Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Я. Будылин, С. О. Горчинский, Пересечения адель-
ных групп на поверхностях, *Матем. сб.*, 2013, том 204,
номер 12, 3–14

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8252>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 12:22:57

УДК 512.71

Р. Я. Будылин, С. О. Горчинский

Пересечения аделльных групп на поверхностях

В статье решается одна техническая проблема, связанная с аделями на алгебраических поверхностях. Произвольному конечному множеству натуральных чисел можно сопоставить некоторую адельную группу. Мы доказываем, что эта операция коммутует с пересечением для поверхностей над несчетным полем, и приводим контрпример для поверхностей над счетным полем.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: многомерные адели, многомерные локальные поля.

DOI: 10.4213/sm8252

§ 1. Введение

Адели для поверхностей были введены А. Н. Паршиным [1] как обобщение классических аделей для глобальных полей, в частности, полей рациональных функций на кривых (над конечным полем). В этом обобщении точки на кривых заменяются флагами, т.е. последовательностями вложенных неприводимых подмногообразий. В соответствии с наборами коразмерностей членов флага определяются некоторые адельные группы. Точнее, для поверхности X и подмножества $I \subset \{0, 1, 2\}$ определена адельная группа $\mathbf{A}_X(I, \mathcal{O}_X)$ (эта конструкция является частным случаем адельной группы $\mathbf{A}_X(I, \mathcal{F})$, определенной для произвольного квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на X). Для $I \subset J$ имеется каноническое отображение $\varphi_{IJ}: \mathbf{A}_X(I, \mathcal{O}_X) \rightarrow \mathbf{A}_X(J, \mathcal{O}_X)$, которое инъективно, если поверхность X регулярна (предложение 1). Таким образом, все адельные группы являются подгруппами в $\mathbf{A}_X(\{0, 1, 2\}, \mathcal{O}_X)$, и возникает естественный вопрос: верно ли, что группа $\mathbf{A}_X(I \cap J, \mathcal{O}_X)$ равна пересечению $\mathbf{A}_X(I, \mathcal{O}_X) \cap \mathbf{A}_X(J, \mathcal{O}_X)$? Заметим, что аналогичный вопрос для рациональных (т.е. неполных) аделей тривиален [1; § 2].

Для проективной поверхности X положительный ответ на данный вопрос был получен в [2] при помощи глобальных методов. Позже это использовалось в работе [3] при доказательстве теоремы Римана–Роха для поверхностей адельными методами. В нашей статье дается положительный ответ на поставленный выше вопрос в случае, если основное поле несчетно (теорема 1), и приводится

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 11-01-00145 и № 13-01-12420 оф. м2), Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-5139.2012.1), Лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ, Правительством РФ (договор 11.G34.31.0023). Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 12-01-31506 и № 12-01-3302) и некоммерческого фонда “Династия”.

контрпример в аффинном случае для счетного поля (теорема 2). Мы также даем положительный ответ на поставленный выше вопрос в проективном случае для произвольного локально свободного пучка конечного ранга. Доказательство во многом близко следует доказательству [2; предложение 4.3] для структурного пучка, мы включили сюда это рассуждение с любезного разрешения А. Н. Паршина.

Вопрос обобщения на случай большей размерности остается открытым. На самом деле, неизвестно даже, инъективно ли отображение φ_{IJ} (в том числе для регулярных многообразий). Заметим, что тем не менее верны аналогии всех утверждений настоящей статьи для ограниченных аделей на проективных коэ-маколеевых многообразиях произвольной размерности [4; теоремы 4, 5].

Авторы благодарны Д. В. Осипову за многочисленные полезные обсуждения и А. Н. Паршину за поддержку и важные замечания. Также авторы глубоко оценили прекрасные рабочие условия в Математическом институте им. Хаусдорфа в Бонне (НМ), где была начата работа над этой статьей.

§ 2. Формулировка основного результата

Напомним сначала некоторые общие факты об аделях на нётеровых схемах. Тем не менее, поскольку наш основной результат касается только поверхностей, читатель может с самого начала ограничиться только этим случаем. Отметим, что для аделей на поверхностях имеется явное описание [1], [5], [6].

Пусть X – нётерова схема, $\mathcal{F}$ – квазикогерентный пучок на X . Через $S(X)_p$, $p \geq 0$, обозначим множество всех флагов длины p на X , т.е. таких последовательностей схемных точек $(\eta_0, \dots, \eta_p)$, что $\eta_{i+1} \in \bar{\eta}_i$ и $\eta_{i+1} \neq \eta_i$, где $\bar{\eta}$ обозначает замыкание точки η в X . Для заданного подмножества $S \subset S(X)_p$ через $\mathbf{A}_X(S, \mathcal{F})$ обозначим соответствующую группу аделей [7], [8]. Функтор $\mathcal{F} \mapsto \mathbf{A}_X(S, \mathcal{F})$ точный и коммутирует с фильтрованными копределами. Существует каноническое вложение (см. [8; предложение 2.1.4])

$$\mathbf{A}_X(S, \mathcal{F}) \hookrightarrow \prod_{\Delta \in S} \mathbf{A}_X(\{\Delta\}, \mathcal{F}).$$

Таким образом, адель $a \in \mathbf{A}_X(S, \mathcal{F})$ однозначно определяется своими локальными компонентами $a_\Delta \in \mathbf{A}_X(\{\Delta\}, \mathcal{F})$. Положим по определению $\mathbf{A}_X(\emptyset, \mathcal{F}) := \mathcal{F}(X) = H^0(X, \mathcal{F})$. Мы будем использовать следующие факты.

ЛЕММА 1. *Для конечного морфизма нётеровых схем $f: X \rightarrow Y$ и для любого подмножества $T \subset S(Y)_p$, $p \geq 0$, имеется канонический изоморфизм*

$$\mathbf{A}_Y(T, f_*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}_X(f^{-1}T, \mathcal{F}),$$

где $f^{-1}T \subset S(X)_p$ определяется естественным образом.

Доказательство леммы 1 аналогично доказательству [9; предложение 3.1.7].

ЛЕММА 2. *Если схема X аффинна, то для любого подмножества $S \subset S(X)_p$, $p \geq 0$, имеется канонический изоморфизм*

$$\mathbf{A}_X(S, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}_X(S, \mathcal{F}).$$

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству [4; предложение 1.5]. А именно, так как функтор $\mathcal{F} \mapsto \mathbf{A}_X(S, \mathcal{F})$ коммутирует с фильтрованными копределами, можно предположить, что пучок $\mathcal{F}$ когерентен. Затем, используя точность функтора $\mathbf{A}_X(S, \mathcal{F})$ по $\mathcal{F}$ и конечную представимость когерентных пучков, можно свести задачу к очевидному случаю $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что схема X неприводима. Пусть d равно размерности схемы X . Пусть I – подмножество в $\{0, 1, \dots, d\}$, т.е. $I = \{i_0, \dots, i_p\}$ для строго возрастающей последовательности целых чисел $0 \leq i_0 < \dots < i_p \leq d$, $0 \leq p \leq d$. Положим

$$\mathbf{A}_X(I, \mathcal{F}) := \mathbf{A}_X(S(I), \mathcal{F}),$$

где $S(I)$ обозначает множество всех флагов $(\eta_0, \dots, \eta_p)$, для которых выполнены условия $\text{codim}_X(\bar{\eta}_j) = i_j$, $0 \leq j \leq p$. В частности, группа $\mathbf{A}_X(\{0\}, \mathcal{F})$ равна слою пучка $\mathcal{F}$ в общей точке X . Через $\underline{\mathbf{A}}_X(I, \mathcal{F})$ обозначим вялый пучок на X , определенный по формуле

$$\underline{\mathbf{A}}_X(I, \mathcal{F})(U) := \mathbf{A}_U(I, \mathcal{F}|_U),$$

где U – открытое подмножество X . По определению положим $\underline{\mathbf{A}}_X(\emptyset, \mathcal{F}) := \mathcal{F}$. Из леммы 2 непосредственно вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для любого подмножества $I \subset \{0, \dots, d\}$ существует канонический изоморфизм пучков*

$$\underline{\mathbf{A}}_X(I, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathbf{A}}_X(I, \mathcal{F}).$$

Для фиксированных подмножеств $I \subset J \subset \{0, \dots, d\}$ существует каноническое отображение, индуцированное граничным отображением на аделах (см. [8; п. 2.2]),

$$\varphi_{IJ}: \mathbf{A}_X(I, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{A}_X(J, \mathcal{F}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если X является регулярной неприводимой поверхностью над полем и пучок $\mathcal{F}$ плоский, то для всех подмножеств $I \subset J \subset \{0, 1, 2\}$ отображение φ_{IJ} инъективно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из явного описания аделей на регулярной поверхности [1; § 2], [5; п. 3.3], [6; п. 8.5] несложно вывести предложение для случая $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$. Более того, морфизм пучков

$$\underline{\mathbf{A}}_X(I, \mathcal{O}_X) \rightarrow \underline{\mathbf{A}}_X(J, \mathcal{O}_X),$$

индуцированный φ_{IJ} , также инъективен. Объединяя тот факт, что пучок $\mathcal{F}$ плоский, следствие 1 и точность слева функтора H^0 , мы получаем требуемый результат.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вполне вероятно, что предложение 1 также верно для любых нормальных совершенных двумерных неприводимых нётеровых схем X .

Таким образом, в условиях предложения 1 все группы $\mathbf{A}_X(I, \mathcal{F})$ канонически вложены в группу $\mathbf{A}_X(\{0, 1, 2\}, \mathcal{F})$. Основной вопрос, который мы изучаем в настоящей статье, заключается в том, равна ли группа $\mathbf{A}_X(I \cap J, \mathcal{F})$ пересечению $\mathbf{A}_X(I, \mathcal{F}) \cap \mathbf{A}_X(J, \mathcal{F})$ для произвольных подмножеств I и J в $\{0, 1, 2\}$.

Напомним, что плоский когерентный пучок – это то же самое, что локально свободный пучок конечного ранга [10; предложение (3.G)]. Приведем наш основной результат.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть X – регулярная неприводимая поверхность над полем k , $\mathcal{F}$ – плоский квазикогерентный пучок на X , а I и J – подмножества в $\{0, 1, 2\}$. Предположим, что выполнено одно из следующих условий:*

- (i) $I \cap J = I \setminus \{0\}$;
- (ii) поле k несчетно;
- (iii) $\mathcal{F}$ является локально свободным пучком конечного ранга, поверхность X проективна.

Тогда имеет место равенство

$$\mathbf{A}_X(I \cap J, \mathcal{F}) = \mathbf{A}_X(I, \mathcal{F}) \cap \mathbf{A}_X(J, \mathcal{F}),$$

где пересечение берется в группе $\mathbf{A}_X(\{0, 1, 2\}, \mathcal{F})$.

Доказательство теоремы 1 при условии (i) достаточно простое и дано в § 3. Доказательства теоремы при условиях (ii) и (iii) основаны на нескольких вспомогательных утверждениях и даны в § 4 и § 5 соответственно. Заметим, что доказательство теоремы при условии (ii) использует только элементарные факты из коммутативной алгебры, в то время как доказательство теоремы при условии (iii) использует двойственность Серра. В частности, для случая проективной регулярной поверхности над несчетным полем имеются два различных доказательства.

§ 3. Случай условия (i)

Пусть X и $\mathcal{F}$ те же, что и в теореме 1.

ЛЕММА 3. *Пусть X является регулярной неприводимой поверхностью над полем, и пусть пучок $\mathcal{F}$ плоский. Предположим, что для любого открытого аффинного подмножества $U \subset X$ выполняется равенство*

$$\mathbf{A}_U(I \cap J, \mathcal{O}_U) = \mathbf{A}_U(I, \mathcal{O}_U) \cap \mathbf{A}_{U_i}(J, \mathcal{O}_U).$$

Тогда имеется равенство

$$\mathbf{A}_X(I \cap J, \mathcal{F}) = \mathbf{A}_X(I, \mathcal{F}) \cap \mathbf{A}_X(J, \mathcal{F}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо воспользоваться тем, что пучок $\mathcal{F}$ плоский, а также следствием 1 и точностью слева функтора H^0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1, (i). Пусть выполнено условие (i). По лемме 3 достаточно рассмотреть случай $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$. Предположим, что $0 \in I$

(иначе доказывать нечего). Из явного описания аделей на регулярной поверхности [1; § 2], [5; п. 3.3], [6; п. 8.5] следует, что элемент $a \in \mathbf{A}_X(I, \mathcal{O}_X)$ принадлежит $\mathbf{A}_X(I \setminus \{0\}, \mathcal{O}_X)$ тогда и только тогда, когда для любого флага $\Delta = (\eta_X, \eta_1, \dots, \eta_p)$ из $M(I)$ выполняется условие $a_\Delta \in \mathbf{A}_X(\Delta \setminus \eta_X, \mathcal{O}_X)$, где η_X – общая точка поверхности X (если $I = \{0\}$, то последнее условие следует заменить на $a \in \mathcal{O}_{X,x}$ для любой точки $x \in X$).

Поскольку поверхность X регулярна, кольцо $A := \mathbf{A}_X(\Delta \setminus \eta_X, \mathcal{O}_X)$ также регулярно (это следует из явного описания локальных компонент аделей на регулярной поверхности [5; п. 3.3]). Следовательно, $a_\Delta \in A$ тогда и только тогда, когда $v_D(a) \geq 0$ для любого простого дивизора D в $\text{Spec}(A)$ [11; предложение 11.4]. По определению аделей $v_D(a) \geq 0$ для всех дивизоров D , которые не являются аналитическими компонентами никакого простого дивизора на X . Отсюда следует, что $a_\Delta \in A$ для всех $\Delta \in M(I)$ тогда и только тогда, когда $a \in \mathbf{A}_X(\{1, 2\}, \mathcal{O}_X)$. Иными словами, мы доказали равенство

$$\mathbf{A}_X(I \setminus \{0\}, \mathcal{O}_X) = \mathbf{A}_X(I, \mathcal{O}_X) \cap \mathbf{A}_X(\{1, 2\}, \mathcal{O}_X).$$

Поскольку $I \setminus \{0\} = I \cap J = I \cap \{1, 2\}$, доказательство окончено.

§ 4. Случай условия (ii)

Следующие две леммы используются также в § 5. Пусть X и $\mathcal{F}$ те же, что и в теореме 1.

ЛЕММА 4. *Предположим, что $0 \notin I \cup J$, $I, J \subset \{0, 1, 2\}$ и для любого плоского квазикогерентного пучка $\mathcal{G}$ на поверхности X выполняется равенство*

$$\mathbf{A}_X(I \cap J, \mathcal{G}) = \mathbf{A}_X(I, \mathcal{G}) \cap \mathbf{A}_X(J, \mathcal{G}).$$

Тогда выполняется равенство

$$\mathbf{A}_X(\{0\} \cup (I \cap J), \mathcal{F}) = \mathbf{A}_X(\{0\} \cup I, \mathcal{F}) \cap \mathbf{A}_X(\{0\} \cup J, \mathcal{F}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{F}_\eta$ обозначает постоянный пучок, ассоциированный со слоем пучка $\mathcal{F}$ в общей точке поверхности X . По определению аделей выполняется равенство (для него не требуется, чтобы пучок $\mathcal{F}$ был когерентным)

$$\mathbf{A}_X(\{0\} \cup I, \mathcal{F}) = \mathbf{A}_X(I, \mathcal{F}_\eta).$$

Имеем $\mathcal{F}_\eta = \varinjlim_D \mathcal{F}(D)$, где предел берется по всем эффективным (не обязательно приведенным) дивизорам D на X . Поскольку функтор $\mathbf{A}_X(I, \cdot)$ точный и коммутирует с фильтрованными копределами, мы получаем равенство

$$\mathbf{A}_X(\{0\} \cup I, \mathcal{F}) = \varinjlim_D \mathbf{A}_X(I, \mathcal{F}(D)).$$

Это дает требуемое утверждение после применения условия леммы к пучкам $\mathcal{G} = \mathcal{F}(D)$ для различных D .

ЛЕММА 5. *Предположим, что для любого плоского квазикогерентного пучка $\mathcal{G}$ на поверхности X выполняется равенство*

$$H^0(X, \mathcal{G}) = \mathbf{A}_X(\{1\}, \mathcal{G}) \cap \mathbf{A}_X(\{2\}, \mathcal{G}).$$

Тогда для всех $I, J \subset \{0, 1, 2\}$ выполняется равенство

$$\mathbf{A}_X(I \cap J, \mathcal{F}) = \mathbf{A}_X(I, \mathcal{F}) \cap \mathbf{A}_X(J, \mathcal{F}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1, (i) нам необходимо рассмотреть лишь пары (I, J) , для которых $I \cap J \neq I \setminus \{0\}$. А именно достаточно рассмотреть следующие пары (I, J) (с точностью до перестановки I и J):

$$(\{1\}, \{2\}), \quad (\{0, 1\}, \{2\}), \quad (\{1\}, \{0, 2\}), \quad (\{0, 1\}, \{0, 2\}).$$

Второй и третий случаи тривиально сводятся к первому следующим образом: имеется вложение

$$\mathbf{A}_X(\{0, 1\}, \mathcal{F}) \cap \mathbf{A}_X(\{2\}, \mathcal{F}) \subset \mathbf{A}_X(\{0, 1\}, \mathcal{F}) \cap \mathbf{A}_X(\{1, 2\}, \mathcal{F}) = \mathbf{A}_X(\{1\}, \mathcal{F}),$$

где последнее равенство следует из теоремы 1, (i). Следовательно,

$$\mathbf{A}_X(\{0, 1\}, \mathcal{F}) \cap \mathbf{A}_X(\{2\}, \mathcal{F}) = \mathbf{A}_X(\{1\}, \mathcal{F}) \cap \mathbf{A}_X(\{2\}, \mathcal{F}).$$

Аналогичное рассуждение работает и для пары $(\{1\}, \{02\})$. Четвертый случай сводится к первому случаю при помощи леммы 4.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как видно из доказательств, леммы 4 и 5 остаются верными после замены плоских квазикогерентных пучков на локально свободные пучки конечного ранга.

Следующая лемма – единственное место, в котором используется условие несчетности поля k .

ЛЕММА 6. *Пусть $a \in k[[u, v]]$ – ряд Тейлора. Предположим, что для любого многочлена $f \in k[u, v]$ с условием $f(0) = 0$ существует такой многочлен $b_f \in k[u, v]$, что $a \equiv b_f \pmod{f}$. Также предположим, что поле k несчетно. Тогда ряд a является многочленом, т.е. $a \in k[u, v]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a = \sum_{i,j \geq 0} a_{i,j} u^i v^j$. Для каждого $\lambda \in k$ рассмотрим линейный многочлен $f = u - \lambda v$. Тогда $k[[u, v]]/(f) \simeq k[[v]]$ и $a \pmod{f}$ совпадает со следующим рядом Тейлора:

$$\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i=0}^n a_{i, n-i} \lambda^i \right) v^n.$$

Предположим, что a не является многочленом. Это равносильно тому, что последовательность многочленов

$$p_n(t) := \sum_{i=0}^n a_{i, n-i} t^i$$

от формальной переменной t содержит бесконечно много ненулевых элементов. По предположению леммы для любого элемента λ существует такое n_0 , что при $n \geq n_0$ выполняется равенство $p_n(\lambda) = 0$. Это противоречит тому, что k несчетно, так как любой ненулевой многочлен имеет конечное множество корней, а множество многочленов p_n счетно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1, (ii). Пусть выполнено условие (ii). По лемме 5 достаточно доказать равенство $H^0(X, \mathcal{F}) = \mathbf{A}_X(\{1\}, \mathcal{F}) \cap \mathbf{A}_X(\{2\}, \mathcal{F})$. В силу леммы 3 можно предположить, что поверхность X аффинна и $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$. По лемме Нётер о нормализации существует конечный морфизм $\pi: X \rightarrow \mathbb{A}^2$. Согласно лемме 1 утверждение леммы Нётер для $(X, \mathcal{O}_X)$ эквивалентно утверждению для $(\mathbb{A}^2, \pi_*\mathcal{O}_X)$.

Поскольку $\mathbb{A}^2$ регулярна, а X равноразмерна, $k[X] = (\pi_*\mathcal{O}_X)(\mathbb{A}^2)$ является проективным модулем над $k[\mathbb{A}^2]$ (см. [11; предложение 18.17]). Следовательно, по лемме 2 достаточно рассмотреть случай $(\mathbb{A}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2})$.

Для краткости положим $A_i := \mathbf{A}_{\mathbb{A}^2}(\{i\}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2})$, $i = 1, 2$. Пусть $a \in A_1 \cap A_2$. Для любой неприводимой кривой $C \subset \mathbb{A}^2$ ограничение $a|_C := (a_{C,x}|_C)_{x \in C}$ элемента $a \in \mathbf{A}_{\mathbb{A}^2}(\{1, 2\}, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2})$ является элементом из $\mathbf{A}_C(\{0, 1\}, \mathcal{O}_C)$. Поскольку $a \in A_1$, мы видим, что $a|_C$ принадлежит полю рациональных функций $k(C)$. С другой стороны, элемент a принадлежит A_2 , следовательно, ограничение $a|_C$ регулярно на C (ср. с доказательством предложения 2 ниже).

Рассмотрим k -точку $x \in \mathbb{A}^2$. Тогда компонента $a_x \in \widehat{\mathcal{O}}_{\mathbb{A}^2, x}$ аделя $a \in A_2$ удовлетворяет условиям леммы 6, и поэтому $a_x \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}^2, x}$. Так как $a \in A_1$, рациональная функция a_x одинакова для всех точек $x \in X$, что завершает доказательство.

§ 5. Случай условия (iii)

Сначала напомним конструкции адельных комплексов и отображения обратного образа между ними. Для нётеровой схемы X и квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на X член степени p соответствующего адельного комплекса определяется по формуле

$$\mathbf{A}(X, \mathcal{F})^p := \mathbf{A}_X(S(X)_p, \mathcal{F}).$$

Существуют канонические изоморфизмы [8; теорема 4.2.3, предложение 5.1.3]

$$H^p(X, \mathcal{F}) \cong H^p(\mathbf{A}(X, \mathcal{F})^\bullet), \quad p \geq 0.$$

В частности, группа коциклов в $\mathbf{A}(X, \mathcal{F})^0$ равна группе $H^0(X, \mathcal{F})$.

Для морфизма конечного типа $f: Y \rightarrow X$ между нётеровыми схемами и квазикогерентного пучка $\mathcal{F}$ на X корректно определены отображения обратного образа (см. [12; § 1, п. 2])

$$f^*: \mathbf{A}_X(S(X)_p, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{A}_Y(S(Y)_p, f^*\mathcal{F}), \quad p \geq 0. \quad (5.1)$$

Для любого флага $\Delta \in S(Y)_p$ и $a \in \mathbf{A}_X(S(X)_p, \mathcal{F})$ имеем $(f^*a)_\Delta = f^*(a_{f(\Delta)})$, где $a_{f(\Delta)}$ равно нулю, если флаг $f(\Delta)$ не является невырожденным, и иначе используется каноническое отображение

$$f^*: \mathbf{A}_X(\{f(\Delta)\}, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{A}_Y(\{\Delta\}, f^*\mathcal{F}).$$

Отображения (5.1) определяют морфизм между адельными комплексами

$$f^*: \mathbf{A}(X, \mathcal{F})^\bullet \rightarrow \mathbf{A}(Y, f^* \mathcal{F})^\bullet.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если $\mathcal{F}$ является локально свободным пучком конечного ранга на регулярной поверхности X , то имеется канонический изоморфизм*

$$\mathbf{A}_X(\{1\}, \mathcal{F}) \cap \mathbf{A}_X(\{2\}, \mathcal{F}) \cong \varprojlim_Z H^0(Z, \mathcal{F}|_Z),$$

где проективный предел берется по всем таким замкнутым подсхемам $Z \subset X$ (не обязательно приведенным или неприводимым), что $Z \neq X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку пучок $\mathcal{F}$ когерентный, имеются равенства

$$\mathbf{A}_X(\{1\}, \mathcal{F}) = \prod_{C \subset X} \widehat{\mathcal{F}}_C, \quad \mathbf{A}_X(\{2\}, \mathcal{F}) = \prod_{x \in X} \widehat{\mathcal{F}}_x,$$

где C пробегает всевозможные неприводимые кривые на X , x пробегает всевозможные замкнутые точки на X , а $\widehat{\mathcal{F}}_C$ и $\widehat{\mathcal{F}}_x$ обозначают пополнения слоев $\mathcal{F}_C$ и $\mathcal{F}_x$ соответственно. Следовательно, существует корректно определенное отображение

$$\varprojlim_Z H^0(Z, \mathcal{F}|_Z) \rightarrow \mathbf{A}_X(\{1\}, \mathcal{F}) \cap \mathbf{A}_X(\{2\}, \mathcal{F}),$$

индуцированное взятием пределов по подсхемам в X , носитель которых является кривой C или точкой x . Построим обратное отображение.

Для произвольного $a \in \mathbf{A}_X(\{1\}, \mathcal{F}) \cap \mathbf{A}_X(\{2\}, \mathcal{F})$ рассмотрим элемент

$$\tilde{a} := (0, a, a) \in \mathbf{A}_X(\{0\}, \mathcal{F}) \oplus \mathbf{A}_X(\{1\}, \mathcal{F}) \oplus \mathbf{A}_X(\{2\}, \mathcal{F}) = \mathbf{A}(X, \mathcal{F})^0.$$

Тогда выполняется условие

$$d\tilde{a} \in \mathbf{A}_X(\{01\}, \mathcal{F}) \oplus \mathbf{A}_X(\{02\}, \mathcal{F}) \subset \mathbf{A}(X, \mathcal{F})^1.$$

Пусть $i: Z \rightarrow X$ – произвольная замкнутая подсхема такая, что $Z \neq X$. Поскольку размерность Z не больше чем 1, отображение обратного образа

$$i^*: \mathbf{A}_X(S(X)_1, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbf{A}_Z(S(Z)_1, \mathcal{F}|_Z)$$

на подпространствах $\mathbf{A}_X(\{01\}, \mathcal{F})$ и $\mathbf{A}_X(\{02\}, \mathcal{F})$ в $\mathbf{A}_X(S(X)_1, \mathcal{F})$ обращается в нуль. Следовательно, $i^*(d\tilde{a}) = 0$ и элемент $i^*(\tilde{a})$ является коциклом в $\mathbf{A}(Z, \mathcal{F}|_Z)^0$. Так как между $H^0(Z, \mathcal{F}|_Z)$ и $H^0(\mathbf{A}(Z, \mathcal{F}|_Z)^\bullet)$ имеется изоморфизм, то $i^*(\tilde{a})$ соответствует единственному элементу $s_Z \in H^0(Z, \mathcal{F}|_Z)$. Можно проверить, что набор $\{s_Z\}$ определяет элемент в проективном пределе, что и задает требуемое отображение

$$\mathbf{A}_X(\{1\}, \mathcal{F}) \cap \mathbf{A}_X(\{2\}, \mathcal{F}) \rightarrow \varprojlim_Z H^0(Z, \mathcal{F}|_Z).$$

Это завершает доказательство.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1, (iii). Пусть выполнено условие (iii). По лемме 5 достаточно доказать равенство $H^0(X, \mathcal{F}) = \mathbf{A}_X(\{1\}, \mathcal{F}) \cap \mathbf{A}_X(\{2\}, \mathcal{F})$. По предположению 2 нам нужно показать, что естественное вложение

$$H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow \varprojlim_Z H^0(Z, \mathcal{F}|_Z)$$

является изоморфизмом (предел берется по всем таким замкнутым подсхемам $Z \subset X$ (не обязательно приведенным или неприводимым), что $Z \neq X$).

Поскольку поверхность X проективна, по двойственности Серра существует такой очень обильный обратимый пучок $\mathcal{O}_X(1)$ на поверхности X , что

$$H^0(X, \mathcal{F}(-n)) = H^1(X, \mathcal{F}(-n)) = 0$$

для любого натурального числа $n > 0$.

Пусть D и E – схемы нулей ненулевых сечений пучков $\mathcal{O}_X(m)$ и $\mathcal{O}_X(n)$ для некоторых натуральных чисел $m, n > 0$. Из точных последовательностей групп когомологий следует, что ограничение $H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(D, \mathcal{F}|_D)$ является изоморфизмом, а ограничение $H^0(E, \mathcal{F}|_E) \rightarrow H^0(D \cap E, \mathcal{F}|_{D \cap E})$, где $D \cap E$ обозначает схемное пересечение, инъективно.

Теперь рассмотрим элемент $\{s_Z\}$ в группе $\varprojlim_Z H^0(Z, \mathcal{F}|_Z)$. Зафиксируем дивизор D как выше, и пусть $s \in H^0(X, \mathcal{F})$ – элемент, ограничение которого на D равно s_D . Тогда для любого дивизора E , определенного выше, ограничение s на E равно s_E , так как s и s_E ограничиваются в один и тот же элемент из группы $H^0(D \cap E, \mathcal{F}|_{D \cap E})$.

Мы утверждаем, что ограничение элемента s равно $s_{\tilde{x}}$ для любой замкнутой подсхемы $\tilde{x}$ поверхности X , носитель которой является замкнутой точкой $x \in X$. Действительно, достаточно рассмотреть случай $\tilde{x} = \text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^N)$, $N \geq 1$. Существует дивизор E , определенный как выше, проходящий через x . Тогда $\tilde{x}$ является замкнутой подсхемой в $N \cdot E$, т.е. в схеме нулей соответствующего сечения пучка $\mathcal{O}_X(Nn)$. Как было показано выше, ограничение элемента s на $N \cdot E$ равно $s_{N \cdot E}$, и, следовательно, ограничение s на $\tilde{x}$ равно $s_{\tilde{x}}$.

По предположению 2 отсюда следует, что $\{s_Z\}$ равен образу элемента s относительно отображения $H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow \varprojlim_Z H^0(Z, \mathcal{F}|_Z)$.

§ 6. Контрпример

Приведем контрпример к теореме 1, когда поверхность X аффинна, а поле k счетно. Для этого мы будем использовать следующую конструкцию.

Пусть X является аффинной поверхностью над полем k . Предположим, что ряд $\sum_{n \geq 1} f_n$, $f_n \in k[X]$, сходится в пополненном локальном кольце $\hat{\mathcal{O}}_{X,\eta}$ для любой схемной точки $\eta \in X$, не являющейся общей точкой поверхности X . Тогда данный ряд определяет такой элемент $a \in \mathbf{A}_X(\{0, 1, 2\}, \mathcal{O}_X)$, что для каждого флага $\Delta = (X, C, x)$ имеет место равенство

$$a_\Delta = \sum_{n \geq 1} f_n \in \hat{\mathcal{O}}_{X,C} \cap \hat{\mathcal{O}}_{X,x}.$$

Легко показать, что $a \in \mathbf{A}_X(\{1\}, \mathcal{O}_X) \cap \mathbf{A}_X(\{2\}, \mathcal{O}_X)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X является аффинной регулярной поверхностью над счетным полем k . Тогда

$$k[X] \subsetneq \mathbf{A}_X(\{1\}, \mathcal{O}_X) \cap \mathbf{A}_X(\{2\}, \mathcal{O}_X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По конструкции, приведенной перед теоремой, достаточно найти сходящийся ряд $\sum_{n \geq 1} f_n$, который не сходится ни к какому элементу из $k[X]$.

Множество простых идеалов в кольце $k[X]$ не более чем счетно (чтобы это показать, надо использовать теорему Гильберта о базисе и счетность кольца $k[X]$). Пусть $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n, \dots$ – последовательность всех ненулевых простых идеалов в кольце $k[X]$. Рассмотрим последовательность идеалов

$$\mathfrak{a}_1 := \mathfrak{p}_1, \quad \mathfrak{a}_n := \mathfrak{a}_{n-1}^2 \cdot \mathfrak{p}_n, \quad n \geq 2.$$

Выберем ненулевые элементы $g_n \in \mathfrak{a}_n$, $n \geq 1$. Выберем замкнутую точку $x \in X$ и ненулевую функцию $t \in k[X]$, обращающуюся в нуль в x . Пусть (t^a) , $a \in \mathbb{N}$, обозначает идеал $t^a \cdot \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$. Выберем возрастающую исчерпывающую фильтрацию кольца $k[X]$ конечномерными k -подпространствами

$$F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_l \subset F_{l+1} \subset \dots \subset k[X].$$

Так как все пространства F_l конечномерны и $\bigcap_{a \geq 0} (t^a) = 0$, мы видим, что для любого числа l существует натуральное число $a(l)$, для которого выполняется условие

$$F_l \cap (t^{a(l)}) = 0, \quad (6.1)$$

где пересечение рассматривается в кольце $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$. Мы можем также предполагать, что последовательность $a(l)$ строго возрастает по l . Положим $f_1 := g_1$. Определим индуктивно натуральные числа $l(n)$, $n \geq 2$, и многочлены $f_n \in k[X]$ следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f_i \in F_{l(n)}, \quad f_n := t^{a(l(n))} \cdot g_n, \quad n \geq 2.$$

В частности, последовательность $l(n)$ строго возрастает по n и $f_n \in F_{l(n+1)}$. Ряд $\sum_{n \geq 1} f_n$ сходится в пополненном локальном кольце $\widehat{\mathcal{O}}_{X,\eta}$ для любой схемной точки $\eta \in X$, не являющейся общей точкой поверхности X . Также этот ряд достаточно разрежен.

Обозначим через f сумму $\sum_{n \geq 1} f_n$ в $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$. Покажем, что f не принадлежит подкольцу $k[X] \subset \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$. Предположим обратное. Поскольку последовательность $l(n)$ строго возрастающая, $f \in F_{l(n)}$ для некоторого n . Так как $\sum_{i=1}^{n-1} f_i \in F_{l(n)}$ и по конструкции $\sum_{i \geq n} f_i \in (t^{a(l(n))})$, мы заключаем по условию (6.1), что $\sum_{i \geq n} f_i = 0$. С другой стороны, так как $f_i \in (t^{a(l(n+1))})$ при $i > n$, мы видим, что

$$\sum_{i \geq n} f_i \equiv f_n \pmod{t^{a(l(n+1))}}.$$

Поскольку $0 \neq f_n \in F_{l(n+1)}$, мы заключаем по условию (6.1), что элемент f_n не сравним с нулем по модулю $(t^{a(l(n+1))})$. Следовательно, $\sum_{i \geq n} f_i \neq 0$ и мы получаем противоречие.

Следующее предложение описывает пересечение $\mathbf{A}_X(\{1\}, \mathcal{O}_X) \cap \mathbf{A}_X(\{2\}, \mathcal{O}_X)$ и представляет интерес само по себе.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть X является аффинной поверхностью над произвольным полем k . Тогда:

- (i) существует канонический изоморфизм

$$\mathbf{A}_X(\{1\}, \mathcal{O}_X) \cap \mathbf{A}_X(\{2\}, \mathcal{O}_X) \cong \varprojlim_{\mathfrak{a}} k[X]/\mathfrak{a},$$

где проективный предел берется по всем ненулевым идеалам $\mathfrak{a} \subset k[X]$;

- (ii) любой элемент в пересечении $\mathbf{A}_X(\{1\}, \mathcal{O}_X) \cap \mathbf{A}_X(\{2\}, \mathcal{O}_X)$ получается из ряда $\sum_{n \geq 1} f_n$, $f_n \in k[X]$, конструкцией, описанной перед теоремой 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пункт (i) является частным случаем предложения 2.

Далее, докажем (ii). Если поле k несчетно, то по теореме 1, (ii) доказывать нечего. Предположим, что k счетно. Пусть $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n, \dots$ – последовательность идеалов в $k[X]$ из доказательства теоремы 2. По п. (i) элемент $a \in \mathbf{A}_X(\{1\}, \mathcal{O}_X) \cap \mathbf{A}_X(\{2\}, \mathcal{O}_X)$ определяет согласованный набор элементов $g_n \in k[X]/\mathfrak{a}_n$. Более того, по построению идеалов $\mathfrak{a}_n$ набор $\{g_n\}$ определяет элемент a единственным образом. Пусть элементы $h_n \in k[X]$, $n \geq 1$, являются произвольными подъемами элементов g_n . Положим

$$f_1 := h_1, \quad f_n := h_n - h_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Тогда ряд $\sum_{n \geq 1} f_n$ сходится в пополненном локальном кольце $\widehat{\mathcal{O}}_{X, \eta}$ для любой схемной точки $\eta \in X$ за исключением общей точки и соответствует элементу a , так как для любого $m \geq 1$ выполняются условия $f_{m+1} \in \mathfrak{a}_m$ и $\sum_{n=1}^m f_n \equiv g_m \pmod{\mathfrak{a}_m}$.

Список литературы

- [1] А. Н. Паршин, “К арифметике двумерных схем. I. Распределения и вычеты”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **40:4** (1976), 736–773; англ. пер.: A. N. Paršin, “On the arithmetic of two-dimensional schemes. I. Distributions and residues”, *Math. USSR-Izv.*, **10:4** (1976), 695–729.
- [2] T. Fimmel, A. N. Paršin, *An introduction to the higher adelic theory*.
- [3] Д. В. Осипов, А. Н. Паршин, “Гармонический анализ и теорема Римана–Роха”, *Докл. РАН*, **441:4** (2011), 444–448; англ. пер.: D. V. Osipov, A. N. Paršin, “Harmonic analysis and the Riemann–Roch theorem”, *Dokl. Math.*, **84:3** (2011), 826–829.
- [4] Д. В. Осипов, “Соответствие Кричевера для алгебраических многообразий”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **65:5** (2001), 91–128; англ. пер.: D. V. Osipov, “Krichever correspondence for algebraic varieties”, *Izv. Math.*, **65:5** (2001), 941–975.
- [5] D. V. Osipov, “ n -dimensional local fields and adèles on n -dimensional schemes”, *Surveys in contemporary mathematics*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **347**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2008, 131–164.

- [6] M. Morrow, *An introduction to higher dimensional local fields and adeles*, [arXiv: 1204.0586](#).
- [7] А. А. Бейлинсон, “Вычеты и адели”, *Функц. анализ и его прил.*, **14**:1 (1980), 44–45; англ. пер.: A. A. Beilinson, “Residues and adeles”, *Funct. Anal. Appl.*, **14**:1 (1980), 34–35.
- [8] A. Huber, “On the Parshin–Beilinson adeles for schemes”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **61**:1 (1991), 249–273.
- [9] A. Yekutieli, *An explicit construction of the Grothendieck residue complex*, With an appendix by Pramathanath Sastry, Astérisque, **208**, Soc. Math. de France, Paris, 1992.
- [10] H. Matsumura, *Commutative algebra*, Math. Lecture Note Ser., **56**, Benjamin, Reading, MA, 1980.
- [11] D. Eisenbud, *Commutative algebra*, With a view toward algebraic geometry, Grad. Texts in Math., **150**, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [12] A. N. Parshin, “Chern classes, adeles and L -functions”, *J. Reine Angew. Math.*, **341** (1983), 174–192.

Роман Яковлевич Будылин
(Roman Ya. Budylin)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
г. Москва
E-mail: budylin@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
10.06.2013 и 4.09.2013

Сергей Олегович Горчинский
(Sergey O. Gorchinskiy)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
г. Москва
E-mail: gorchins@mi.ras.ru