных торов атома C_2 : $(-\varphi_1, -\psi_1)$ на I^+ -торе, (φ_1, ψ_1) на I^- -торе, $(-\varphi_2, -(\varphi_2 + \psi_2))$ на Π^+ -торе и $(\varphi_2, \varphi_2 + \psi_2)$ на Π^- -торе. Ориентируем все ребра молекулы W_3^* по возрастанию значения интеграла K . Замечания 1, 2 позволяют выбрать базисные циклы на граничных торах атомов A : $(-\psi_1, -\varphi_1)$ на I^+ -торе, (ψ_1, φ_1) на I^- -торе, $(-\psi_2, -\varphi_2)$ на Π^+ -торе и (ψ_2, φ_2) на Π^- -торе. При этом для определения ориентации вторых циклов нужно рассмотреть проекции критических окружностей на соответствующие координатные плоскости и воспользоваться уравнениями (3.8). Ориентации первых циклов выбираются так, чтобы определитель матриц склейки был равен -1 . Получаем следующие матрицы склейки торov Лиувилля на ребрах молекулы W_3^* : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ для I -торов, $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ для Π -торов. На всех ребрах метка $r = 0$, метка $\varepsilon = 1$. Атом C_2 образует семью

с меткой $n = -2$. Так как знак метки n зависит от ориентации изоэнергетического многообразия Q_h^3 , то, поменяв последнюю, можем считать, что $n = 2$.

Для вычисления меток молекулы W_2^* поступаем совершенно аналогично. Рассматриваем изоэнергетическую поверхность $Q_h^3 = \{H = h\}$, $h \in (0, 1/2)$. Пусть снова L – особый слой, отвечающий атому C_2 . Его критические окружности $S^\pm$ задаются следующим образом (см. лемму 4): $S^\pm = \{s_1 = r_2 = s_3 = 0, r_1^2 + s_2^2 = 2h, r_3 = \pm\sqrt{1 - r_1^2}\}$. Из леммы 11 следует, что $s_1 \neq 0, r_2 \neq 0$ на $L \setminus S^\pm$. Если из особого слоя L удалить критические окружности, он распадется на четыре кольца $R^{\pm\pm}$ (первый знак в индексе по-прежнему совпадает со знаком s_1 , а второй теперь отвечает знаку r_2). При $k \rightarrow (2h - 1)^2 - 0$ предельное множество для III^+ -торов – $R^{++} \sqcup R^{-+} \sqcup S^+ \sqcup S^-$, для III^- -торов – $R^{+-} \sqcup R^{--} \sqcup S^+ \sqcup S^-$. При $k \rightarrow (2h - 1)^2 + 0$ предельное множество для II^+ -торов – $R^{++} \sqcup R^{+-} \sqcup S^+ \sqcup S^-$, для II^- -торов – $R^{-+} \sqcup R^{--} \sqcup S^+ \sqcup S^-$.

Имеют место аналогии теорем 9, 10 для отображений

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{3,h}^\pm: R^{+\pm} \sqcup R^{-\pm} &\rightarrow S^1(\varphi) \times \left(S^1(\psi) \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2} \right\} \right), \\ \tilde{\alpha}_{2,h}^\pm: R^{\pm+} \sqcup R^{\pm-} &\rightarrow \left(S^1(\varphi) \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2} \right\} \right) \times S^1(\psi)\end{aligned}$$

(определяемых так же, как и отображения $\alpha_3^\pm, \alpha_2^\pm$). Это позволяет выбрать первые базисные циклы на граничных торах атома C_2 .

Далее рассматриваем глобальное сечение атома C_2 , задаваемое условием $\{r_1 = 0\}$ и проходящее через точку $\{r_1 = 0, s_2 = -\sqrt{2h}\}$ на окружности S^+ . Окончательно получаем следующие базисы циклов на граничных торах атомов (ребра ориентируем по возрастанию значения интеграла K):

для атома C_2

$$\begin{aligned}(-\varphi_3, -\psi_3) &\text{ на } \text{III}^+\text{-торе,} & (\psi_2, \varphi_2 + \psi_2) &\text{ на } \text{II}^+\text{-торе,} \\ (\varphi_3, \psi_3) &\text{ на } \text{III}^-\text{-торе,} & (-\psi_2, -(\varphi_2 + \psi_2)) &\text{ на } \text{II}^-\text{-торе;}\end{aligned}$$

для атомов A

$$\begin{aligned}(-\psi_3, -\varphi_3) &\text{ на } \text{III}^+\text{-торе,} & (\psi_2, -\varphi_2) &\text{ на } \text{II}^+\text{-торе,} \\ (\psi_3, \varphi_3) &\text{ на } \text{III}^-\text{-торе,} & (-\psi_2, \varphi_2) &\text{ на } \text{II}^-\text{-торе.}\end{aligned}$$

Находим матрицы склейки: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ для III -торов, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ для II -торов. Отсюда $r = 0$ на III -ребрах, $r = \infty$ на II -ребрах, $\varepsilon = 1$ на всех ребрах молекулы W_2^* .

Наконец, для вычисления меток молекулы W_1^* выбираем базисные циклы на граничных торах атомов A с помощью замечания 3. При этом для определения ориентации вторых циклов используем уравнения (3.8). В итоге получаем следующие базисы:

для атома A , отвечающего дуге $\Sigma_1^{(1)}$,

$$(-\psi_3, -\varphi_3) \text{ на } \text{III}^+\text{-торе,} \quad (\psi_3, \varphi_3) \text{ на } \text{III}^-\text{-торе;}$$

для атома A , отвечающего дуге $\Sigma_3^{(1)}$,

$$(-\varphi_3, -\psi_3) \text{ на } \Pi^+ \text{-торе,} \quad (\varphi_3, \psi_3) \text{ на } \Pi^- \text{-торе.}$$

Таким образом, матрица склейки на обеих связных компонентах равна $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, откуда $r = 0$, $\varepsilon = 1$.

§ 5. Вычисление меток с помощью разделения переменных

В заключение покажем, как некоторые из меток молекул, фигурирующих в теореме 3, можно вычислить с использованием разделения переменных, найденного С. А. Чаплыгиным в [18]. Именно, будут вычислены метки r и ε на Π -ребрах молекул W_2^* и W_3^* . Вычислению остальных меток тем же способом препятствует вырождение при $K = 0$ замены, приводящей к разделяющимся переменным (см. ниже формулы (5.1)).

При фиксированных значениях h, k интегралов H, K переменные разделения u_1, u_2 вводятся следующим образом:

$$u_1 = \frac{s_1^2 + s_2^2 + k}{r_3^2}, \quad u_2 = \frac{s_1^2 + s_2^2 - k}{r_3^2}. \quad (5.1)$$

В переменных u_1, u_2 система (1.1) сводится к двум уравнениям

$$\dot{u}_1 = -\sqrt{2(u_1^2 - 1)(u_1 - m)}, \quad \dot{u}_2 = -\sqrt{2(1 - u_2^2)(n - u_2)},$$

где $m = 2h + \sqrt{k}$, $n = 2h - \sqrt{k}$. Формулы (5.1) задают проекцию слоя слоения Лиувилля на прямоугольник

$$\max\{m, 1\} \leq u_1 \leq +\infty, \quad -1 \leq u_2 \leq \min\{n, 1\},$$

называемый *областью возможности движения*. Чтобы сделать его конечным, положим $\tilde{u}_1 = m/u_1$ (предполагая для простоты, что $h > 0$). Тогда $\tilde{u}_1 \in [0, m/\max\{m, 1\}]$. Исходя из найденной в [18] зависимости фазовых переменных от переменных разделения, будем иметь

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{m - \tilde{u}_1} \sqrt{1 - u_2}}{\sqrt{m - \tilde{u}_1 u_2}}, \\ s_2 &= \frac{\sqrt[4]{k}}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{m + \tilde{u}_1} \sqrt{1 + u_2}}{\sqrt{m - \tilde{u}_1 u_2}}, \\ s_3 &= \frac{\sqrt{m - \tilde{u}_1} \sqrt{m + \tilde{u}_1} \sqrt{n - u_2} + \sqrt{1 - u_2} \sqrt{1 + u_2} \sqrt{m} \sqrt{1 - \tilde{u}_1} \sqrt{\tilde{u}_1}}{\sqrt{2}(m - \tilde{u}_1 u_2)}, \\ r_1 &= \frac{\sqrt{m + \tilde{u}_1} \sqrt{1 - u_2} \sqrt{n - u_2} \sqrt{\tilde{u}_1} - \sqrt{1 + u_2} \sqrt{m - \tilde{u}_1} \sqrt{m} \sqrt{1 - \tilde{u}_1}}{\sqrt{2}(m - \tilde{u}_1 u_2)}, \\ r_2 &= \frac{\sqrt{m - \tilde{u}_1} \sqrt{1 + u_2} \sqrt{n - u_2} \sqrt{\tilde{u}_1} + \sqrt{1 - u_2} \sqrt{m + \tilde{u}_1} \sqrt{m} \sqrt{1 - \tilde{u}_1}}{\sqrt{2}(m - \tilde{u}_1 u_2)}, \\ r_3 &= -\frac{\sqrt{2} \sqrt[4]{k} \sqrt{\tilde{u}_1}}{\sqrt{m - \tilde{u}_1 u_2}}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Как видно, фазовые переменные $\mathbf{s}$, $\mathbf{r}$ определяются восемью радикалами

$$\begin{aligned} \sqrt{m - \tilde{u}_1}, \quad \sqrt{m + \tilde{u}_1}, \quad \sqrt{1 - \tilde{u}_1}, \quad \sqrt{\tilde{u}_1}, \\ \sqrt{1 - u_2}, \quad \sqrt{1 + u_2}, \quad \sqrt{n - u_2}, \quad \sqrt{m - \tilde{u}_1 u_2}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Эти радикалы делятся на две группы: те, которые периодически меняют знак вдоль траекторий системы, и те, которые имеют постоянный знак. Идея, принадлежащая М. П. Харламову [20]–[22] и развитая Г. Е. Смирновым [23], состоит в том, чтобы учитывать знак радикалов первой группы с помощью так называемой тригонометрической подстановки. Пусть областью возможности движения на плоскости $\mathbb{R}^2(\tilde{u}_1, u_2)$ является некоторый прямоугольник $m_1 \leq \tilde{u}_1 \leq m_2$, $n_1 \leq u_2 \leq n_2$. Тогда положим

$$\tilde{u}_1 = m_1 \cos^2 \varphi_1 + m_2 \sin^2 \varphi_1, \quad u_2 = n_1 \cos^2 \varphi_2 + n_2 \sin^2 \varphi_2.$$

Для радикалов первой группы получим следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sqrt{m_2 - \tilde{u}_1} &= \sqrt{m_2 - m_1} \cos \varphi_1, & \sqrt{\tilde{u}_1 - m_1} &= \sqrt{m_2 - m_1} \sin \varphi_1, \\ \sqrt{n_2 - u_2} &= \sqrt{n_2 - n_1} \cos \varphi_2, & \sqrt{u_2 - n_1} &= \sqrt{n_2 - n_1} \sin \varphi_2. \end{aligned}$$

Остальные радикалы, как несложно видеть, будут относиться ко второй группе.

Если точка (h, k) является регулярным значением отображения момента, а знаки радикалов второй группы фиксированы, то переменные φ_1 , φ_2 являются корректно определенными координатами на торе Лиувилля и тем самым задают на нем два независимых цикла $\varphi_1 = (\varphi_2 = \text{const})$, $\varphi_2 = (\varphi_1 = \text{const})$. Чтобы выбрать допустимые системы координат на граничных торах атомов в терминах φ_1 , φ_2 , нужно изучить поведение циклов φ_1 , φ_2 вблизи особых слоев.

В качестве примера использования тригонометрической замены вычислим метки r и ε на Π -ребрах молекул W_2^* и W_3^* . Областями возможности движения на плоскости $\mathbb{R}^2(\tilde{u}_1, u_2)$ для точек (h, k) из камер I, II, III являются соответственно прямоугольники $\{0 \leq \tilde{u}_1 \leq 1, -1 \leq u_2 \leq 1\}$, $\{0 \leq \tilde{u}_1 \leq 1, -1 \leq u_2 \leq n\}$, $\{0 \leq \tilde{u}_1 \leq m, -1 \leq u_2 \leq n\}$. Для радикалов первой группы после тригонометрической замены получим соответственно следующие выражения:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \tilde{u}_1} &= \cos \varphi_1, & \sqrt{\tilde{u}_1} &= \sin \varphi_1, \\ \sqrt{1 - u_2} &= \sqrt{2} \cos \varphi_2, & \sqrt{1 + u_2} &= \sqrt{2} \sin \varphi_2; \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \tilde{u}_1} &= \cos \varphi_1, & \sqrt{\tilde{u}_1} &= \sin \varphi_1, \\ \sqrt{n - u_2} &= \sqrt{n + 1} \cos \varphi_2, & \sqrt{1 + u_2} &= \sqrt{n + 1} \sin \varphi_2; \end{aligned} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned} \sqrt{m - \tilde{u}_1} &= \sqrt{m} \cos \varphi_1, & \sqrt{\tilde{u}_1} &= \sqrt{m} \sin \varphi_1, \\ \sqrt{n - u_2} &= \sqrt{n + 1} \cos \varphi_2, & \sqrt{1 + u_2} &= \sqrt{n + 1} \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Из формул (5.5) видно, что при фиксированном $h > 0$ и $k \rightarrow (2h + 1)^2$ цикл φ_2 исчезает (так как $n \rightarrow -1$), а цикл φ_1 накладывается на критическую

окружность атома A . Следовательно, в качестве базиса циклов на граничных торах двух атомов A , соответствующих дуге $\Sigma_3^{(2)}$ бифуркационной диаграммы, можно взять $(\pm\varphi_2, \pm\varphi_1)$. Ориентация первого базисного цикла зависит от выбора ориентации изоэнергетического многообразия Q^3 . Для определения ориентации второго цикла нужно сравнить ориентацию, задаваемую на критических окружностях $S_{\Sigma_3}^\pm$ атомов A переменной φ_1 , с естественной ориентацией. Введем обозначения для знаков радикалов второй группы в случае камеры Π :

$$\begin{aligned} e_1 &= \text{sign} \sqrt{m - \tilde{u}_1}, & e_2 &= \text{sign} \sqrt{m + \tilde{u}_1}, \\ e_3 &= \text{sign} \sqrt{1 - u_2}, & e_4 &= \text{sign} \sqrt{m - \tilde{u}_1 u_2}. \end{aligned}$$

Поскольку на окружностях $S_{\Sigma_3}^\pm$ имеем $n = u_2 = -1$, подстановка формул (5.4) в (5.2) на них дает

$$\begin{aligned} s_1 &= S_1(\tilde{u}_1)e_1e_3e_4, & r_2 &= R_2(\tilde{u}_1)e_2e_3 \cos \varphi_1, \\ r_3 &= -R_3(\tilde{u}_1)e_4 \sin \varphi_1, & r_1 &= s_2 = s_3 = 0, \end{aligned}$$

где S_1, R_2, R_3 – однозначные положительные функции от $\tilde{u}_1$. Из леммы 2 следует, что связные компоненты в прообразе точек камеры Π и кривой $\Sigma_3^{(2)}$ различаются знаком s_1 . Это также может быть получено независимо, с использованием техники, изложенной в [20]. Для удобства можем положить $e_1 = e_2 = e_4 = 1$. Тогда связная компонента определяется знаком e_3 .

Для сравнения двух ориентаций на окружностях $S_{\Sigma_3}^\pm$ рассмотрим их проекции на плоскость $\mathbb{R}^2(r_2, r_3)$. Естественную ориентацию определяем из уравнения $\dot{r}_2 = s_1 r_3$, следующего из (3.8). Она совпадает (для обеих компонент) с ориентацией цикла φ_1 . Значит, второй базисный цикл берется со знаком плюс.

Рис. 18

Посмотрим теперь, что происходит при фиксированном h в окрестности особого слоя атома C_2 . Пусть сначала $h > 1/2$. Из (5.4), (5.5) видим, что при переходе через критический уровень цикл φ_1 никак не меняется. Следовательно, он является слоем расслоения Зейферта, соответствующего атому C_2 . Бифуркации подвергается только цикл φ_2 . На рис. 18 изображено сечение $\{\varphi_1 = \text{const}\}$

атома C_2 , расслоенное на окружности, и особый слой, состоящий из двух пересекающихся окружностей. На неособых слоях указана ориентация, задаваемая циклом φ_2 . Особый слой параметризуется переменной φ_2 через радикалы (5.3) следующим образом:

$$\sqrt{1-u_2} = \sqrt{2} \cos \varphi_2, \quad \sqrt{1+u_2} = \sqrt{2} \sin \varphi_2, \quad \sqrt{n-u_2} = \pm \sqrt{2} \cos \varphi_2. \quad (5.7)$$

Отсюда видно, что две критические окружности $S_{\Sigma_2}^{\pm}$ атома C_2 задаются условием $\varphi_2 = \pm \pi/2$. Для сравнения ориентации на них, задаваемой переменной φ_1 , с естественной ориентацией подставим (5.7) и выражения для радикалов с $\tilde{u}_1$ из (5.5) в (5.2). Учитывая, что $\cos \varphi_2 = 0$, получим

$$\begin{aligned} r_1 &= -R_1(\varphi_1)e_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1, & s_2 &= S_2(\varphi_1)e_2e_4 \sin \varphi_2, \\ r_3 &= -R_3(\varphi_1)e_4 \sin \varphi_1, & s_1 &= r_2 = s_3 = 0, \end{aligned}$$

где R_1, S_2, R_3 – однозначные положительные функции от φ_1 , а e_1, e_2, e_4 – определенные выше знаки радикалов. Из соображений непрерывности $e_1 = e_2 = e_4 = 1$ (так как мы это приняли для камеры II). Рассматривая теперь проекцию окружностей $S_{\Sigma_2}^{\pm}$ на плоскость $\mathbb{R}^2(r_1, r_3)$ и определяя естественную ориентацию на них из уравнения $\dot{r}_1 = -s_2r_3$ (см. (3.8)), заключаем, что она совпадает с ориентацией цикла φ_1 . Итак, на граничных торах атома C_2 в качестве первого базисного цикла нужно брать $+\varphi_1$. Исходя из рис. 18 выберем в качестве второго базисного цикла φ_2 на Π^+ -торах и $-\varphi_2$ на Π^- -торах (тем самым задавая ориентацию на Q^3). Теперь ориентация первого базисного цикла на граничных торах атомов A выбирается из условия равенства -1 определителя матриц склейки: φ_2 для Π^+ -торов и $-\varphi_2$ для Π^- -торов. В итоге получаем матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ в качестве матрицы склейки на обоих Π -ребрах молекулы W_3^* . Отсюда находим $r = 0, \varepsilon = 1$.

По аналогичным соображениям в случае $0 < h < 1/2$ слоем расслоения Зейферта, отвечающим атому C_2 , как видно из (5.5), (5.6), является цикл φ_2 . Отсюда сразу можно сделать вывод, что первая строка матриц склейки на Π -ребрах молекулы W_2^* будет иметь вид $(\pm 1, 0)$. Следовательно, $r = \infty$. Метка ε в этом случае будет зависеть от выбора ориентации на Q^3 .

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Формулы (5.2), (5.4)–(5.6) позволяют понять связь циклов φ_1, φ_2 на торах с циклами φ, ψ , построенными в предыдущем параграфе,

$$\begin{aligned} \begin{cases} \varphi_1 = \pm \varphi, \\ \varphi_2 = \pm(\varphi + \psi) \end{cases} & \text{для I-торов,} \\ \begin{cases} \varphi_1 = \pm \varphi, \\ \varphi_2 = \pm \psi \end{cases} & \text{для II-торов,} \\ \begin{cases} \varphi_1 = \pm(\varphi + \psi), \\ \varphi_2 = \pm \varphi \end{cases} & \text{для III-торов.} \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] А. Т. Фоменко, “Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю”, *Функц. анализ и его прил.*, **22**:4 (1988), 38–51; англ. пер.: A. T. Fomenko, “Topological invariants of Liouville integrable Hamiltonian systems”, *Funct. Anal. Appl.*, **22**:4 (1988), 286–296.
- [2] А. Т. Фоменко, Х. Ципанг, “Топологический инвариант и критерий эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **54**:3 (1990), 546–575; англ. пер.: A. T. Fomenko, H. Zieschang, “A topological invariant and a criterion for the equivalence of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom”, *Math. USSR-Izv.*, **36**:3 (1991), 567–596.
- [3] А. В. Болсинов, С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко, “Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности”, *УМН*, **45**:2(272) (1990), 49–77; англ. пер.: A. V. Bolsinov, S. V. Matveev, A. T. Fomenko, “Topological classification of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom. List of systems of small complexity”, *Russian Math. Surveys*, **45**:2 (1990), 59–94.
- [4] Нгуен Тьен Зунг, А. Т. Фоменко, “Топологическая классификация интегрируемых невырожденных гамильтонианов на изоэнергетической трехмерной сфере”, *УМН*, **45**:6(276) (1990), 91–111; англ. пер.: Nguyen Tien Zung, A. T. Fomenko, “Topological classification of integrable non-degenerate Hamiltonians on a constant energy three-dimensional sphere”, *Russian Math. Surveys*, **45**:6 (1990), 109–135.
- [5] А. А. Ошменков, “Fomenko invariants for the main integrable cases of the rigid body motion equations”, *Topological classification of integrable systems*, Adv. Soviet Math., **6**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 67–146.
- [6] А. Т. Фоменко, “Теория бордизмов интегрируемых гамильтоновых невырожденных систем с двумя степенями свободы. Новый топологический инвариант многомерных интегрируемых систем”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:4 (1991), 747–779; англ. пер.: A. T. Fomenko, “A bordism theory for integrable nondegenerate Hamiltonian systems with two degrees of freedom. A new topological invariant of higher-dimensional integrable systems”, *Math. USSR-Izv.*, **39**:1 (1992), 731–759.
- [7] А. Т. Фоменко, “Symplectic topology of integrable dynamical systems. Rough topological classification of classical cases of integrability in the dynamics of a heavy rigid body”, *Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика*. 15–2, Зап. научн. сем. ПОМИ, **235**, ПОМИ, СПб., 1996, 104–183; англ. пер.: A. T. Fomenko, “Symplectic topology of integrable dynamical systems. Rough topological classification of classical cases of integrability in the dynamics of a heavy rigid body”, *J. Math. Sci. (New York)*, **94**:4 (1999), 1512–1557.
- [8] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, “О размерности пространства интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы”, *Динамические системы и смежные вопросы*, Сборник статей. К 60-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова, Тр. МИАН, **216**, Наука, М., 1997, 45–69; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, “On the dimension of the space of integrable Hamiltonian systems with two degrees of freedom”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **216** (1997), 38–62.
- [9] А. В. Болсинов, В. С. Матвеев, А. Т. Фоменко, “Двумерные римановы метрики с интегрируемым геодезическим потоком. Локальная и глобальная геометрия”, *Матем. сб.*, **189**:10 (1998), 5–32; англ. пер.: A. V. Bolsinov, V. S. Matveev, A. T. Fomenko, “Two-dimensional Riemannian metrics with integrable geodesic flows. Local and global geometry”, *Sb. Math.*, **189**:10 (1998), 1441–1466.

- [10] А. В. Болсинов, П. Х. Рихтер, А. Т. Фоменко, “Метод круговых молекул и топология волчка Ковалевской”, *Матем. сб.*, **191**:2 (2000), 3–42; англ. пер.: A. V. Bolsinov, P. H. Richter, A. T. Fomenko, “The method of loop molecules and the topology of the Kovalevskaya top”, *Sb. Math.*, **191**:2 (2000), 151–188.
- [11] В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко, “Риманова геометрия”, *Геометрия* – 8, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., **76**, ВИНТИ, М., 2002, 5–262; англ. пер.: V. V. Trofimov, A. T. Fomenko, “Riemannian geometry”, *J. Math. Sci. (New York)*, **109**:2 (2002), 1345–1501.
- [12] Е. А. Кудрявцева, И. М. Никонов, А. Т. Фоменко, “Максимально симметричные клеточные разбиения поверхностей и их накрытия”, *Матем. сб.*, **199**:9 (2008), 3–96; англ. пер.: E. A. Kudryavtseva, I. M. Nikonov, A. T. Fomenko, “Maximally symmetric cell decompositions of surfaces and their coverings”, *Sb. Math.*, **199**:9 (2008), 1263–1353.
- [13] Е. А. Кудрявцева, А. Т. Фоменко, “Группы симметрий правильных функций Морса на поверхностях”, *Докл. РАН*, **446**:6 (2012), 615–617; англ. пер.: E. A. Kudryavtseva, A. T. Fomenko, “Symmetry groups of nice Morse functions on surfaces”, *Dokl. Math.*, **86**:2 (2012), 691–693.
- [14] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, *Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация*, т. 1, 2, Изд. дом “Удмуртский университет”, Ижевск, 1999, 444 с.; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, *Integrable Hamiltonian systems. Geometry, topology, classification*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004, xvi+730 pp.
- [15] О. Е. Орей, Р. Е. Рыбов, “Bifurcation sets in a problem on motion of a rigid body in fluid and in the generalization of this problem”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **3**:2 (1998), 82–91.
- [16] А. В. Болсинов, “Methods of calculation of the Fomenko–Zieschang invariant”, *Topological classification of integrable systems*, Adv. Soviet Math., **6**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991, 147–183.
- [17] П. И. Топалов, “Вычисление тонкого инварианта Фоменко–Цишанга для основных интегрируемых случаев движения твердого тела”, *Матем. сб.*, **187**:3 (1996), 143–160; англ. пер.: P. I. Topalov, “Computation of the fine Fomenko–Zieschang invariant for the main integrable cases of rigid body motion”, *Sb. Math.*, **187**:3 (1996), 451–468.
- [18] С. А. Чаплыгин, “Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости”, *Тр. отд. физ. наук общ-ва любителей естествознания*, **11**:2 (1903), 7–10.
- [19] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, “Траекторная классификация геодезических потоков двумерных эллипсоидов. Задача Якоби траекторно эквивалентна интегрируемому случаю Эйлера в динамике твердого тела”, *Функц. анализ и его прил.*, **29**:3 (1995), 1–15; англ. пер.: A. V. Bolsinov, A. T. Fomenko, “Orbital classification of geodesic flows on two-dimensional ellipsoids. The Jacobi problem is orbitally equivalent to the integrable Euler case in rigid body dynamics”, *Funct. Anal. Appl.*, **29**:3 (1995), 149–160.
- [20] М. П. Харламов, “Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приложения к классическим системам”, *Нелинейная динам.*, **6**:4 (2010), 769–805.
- [21] М. П. Харламов, “Топологический анализ и булевы функции: II. Приложения к новым алгебраическим решениям”, *Нелинейная динам.*, **7**:1 (2011), 25–51.
- [22] М. П. Харламов, А. Ю. Савушкин, “Разделение переменных и интегральные многообразия в одной частной задаче о движении обобщенного волчка Ковалевской”, *Укр. матем. вестн.*, **1**:4 (2004), 564–581; англ. пер.: M. P. Kharlamov, A. Yu. Savushkin, “Separation of variables, and integral manifolds in a particular problem of the motion of a generalized Kovalevskaya top”, *Ukr. Math. Bull.*, **1**:4 (2004), 569–586.

- [23] Г. Е. Смирнов, М. П. Харламов, “Круговые молекулы в одной частной задаче о движении обобщенного волчка Ковалевской”, *Региональные аспекты предпринимательства: прошлое и настоящее*, Материалы пятой межрегиональной научно-практической конференции (Ярославль, 17 апреля 2013 г.), ред. Е. Е. Белова, Изд-во “Канцлер”, Ярославль.

Станислав Сергеевич Николаенко
(Stanislav S. Nikolaenko)

Поступила в редакцию
04.06.2013

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: nikostas@mail.ru