Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Королёв, О малых значениях дзета-функции Римана в точках Грама, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 1, 67–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8253>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 16:29:57

УДК 511.331

М. А. Королёв

О малых значениях дзета-функции Римана в точках Грама

Доказано существование на заданном промежутке большого количества точек Грама t_n , для которых значения дзета-функции Римана $\zeta(0.5 + it_n)$ оказываются “аномально” близки к нулю. Получена нижняя оценка отрицательного “дискретного” момента дзета-функции Римана на критической прямой.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: дзета-функция Римана, функция Харди, точки Грама.

DOI: 10.4213/sm8253

§ 1. Введение

Вопросы, которые рассматриваются в настоящей статье, по сути своей принадлежат к дискретной теории дзета-функции Римана $\zeta(s)$. Такое название носит целый класс задач, в которых исследуется поведение $\zeta(s)$ и связанных с ней функций на разных дискретных множествах точек $\{s_n\}$.

Пусть $\vartheta(t)$ – приращение непрерывной ветви аргумента функции $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ вдоль отрезка, соединяющего точки $s = 0.5$ и $s = 0.5 + it$, $t > 0$. Тогда Z -функция Харди, определяемая равенством $Z(t) = e^{i\vartheta(t)}\zeta(0.5 + it)$, вещественна при вещественных t , а ее действительные нули совпадают с ординатами нулей $\zeta(s)$, лежащих на критической прямой $\operatorname{Re} s = 0.5$ (см., например, [1; § 4, гл. III]).

Пусть $\varrho_n = \beta_n + i\gamma_n$, $n = 1, 2, \dots$, – комплексные нули $\zeta(s)$, лежащие в верхней полуплоскости и упорядоченные по возрастанию их мнимых частей (а в случае их совпадения расположенные в произвольном порядке): $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \dots \leq \gamma_n \leq \gamma_{n+1} \leq \dots$. Далее, при любом $n \geq 0$ определим t_n как единственное решение уравнения

$$\vartheta(t_n) = (n - 1)\pi$$

с условием $\vartheta'(t_n) > 0$. Величины t_n называются точками Грама. Некоторые характеристики последовательностей $\{\gamma_n\}$ и $\{t_n\}$ оказываются очень близки, чем и обусловлен интерес исследователей к точкам Грама. В частности, известно, что при неограниченном возрастании n справедливы асимптотические соотношения

$$\gamma_n \sim t_n \sim \frac{2\pi n}{\ln n}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-31165-мол-а).

и что число ординат γ_n , лежащих на достаточно длинном промежутке $(0, T]$, равно в силу формулы Римана–Мангольдта

$$\frac{T}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\ln T),$$

с точностью до слагаемого $O(\ln T)$ совпадает с числом точек Грама t_n , которые содержатся в том же промежутке (см. [2; § 6, гл. X], [3; п. 7]).

Из равенств

$$\zeta(0.5 + it) = e^{-i\vartheta(t)} Z(t) = Z(t) \cos \vartheta(t) - iZ(t) \sin \vartheta(t)$$

и определения t_n следует, что числа $\zeta(0.5 + it_n)$ вещественны и служат абсциссами точек пересечения вещественной оси и кривой

$$\mathcal{C}: t \mapsto (\operatorname{Re} \zeta(0.5 + it), \operatorname{Im} \zeta(0.5 + it)).$$

Пересечениям $\mathcal{C}$ с вещественной осью отвечают и нули функции Харди $Z(t)$, но в этих случаях такие точки совпадают с началом координат.

Естественно поставить вопрос о том, как распределены на вещественной оси эти точки пересечения. Например, могут ли они с ростом n “убегать” сколь угодно далеко вправо или влево от начала координат или, наоборот, сколь угодно близко приближаться к нему?

Рис. 1. Фрагмент кривой $\mathcal{C}$, отвечающий значениям $0 \leq t \leq 40$

Положительный ответ на первый вопрос был получен в работах [4], [5]. Оказывается, что при достаточно большом N всегда найдутся номера m и n такие, что $1 \leq m, n \leq N$ и

$$\zeta(0.5 + it_n) > c(\ln N)^{5/4}, \quad \zeta(0.5 + it_m) < -c(\ln N)^{5/4},$$

где $c > 0$ – абсолютная постоянная. Более того, при любых $0 < \varepsilon < 0.5$ и $N \geq N_0(\varepsilon)$ на том же промежутке найдется номер k такой, что

$$|\zeta(0.5 + it_k)| > c(\varepsilon) \exp \left((0.5 - \varepsilon) \sqrt{\frac{\ln N}{\ln \ln N}} \right).$$

Цель настоящей работы – дать ответ на второй из поставленных вопросов.

С одной стороны, совпадение точки Грама t_n с какой-либо из ординат γ_m нулей $\zeta(s)$ представляется совершенно неправдоподобным. Это позволяет предположить, что

$$\zeta(0.5 + it_n) \neq 0 \quad (1.1)$$

при всех¹ $n \geq 0$. Вместе с тем, численные данные доставляют примеры точек Грама, для которых величины $\zeta(0.5 + it_n)$ “аномально” близки к нулю. Следующая таблица содержит все номера n , не превосходящие 10^8 , для которых эти величины не превосходят по модулю 10^{-7} :

№	n	$\zeta(0.5 + it_n)$	№	n	$\zeta(0.5 + it_n)$
1	368 383	$8.908459 \cdot 10^{-8}$	7	55 785 549	$3.751899 \cdot 10^{-8}$
2	12 984 109	$-2.052298 \cdot 10^{-8}$	8	61 769 885	$8.026449 \cdot 10^{-8}$
3	21 567 185	$-6.709404 \cdot 10^{-8}$	9	65 463 721	$1.083783 \cdot 10^{-8}$
4	45 898 152	$8.302024 \cdot 10^{-8}$	10	69 612 841	$9.033652 \cdot 10^{-8}$
5	50 550 325	$-6.397503 \cdot 10^{-8}$	11	74 201 244	$2.875945 \cdot 10^{-8}$
6	52 220 649	$-6.529425 \cdot 10^{-8}$	–	–	–

Тот же промежуток содержит 60 значений n с условием $|\zeta(0.5 + it_n)| < 10^{-6}$.

Ниже мы приведем теоретическое обоснование этого явления. Именно, справедлива

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < \varepsilon < 10^{-3}$ – фиксированное число, $N \geq N_0(\varepsilon) > 0$, $M = [N^{\alpha+\varepsilon}]$, $\alpha = 27/82$. Пусть, далее, $\varphi(x)$ – произвольная неограниченная монотонно возрастающая функция, удовлетворяющая условию

$$a\varepsilon^{-1} \leq \varphi(x) \leq \sqrt{\ln \ln x},$$

где a – достаточно большая абсолютная постоянная. Тогда неравенство

$$|\zeta(0.5 + it_n)| < \exp \left(-\frac{1}{\varphi} \ln \ln N \right),$$

где $\varphi = \varphi(N)$, выполняется по крайней мере для

$$\frac{M\varphi}{2\pi\sqrt{\ln \ln N}} \exp \left(-\frac{3}{\varphi^2} \ln \ln N \right)$$

точек Грама t_n , $N < n \leq N + M$.

¹Отметим, что в работе А. Сельберга [6] высказано одно утверждение, из которого следует, что неравенство (1.1) имеет место для положительной доли номеров n .

Непосредственным следствием этого утверждения является нижняя оценка отрицательного “дискретного” момента $\zeta(s)$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть ε, δ – произвольные фиксированные числа, подчиненные условиям $0 < \varepsilon < 10^{-3}$, $\delta > 0$. Тогда при любом $N \geq N_0(\varepsilon, \delta)$ и при $M = [N^{\alpha+\varepsilon}]$, $\alpha = 27/82$, справедлива оценка

$$\sum_{N < n \leq N+M} |\zeta(0.5 + it_n)|^{-1} > M \exp \left(\frac{\ln \ln N}{(\ln \ln \ln N)^\delta} \right).$$

При доказательстве этих теорем мы существенно пользуемся идеями и методами классической работы А. Сельберга [7], а также недавней работы М. Радзивилла [8]. Это относится, в частности, к предложенному в [8] способу записи числа решений уравнения (3.10) с помощью мультипликативной функции $f(n)$ (см. лемму 7), а также к использованному в той же работе приему исключения из рассмотрения “плохого” множества, на котором исследуемая функция принимает “аномально” большие значения (множество $\mathcal{A}_3$ леммы 7).

Ниже мы пользуемся следующими обозначениями: $|\mathcal{A}|$ – число элементов конечного множества $\mathcal{A}$; $G(x)$ – гауссово распределение, т.е.

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du;$$

$$J_0(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{z}{2} \right)^{2m}$$

– функция Бесселя первого рода; символы $\sum_n$, $\sum_{n \in \mathcal{A}}$ обозначают соответственно сумму по всем n из промежутка $(N, N+M]$ и по всем n из того же промежутка, подчиненным условию $n \in \mathcal{A}$; через $\mathbf{E}(\xi)$ обозначается математическое ожидание случайной величины ξ , а через $\mathbf{P}\{\xi \leq x\}$ – вероятность того, что случайная величина ξ не превосходит x ; наконец, символы $\theta, \theta_1, \theta_2, \dots$ обозначают комплексные числа, по абсолютной величине не превосходящие единицы и в разных соотношениях, вообще говоря, разные.

§ 2. Вспомогательные утверждения

В настоящем параграфе помещены леммы, носящие вспомогательный, “технический”, характер.

ЛЕММА 1. Пусть $\{\xi_N\}$ – последовательность случайных величин. Предположим, что существуют фиксированное число $r > 0$ и положительные параметры $\sigma(N)$ и $\kappa(N)$, неограниченно возрастающие при $N \rightarrow +\infty$, такие, что для производящей функции $K_N(s) = \mathbf{E}(e^{s\xi_N})$ моментов случайной величины ξ_N в круге $|s| \leq r$ справедливо равенство

$$K_N(s) = \exp \left(\frac{s^2}{4} \sigma(N) \right) \Phi(s) (1 + O(\kappa^{-1}(N))),$$

где функция $\Phi(s)$ не зависит от N , аналитична в круге $|s| \leq r$, причем $\Phi(0) = 1$, а постоянная в знаке O абсолютная. Тогда для функции распределения

$$F_N(u) = \mathbf{P} \left\{ \frac{\xi_N \sqrt{2}}{\sqrt{\sigma(N)}} \leq u \right\}$$

нормированной случайной величины ξ_N при любом $u = o(\min(\kappa(N), \sqrt{\sigma(N)}))$, $u > 1$, справедливы следующие соотношения:

$$\frac{1 - F_N(u)}{1 - G(u)} = 1 + O(r(u; N)), \quad \frac{F_N(-u)}{G(-u)} = 1 + O(r(u; N)),$$

где

$$r(u; N) = u \left(\frac{1}{\kappa(N)} + \frac{1}{\sqrt{\sigma(N)}} \right),$$

а постоянные в знаках O являются абсолютными.

Это утверждение является частным случаем теоремы Хванга из [9], в которой следует положить $u(s) = s^2$, $v(s) = \ln \Phi(s)$, $\phi(N) = \sigma(N)/4$.

ЛЕММА 2. Пусть k, μ, ν — целые числа, $\mu, \nu \geq 0$, $k \geq 1$, $\mu + \nu = k$, $y_0 \leq y \leq N^{1/(2k)}$. Пусть, далее, $p_1, \dots, p_\mu, q_1, \dots, q_\nu$ пробегают простые числа из промежутка $(1, y]$, удовлетворяющие условию $p_1 \cdots p_\mu \neq q_1 \cdots q_\nu$. Пусть, наконец, все члены последовательности $a(p)$ при $p \leq y$ подчинены условию $|a(p)| \leq \delta$. Тогда для суммы

$$S = \sum_n \sum_{\substack{p_1, \dots, p_\mu \\ q_1, \dots, q_\nu}} \frac{a(p_1) \cdots \bar{a}(q_\nu)}{\sqrt{p_1 \cdots q_\nu}} \left(\frac{q_1 \cdots q_\nu}{p_1 \cdots p_\mu} \right)^{it_n}$$

справедлива оценка $|S| < (\delta x)^k \ln N$.

Доказательство этого утверждения практически дословно повторяет доказательство леммы 6 из работы [10].

§ 3. Основные леммы

Прежде всего введем ряд новых обозначений. Пусть $2 \leq x \leq t^2$. Следуя Сельбергу (см. [7]), положим

$$\sigma_{x,t} = 0.5 + 2 \max(|\beta - 0.5|, (\ln x)^{-1}),$$

где максимум берется по всем нулям $\varrho = \beta + i\gamma$ дзета-функции Римана, удовлетворяющим условию

$$|t - \gamma| \leq \frac{x^{3|\beta - 0.5|}}{\ln x}.$$

Пусть, далее, $n \geq 2$ – целое число. Положим

$$\Lambda_x(n) = \begin{cases} \Lambda(n), & \text{если } 1 \leq n \leq x, \\ \Lambda(n) \frac{\ln^2(x^3/n) - 2 \ln^2(x^2/n)}{2 \ln^2 x}, & \text{если } x < n \leq x^2, \\ \Lambda(n) \frac{\ln^2(x^3/n)}{2 \ln^2 x}, & \text{если } x^2 < n \leq x^3. \end{cases}$$

Доказательство восходящей к Сельбергу теоремы о том, что величина

$$\xi(t) = \frac{\sqrt{2} \ln |\zeta(0.5 + it)|}{\sqrt{\ln \ln T}}, \quad 0 < t \leq T,$$

имеет распределение, сходящееся при $T \rightarrow +\infty$ к гауссовскому, использует следующую “явную” формулу для вещественной части логарифма дзета-функции Римана:

$$\begin{aligned} \ln |\zeta(0.5 + it)| &= \sum_{m \leq x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}}} \frac{\cos(t \ln m)}{\ln m} \\ &+ O\left((\sigma_{x,t} - 0.5) \left((\sigma_{x,t} - 0.5) \ln x + \ln(\chi(t))\right) \left(\left| \sum_{m \leq x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t} + it}} \right| + \ln t\right)\right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\chi(t) = 1 + \frac{1}{\eta(t) \ln x},$$

где $\eta(t) = \min_{\beta + i\gamma} |t - \gamma|$ – расстояние от t до ближайшей ординаты нуля $\zeta(s)$, так что $\chi(\gamma_m) = +\infty$ (см. [11; теорема 5.2]).

Эта формула, однако, непригодна для исследования дискретной случайной величины со значениями

$$\xi(t_n) = \frac{\sqrt{2} \ln |\zeta(0.5 + it_n)|}{\sqrt{\ln \ln N}}, \quad 0 < n \leq N.$$

Дело в том, что доказательство теоремы Сельберга опирается на оценки интегралов от положительных степеней O -члена правой части (3.1) и, в частности, на оценки интегралов вида

$$\int_0^T (\ln \chi(t))^{2m} dt, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Все эти интегралы конечны, поскольку, например, конечны интегралы

$$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{t} \right)^{2m} dt.$$

В дискретном же случае вместо интегралов (3.2) приходится иметь дело с суммами

$$\sum_{n \leq N} (\ln \chi(t_n))^{2m}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

Отсутствие точной информации о взаимном расположении точек Грама и ординат нулей $\zeta(s)$ не позволяет утверждать даже, что величины (3.3) конечны.

Следующая лемма отчасти устраняет недостаток формулы (3.1) и позволяет оценить сверху логарифм $|\zeta(0.5 + it)|$ при любом t некоторой функцией $C(t)$, которая получается из правой части (3.1), грубо говоря, вычеркиванием множителя $\ln(\chi(t))$.

ЛЕММА 3. При $10 \leq x \leq t^\delta$, $800\delta = 1$, справедливо неравенство

$$\ln |\zeta(0.5 + it)| \leq C(t),$$

в котором

$$C(t) = \sum_{m \leq x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t}}} \frac{\cos(t \ln m)}{\ln m} + (\sigma_{x,t} - 0.5)^2 (\ln x) \left(a_1 \ln t + a_2 \left| \sum_{p \leq x^3} \frac{\Lambda_x(p)}{p^{\sigma_{x,t} + it}} \right| \right),$$

где $a_1 = 4.01$, $a_2 = 7.52$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $0.5 + it$ — нуль $\zeta(s)$, то неравенство леммы выполнено. Поэтому далее предполагаем, что $\zeta(0.5 + it) \neq 0$. В таком случае имеем

$$\ln |\zeta(0.5 + it)| = -\operatorname{Re} \left(\text{v. p.} \left(\int_{0.5}^{\sigma_{x,t}} + \int_{\sigma_{x,t}}^{+\infty} \right) \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} d\sigma \right) = -I_1 - I_2 + I_3,$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= (\sigma_{x,t} - 0.5) \operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)}, \\ I_2 &= \operatorname{Re} \left(\text{v. p.} \int_{\sigma_{x,t}}^{+\infty} \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} d\sigma \right), \\ I_3 &= \operatorname{Re} \left(\text{v. p.} \int_{0.5}^{\sigma_{x,t}} \left(\frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)} - \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \right) d\sigma \right). \end{aligned}$$

Для оценки I_1 воспользуемся неравенством

$$\left| \frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)} \right| < 0.8 \ln t + 2.6|r(x, t)| + 4.82, \quad r(x, t) = \sum_{m \leq x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma_{x,t} + it}}, \quad (3.4)$$

доказательство которого приведено в [7] (вычисление постоянных содержится в лемме 7 обзорной статьи [12]). Тогда

$$|I_1| \leq (\sigma_{x,t} - 0.5)(0.8 \ln t + 2.6|r(x, t)| + 4.82). \quad (3.5)$$

Пользуясь неравенством $0.5(\sigma_{x,t} - 0.5) \ln x \geq 1$, перепишем (3.5) в виде

$$|I_1| \leq (\sigma_{x,t} - 0.5)^2 (\ln x) \{a_1^{(1)} \ln t + a_2^{(1)} |r(x, t)| + a_3^{(1)}\},$$

где $a_1^{(1)} = 0.4$, $a_2^{(1)} = 1.3$, $a_3^{(1)} = 2.41$.

Чтобы вычислить I_2 , воспользуемся равенством

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = - \sum_{m \leq x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^s} + \frac{13\theta}{3} x^{1/4-\sigma/2} (0.5 \ln t + |r(x, t)| + 4),$$

справедливым² при $s = \sigma + it$, $\sigma \geq \sigma_{x,t}$ (см. [7], [12; лемма 3]). Находим

$$\begin{aligned} I_2 &= -\operatorname{Re} \int_{\sigma_{x,t}}^{+\infty} \left(\sum_{m \leq x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{m^{\sigma+it}} + \frac{13\theta}{3} x^{1/4-\sigma/2} (0.5 \ln t + |r(x, t)| + 4) \right) d\sigma \\ &= -\operatorname{Re} \left(\sum_{m \leq x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{\ln m} \frac{1}{m^s} \right) + \theta(\sigma_{x,t} - 0.5)^2 (\ln x) \{a_1^{(2)} \ln t + a_2^{(2)} |r(x, t)| + a_3^{(2)}\}, \end{aligned}$$

где $a_1^{(2)} = 13/(12e)$, $a_2^{(2)} = 13/(6e)$, $a_3^{(2)} = 26/(3e)$.

Наконец, применяя равенство

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{\varrho} \frac{1}{s - \varrho} + \theta(0.5 \ln |t| + 3)$$

(см. [13; § 76, § 77], а также [12; лемма 2]), при $\zeta(\sigma + it) \neq 0$ получим

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)} - \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \right) = \sum_{\varrho} \kappa(\varrho) + \theta_1(\ln t + 6),$$

где

$$\begin{aligned} \kappa(\varrho) &= \frac{\sigma_{x,t} - \beta}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} - \frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \\ &= \frac{(\sigma_{x,t} - \sigma)(t - \gamma)^2 + (\sigma_{x,t} - \sigma)(\sigma_{x,t} - \beta)(\beta - \sigma)}{\{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2\} \{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2\}} \\ &= \kappa_1(\varrho) + \kappa_2(\varrho). \end{aligned}$$

Положим также

$$j_r(\varrho) = \int_{0.5}^{\sigma_{x,t}} \kappa_r(\varrho) d\sigma, \quad j(\varrho) = j_1(\varrho) + j_2(\varrho).$$

Тогда

$$I_3 = \sum_{\varrho} j(\varrho) + \theta(\sigma_{x,t} - 0.5)(\ln t + 6).$$

Так как на всем промежутке $0.5 \leq \sigma \leq \sigma_{x,t}$ выполняются оценки

$$\begin{aligned} 0 \leq \kappa_1 &= \frac{\sigma_{x,t} - \sigma}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \frac{(t - \gamma)^2}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \\ &\leq \frac{\sigma_{x,t} - \sigma}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2}, \end{aligned}$$

²В формулировке леммы 3 работы [12] содержится опечатка: вместо $1/2 - \sigma/2$ должно быть $1/4 - \sigma/2$.

то для любого нуля $\varrho = \beta + i\gamma$ имеем

$$\begin{aligned} j_1 &\leq \int_{0.5}^{\sigma_{x,t}} \frac{(\sigma_{x,t} - \sigma) d\sigma}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} = \frac{1}{2} \frac{(\sigma_{x,t} - 0.5)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \\ &\leq \frac{1}{4} (\sigma_{x,t} - 0.5) (\ln x) \frac{(\sigma_{x,t} - 0.5)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2}. \end{aligned}$$

Для оценки κ_2 и j_2 отметим сначала, что при $\beta \leq 0.5$ или $\beta \geq \sigma_{x,t}$ числитель κ_2 неположителен на всем промежутке интегрирования, так что для всех таких нулей имеем $j_2 \leq 0$. Поэтому всюду далее предполагаем, что $0.5 < \beta < \sigma_{x,t}$. Обозначим $\tau = |t - \gamma|$ и рассмотрим два случая.

Случай 1: $\tau > (\ln x)^{-1}$. Преобразуя κ_2 , найдем

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= \frac{(\sigma_{x,t} - \sigma)(\sigma_{x,t} - \sigma + \sigma - \beta)(\beta - \sigma)}{\{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2\}\{(\sigma - \beta)^2 + \tau^2\}} \\ &= \frac{(\sigma_{x,t} - \sigma)^2(\beta - \sigma) - (\sigma_{x,t} - \sigma)(\beta - \sigma)^2}{\{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2\}\{(\sigma - \beta)^2 + \tau^2\}} \\ &\leq \frac{(\sigma_{x,t} - \sigma)^2(\beta - \sigma)}{\{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2\}\{(\sigma - \beta)^2 + \tau^2\}}. \end{aligned}$$

Далее, замечая, что последняя дробь отрицательна при $\sigma > \beta$, получаем

$$\begin{aligned} j_2 &\leq \int_{0.5}^{\beta} \frac{(\sigma_{x,t} - \sigma)^2(\beta - \sigma) d\sigma}{\{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2\}\{(\sigma - \beta)^2 + \tau^2\}} \\ &\leq \frac{(\sigma_{x,t} - 0.5)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} \int_{0.5}^{\beta} \frac{(\beta - \sigma) d\sigma}{(\beta - \sigma)^2 + \tau^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(\sigma_{x,t} - 0.5)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} \ln \frac{(\beta - 0.5)^2 + \tau^2}{\tau^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{(\sigma_{x,t} - 0.5)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} \ln \frac{(\sigma_{x,t} - 0.5)^2 + \tau^2}{\tau^2} \\ &\leq \frac{(\sigma_{x,t} - 0.5)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} \ln \left(1 + \frac{\sigma_{x,t} - 0.5}{\tau} \right) \\ &\leq \frac{(\sigma_{x,t} - 0.5)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} \frac{\sigma_{x,t} - 0.5}{\tau} \\ &< \frac{(\sigma_{x,t} - 0.5)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} (\sigma_{x,t} - 0.5) \ln x. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Случай 2: $0 \leq \tau \leq (\ln x)^{-1}$. Допустим сначала, что $\sigma_{x,t} = 0.5 + 2(\beta_0 - 0.5)$, где $\beta_0 > 0.5$ – абсцисса некоторого нуля $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ с условием

$$|t - \gamma_0| \leq \frac{x^{3|\beta_0 - 0.5|}}{\ln x}.$$

Из определения $\sigma_{x,t}$ следует тогда, что абсцисса β_0 наибольшая среди абсцисс нулей $\varrho^* = \beta^* + i\gamma^*$ таких, что

$$|t - \gamma^*| \leq \frac{x^{3|\beta^* - 0.5|}}{\ln x}. \tag{3.7}$$

Но для всякого β^* верна оценка

$$\frac{x^{3|\beta^*-0.5|}}{\ln x} \geq \frac{1}{\ln x}.$$

А поскольку для рассматриваемого нуля $\varrho = \beta + i\gamma$ имеет место неравенство $\tau = |t - \gamma| \leq (\ln x)^{-1}$, то этот нуль ϱ заведомо содержится в числе нулей ϱ^* , удовлетворяющих (3.7). Следовательно, его абсцисса β не может превосходить β_0 :

$$\beta \leq \beta_0 = 0.5(\sigma_{x,t} + 0.5).$$

Из последнего неравенства несложно заключить, что

$$0 \leq \beta - 0.5 \leq 0.5(\sigma_{x,t} - 0.5) \leq \sigma_{x,t} - \beta. \quad (3.8)$$

Предположим теперь, что $\sigma_{x,t} = 0.5 + 2(\ln x)^{-1}$. В этом случае для всех нулей, удовлетворяющих условию (3.7) (и, в частности, для нуля $\varrho = \beta + i\gamma$), будем иметь

$$|\beta^* - 0.5| \leq (\ln x)^{-1} = 0.5(\sigma_{x,t} - 0.5) \leq \sigma_{x,t} - \beta^*.$$

Таким образом, и в этом случае абсцисса β удовлетворяет (3.8). Переходя к оценке $j_2(\varrho)$, находим

$$\begin{aligned} j_2 &= \frac{\sigma_{x,t} - \beta}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} \left(\int_{0.5}^{\beta} + \int_{\beta}^{\sigma_{x,t}} \right) \frac{(\sigma_{x,t} - \sigma)(\beta - \sigma)}{(\sigma - \beta)^2 + \tau^2} d\sigma \\ &= \frac{\sigma_{x,t} - \beta}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} (j_3 - j_4), \end{aligned}$$

где

$$j_3 = \int_{0.5}^{\beta} \frac{(\sigma_{x,t} - \sigma)(\beta - \sigma)}{(\sigma - \beta)^2 + \tau^2} d\sigma, \quad j_4 = \int_{\beta}^{\sigma_{x,t}} \frac{(\sigma_{x,t} - \sigma)(\sigma - \beta)}{(\sigma - \beta)^2 + \tau^2} d\sigma.$$

Полагая $u = \beta - \sigma$, $v = \sigma - \beta$ в j_3 и j_4 соответственно, получаем

$$\begin{aligned} j_3 &= (\sigma_{x,t} - \beta) \int_0^{\beta-0.5} \frac{u du}{u^2 + \tau^2} + \int_0^{\beta-0.5} \frac{u^2 du}{u^2 + \tau^2} \\ &\leq (\sigma_{x,t} - \beta) \frac{1}{2} \ln \frac{(\beta - 0.5)^2 + \tau^2}{\tau^2} + (\beta - 0.5), \\ j_4 &= (\sigma_{x,t} - \beta) \int_0^{\sigma_{x,t}-\beta} \frac{v dv}{v^2 + \tau^2} - \int_0^{\sigma_{x,t}-\beta} \frac{v^2 dv}{v^2 + \tau^2} \\ &\geq (\sigma_{x,t} - \beta) \frac{1}{2} \ln \frac{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2}{\tau^2} - (\sigma_{x,t} - \beta), \end{aligned}$$

откуда

$$j_3 - j_4 \leq (\sigma_{x,t} - \beta) \frac{1}{2} \ln \frac{(\beta - 0.5)^2 + \tau^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} + (\sigma_{x,t} - 0.5).$$

В силу неравенства (3.8) дробь, стоящая под знаком логарифма, не превосходит единицы. Следовательно,

$$j_2 \leq \frac{\sigma_{x,t} - \beta}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} (\sigma_{x,t} - 0.5) \leq \frac{1}{2} \frac{(\sigma_{x,t} - 0.5)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} (\sigma_{x,t} - 0.5) \ln x. \quad (3.9)$$

Сравнивая (3.6) и (3.9), заключаем, что неравенство (3.6) имеет место при любом β . Таким образом,

$$j(\varrho) = j_1(\varrho) + j_2(\varrho) \leq \frac{5}{4} \frac{(\sigma_{x,t} - 0.5)^2}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + \tau^2} (\sigma_{x,t} - 0.5) \ln x.$$

Воспользуемся теперь неравенством

$$\sum_{\varrho} \frac{\sigma_{x,t} - 0.5}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \leq \frac{5}{3} \left(\operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)} + 0.5 \ln t + 3 \right)$$

из работы [7] (см. также [12; лемма 6]) наряду с оценкой (3.4); получим

$$\begin{aligned} \sum_{\varrho} j(\varrho) &\leq \frac{5}{4} (\ln x) (\sigma_{x,t} - 0.5)^2 \sum_{\varrho} \frac{\sigma_{x,t} - 0.5}{(\sigma_{x,t} - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} \\ &\leq \frac{5}{4} (\ln x) (\sigma_{x,t} - 0.5)^2 \left(\frac{5}{3} \operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma_{x,t} + it)}{\zeta(\sigma_{x,t} + it)} + \frac{5}{6} \ln t + 5 \right) \\ &\leq (\ln x) (\sigma_{x,t} - 0.5)^2 \left(\frac{65}{24} \ln t + \frac{13}{4} |r(x, t)| + 16.3 \right), \\ I_3 &\leq \sum_{\varrho} j(\varrho) + (\ln x) (\sigma_{x,t} - 0.5)^2 (0.5 \ln t + 3) \\ &\leq (\ln x) (\sigma_{x,t} - 0.5)^2 \{a_1^{(3)} \ln t + a_2^{(3)} |r(x, t)| + a_3^{(3)}\}, \end{aligned}$$

где $a_1^{(3)} = 77/24$, $a_2^{(3)} = 13/4$, $a_3^{(3)} = 19.3$. Таким образом,

$$\ln |\zeta(0.5 + it)| \leq \sum_{m \leq x^3} \frac{\Lambda_x(m)}{\ln m} \frac{\cos(t \ln m)}{m^{\sigma_{x,t}}} + R,$$

$$R = (\ln x) (\sigma_{x,t} - 0.5)^2 \{a_1^{(4)} \ln t + a_2^{(4)} |r(x, t)| + a_3^{(4)}\}, \quad a_j^{(4)} = \sum_{k=1}^3 a_j^{(k)},$$

причем $a_1^{(4)} < 4.00687$, $a_2^{(4)} < 7.51374$, $a_3^{(4)} < 24.89829$. Далее, полагая

$$q(x, t) = \sum_{p \leq x^3} \frac{\Lambda_x(p)}{p^{\sigma_{x,t} + it}}$$

и замечая, что

$$\begin{aligned} |r(x, t)| &\leq |q(x, t)| + \sum_{k \geq 2} \sum_{p \leq x^{3/k}} \frac{\ln p}{p^{k/2}} \\ &\leq |q(x, t)| + \sum_{p \leq x^{3/2}} \frac{\ln p}{p} + \sum_p \frac{\ln p}{p(\sqrt{p} - 1)} \\ &< |q(x, t)| + 1.5 \ln x + 2.48, \end{aligned}$$

при $10 \leq x \leq t^\delta$, $\delta = 800^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} & a_1^{(4)} \ln t + a_2^{(4)} |r(x, t)| + a_3^{(4)} \\ & < a_1^{(4)} \ln t + a_2^{(4)} (|q(x, t)| + 1.5\delta \ln t + 2.48) + a_3^{(4)} \\ & \leq (\ln t) \left(a_1^{(4)} + 1.5\delta a_2^{(4)} + \frac{\delta}{\ln 2} (2.48a_2^{(4)} + a_3^{(4)}) \right) + a_2^{(4)} |q(x, t)| \\ & < 4.01 \ln t + 7.52 |q(x, t)|. \end{aligned}$$

Лемма 3 доказана.

Положим для дальнейшего $X = N^{0.1\varepsilon}$, $L = \ln \ln N$.

ЛЕММА 4. Пусть k – целое число, $1 \leq k \leq c \ln X$, где $c > 0$ – достаточно малая абсолютная постоянная, $x = X^{1/(8k+3)}$. Тогда справедливо неравенство

$$\sum_n \left| C(t_n) - \sum_{p \leq x} \frac{\cos(t_n \ln p)}{\sqrt{p}} \right|^{2k} < \frac{c_0}{280} (c_0 k)^{2k} M,$$

где $c_0 = a_0 \varepsilon^{-1}$, $a_0 = 5132.8$.

Доказательство этого утверждения проводится подобно доказательству теоремы 4 из [7] и леммы 2 из работы [10].

Пусть функция $\varphi(x)$ неограниченна и монотонно возрастает при $x \rightarrow +\infty$, и пусть при $N \leq x \leq N + M$ выполняются неравенства $1 \leq \varphi(x) \leq c_0 L (3 \ln L)^{-1}$, где c_0 – постоянная из леммы 4. Положим

$$\varphi = \varphi(N), \quad y = \exp \left(\frac{\ln N}{6^3 L} \right), \quad V_z(t) = \sum_{p \leq z} \frac{\cos(t \ln p)}{\sqrt{p}}, \quad \mathfrak{S} = \sum_{p \leq y} \frac{1}{p}.$$

ЛЕММА 5. Для всех n с условием $N < n \leq N + M$, за исключением не более чем $M \Delta_1$ номеров,

$$\Delta_1 = 4e \sqrt{\frac{L}{c_0 \varphi}} \exp \left(-\frac{2L}{3ec_0 \varphi} \right),$$

справедливо неравенство

$$C(t_n) \leq V_y(t_n) + \frac{2L}{3\varphi}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $k_1 = \lfloor (3ec_0 \varphi)^{-1} L \rfloor$, $x = X^{1/(8k_1+3)}$. Пусть $\mathcal{A}_1$ – множество тех n , $N < n \leq N + M$, для которых $|C(t_n) - V_x(t_n)| > (3\varphi)^{-1} L$. Тогда, пользуясь леммой 4, находим

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_1| \left(\frac{L}{3\varphi} \right)^{2k_1} & \leq \sum_{n \in \mathcal{A}_1} (C(t_n) - V_x(t_n))^{2k_1} \\ & \leq \sum_n (C(t_n) - V_x(t_n))^{2k_1} < \frac{c_0}{280} (c_0 k_1)^{2k_1} M, \end{aligned}$$

откуда

$$|\mathcal{A}_1| < \frac{c_0}{280} \left(\frac{3c_0\varphi k_1}{L} \right)^{2k_1} M < \frac{c_0}{280} e^{-2k_1} M.$$

Далее, несложно заметить, что

$$\ln x = \frac{0.1\varepsilon \ln N}{8k_1 + 3} > \frac{0.1\varepsilon \ln N}{3L} e c_0 \varphi > \frac{a_0 e}{30} \frac{\ln N}{L} > 10^5 \ln y,$$

так что $x > y^{10^5}$. Пусть $\mathcal{A}_2$ – множество тех n , для которых $|V_x(t_n) - V_y(t_n)| > L(3\varphi)^{-1}$. Тогда, применяя лемму 2, найдем

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_2| \left(\frac{L}{3\varphi} \right)^{2k_1} &\leq \sum_n (V_x(t_n) - V_y(t_n))^{2k_1} \leq \sum_n \left| \sum_{y < p \leq x} \frac{p^{it_n}}{\sqrt{p}} \right|^{2k_1} \\ &= \sum_n \sum_{\substack{y < p_1, \dots, p_{k_1} \leq x \\ y < q_1, \dots, q_{k_1} \leq x}} (p_1 \cdots q_{k_1})^{-0.5} \left(\frac{p_1 \cdots p_{k_1}}{q_1 \cdots q_{k_1}} \right)^{it_n} \\ &\leq k_1! M \sum_{y < p_1, \dots, p_{k_1} \leq x} (p_1 \cdots p_{k_1})^{-1} + x^{2k_1} \ln N < k_1! M \left(\sum_{y < p \leq x} \frac{1}{p} \right)^{k_1} + X^{0.25} \\ &\leq k_1! M \left(\ln \frac{\ln x}{\ln y} + O(\ln^{-2} y) \right)^{k_1} + X^{0.25} < k_1! M (\ln L)^{k_1} + X^{0.25} \\ &< 3\sqrt{k_1} \left(\frac{k_1 \ln L}{e} \right)^{k_1} M, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_2| &< 3M\sqrt{k_1} \left(\frac{9\varphi^2 \ln L}{L^2} \frac{L}{e} \frac{L}{3ec_0\varphi} \right)^{k_1} = 3M\sqrt{k_1} \left(\frac{3\varphi}{e^2 c_0} \frac{\ln L}{L} \right)^{k_1} \\ &\leq 3M\sqrt{k_1} \left(\frac{3}{e^2 c_0} \frac{c_0}{3} \frac{L}{\ln L} \frac{\ln L}{L} \right)^{k_1} = 3Me^{-2k_1} \sqrt{k_1}. \end{aligned}$$

Таким образом, исключив из рассмотрения не более чем

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2| &\leq \left(\frac{c_0}{280} e^{-2k_1} + 3\sqrt{k_1} e^{-2k_1} \right) M < 4\sqrt{k_1} e^{-2k_1} M \\ &\leq 4e \sqrt{\frac{L}{c_0\varphi}} \exp \left(-\frac{2L}{3ec_0\varphi} \right) M \end{aligned}$$

точек Грама t_n , для оставшихся будем иметь

$$C(t_n) = V_y(t_n) + (V_x(t_n) - V_y(t_n)) + (C(t_n) - V_x(t_n)) \leq V_y(t_n) + \frac{2L}{3\varphi}.$$

Лемма 5 доказана.

ЛЕММА 6. Для всех n с условием $N < n \leq N + M$, за исключением не более чем $M\Delta_2$ номеров, $\Delta_2 = 9e\sqrt{\mathfrak{S}}e^{-9\mathfrak{S}}$, справедливо неравенство

$$|V_y(t_n)| \leq 3\mathfrak{S}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{A}_3$ – множество тех n , для которых $|V_y(t_n)| > 3\mathfrak{S}$. Полагая $k_2 = [9\mathfrak{S}]$, так что $y^{2k_2} \ln N < M^{1/3}$, и пользуясь леммой 4, приходим к неравенствам

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}_3| \cdot (3\mathfrak{S})^{2k_2} &\leq \sum_n V_y^{2k_2}(t_n) \leq \sum_n \left| \sum_{p \leq y} \frac{p^{it_n}}{\sqrt{p}} \right|^{2k_2} \leq k_2! M \mathfrak{S}^{k_2} + y^{2k_2} \ln N \\ &< 3\sqrt{k_2} M \left(\frac{k_2 \mathfrak{S}}{e} \right)^{k_2}, \end{aligned}$$

из которых и следует искомая оценка.

Обозначим через $\mathcal{A}$ дополнение $\mathcal{A}_3$ до множества всех целых чисел промежутка $N < n \leq N + M$.

ЛЕММА 7. Пусть $K(s) = \sum_{n \in \mathcal{A}} \exp(sV_y(t_n))$. Тогда для комплексных s с условием $|s| \leq 1$ справедливо равенство

$$K(s) = MF_y(s)(1 + \theta(\ln N)^{-3}),$$

в котором $F_y(s) = \prod_{p \leq y} J_0(is/\sqrt{p})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $K = [3e^2\mathfrak{S}] + 1$. Тогда

$$K(s) = \sum_{n \in \mathcal{A}} \left(\sum_{k=0}^K + \sum_{k>K} \right) \frac{s^k}{k!} V_y^k(t_n) = K_1(s) + R_1(s),$$

причем

$$\begin{aligned} |R_1(s)| &\leq M \sum_{k>K} \frac{(3\mathfrak{S})^k}{k!} < M \sum_{k>K} \left(\frac{3e\mathfrak{S}}{k} \right)^k < M \sum_{k>K} \left(\frac{3e\mathfrak{S}}{K} \right)^k \\ &< M \sum_{k>K} e^{-k} < Me^{-K} < Me^{-22\mathfrak{S}}. \end{aligned}$$

Далее, пользуясь обозначениями леммы 6, представим $K_1(s)$ в виде

$$\sum_{k=0}^K \frac{s^k}{k!} \sum_{n \in \mathcal{A}} V_y^k(t_n) = \sum_{k=0}^K \frac{s^k}{k!} \left(\sum_n V_y^k(t_n) - \sum_{n \in \mathcal{A}_3} V_y^k(t_n) \right) = K_2(s) - R_2(s)$$

и заметим, что

$$|R_2(s)| \leq |\mathcal{A}_3| + \sum_{k=1}^K \frac{1}{k!} \sum_{n \in \mathcal{A}_3} |V_y(t_n)|^k.$$

Поскольку $y^{2K} \ln N < M^{2/3}$, из неравенства Коши и леммы 6 заключаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \sum_{n \in \mathcal{A}_3} |V_y(t_n)|^k &\leq \frac{1}{k!} \left(|\mathcal{A}_3| \sum_n V_y^{2k}(t_n) \right)^{1/2} \leq \frac{1}{k!} \left(M \Delta_2 (k! M \mathfrak{S}^k + y^{2k} \ln N) \right)^{1/2} \\ &< \frac{M}{k!} (2 \Delta_2 k! \mathfrak{S}^k)^{1/2} < \frac{M \sqrt{\Delta_2}}{\sqrt[4]{k}} \left(\frac{\mathfrak{S} e}{k} \right)^{k/2} < \frac{M \sqrt{\Delta_2}}{\sqrt[4]{k}} e^{0.5 \mathfrak{S}}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |R_2(s)| &\leq M \Delta_2 + M \sqrt{\Delta_2} e^{0.5 \mathfrak{S}} \sum_{k=1}^K \frac{1}{\sqrt[4]{k}} \\ &< M \left(\Delta_2 + \frac{4}{3} K^{3/4} \sqrt{\Delta_2} e^{0.5 \mathfrak{S}} \right) < 61 M \mathfrak{S} e^{-4 \mathfrak{S}}. \end{aligned}$$

Для того чтобы преобразовать $K_2(s)$, положим

$$v_k = \sum_n V_y^k(t_n), \quad U(t) = \sum_{p \leq y} \frac{p^{it}}{\sqrt{p}}.$$

Если $k \leq K$ – нечетное число, то в силу леммы 2 имеем

$$\begin{aligned} v_k &= 2^{-k} \sum_n (U(t_n) + \bar{U}(t_n))^k = 2^{-k} \sum_n \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} U^\nu(t_n) \bar{U}^{k-\nu}(t_n) \\ &= 2^{-k} \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} \sum_n \sum_{\substack{p_1, \dots, p_\nu \leq y \\ q_1, \dots, q_{k-\nu} \leq y}} (p_1 \cdots p_\nu)^{-0.5} \left(\frac{p_1 \cdots p_\nu}{q_1 \cdots q_{k-\nu}} \right)^{it_n} \\ &= 2^{-k} \theta \sum_{\nu=0}^k \binom{k}{\nu} y^k \ln N = y^k \theta \ln N = \theta_1 M^{1/3}. \end{aligned}$$

Точно так же оценивается и вклад в сумму v_k слагаемых, отвечающих условию $p_1 \cdots p_\nu = q_1 \cdots q_{k-\nu}$ при $k = 2m$, $\nu = m$. Следовательно, в этом случае имеем

$$v_k = 2^{-2m} \binom{2m}{m} M \mathfrak{S}_m + \theta_1 M^{1/3},$$

где

$$\mathfrak{S}_m = \sum_{\substack{p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_m \\ p_1, \dots, q_m \leq y}} (p_1 \cdots q_m)^{-0.5} = \sum_{\substack{p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_m \\ p_1, \dots, q_m \leq y}} (p_1 \cdots p_m)^{-1}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} K_2(s) &= \sum_{0 \leq 2m \leq K} \frac{s^{2m}}{(2m)!} 2^{-2m} \binom{2m}{m} M \mathfrak{S}_m + \theta M^{1/3} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\ &= M \left(\sum_{m=0}^{+\infty} - \sum_{m > 0.5K} \right) \frac{\mathfrak{S}_m}{(m!)^2} \left(\frac{s}{2} \right)^{2m} + \theta e M^{1/3} = K_3(s) - R_3(s) + \theta e M^{1/3}. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\mathfrak{S}_m \leq m! \sum_{p_1, \dots, p_m \leq y} (p_1 \cdots p_m)^{-1} \leq m! \mathfrak{S}^m,$$

находим

$$\begin{aligned} |R_3(s)| &\leq \sum_{m>0.5K} \frac{1}{m!} \left(\frac{\mathfrak{S}}{4}\right)^m < M \sum_{m>0.5K} \left(\frac{e\mathfrak{S}}{4m}\right)^m < M \sum_{m>0.5K} \left(\frac{e\mathfrak{S}}{2K}\right)^m \\ &< M \sum_{m>0.5K} (6e)^{-m} < M e^{-30\mathfrak{S}}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\varpi_1^{\alpha_1} \cdots \varpi_r^{\alpha_r}$ – каноническое разложение числа n с условием $\Omega(n) = \alpha_1 + \cdots + \alpha_r = m$. Тогда число решений уравнения

$$n = p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_m \quad (3.10)$$

в простых числах $p_1, \dots, q_m$, не превосходящих y , равно

$$\left(\frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!} \right)^2$$

или нулю в зависимости от того, будут все простые делители $\varpi_1, \dots, \varpi_r$ числа n меньше или равны y или нет. Определяя мультипликативную функцию $f(n)$ на степенях простых чисел равенствами

$$f(\varpi^\alpha) = \begin{cases} (\alpha!)^{-2}, & \text{если } \varpi \leq y, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

заключаем, что число решений (3.10) может быть записано в виде $(m!)^2 f(n)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} K_3(s) &= M \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{s}{2}\right)^{2m} \sum_{n:\Omega(n)=m} \frac{f(n)}{n} = M \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n} \left(\frac{s}{2}\right)^{2\Omega(n)} \\ &= M \prod_p \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{f(p^m)}{p^m} \left(\frac{s}{2}\right)^{2m} \right) = M \prod_{p \leq y} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{is}{2\sqrt{p}}\right)^{2m} \right) \\ &= M \prod_{p \leq y} J_0\left(\frac{is}{\sqrt{p}}\right) = M F_y(s). \end{aligned}$$

Складывая полученные выше оценки величин $R_j(s)$, находим

$$\begin{aligned} K(s) &= M F_y(s) + \theta M (e^{-30\mathfrak{S}} + M^{-2/3} + 61\mathfrak{S}e^{-4\mathfrak{S}} + e^{-22\mathfrak{S}}) \\ &= M (F_y(s) + 62\theta\mathfrak{S}e^{-4\mathfrak{S}}). \end{aligned}$$

Остается оценить снизу величину $\min_{|s| \leq 1} |F_y(s)|$. Для этого представим $F_y(s)$ в виде

$$\prod_{p \leq y} \exp\left(\frac{s^2}{4p}\right) \exp\left(-\frac{s^2}{4p}\right) J_0\left(\frac{is}{\sqrt{p}}\right) = \exp\left(\frac{s^2}{4}\mathfrak{S}\right) \Psi_y(s),$$

где

$$\Psi_y(s) = \prod_{p \leq y} \psi\left(\frac{s^2}{4p}\right), \quad \psi(v) = e^{-v} \sum_{\alpha=0}^{+\infty} \frac{v^\alpha}{(\alpha!)^2}.$$

Разлагая $\psi(v)$ в ряд, найдем

$$\psi(v) = \sum_{m=0}^{+\infty} q_m v^m, \quad q_m = \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\alpha=0}^m \frac{(-1)^\alpha}{\alpha!} \binom{m}{\alpha}.$$

В частности, $q_0 = 1$, $q_1 = 0$, $q_2 = -1/4$, $q_3 = 1/9$. Из этих равенств и очевидной оценки

$$|q_m| \leq \frac{1}{m!} \sum_{\alpha=0}^m \binom{m}{\alpha} = \frac{2^m}{m!} \quad (3.11)$$

несложно заключить, что $|q_m| \leq 1$ при всех $m \geq 1$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Psi_y(s) &= \prod_{p \leq y} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} q_m \left(\frac{s^2}{4p} \right)^m \right) \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_r \geq 0} q_{m_1} \cdots q_{m_r} \sum_{p_1 < \dots < p_r \leq y} \left(\frac{s^2}{4p_1} \right)^{m_1} \cdots \left(\frac{s^2}{4p_r} \right)^{m_r} = \sum_{n=0}^{+\infty} \Phi_n s^n, \end{aligned}$$

где $\Phi_0 = 1$ и

$$\Phi_n = \sum_{r \geq 1} \sum_{m_1 + \dots + m_r = n} q_{m_1} \cdots q_{m_r} \sum_{p_1 < \dots < p_r \leq y} (p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r})^{-1}$$

при $n \geq 1$. Поскольку $q_1 = 0$, ненулевой вклад в Φ_n при $n \geq 2$ вносят лишь те наборы $(m_1, \dots, m_r)$, для которых $m_1, \dots, m_r \geq 2$ (что возможно лишь при $1 \leq r \leq n/2$), причем для заданных n и r число таких наборов равно

$$\binom{n-1-r}{r-1}.$$

Следовательно, при любом $n \geq 2$ имеем

$$\begin{aligned} |\Phi_n| &\leq \sum_{1 \leq r \leq n/2} \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_r = n \\ m_1, \dots, m_r \geq 2}} \sum_{p_1 < \dots < p_r \leq y} (p_1 \cdots p_r)^{-2} \\ &\leq \sum_{1 \leq r \leq n/2} \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_r = n \\ m_1, \dots, m_r \geq 2}} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - 1 \right) < \sum_{1 \leq r \leq n/2} \binom{n-r-1}{r-1}. \end{aligned}$$

Несложно проверить, что последняя сумма совпадает с коэффициентом при $x^{[n/2]-1}$ в разложении по степеням x дроби

$$\frac{(1+x)^{[n/2]-1+j}}{1-x-x^2},$$

где j – остаток от деления n на 2. Разлагая это выражение на простейшие дроби, приходим к оценке $|\Phi_n| < \phi^n$, где $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$. Итак, при $|s| \leq 1$ имеем

$$|\Psi_y(s) - 1| = \left| \sum_{n=2}^{+\infty} \Phi_n \left(\frac{s}{2} \right)^{2n} \right| \leq \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{\phi}{4} \right)^n = \frac{\phi^2}{16 - 4\phi} < \frac{1}{3},$$

так что

$$\frac{2}{3} < |\Psi_y(s)| < \frac{4}{3}, \quad |F_y(s)| > \frac{2}{3} \left| \exp \left(\frac{s^2}{4} \mathfrak{S} \right) \right| > \frac{2}{3} e^{-0.25\mathfrak{S}},$$

$$K(s) = M F_y(s) (1 + 62\theta_1 F_y^{-1}(s) \mathfrak{S} e^{-4\mathfrak{S}}) = M F_y(s) (1 + 62\theta_2 \mathfrak{S} e^{-3.75\mathfrak{S}}).$$

Замечая, что $62\mathfrak{S} e^{-3.75\mathfrak{S}} < (\ln N)^{-3}$, приходим к утверждению леммы 7.

§ 4. Доказательство теорем 1 и 2

Пусть $K_N(s)$ – производящая функция моментов дискретной случайной величины ξ_N со значениями $V_y(t_n)$, $N < n \leq N + M$, $n \in \mathcal{A}$. Тогда, пользуясь обозначениями и утверждениями лемм 6 и 7, несложно заключить, что в круге $|s| \leq 1$ справедливы равенства

$$K_N(s) = |\mathcal{A}|^{-1} \sum_{n \in \mathcal{A}} \exp \{s V_y(t_n)\} = |\mathcal{A}|^{-1} M F_y(s) (1 + \theta_1 (\ln N)^{-3})$$

$$= F_y(s) (1 - 3\epsilon \theta_2 \sqrt{\mathfrak{S}} e^{-9\mathfrak{S}})^{-1} (1 + \theta_1 (\ln N)^{-3}).$$

Обозначая через $\Phi(s)$ и $\Phi_y(s)$ произведения

$$\prod_p \psi \left(\frac{s^2}{4p} \right) \quad \text{и} \quad \prod_{p > y} \psi \left(\frac{s^2}{4p} \right)$$

соответственно, получим

$$K_N(s) = \exp \left(\frac{s^2}{4} \mathfrak{S} \right) \Phi(s) \Phi_y^{-1}(s) (1 + 2\theta_3 (\ln N)^{-3}).$$

Пусть $p > y$. Применяя неравенство (3.11), будем иметь

$$\left| \psi \left(\frac{s^2}{4p} \right) - 1 \right| \leq \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{|q_m|}{(4p)^m} \leq \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{(2p)^{-m}}{m!} < \frac{1}{7p^2},$$

$$\ln \varphi \left(\frac{s^2}{4p} \right) = \ln \left(1 + \frac{\theta_4}{7p^2} \right) = \frac{\theta_5}{6p^2},$$

так что

$$\Phi_y(s) = \exp \left(\theta_6 \sum_{p > y} \frac{1}{6p^2} \right) = \exp \left(\frac{\theta_7}{6y} \right) = 1 + \frac{\theta_8}{5y},$$

$$K_N(s) = \exp \left(\frac{s^2}{4} \mathfrak{S} \right) \Phi(s) (1 + 3\theta_9 (\ln N)^{-3}).$$

Полагая

$$\sigma(N) = \mathfrak{S} = \sum_{p \leq y} \frac{1}{p}, \quad \kappa(N) = (\ln N)^3, \quad u = \frac{\sqrt{6L}}{\varphi}$$

в лемме 1, заключаем, что по крайней мере для

$$\frac{|\mathcal{A}|}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_u^{+\infty} e^{-v^2/2} dv \right) \left(1 + O(\varphi^{-1}) \right) > 1.01 \frac{M\varphi}{2\pi\sqrt{L}} \exp \left(-\frac{3L}{\varphi^2} \right)$$

точек Грама выполнено неравенство $V(t_n) \leq -u\sqrt{\mathfrak{S}/2}$. Пользуясь леммой 5 и исключая из этого числа не более

$$M\Delta_1 < 4eM\sqrt{\frac{L}{\varphi c_0}} \exp \left(-\frac{2L}{3ec_0\varphi} \right)$$

точек t_n , при $\varphi \geq 1.3 \cdot 10^5 \varepsilon^{-1} > 9ec_0$ для оставшихся точек t_n в количестве не менее

$$\begin{aligned} & 1.01 \frac{M\varphi}{2\pi\sqrt{L}} \exp \left(-\frac{3L}{\varphi^2} \right) - 4eM\sqrt{\frac{L}{\varphi c_0}} \exp \left(-\frac{2L}{3ec_0\varphi} \right) \\ &= \frac{M\varphi}{2\pi\sqrt{L}} \exp \left(-\frac{3L}{\varphi^2} \right) \left(1.01 - \frac{8\pi e}{\sqrt{c_0}} \frac{L}{\varphi^{3/2}} \exp \left(-\frac{2L}{3ec_0\varphi} \left(1 - \frac{9ec_0}{2\varphi} \right) \right) \right) \\ &> \frac{M\varphi}{2\pi\sqrt{L}} \exp \left(-\frac{3L}{\varphi^2} \right) \end{aligned}$$

имеем неравенства

$$\ln |\zeta(0.5 + it_n)| \leq C(t_n) \leq V_y(t_n) + \frac{2L}{3\varphi} \leq -\frac{1}{\varphi} \sqrt{3\mathfrak{S}L} + \frac{2L}{3\varphi} < -\frac{L}{\varphi}.$$

Теорема 1 доказана.

Полагая теперь $\varphi(x) = 0.5(\ln \ln \ln x)^\delta$, получим $\varphi = 0.5(\ln L)^\delta$, так что

$$\sum_n |\zeta(0.5 + it_n)|^{-1} > \frac{M\varphi}{\pi} \frac{e^{-3L/\varphi^2} e^{L/\varphi}}{\sqrt{L}} > M \exp \left(\frac{L}{(\ln L)^\delta} \right).$$

Теорема 2 доказана.

Список литературы

- [1] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994, 376 с.; англ. пер.: A. A. Karatsuba, S. M. Voronin, *The Riemann zeta-function*, de Gruyter Exp. Math., **5**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1992, xii+396 pp.
- [2] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, ИЛ, М., 1953, 409 с.; пер. с англ.: E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, Clarendon Press, Oxford, 1951, vi+346 pp.
- [3] E. C. Titchmarsh, “The zeros of the Riemann zeta-function”, *Proc. R. Soc. Lond. A*, **151**:873 (1935), 234–255.
- [4] J. Kalpokas, J. Steuding, “On the value-distribution of the Riemann zeta-function on the critical line”, *Mosc. J. Comb. Number Theory*, **1**:1 (2011), 26–42.

- [5] J. Kalpokas, M. A. Korolev, J. Steuding, “Negative values of the Riemann zeta function on the critical line”, *Mathematika*, **59**:2 (2013), 443–462.
- [6] A. Selberg, “The zeta-function and the Riemann hypothesis”, *C. R. Dixième Congrès Math. Skandinaves* 1946, Jul. Gjellerups Forlag, Copenhagen, 1947, 187–200; A. Selberg, *Collected papers*, v. I, Springer-Verlag, Berlin, 1989, 341–355.
- [7] A. Selberg, “Contributions to the theory of the Riemann zeta-function”, *Arch. Math. Naturvid.*, **48**:5 (1946), 89–155; A. Selberg, *Collected papers*, v. I, Springer-Verlag, Berlin, 1989, 214–280.
- [8] M. Radziwiłł, *Large deviations in Selberg’s central limit theorem*, 2011, 9 pp., [arXiv: 1108. 5092v1](#).
- [9] Hsien-Kuei Hwang, “Large deviations for combinatorial distributions. I. Central limit theorems”, *Ann. Appl. Probab.*, **6**:1 (1996), 297–319.
- [10] М. А. Королёв, “Закон Грама и гипотеза Сельберга о распределении нулей дзета-функции Римана”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **74**:4 (2010), 83–118; англ. пер.: M. A. Korolev, “Gram’s law and Selberg’s conjecture on the distribution of zeros of the Riemann zeta function”, *Izv. Math.*, **74**:4 (2010), 743–780.
- [11] Kai-Man Tsang, *The distribution of the values of the Riemann zeta-function*, Thesis (Ph.D.), Princeton Univ., Princeton, NJ, 1984, 189 pp.
- [12] А. А. Карацуба, М. А. Королёв, “Аргумент дзета-функции Римана”, *УМН*, **60**:3(363) (2005), 41–96; англ. пер.: A. A. Karatsuba, M. A. Korolev, “The argument of the Riemann zeta function”, *Russian Math. Surveys*, **60**:3 (2005), 433–488.
- [13] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, v. I, B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1909, xiii + 564 pp.

Максим Александрович Королёв
(Maxim A. Korolev)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
г. Москва

Национальный исследовательский ядерный
университет “МИФИ”

E-mail: korolevma@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
10.06.2013 и 07.10.2013