Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. И. Григорчук, К. С. Мединец, Об алгебраических свойствах топологических полных групп, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 6, 87–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8257>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.166.219.16

26 апреля 2023 г., 07:50:31

УДК 512.543+512.544+517.987

Р. И. Григорчук, К. С. Мединец

Об алгебраических свойствах топологических полных групп

В работе обсуждается алгебраическое строение топологических полных групп $[[T]]$ канторовой минимальной системы (X, T) . Показано, что строение топологической полной группы $[[T]]$ похоже на объединение подстановочных сплетений группы $\mathbb{Z}$. Это позволяет доказать, что топологические полные группы локально вложимы в конечные группы, дать элементарное доказательство того, что группа $[[T]]'$ бесконечно определена, и построить явные примеры максимальных локально конечных подгрупп группы $[[T]]$. Также показано, что коммутант $[[T]]'$, который является простым и конечно порожденным для минимальных подсдвигов, разложим в произведение двух локально конечных групп и что группы $[[T]]$ и $[[T]]'$ обладают непрерывными эргодическими инвариантными случайными подгруппами.

Библиография: 36 названий.

Ключевые слова: полная группа, канторова система, конечно порожденная группа, простая группа, аменабельная группа.

DOI: 10.4213/sm8257

§ 1. Введение

В работе изучаются алгебраические свойства совершенно нового с точки зрения геометрической теории групп класса групп – полных групп динамических систем. Нашими целями являются развитие техники для изучения полных групп, установление ряда новых результатов и обзор известных фактов. Мы также надеемся привлечь внимание специалистов по теории групп к полным группам, так как они обладают весьма необычными алгебраическими свойствами, которые, по-видимому, ранее никогда не встречались в литературе. В силу своих алгебраических свойств полные группы появляются в других областях математики (см., например, недавний препринт [1]), где полные группы применялись к задаче о сложности отношения изоморфизма между конечно порожденными простыми группами. Поскольку теория полных групп лежит на стыке теории динамических систем и теории групп, мы уделяем особое внимание обсуждению динамических результатов для того, чтобы работа была доступной для неспециалистов по динамике.

Полные группы впервые появились 50 лет назад в основополагающей работе Дая [2] как алгебраический инвариант орбитальной эквивалентности для сохраняющих меру динамических систем. Даже несмотря на то, что полные

Первый автор был частично поддержан NSF (грант № DMS-1207699), второй автор подтверждает поддержку ONR (грант № N001613WX20992).

группы содержат полную информацию об орбитах подлежащих систем, их алгебраическое строение оставалось по большей части неизвестным.

Пусть G – группа, действующая на множестве X . Множество X может рассматриваться вместе с некоторой структурой, такой как мера, борелева σ -алгебра или топология. Рассмотрим группу $[G]$, называемую *полной группой* группы G , состоящую из всех автоморфизмов S множества X , сохраняющих его структуру и таких, что для каждого $x \in X$ выполняется $S(x) = g(x)$ для некоторого $g \in G$. Оказывается, что во многих случаях группа $[G]$ настолько “богата”, что любой изоморфизм α между $[G]$ и $[H]$, где группа H также действует на X сохраняющими структуру автоморфизмами, будет всегда пространственно порожден в том смысле, что найдется автоморфизм $\Lambda: X \rightarrow X$, для которого $\alpha(g) = \Lambda \circ g \circ \Lambda^{-1}$ для каждого $g \in [G]$. Такие результаты были установлены для групп, действующих на канторовом множестве (см. [3; теорема 4.5, (с)]–[8]), на некомпактных нульмерных пространствах (см. [9]), на стандартных борелевых пространствах (см. [10]) и на пространствах с мерой (см. [2] и [11]). Как приложение к теории динамических систем эти результаты показывают, что алгебраические (групповые) свойства полных групп полностью определяют класс орбитальной эквивалентности для подлежащих динамических систем. Это поднимает вопрос о взаимодействии между динамическими характеристиками системы и алгебраическими свойствами полных групп.

В настоящей работе мы сосредотачиваемся на алгебраических свойствах полных групп для систем, действующих на канторовых множествах. Рассмотрим пару (X, T) , где X – канторово множество, а $T: X \rightarrow X$ – гомеоморфизм множества X . Обозначим через $[T]$ полную группу группы $\{T^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Рассмотрим подгруппу $[[T]]$, называемую *топологической полной группой*, состоящую из всех гомеоморфизмов S множества X таких, что $Sx = T^{f_S(x)}x$ для каждой точки x , где $f_S: X \rightarrow \mathbb{Z}$ – непрерывная функция. Мы хотели бы подчеркнуть, что речь не идет о групповой топологии и слово “топологическая” относится к контексту топологической динамики. Группа $[[T]]$ счетна, а ее коммутант прост и конечно порожден при определенных предположениях о (X, T) (перечисленных далее по тексту).

Одним из основных методов в канторовой динамике является метод периодического приближения, который имитирует поведение (X, T) периодически преобразованиями. Грубо говоря, это значит, что существует измельчающая последовательность открыто-замкнутых разбиений (Какутани–Рохлина) $\{\Xi_n\}_{n \geq 1}$ (см. §3) такая, что действие T можно считать почти перестановкой Ξ_n -атомов. Мы используем действие на башнях Какутани–Рохлина, чтобы показать, что каждый элемент топологической полной группы $[[T]]$ можно единственным образом представить в виде произведения перестановок из $\text{Sym}(\Xi_n\text{-атомы})$ и преобразований, индуцированных T на некоторых открыто-замкнутых множествах (теорема 4.7). Доказательство этого результата указывает на то, что строение топологической полной группы $[[T]]$ подобно возрастающему объединению сплетений $\mathbb{Z} \text{ Wr } \text{Sym}(\Xi_n\text{-атомы})$. Затем мы используем теорему 4.7, чтобы установить (теорема 2.6), что топологическая полная группа канторовой минимальной системы локально вложима в конечные группы

(ЛВК-группы). Заметим, что теорема 4.7 недавно была использована, чтобы показать, что замыкание полной группы в $\text{Homeo}(X)$ топологически просто (см. [12]).

Теорему 4.7 можно также использовать для создания эффективного алгоритма нахождения нормальной формы групповых элементов в случае, если динамическая система эффективно определена (например, как системы подстановок).

В качестве следствий теоремы 2.6 мы получаем:

- (1) что топологические полные группы софичны (sofic);
- (2) новое и элементарное доказательство того факта (первоначально установленного Матуи; см. [13]), что топологические полные группы не конечно определены (здесь мы используем рассуждения из [14], связанные со сходимостью в пространстве меченых групп);
- (3) что универсальная теория топологических полных групп совпадает с универсальной теорией конечных групп.

Мы также доказываем, что коммутант $[[T]]'$, будучи простым и конечно порожденным для минимальных подсдвигов, может быть представлен в виде $[[T]]' = \Gamma_1 \Gamma_2$, где Γ_i , $i = 1, 2$, – (максимальная) локально конечная подгруппа. Насколько нам известно, это первый пример простых конечно порожденных групп с таким разложением. Мы также строим явные примеры максимальных локально конечных подгрупп.

Структура работы такова. В § 2 перечислены известные и установлено несколько новых алгебраических свойств топологических полных групп.

Параграф 3 посвящен основам канторовой динамики. Вводятся все необходимые определения из теории динамических систем и объясняется сущность анализа башен Какутани–Рохлина, который будет основной технической составной частью в наших доказательствах. Хотелось бы упомянуть, что настоящая работа, возможно, является первой работой, использующей разбиения Какутани–Рохлина для изучения алгебраических свойств полных групп.

В § 4 устанавливается, что строение топологической полной группы подобно строению подстановочных сплетений (теорема 4.7). Этот результат был вдохновлен работой Безуглого и Квятковского [6].

Параграф 5 посвящен доказательству свойства ЛВК и обсуждению локально конечных подгрупп.

Мы хотели бы поблагодарить Х. Матуи, С. Безуглого, Я. Квятковского за многочисленные полезные обсуждения полных групп. Мы также благодарны М. Карету, Д. Дрисену, М. Сапиду и В. Суцанскому за их замечания.

§ 2. Алгебраические свойства топологических полных групп

Этот параграф можно считать кратким обзором алгебраических свойств полных групп, так как мы перечисляем результаты, разбросанные по многочисленным статьям. Всюду в работе символ X обозначает канторово множество,

т.е. любое нульмерное компактное метрическое пространство без изолированных точек, а $T: X \rightarrow X$ обозначает гомеоморфизм пространства X . Напомним, что все канторовы множества гомеоморфны друг другу и, в частности, пространству последовательностей $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Рассмотрим пару (X, T) , где X – канторово множество и $T: X \rightarrow X$ – гомеоморфизм. Пара (X, T) называется *канторовой динамической системой*. Если в X нет собственных замкнутых T -инвариантных подмножеств, то T называется *минимальным*. Мы будем всегда предполагать, что динамическая система (X, T) минимальна, т.е. если $Y \subset X$ – непустое замкнутое множество, для которого $T(Y) = Y$, то $Y = X$. Минимальность T равносильна тому, что каждая T -орбита $\{T^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$ всюду плотна в X . Заметим, что если T – минимальный гомеоморфизм, то T^k , $k \neq 0$, может не быть минимальным, хотя у него по-прежнему не будет конечных орбит. Гомеоморфизм, не имеющий конечных орбит, называется *апериодическим*. Следующее определение является одним из равносильных определений топологической полной группы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. *Топологическая полная группа* $[[T]]$ определяется как группа, состоящая из всех гомеоморфизмов S , для которых имеются конечное открыто-замкнутое разбиение $\{C_1, \dots, C_m\}$ пространства X и множество целых чисел $\{n_1, \dots, n_m\}$ такие, что $S|_{C_i} = T^{n_i}|_{C_i}$ для каждого $i = 1, \dots, m$.

Рассмотрим топологическую полную группу $[[T]]$. Для точки $x \in X$ обозначим через $[[T]]_x$ множество всех элементов $S \in [[T]]$, для которых

$$S(\{T^n(x) : n \geq 0\}) = \{T^n(x) : n \geq 0\}.$$

Из компактности и нульмерности канторова множества следует, что группа $[[T]]$ счетна. Группы $[[T]]$ и $[[T]]'$ (коммутант) являются полными алгебраическими инвариантами для флип-сопряженности системы (X, T) (см. [5] и [7]). Напомним, что две динамические системы (X, T) и (Y, S) *флип-сопряжены*, если либо T и S , либо T и S^{-1} топологически сопряжены. Из этого следует, что динамические инварианты флип-сопряженности, такие как топологическая энтропия (см. [15; теорема 7.3]), спектральные характеристики, число инвариантных эргодических мер и др., могут быть использованы для различения полных групп и их коммутантов с точностью до изоморфизма. Заметим, что для каждого положительного вещественного числа α существует минимальный подсдвиг с топологической энтропией равной α (см. [16] и [17]). Из этого следует, что имеется несчетное число неизоморфных топологических полных групп, так же как и их коммутантов. В частности, имеется несчетное число неизоморфных конечно порожденных простых групп, удовлетворяющих свойствам, перечисленным в следующей теореме и других результатах настоящей работы.

ТЕОРЕМА 2.2. (1) Для каждого $S \in [[T]]$ пусть $\varphi(S) = \int_X f_S(x) d\mu(x)$, где μ – вероятностная T -инвариантная мера. Тогда φ – гомоморфизм из $[[T]]$ на $\mathbb{Z}$ (см. [5; § 5]). Таким образом, группа $[[T]]$ индицабельна.

(2) Для каждой точки $x \in X$ группа $[[T]]_x$ локально конечна (см. [5]).

(3) Если $x, y \in X$ – точки, лежащие в различных T -орбитах, то $\text{Ker}(\varphi) = [[T]]_x \cdot [[T]]_y$ является произведением двух локально конечных групп (см. [13; лемма 4.1]).

(4) Любая конечная группа вкладывается в $[[T]]'$ (см. замечание 4.3). Группа $[[T]]'$ содержит подгруппу, изоморфную бесконечной прямой сумме групп $\mathbb{Z}$ (см. замечание 4.3).

(5) Коммутант $[[T]]'$ – простая группа (см. [13; теорема 4.9]). Кроме того, если H – нормальная подгруппа в $[[T]]$, то $[[T]]' \subset H$ (см. [7; теорема 3.4]).

(6) Коммутант $[[T]]'$ конечно порожден тогда и только тогда, когда (X, T) топологически изоморфна минимальному подсдвигу над конечным алфавитом (см. [13; теорема 5.4]).

(7) Если (X, T) – минимальный подсдвиг, то группа $[[T]]'$ не является конечно определенной (см. [13; теорема 5.7]).

(8) Коммутант $[[T]]'$ содержит подгруппу мигающих лампочек тогда и только тогда, когда (X, T) не сопряжена с одометром (вращения на $\{p_n\}$ -адические целые числа).

Матуи (см. [13]) был, по-видимому, первым автором, кто получил чисто алгебраические результаты в теории полных групп канторовых систем. Заметим, однако, что наличие связей между свойствами полных групп и свойствами лежащих динамических систем можно было видеть уже из результатов типа результатов Дая об орбитальной эквивалентности (см. [5] и вышеупомянутые ссылки).

В первой версии настоящей работы мы высказали гипотезу, что топологическая полная группа для минимальной канторовой системы аменабельна. Ющенко и Монод (см. [18]) недавно объявили положительное решение нашей гипотезы.

ТЕОРЕМА 2.3 (см. [18]). *Топологическая полная группа канторовой минимальной системы аменабельна.*

Заметим, что минимальность (или хотя бы апериодичность) динамической системы представляется ключевым свойством для аменабельности топологической полной группы, так как, например, топологическая полная группа любого сдвига конечного типа содержит свободную неабелеву подгруппу [Матуи (H. Matui), частное сообщение]. Упомянем также, что имеются примеры минимальных канторовых $\mathbb{Z}^2$ -действий, топологические полные группы которых содержат свободные неабелевы подгруппы (см. [19]).

Обозначим через AG класс аменабельных групп, а через SAG класс групп, называемый *классом субэкспоненциально аменабельных групп*, содержащий группы субэкспоненциального роста и замкнутый относительно (I) прямых объединений и (II) групповых расширений (см. подробности в [20]). Семейство SAG можно описать с помощью трансфинитной индукции. А именно, обозначим через SAG_0 класс групп субэкспоненциального роста. Если α – не предельный ординал, множество SAG_α определяется как класс групп, полученный из $SAG_{\alpha-1}$ либо с помощью операции (I), либо операции (II). Если α – предельный ординал, определим множество $SAG_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} SAG_\beta$. Тогда

$SAG = \bigcup_{\alpha} SAG_{\alpha}$, где α пробегает все ординалы (см. [21], где приведено родственное построение элементарных аменабельных групп).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Пусть (X, T) – минимальный подсдвиг над конечным алфавитом. Тогда ни одна из групп $[[T]]$ и $[[T]]'$ не является субэкспоненциально аменабельной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать, что группа $[[T]]'$ не субэкспоненциально аменабельна, так как класс SAG замкнут относительно перехода к подгруппам. Предположим противное. Выберем наименьший ординал $\alpha \geq 0$, для которого $[[T]]' \in SAG_{\alpha}$. Поскольку группа мигающих лампочек имеет экспоненциальный рост, получаем, что $[[T]]' \notin SA_0$ (теорема 2.2, (8)). Итак, $\alpha > 0$.

Так как группа $[[T]]'$ конечно порождена (теорема 2.2), α не может быть предельным ординалом. Итак, группа $[[T]]'$ должна быть расширением группы из $SAG_{\alpha-1}$ группой из того же класса. Это невозможно ввиду простоты группы $[[T]]'$. Это противоречие дает требуемый результат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Группа G называется *локально вложимой в конечные группы* (сокращенно ЛВК), если для каждого конечного множества $F \subset G$ найдутся конечная группа H и отображение $\varphi: G \rightarrow H$ такие, что:

- (1) φ инъективно на F ;
- (2) $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$ для любых $g, h \in F$.

Понятие ЛВК-групп было введено Степиным в 1980-х гг. как групповое свойство, равносильное существованию равномерных свободных аппроксимаций для групповых действий. Мы отсылаем читателя к [22] и [23; гл. 7] за подробным изложением теории ЛВК-групп, см. также приводимые там ссылки для полной исторической справки. Доказательство следующего результата приведено в § 5.

ТЕОРЕМА 2.6. Топологическая полная группа любой канторовой минимальной системы является ЛВК-группой.

Отметим, что свойства ЛВК и аменабельности не влекут одно другое (см. [20], [22] и [23; гл. 7]), и в то же время оба влекут софичность (см. [23; следствие 7.5.11]). Группа называется *софичной* (*sofic*), если она вкладывается в ультрапроизведение последовательности конечных симметрических групп, снабженное нормализованной метрикой Хэмминга.

СЛЕДСТВИЕ 2.7. Топологическая полная группа $[[T]]$ и ее коммутант $[[T]]'$ софичны.

Мы хотели бы упомянуть, что Элек (см. [24]) недавно предложил другой подход, связанный с некоторыми идеями из [18], для получения свойства ЛВК для топологических полных групп минимальных $\mathbb{Z}$ -подсдвигов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.8. Поскольку имеется несчетное число неизоморфных конечно порожденных групп $[[T]]'$, получаем, что класс $AG \setminus SAG$ содержит континуум простых конечно порожденных ЛВК-групп.

Каждую конечно порожденную ЛВК-группу можно также определить как предел конечных групп в топологическом пространстве меченых групп (или графов Кэли), введенном в [14]. Если конечно определенная группа G является пределом последовательности конечных групп $\{G_n\}$, то начиная с некоторого индекса n все группы G_n являются фактор-группами группы G . Таким образом, конечно определенные бесконечные простые группы являются изолированными точками в пространстве меченых групп (см. [25; раздел 2]) и потому не могут обладать свойством ЛВК.¹ Отсюда следует, что теорема 2.6 вместе с простотой $[[T]]'$ влекут, что когда T является минимальным подсдвигом над конечным алфавитом, группа $[[T]]'$ является конечно порожденной, но бесконечно определенной группой. Последний результат был впервые получен Матуи другими (динамическими) методами.

СЛЕДСТВИЕ 2.9. *Для каждого минимального подсдвига T над конечным алфавитом коммутант $[[T]]'$ бесконечно определен.*

В § 5 мы модифицируем доказательство леммы 4.1 из [13], чтобы установить, что коммутант можно представить в виде произведения двух локально конечных подгрупп. Заметим, что группы, допускающие факторизации $G = A \cdot B$ с локально конечными подгруппами A и B , изучались в многочисленных работах, см. публикации Амберга, Кегеля, Субботина, Суцанского, Сысака, Н. Черникова и многих других (см., например, [26] и приведенные там ссылки). Насколько нам известно, коммутанты топологических полных групп являются первыми примерами конечно порожденных простых групп, которые разлагаются в произведение двух локально конечных подгрупп. Для точки $x \in X$ положим $\Gamma_x = [[T]]_x \cap [[T]]'$. Заметим, что каждая группа Γ_x локально конечна (см. [5]).

ТЕОРЕМА 2.10. *Пусть $x, y \in X$ – точки с непересекающимися T -орбитами. Тогда $[[T]]' = \Gamma_x \cdot \Gamma_y$.*

2.1. Групповые тождества и универсальные теории.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.11. (1) Говорят, что группа G удовлетворяет групповому тождеству, если существуют $k \geq 1$ и слово $w \in \mathbb{F}_k$ в свободной группе ранга k такие, что $w(g_1, \dots, g_k) = 1$ для любых $g_1, \dots, g_k \in G$.

(2) Если G действует на множестве Y , говорят, что G разделяет Y , если для любого конечного множества $C \subset Y$ поточечный стабилизатор $\text{st}_G(C)$ не стабилизирует никакие другие точки вне C .

Аберт в [27] показал, что если группа G , действующая на Y , разделяет точки, то G не удовлетворяет никакому групповому тождеству. Заметим, что топологическая полная группа $[[T]]$ разделяет X , так как для любого открыто-замкнутого множества O и точки $x \in O$ существует элемент $\gamma \in [[T]]'$, для которого $\text{supp}(\gamma) \subset O$ и $\gamma(x) \neq x$ (см., например, [8; предложение 2.4]). Таким образом, мы немедленно получаем следующий результат.

¹Рассуждения такого типа использовались первым автором, чтобы показать, что все группы промежуточного роста, построенные в [14], бесконечно определены.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.12. *Топологическая полная группа $[[T]]$ не удовлетворяет никакому групповому тождеству.*

Следующее наблюдение было предложено М. Сапиром. Напомним, что *универсальное предложение* языка первого порядка $\mathcal{L}$ – это любое предложение вида $\forall x_1, \dots, \forall x_k \Phi$, где Φ – не содержащая кванторов формула. *Универсальной теорией* класса групп $\mathcal{K}$ называется семейство всех универсальных предложений, выполняющихся на всех группах из $\mathcal{K}$. Универсальная теория класса $\mathcal{K}$ обозначается через $\text{Th}_\forall(\mathcal{K})$. Группа G называется *моделью* множества предложений W , если каждое предложение из W выполняется на G . Напомним, что группа G является ЛВК-группой тогда и только тогда, когда она вложена в ультрапроизведение конечных групп (см. [23; теорема 7.2.5]). Последнее является моделью для $\text{Th}_\forall(\mathcal{F})$, где $\mathcal{F}$ – класс конечных групп. Мы отсылаем читателя к [28] за обзором о локальной вложимости и универсальных моделях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.13. *Для любой минимальной канторовой системы (X, T) универсальная теория группы $[[T]]'$ совпадает с универсальной теорией класса конечных групп и потому является неразрешимой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любой канторовой минимальной системы (X, T) коммутант $[[T]]'$ содержит любую конечную группу (теорема 2.2). Таким образом, $\text{Th}_\forall([T']) \subset \text{Th}_\forall(\mathcal{F})$. С другой стороны, так как $[[T]]'$ является ЛВК-группой, она вкладывается в ультрапроизведение конечных групп. Отсюда следует, что $\text{Th}_\forall(\mathcal{F}) \subset \text{Th}_\forall([T'])$.

Результат Слободского [29] о неразрешимости универсальной теории конечных групп завершает доказательство.

2.2. Проблема равенства. Рассмотрим подсдвиг (X, T) над конечным алфавитом $\mathcal{A}$. Обозначим через $L(X)$ язык пространства X , т.е. множество всех конечных слов, встречающихся в последовательностях из X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.14. Язык $L(X)$ называется *рекурсивным*, если существует машина Тьюринга такая, что для любого входного слова w над алфавитом $\mathcal{A}$ она решает, лежит ли w в $L(X)$.

Отметим, что языки динамических систем примитивных подстановок рекурсивны (см. [30]).

ТЕОРЕМА 2.15. *Пусть (X, T) – минимальный подсдвиг с рекурсивным языком. Тогда проблема равенства в $[[T]]'$ разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем порождающие $\{g_1, \dots, g_p\}$ для группы $[[T]]'$ (теорема 2.2). Явное определение порождающих можно найти в ходе доказательства в [13; теорема 5.4]. Это определение показывает, что если язык рекурсивен, то порождающие можно определить эффективно. Подробную проверку этого факта оставляем читателю.

Найдем такое $n > 1$, что коциклы f_{g_i} постоянны на каждом цилиндрическом слове (с центром в нуле) длины n . Пусть $M = \max_i \max_{x \in X} |f_{g_i}(x)|$. Зафиксируем групповой элемент $w = g_{i_1} \cdots g_{i_k}$, где $\{g_{i_j}\}$ – порождающие. Найдем

все слова $\mathscr{W}$ в языке $L(X)$ длины Mnk . Заметим, что по условию имеется эффективный алгоритм для выписывания всех таких слов.

Зафиксируем слово $v \in L(X)$ длины n . Для каждого порождающего имеем $g_i|[v] = T^{n_i}[v]$ для некоторого (единственного) n_i , где $[v]$ – цилиндрическое множество с центром в нуле, определяемое словом v . Заметим, что $|n_i| \leq M$. Таким образом, зная действие каждого порождающего на каждом слове длины Mnk , мы можем проверить, тривиально ли действие w на каждом цилиндрическом множестве $[v]$, $v \in \mathscr{W}$. Если это так, то $w \equiv \text{id}$. В противном случае $w \neq \text{id}$.

2.3. Инвариантные случайные подгруппы и вполне несвободные действия. Рассмотрим пространство SUB_T всех подгрупп группы $[[T]]$ (отождествляемое с замкнутым подпространством из $\{0, 1\}^{[[T]]}$ с помощью характеристических функций). Напомним, что любая группа действует на множестве ее подгрупп сопряжением. Мы будем называть это действие *присоединенным*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.16. Вероятностная мера на пространстве всех подгрупп, инвариантная относительно присоединенного действия, называется *инвариантной случайной подгруппой*.

Действие группы G на множестве X называется *совершенно несвободным*, если для любых двух различных точек $x, y \in X$ их поточечные стабилизаторы $\text{st}_G(x)$ и $\text{st}_G(y)$ являются различными подгруппами группы G .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.17. Действия $[[T]]$ и $[[T]]'$ на X совершенно несвободны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем две различные точки $x, y \in X$. Найдем открыто-замкнутое множество U и целые числа $n < m < k$ такие, что $x \in U$, множества U , $T^n U$, $T^m U$ и $T^k U$ попарно не пересекаются и не содержат y . Определим элемент Q следующим образом:

$$\begin{aligned} Q|U &= T^n|U, & Q|T^n U &= T^{-n}|T^n U, & Q|T^m U &= T^{k-m}|T^m U, \\ & & Q|T^k U &= T^{m-k}|T^k U \end{aligned}$$

и $Q = \text{id}$ в других местах. Заметим, что $Q \in \text{St}_{[[T]]}(y) \setminus \text{St}_{[[T]]}(x)$. Поскольку Q является произведением двух сопряженных инволюций, получаем, что $Q \in [[T]]'$.

Вершик в [31] ввел понятие *вполне несвободного действия* как такого действия группы G на пространстве с мерой (X, μ) , что семейство множеств $\{x \in X : g(x) = x\}$, $g \in G$, порождает борелеву σ -алгебру. Заметим, что каждое совершенно несвободное действие автоматически является вполне несвободным. Вершик (см. [31]) также поставил вопрос о том, какие счетные группы допускают непрерывные инвариантные случайные подгруппы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.18. Пусть (X, T) – канторова минимальная система. Тогда обе группы $[[T]]$ и $[[T]]'$ обладают неатомарными (эргодическими) инвариантными случайными подгруппами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку различные точки имеют разные стабилизаторы, отображение $\alpha: X \rightarrow \text{SUB}_T$, заданное по правилу $\alpha(x) = \text{st}_{[[T]]}(x)$, инъективно. Заметим, что любой элемент $g \in \text{st}_{[[T]]}(x)$ также стабилизирует некоторую окрестность точки x , так как действие группы $\{T^n\}$ на X свободно. Поэтому отображение $\alpha: X \rightarrow \text{SUB}_T$ является гомеоморфизмом на его образ (см. [32; лемма 5.4]). Отсюда следует, что динамические системы $(\alpha(X), [[T]])$ и $(X, [[T]])$ сопряжены. Значит, любая T -инвариантная мера на X порождает случайную подгруппу на $[[T]]$. Доказательство для группы $[[T]]'$ дословно такое же. Если мера T -эргодическая, то получится эргодическая случайная подгруппа.

Поскольку группа $[[T]]'$ проста, у нее нет атомарных инвариантных подгрупп, кроме $\{\text{id}\}$. Группа $[[T]]$, напротив, имеет нормальные подгруппы $[[T]]'$ и $\text{Ker}(\varphi)$, см. теорему 2.2. Таким образом, меры Дирака с носителями, равными этим подгруппам, являются нетривиальными инвариантными случайными подгруппами группы $[[T]]$.

§ 3. Разбиения Какутани–Рохлина

В этом параграфе мы зафиксируем обозначения и введем необходимые определения из теории канторовых динамических систем. Заинтересованный читатель может найти дальнейшие результаты по канторовой динамике в работах [4]–[7], [13], [33] и [34].

Нам нужно будет иногда использовать *диаметр* множества. Под этим мы понимаем, что диаметр определен некоторой метрикой на X , согласованной с топологией. Если d – метрика на X и $\mathcal{U}$ – открытое покрытие пространства X , то в силу компактности X существует такое число $\delta > 0$, что любое множество $A \subset X$ с d -диаметром менее δ содержится хотя бы в одном элементе покрытия $\mathcal{U}$. Число δ называется *числом Лебега покрытия* $\mathcal{U}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Рассмотрим открыто-замкнутое множество B такое, что множества

$$\xi = \{B, TB, \dots, T^{n-1}B\}$$

попарно не пересекаются. Семейство ξ называется *T -башней с основанием B и высотой n* . Открыто-замкнутое разбиение пространства X вида

$$\Xi = \{T^i B_v : 0 \leq i \leq h_v - 1, v = 1, \dots, q\}$$

называется *разбиением Какутани–Рохлина*. Множества $\{T^i B_v\}$ называются *атомами* разбиения Ξ .

Зафиксируем произвольное открыто-замкнутое множество $A \subset X$. Определим функцию $t_A: A \rightarrow \mathbb{N}$, полагая

$$t_A(x) = \min\{k \geq 1 : T^k x \in A\}.$$

Используя минимальность T , можно проверить, что полуорбита $\{T^n x : n \geq 0\}$, $x \in X$, всюду плотна в X . Это показывает, что функция t_A корректно определена и принимает конечные значения. Поскольку T – гомеоморфизм канторова

множества, функция t_A непрерывна и потому ограничена. Иногда t_A называют *функцией первого возвращения*.

Обозначим через K множество всех целых $k \in \mathbb{N}$ таких, что множество $A_k = \{x \in A : t_A(x) = k\}$ непусто. Из непрерывности t_A следует, что множество K конечно и $A = \bigsqcup_{k \in K} A_k$ является открыто-замкнутым разбиением. Из определения функции t_A следует, что для каждого $k \in K$ множества $\{A_k, TA_k, \dots, T^{k-1}A_k\}$ попарно не пересекаются. В самом деле, если $T^i A_k \cap T^j A_k \neq \emptyset$ при $0 \leq i < j \leq k-1$, то $A_k \cap T^{j-i} A_k \neq \emptyset$. Значит, существует точка $x \in A_k$, для которой $T^{j-i} x \in A_k$. Отсюда следует, что $k = t_A(x) \leq j-i \leq k-1$, что является противоречием. Аналогично можно проверить, что семейство

$$\Xi = \{T^i A_k : 0 \leq i \leq k-1, k \in K\}$$

состоит из попарно непересекающихся множеств и

$$X = \bigsqcup_{k \in K} \bigsqcup_{i=0}^{k-1} T^i A_k.$$

Таким образом, Ξ является разбиением Какутани–Рохлина пространства X .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Объединение множеств $B(\Xi) = \bigsqcup_{k \in K} A_k$ называется *основанием разбиения* Ξ , а объединение верхних уровней $H(\Xi) = \bigsqcup_{k \in K} T^{k-1} A_k$ называется *верхом* или *крышей* разбиения.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. (1) Удобная точка зрения на разбиения Какутани–Рохлина состоит в отслеживании траекторий точек. А именно, если $x \in A_k$ для некоторого $k \in K$, то x переходит на уровень TA_k под действием T . Следовательно, применяя T к точке x , видим, что x движется вверх, пока не попадет на верхний уровень, т.е. $T^{k-1} x \in H(\Xi)$. Когда мы применяем T еще раз, точка $T(T^{k-1} x)$ возвращается назад в множество $A = \bigsqcup_{i \in K} A_i$. Однако мы не можем точно предсказать множество A_i , $i \in K$, в которое попадет точка $T(T^{k-1} x) = T^k x$.

(2) Заметим, что $T(H(\Xi)) = B(\Xi)$.

(3) Пусть B – произвольное открыто-замкнутое множество. Можно разбить каждое множество A_k , $k \in K$, на конечное число открыто-замкнутых подмножеств $\{C_{j,k}\}$, $j = 0, \dots, p_k$, так, что каждое множество $T^i C_{j,k}$, $0 \leq i \leq k-1$, либо будет не пересекаться с B , либо будет подмножеством из B . Таким образом, $\Xi' = \{T^i C_{j,k} : k \in K, j = 0, \dots, p_k, i = 0, \dots, k-1\}$ будет открыто-замкнутым разбиением, *измельчающим* разбиение Ξ и множество B .

Зафиксируем точку $x_0 \in X$. Выберем убывающую последовательность открыто-замкнутых множеств $\{E_n\}_{n \geq 1}$, для которой $\bigcap_{n \geq 1} E_n = \{x_0\}$. Обозначим через Ξ_n открыто-замкнутое разбиение, построенное по функции t_{E_n} , как указано выше. При необходимости измельчая разбиения Ξ_n , как в замечании 3.3(3), можно считать, что последовательность $\{\Xi_n\}_{n \geq 1}$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) разбиения $\{\Xi_n\}_{n \geq 1}$ порождают топологию пространства X ;
- 2) разбиение Ξ_{n+1} измельчает Ξ_n ;
- 3) $\bigcap_{n \geq 1} B(\Xi_n) = \{x_0\}$ и $B(\Xi_{n+1}) \subset B(\Xi_n)$ для каждого $n \geq 1$.

Поскольку Ξ_n является разбиением Какутани–Рохлина, его можно представить в виде

$$\Xi_n = \{T^i B_v^{(n)} : 0 \leq i \leq h_v^{(n)} - 1, v = 1, \dots, v_n\}$$

для некоторого открыто-замкнутого множества $B_v^{(n)}$ и некоторых натуральных чисел v_n и $h_v^{(n)}$, $v \in V_n = \{1, \dots, v_n\}$. Положим $\xi_v^{(n)} = \{B_v^{(n)}, \dots, T^{h_v^{(n)}-1} B_v^{(n)}\}$. Тогда Ξ_n является объединением попарно непересекающихся башен $\xi_v^{(n)}$, $v \in V_n$. Заметим, что $h_v^{(n)}$ – высота башни $\xi_v^{(n)}$.

Зафиксируем последовательность натуральных чисел $\{m_n\}$, $m_n \rightarrow \infty$, при $n \rightarrow \infty$. Возьмем подпоследовательность из $\{\Xi_n\}_{n \geq 1}$ (мы опускаем дополнительный нижний индекс) так, чтобы каждое разбиение Какутани–Рохлина Ξ_n дополнительно удовлетворяло следующим условиям:

- 4) $h_n \geq 2m_n + 2$, где $h_n = \min_{v \in V_n} h_v^{(n)}$;
- 5) множества $T^i B(\Xi_n)$ обладают свойством

$$\text{diam}(T^i B(\Xi_n)) < \frac{1}{n} \quad \text{для} \quad -m_n - 1 \leq i \leq m_n. \quad (\ddagger)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Заметим, что минимальность T не нужна для того, чтобы получить разбиения, удовлетворяющие свойствам (1)–(4). Такие разбиения существуют для любого апериодического² гомеоморфизма (см. [35]). Однако условие (5) выполняется только для минимальных (или хотя бы существенно минимальных³) систем (см. [33]).

§ 4. Вращения и подстановки

В этом параграфе вводятся два вида групповых элементов: подстановки (определение 4.1) и вращения (определение 4.5). Затем мы показываем, что каждый элемент можно единственным образом разложить в произведение подстановок и вращений (теорема 4.7). Результаты этого параграфа были вдохновлены работой [6], ср. [36; теорема 3.3]. Теорема 2.2 из [6] описывает, как элементы из $[[T]]$ двигают атомы разбиений Какутани–Рохлина. Зафиксируем последовательность разбиений $\{\Xi_n\}_{n \geq 1}$, удовлетворяющую свойствам (1)–(5) из § 3. Мы используем те же обозначения, что и в § 3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Зафиксируем целое число $n \geq 1$. Назовем гомеоморфизм $P \in [[T]]$ n -*подстановкой*, если (1) его орбитальный коцикл f_P согласован (постоянен на атомах) с разбиением Ξ_n и (2) для любой точки $x \in T^i B_v^{(n)}$, $0 \leq i \leq h_v^{(n)} - 1$, $v \in V_n$, выполняется $0 \leq f_P(x) + i \leq h_v^{(n)} - 1$. Последнее условие означает, что P переставляет атомы только внутри каждой башни, не двигая точки далее верха или основания башни. Будем называть P просто *подстановкой*, когда из контекста ясно, какое разбиение Ξ_n имеется в виду.

²Гомеоморфизм называется *апериодическим*, если каждая орбита бесконечна.

³Система называется *существенно минимальной*, если в ней есть только одна минимальная компонента.

Напомним, что $V_n = \{1, \dots, v_n\}$ обозначает множество индексов, нумерующих T -башни из Ξ_n . Тогда каждую подстановку P можно единственным образом разложить в произведение подстановок $P_1, \dots, P_{v_n}$ таких, что P_i действует только в пределах башни $\xi_i^{(n)}$, $i = 1, \dots, v_n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.2. Зафиксируем открыто-замкнутое множество A . Пусть t_A – функция первого возвращения в множество A . Определим гомеоморфизм T_A по правилу $T_A(x) = T^{t_A(x)}x$, когда $x \in A$, и $Tx = x$ в противном случае. Гомеоморфизм T_A принадлежит $[[T]]$ и называется *индуцированным преобразованием гомеоморфизма T* .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. (1) Заметим, что из минимальности T следует минимальность индуцированного преобразования T_A на A .

(2) Поскольку у минимальных гомеоморфизмов нет периодических точек, группа, порожденная индуцированным преобразованием T_A , изоморфна $\mathbb{Z}$. Выберем последовательность попарно непересекающихся открыто-замкнутых множеств $\{A_n\}_{n \geq 1}$ таких, что $A_n = B'_n \sqcup B''_n$, причем $B''_n = T^{q_n}(B_n)$ для некоторого q_n . Тогда элемент $Q_n = T_{B'_n} \cdot T_{B''_n}^{-1}$ принадлежит $[[T]]'$, так как $T_{B'_n}$ и $T_{B''_n}$ сопряжены в $[[T]]$. Отсюда следует, что подгруппа из $[[T]]'$, порожденная $\{Q_n\}_{n \geq 1}$, изоморфна бесконечной прямой сумме $\bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}$.

(3) Для данного целого числа $n > 0$ выберем открыто-замкнутое множество U такое, что множества $\mathcal{F} = \{U, TU, \dots, T^{n-1}U\}$ попарно не пересекаются. Затем, используя степени T , можно вложить симметрическую группу $\text{Sym}(n)$ в $[[T]]$ с помощью действия на $\mathcal{F}$. В частности, любая конечная группа вложима в $[[T]]$. Модифицируя эти рассуждения, можно показать, что любая конечная группа также вкладывается в $[[T]]'$.

Для каждого целого $0 \leq i \leq h_n - 1$ положим

$$U(i) = \bigsqcup_{v \in V_n} T^{h_v^{(n)} - i - 1} B_v^{(n)}, \quad D(i) = \bigsqcup_{v \in V_n} T^i B_v^{(n)}.$$

Множество $U(i)$ (соответственно $D(i)$) состоит из атомов, находящихся на расстоянии i от верха (соответственно основания) разбиения Ξ_n . Заметим, что индуцированное преобразование $T_{U(i)}$ имеет вид

$$T_{U(i)}(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \notin U(i); \\ T^{h_w^{(n)}} x, & \text{если } x \in T^{h_v^{(n)} - i - 1} B_v^{(n)} \text{ и } T^{i+1}x \in B_w^{(n)}. \end{cases}$$

Аналогично, преобразование $T_{D(i)}^{-1}$ имеет вид

$$T_{D(i)}^{-1}(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \notin D(i); \\ T^{-h_w^{(n)}} x, & \text{если } x \in T^i B_v^{(n)} \text{ и } T^{-i-1}x \in T^{h_w^{(n)} - 1} B_w^{(n)}. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. (1) Неформально действие гомеоморфизма $T_{U(i)}$ можно описать так. Гомеоморфизм $T_{U(i)}$ переводит любую точку $x \in T^{h_v^{(n)} - i - 1} B_v^{(n)}$ на верх башни $\xi_v^{(n)}$; затем в основание некоторой башни $\xi_w^{(n)}$; в конце концов

эта точка переходит на уровень $T^{h_w^{(n)}-1-i}B_w^{(n)}$. Это можно увидеть из разложения

$$h_w^{(n)} = i + 1 + (h_w^{(n)} - 1 - i).$$

Здесь первое слагаемое показывает число уровней до верха башни $\xi_v^{(n)}$; число 1 говорит нам, что точка отображается в основание разбиения Ξ_n ; последнее слагаемое показывает число шагов, требующихся, чтобы перевести точку на уровень башни $\xi_w^{(n)}$, который на том же расстоянии от верха, как и уровень $T^i B_v^{(n)}$. Заметим, что похожее описание можно также применить к $T_{D(i)}^{-1}$.

(2) Отметим, что $T_{U(i)}$ и $T_{D(i)}$ принадлежат $[[T]]$. Заметим также, что их орбитальные коциклы могут быть не согласованы с разбиением Ξ_n , хотя эти коциклы будут согласованы с некоторым другим разбиением Ξ_m , $m > n$.

В следующем определении последовательность целых чисел $\{m_n\}_{n \geq 1}$ удовлетворяет равенству (§) из §3.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.5. Гомеоморфизм $R \in [[T]]$ называется n -вращением с числом вращения меньшим или равным $r > 0$, если имеются два множества $S_d, S_u \subset \{0, \dots, m_n\}$ такие, что

$$R = \prod_{i \in S_u} (T_{U(i)})^{l_i} \times \prod_{j \in S_d} (T_{D(j)})^{k_j}$$

для некоторых целых чисел $\{l_i\}$ и $\{k_j\}$, для которых $|l_i| \leq r$ и $|k_j| \leq r$. Множества S_u и S_d называются *несущими множествами* для R .

Поскольку $U(i) \cap D(j) = \emptyset$ для всех $0 \leq i \neq j \leq m_n < h_n/2$, вращение R корректно определено и его определение не зависит от порядка произведения.

Несущее множество S_d показывает, какие уровни в пределах расстояния m_n от основания разбиения Ξ_n “заняты” носителем гомеоморфизма R . Множество S_u показывает то же самое, но для уровней в пределах расстояния m_n от верха разбиения Ξ_n . Мы хотели бы подчеркнуть, что числа $\{l_i\}$ и $\{k_j\}$ в определении вращений могут принимать произвольные (положительные и отрицательные) целые значения с абсолютными величинами, не превосходящими r . Можно построить вращения с числами вращения, равными любому заданному целому числу. Если R_1 и R_2 – вращения с числами вращения, соответственно не превосходящими r_1 и r_2 , то число вращения $R_1 R_2$ не превосходит $r_1 + r_2$.

ПРИМЕР 4.6. Проиллюстрируем определения вращений и подстановок на примере топологической полной группы 2-одометра. Кроме того, мы полностью опишем строение этой группы. Это описание было предложено Матуи в частных сообщениях.

Положим $Y = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Напомним, что 2-одометр $O: Y \rightarrow Y$ определяется по правилу $O(0^n 1 w) = 1^n 0 w$ для любой последовательности $1^n 0 w \in Y$ и $O(1^\infty) = 0^\infty$. Для каждого $n \geq 1$ положим $B_0^{(n)} = \{x \in Y : x_0 \dots x_{n-1} = 0^n\}$ и $B_i^{(n)} = O^i B_0^{(n)}$, $0 < i < 2^n - 1$. Тогда $\Xi_n = \{B_0^{(n)}, \dots, B_{2^n-1}^{(n)}\}$ – последовательность разбиений Какутани–Рохлина $\{\Xi_n\}_{n \geq 1}$, удовлетворяющая условиям (1)–(5) из §3. Заметим, что $\bigcap_{n \geq 1} B(\Xi_n) = \{0^\infty\}$.

Зафиксируем $n \geq 1$. Рассмотрим подмножество $G_n \subset [[O]]$ элементов S таких, что орбитальный коцикл f_S согласован с разбиением Ξ_n . Поскольку одометр O циклически переставляет атомы $\{B_0^{(n)}, \dots, B_{2^n-1}^{(n)}\}$, элемент S также будет действовать как подстановка этих атомов. Обозначим индуцированную подстановку на $\{0, \dots, 2^n - 1\}$ через $\mathcal{P}_n(S)$. Заметим, что G_n на самом деле является подгруппой группы $[[O]]$ и $\mathcal{P}_n: G_n \rightarrow \text{Sym}(2^n)$ – гомоморфизм.

Если $S \in \text{Ker}(\mathcal{P}_n)$, т.е. $\mathcal{P}_n(S) = \text{id}$, то для каждого $i = 0, \dots, 2^n - 1$ существует $k_i \in \mathbb{Z}$ такое, что

$$S|B_i^{(n)} \equiv O_i^{k_i}|B_i^{(n)}, \quad (1)$$

где O_i – преобразование, индуцированное O на атоме $B_i^{(n)}$. Поскольку разбиение Ξ_n состоит только из одной башни, получаем, что $D(i) = U(i)$ и $O_i = O_{D(i)} = O_{U(i)}$ для каждого $i = 0, \dots, 2^n - 1$.

Из (1) следует, что $\text{Ker}(\mathcal{P}_n)$ изоморфно $\mathbb{Z}^{2^n}$. Заметим, что $\text{Ker}(\mathcal{P}_n)$ состоит в точности из n -вращений в нашей терминологии. Число вращения элемента $S \in \text{Ker}(\mathcal{P}_n)$ равно

$$\max_{0 \leq i \leq 2^n - 1} |k_i|.$$

Обозначим через Perm_n множество всех n -подстановок из $[[O]]$. Заметим, что Perm_n является подгруппой группы G_n . Так как $\text{Ker}(\mathcal{P}_n) \cap \text{Perm}_n = \{1\}$ и $\mathcal{P}_n(\text{Perm}_n) = \text{Sym}(2^n)$, группа G_n является полупрямым произведением Perm_n и $\text{Ker}(\mathcal{P}_n)$, которое в то же время можно представить в виде подстановочного сплетения $\mathbb{Z}$ и $\text{Sym}(2^n)$. Заметим, что любой элемент $S \in G_n$ можно единственным образом разложить на множители в виде $S = PR$, где $P \in \text{Perm}_n$ – n -подстановка, а $R \in \text{Ker}(\mathcal{P}_n)$ – n -вращение. В теореме 4.7 мы покажем, что похожее разложение на множители существует в топологической полной группе любой канторовой минимальной системы.

Зафиксируем следующие обозначения. Пусть P_v – подстановка уровней в пределах башни $\xi_v^{(n)}$. Заметим также, что P_v естественным образом индуцирует подстановку множества $\{0, \dots, h_v^{(n)} - 1\}$. Для подстановок P_v и P_w различных башен равенство $k = P_v(i) = P_w(i)$ будет буквально означать, что образы атомов $T^i B_v^{(n)}$ и $T^i B_w^{(n)}$ являются атомами $T^k B_v^{(n)}$ и $T^k B_w^{(n)}$.

1. Мы будем рассматривать множество $\{0, \dots, h_v^{(n)} - 1\}$ как циклическую группу вычетов по модулю $h_v^{(n)}$ и будем обозначать через $[-a, b]$ множество

$$[-a, b] = \{0, \dots, b\} \cup \{h_v^{(n)} - 1, h_v^{(n)} - 2, \dots, h_v^{(n)} - a\}$$

при $a, b \geq 0$.

2. Мы можем естественным образом отождествить группу $\{0, \dots, h_v^{(n)} - 1\}$ с $\{z : |z| = 1 : z^{h_v^{(n)}} = 1\}$. Обозначим через d метрику на единичной окружности, нормализованную таким образом, что $h_v^{(n)}$ – полная длина окружности. Обозначим через $d_v^{(n)}$ метрику, индуцированную на множестве $\{0, \dots, h_v^{(n)} - 1\}$. Заметим, что $d_v^{(n)}(0, h_v^{(n)} - 1) = 1$.

Следующее предложение устанавливает, что каждый элемент из $[[T]]$ можно представить в виде произведения подстановок и вращений.

ТЕОРЕМА 4.7. Пусть $Q \in [[T]]$. (1) Тогда существует $n_0 > 0$ такое, что для всех $n \geq n_0$ гомеоморфизм Q можно представить в виде $Q = PR$, где P – n -подстановка, а R – n -вращение с числом вращения, не превосходящим 1. Кроме того, подстановку P можно разложить (единственным образом) в произведение подстановок $P_1, \dots, P_{v_n}$, удовлетворяющих следующим условиям:

- (i) подстановка P_v действует только в пределах T -баши $\xi_v^{(n)}$, $v \in V_n$;
- (ii) $P_v(i) = P_w(i)$ для всех $i \in [-m_n, m_n]$ и для всех $v, w \in V_n$;
- (iii) отображение P_v индуцирует подстановку множества $\{0, \dots, h_v^{(n)} - 1\}$ (обозначаемую тем же символом), для которой $d_v^{(n)}(P_v(i), i) \leq n_0$ для всех $i \in \{0, \dots, h_v^{(n)} - 1\}$;
- (iv) вращение R действует только на уровнях, которые находятся на расстоянии не более n_0 от верха или низа разбиения. Другими словами, несущие множества вращения R содержатся в $\{0, 1, \dots, n_0 - 1\}$.

(2) Если $Q = P_2 R_2$ – другое разложение, где P_2 – n -подстановка и R_2 – n -вращение, то $P = P_2$ и $R = R_2$.

(3) Для любого конечного множества $F \subset [[T]]$ существует такое $n_0 > 0$, что для всех $n \geq n_0$ разложения $Z = P_Z R_Z$ элементов $Z \in F$ в произведение n -подстановок и n -вращений удовлетворяют $P_{Z_1} \neq P_{Z_2}$ для $Z_1, Z_2 \in F$ при $Z_1 \neq Z_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Разобьем доказательство на несколько шагов.

(1-а) Выберем такое целое n_0 , что орбитальный коцикл f_Q согласован (постоянен на атомах) с разбиением Ξ_{n_0} и $n_0 \geq \max_{x \in X} |f_Q(x)|$. Кроме того, ввиду компактности X можно считать, что n_0 выбрано настолько большим, что $1/n_0$ – число Лебега для открыто-замкнутого разбиения $\{f_Q^{-1}(k) : k \in \mathbb{Z}\}$, т.е. любое множество диаметра менее $1/n_0$ содержится в множестве $f_Q^{-1}(k)$ для некоторого $k \in \mathbb{Z}$. Заметим, что из выбора n_0 следует, что коцикл f_Q постоянен на каждом множестве $T^i B(\Xi_{n_0})$ при $-m_n - 1 \leq i \leq m_n$, см. соотношение (†) в § 3.

Таким образом, для всех $n \geq n_0$ если $f_Q(x) + i \geq h_v^{(n)}$ для некоторого $x \in T^i B_v^{(n)}$, то $f_Q|U(h_v^{(n)} - 1 - i) \equiv \text{const}$. Поскольку $n_0 \geq \max_{z \in X} |f_Q(z)|$, имеем $h_v^{(n)} - i \leq f_Q(x) \leq n_0$. Аналогично, если элемент $x \in T^i B_v^{(n)}$ таков, что $f_Q(x) + i < 0$, то $f_Q|D(i) \equiv \text{const}$ и $i \leq n_0$. Эти свойства говорят, что если атом $T^i B_v^{(n)}$ переводится гомеоморфизмом Q далее верха или низа разбиения Ξ_n , то этот атом берется из n_0 самых нижних или n_0 самых верхних уровней разбиения Ξ_n , т.е. $d_v^{(n)}(i, 0) \leq n_0$ или $d_v^{(n)}(i, h_v^{(n)} - 1) \leq n_0$.

(1-б) Определим вращение $R \in [[T]]$ следующим образом:

$$R(x) = \begin{cases} T_{U(h_v^{(n)} - 1 - i)}(x), & \text{если } f_Q(x) + i \geq h_v^{(n)}, \\ T_{D(i)}^{-1}(x), & \text{если } f_Q(x) + i < 0, \\ x & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Заметим, что число вращения R равно 1 и R может действовать нетривиально только на n_0 самых низких уровнях и n_0 самых верхних уровнях разбиения Ξ_n .

Определим подстановку P как произведение v_n подстановок $P_1 \dots P_{v_n}$, где каждая подстановка P_v действует только в пределах башни $\xi_v^{(n)}$ следующим образом:

$$P_v|_{T^i B_v^{(n)}} = T^p|_{T^i B_v^{(n)}}, \quad \text{где } p = -i + (i + f_Q|_{T^i B_v^{(n)}} \bmod h_v^{(n)}),$$

для $i = 0, \dots, h_v^{(n)} - 1$. Другими словами, определим подстановку P_v как Q , если гомеоморфизм Q не двигает множество $T^i B_v^{(n)}$ далее верха или основания башни, т.е. $0 \leq f_Q(x) + i \leq h_v^{(n)} - 1$ для $x \in T^i B_v^{(n)}$. Если $f_Q(x) + i \geq h_v^{(n)}$ для $x \in T^i B_v^{(n)}$, то весь уровень $U(h_v^{(n)} - 1 - i)$ перейдет далее верха разбиения Ξ_n под действием Q . Отсюда следует, что $QU(h_v^{(n)} - 1 - i) = D(j)$ для некоторого (единственного) j . В этом случае потребуем, чтобы P_v отображала $T^i B_v^{(n)}$ в атом $T^j B_v^{(n)}$ под действием T^{j-i} . Теперь если $f_Q(x) + i < 0$ для $x \in T^i B_v^{(n)}$, то $QD(i) = U(j)$ для некоторого j . Положим $P = T^{h_v^{(n)}-1-j-i}$ на таком множестве.

(1-с) Докажем, что $Q = PR$. Зафиксируем $x \in X$. Найдем единственные $v \in V_n$ и $0 \leq i \leq h_v^{(n)} - 1$, для которых $x \in T^i B_v^{(n)}$. Рассмотрим три случая в зависимости от значения $f_Q(x) + i$.

Предположим, что $0 \leq f_Q(x) + i \leq h_v^{(n)} - 1$. Из определений P и R следует, что $R(x) = x$ и $P(x) = Q(x)$. Таким образом, $Q(x) = PR(x)$.

Предположим, что $i + f_Q(x) \geq h_v^{(n)}$. Тогда пусть $y := R(x) = T^{h_w^{(n)}}(x)$, где w однозначно определено соотношением $T^{h_v^{(n)}-i}x \in B_w^{(n)}$. Заметим, что $h_v^{(n)} - i \leq n_0$ и $y, x \in U(h_v^{(n)} - 1 - i)$. Отсюда следует, что $f_Q(y) = f_Q(x)$ в силу выбора n_0 . Заметим также, что $y \in T^j B_w^{(n)}$, где $j = h_w^{(n)} - (h_v^{(n)} - i)$. Отсюда по определению P получаем, что $P(y) = T^p(y)$, где

$$\begin{aligned} p &= -j + (f_Q(y) + j \bmod h_w^{(n)}) \\ &= -j + (f_Q(x) + (h_w^{(n)} - (h_v^{(n)} - i)) \bmod h_w^{(n)}) \\ &= -j + (f_Q(x) - (h_v^{(n)} - i)) = f_Q(x) - (h_v^{(n)} - i + j) = f_Q(x) - h_w^{(n)}. \end{aligned}$$

Следовательно, $PR(x) = T^{f_Q(x)-h_w^{(n)}}T^{h_w^{(n)}}x = T^{f_Q(x)}x = Qx$.

Случай $i + f_Q(x) < 0$ проверяется аналогично рассмотренному выше. Мы оставляем подробности читателю.

(2) Предположим, что $PR = P_2 R_2$. Отсюда следует, что $P_2^{-1}P = R_2 R^{-1}$. Заметим, что $P_2^{-1}P$ — n -подстановка, а $R_2 R^{-1}$ — n -вращение. Заметим также, что если P — n -подстановка, а R — n -вращение, то $P \neq R$, если только они оба не являются тривиальными преобразованиями. Отсюда немедленно вытекает единственность разложения.

(3) Рассмотрим два различных элемента Z_1 и Z_2 из $[[T]]$. Найдем открыто-замкнутое множество C такое, что $Z_1(y) \neq Z_2(y)$ для каждого $y \in C$. Рассмотрим разложения $Z_1 = P_n^{(1)} R_n^{(1)}$ и $Z_2 = P_n^{(2)} R_n^{(2)}$ в произведение n -подстановки и n -вращения. Заметим, что для всех достаточно больших n несущие множества n -вращений $R_n^{(1)}$ и $R_n^{(2)}$ содержатся в $[-k, k]$ для некоторого $k > 0$, не зависящего от n . Отсюда следует, что можно найти такое открыто-замкнутое подмножество $C' \subset C$, что для больших n носители $R_n^{(1)}$ и $R_n^{(2)}$ не пересекаются

с C' . Отсюда следует, что $P_n^{(1)}|C' \neq P_n^{(2)}|C'$ для всех достаточно больших n . Это завершает доказательство.

§ 5. Приложения

В этом параграфе мы показываем, что топологическая полная группа любой канторовой минимальной системы локально вложима в конечные группы и что ее коммутант является произведением двух локально конечных подгрупп.

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть (X, T) – произвольная канторова минимальная система. Тогда топологическая полная группа $[[T]]$ является ЛВК-группой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем конечное множество $F \subset [[T]]$. Можно считать, что единичный элемент группы содержится в F . Положим $F^2 = F \cdot F$. Используя теорему 4.7, найдем такое $n \in \mathbb{N}$, что каждый элемент $Q \in F^2$ представим в виде произведения $Q = S_Q R_Q$, где R_Q – n -вращение, а S_Q – n -подстановка такие, что $S_Q \neq S_Z$ для $Q, Z \in F^2$ при $Q \neq Z$.

Поскольку F – конечное множество, имеется такое целое число d , что несущие множества всех n -вращений $\{R_Q : Q \in F\}$ содержатся в уровнях $[-d, d]$ для всех достаточно больших n (теорема 4.7, (iv)). Используя теорему 4.7, (ii), можно так выбрать n , что для каждого $Q \in F$ будет выполняться $S_{Q,v}^{-1}(i) = S_{Q,w}^{-1}(i)$ для всех $i \in [-d, d]$ и $v, w \in V_n$, где $S_Q = \prod_{v \in V_n} S_{Q,v}$. Отсюда следует, что $S_Z^{-1} R_Q S_Z$ является n -вращением для всех $Z, Q \in F$.

Обозначим через H группу всех n -подстановок. Тогда H – конечная группа. Определим отображение $\varphi: F^2 \rightarrow H$ по правилу $\varphi(Q) = \varphi(S_Q R_Q) = S_Q$. Заметим, что ввиду теоремы 4.7 факторизация $Q = S_Q R_Q$ однозначна для каждого $Q \in F^2$. Таким образом, отображение φ корректно определено. Заметим, что φ инъективно на F .

Если $Q, Z \in F$, то

$$\varphi(QZ) = \varphi(S_Q R_Q S_Z R_Z) = \varphi((S_Q S_Z) S_Z^{-1} R_Q S_Z R_Z) = S_Q S_Z,$$

где последнее равенство вытекает из однозначности факторизации и того, что $S_Z^{-1} R_Q S_Z R_Z$ – n -вращение, а $S_Q S_Z$ – n -подстановка. Поэтому $\varphi(QZ) = S_Q S_Z = \varphi(Q)\varphi(Z)$. Положим $\varphi(g) = \text{id}$ для всех $g \notin F^2$. Это показывает, что $[[T]]$ является ЛВК-группой.

Напомним, что группа $[[T]]_x$ определяется как множество всех элементов $S \in [[T]]$, для которых $S(\{T^n(x) : n \geq 1\}) = \{T^n(x) : n \geq 1\}$. В работе [5] было замечено, что группа $[[T]]_x$ локально конечна. На языке настоящей работы это можно также вывести из того, что группа $[[T]]_x$ совпадает с множеством всех n -подстановок, связанных с последовательностью $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 1}$ разбиений Какутани–Рохлина, сходящихся к $\{x\}$, т.е. $\bigcap_{n \geq 1} B(\mathcal{P}_n) = \{x\}$ (см. подробности в § 3). Действительно, если P – n -подстановка, совместная с $\mathcal{P}_n$, то $P \in [[T]]_x$, так как P не переводит точки далее верха или низа разбиения. Напротив, если $Q \in [[T]]_x$, то $Q = PR$ есть произведение n -подстановок и n -вращений, связанных с разбиением $\mathcal{P}_n$ (теорема 4.7). Заметим, что если

$R \neq \text{id}$, то Q отображает точки из отрицательной T -полуорбиты точки x на положительную T -полуорбиту. Значит, Q должна быть n -подстановкой. Следующий результат является непосредственным следствием теоремы 4.7.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. *Для любой точки $x \in X$ группа $[[T]]_x$ является максимальной локально конечной подгруппой группы $[[T]]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим любой элемент $Q \in [[T]] \setminus [[T]]_x$. Используя теорему 4.7, можно записать $Q = PR$, где $P \in [[T]]_x$, а R – вращение. Поскольку $Q \notin [[T]]_x$, получаем, что $R \neq \text{id}$. Заметим, что группа, порожденная $[[T]]_x$ и элементом Q , содержит элемент R , который имеет бесконечный порядок. Это устанавливает требуемый результат.

Напомним, что $\Gamma_x = [[T]]_x \cap [[T]]'$, где $x \in X$. Каждая группа Γ_x локально конечна. Доказательство теоремы 5.4 является модификацией доказательства леммы 4.1 из [13]. Заметим, что лемма 4.1 в [13] в большой степени основана на замечании 5.6 из [5], доказательство которого в свою очередь использует технику операторных алгебр. В следующей лемме мы приводим чисто комбинаторное доказательство замечания 5.6 из [5]. Для точки $x \in X$ положим $O^+(x) = \{T^n(x) : n \geq 0\}$ и $O^-(x) = \{T^n(x) : n < 0\}$. Это соответственно *положительная* и *отрицательная T -полуорбиты* точки x . Для каждого $Q \in [[T]]$ положим

$$a(Q) = \text{card}(Q(O^-(x)) \cap O^+(x)), \quad b(Q) = \text{card}(Q^{-1}(O^+(x)) \cap O^-(x)).$$

Зафиксируем T -инвариантную меру μ и положим $\varphi(Q) = \int_X f_Q d\mu$. Заметим, что $\varphi : [[T]] \rightarrow \mathbb{R}$ – нетривиальный групповой гомоморфизм (см. [5]).

ЛЕММА 5.3. *Для любого $Q \in [[T]]$ имеем $\varphi(Q) = a(Q) - b(Q)$. В частности, $\varphi([[T]]) = \mathbb{Z}$ и определение φ не зависит от выбора μ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P – n -подстановка. Тогда $\varphi(P) = 0$. Заметим, что $\varphi(T) = 1$ и $\varphi(T^{-1}) = -1$. Если T_C – индуцированное преобразование на открыто-замкнутом множестве C , то $T = T_C P$ для некоторого периодического преобразования P (см., например, [7; предложение 2.1]). Отсюда следует, что $\varphi(T_C) = 1$ и $\varphi(T_C^{-1}) = -1$.

Рассмотрим произвольный элемент $Q \in [[T]]$. Используя теорему 4.7, найдем n -подстановку P и n -вращение R такие, что $Q = PR$ и число вращения R не превосходит 1. Тогда $\varphi(Q) = \varphi(R)$. Записывая R в виде произведения индуцированных преобразований,

$$R = \prod_{a \in A} T_{U(a)} \times \prod_{b \in B} T_{D(b)}^{-1}$$

для некоторых подмножеств $A, B \subset \{0, 1, \dots, m_n\}$, получаем, что

$$\varphi(Q) = \text{card}(A) - \text{card}(B).$$

Поскольку множество A (множество B) представляет уровни, которые Q отображает далее верха (низа) разбиения, получаем, что

$$\text{card}(A) = a(Q), \quad \text{card}(B) = b(Q).$$

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть (X, T) – канторова минимальная система. Тогда $[[T]]' = \Gamma_x \cdot \Gamma_y$, где x и y – точки из различных T -орбит.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q \in \Gamma$. Пусть $\{\Xi_n\}_{n \geq 1}$ – разбиение Какутани–Рохлина, построенное по точке x . Применяя теорему 4.7 к элементу Q и разбиениям $\{\Xi_n\}$, можно представить Q в виде $Q = P_n R_n$, где P_n – n -подстановка, а R_n – n -вращение (относительно этих разбиений). Ясно, что $P_n \in [[T]]_x$.

Положим

$$I^+ = \{n \geq 0 : Q(T^n(x)) \in O^-(x)\}, \quad I^- = \{n < 0 : Q(T^n(x)) \in O^+(x)\}.$$

Из доказанной выше леммы следует, что $\text{card}(I^+) = \text{card}(I^-) = m$ для некоторого m . Используя минимальность T , можно найти открыто-замкнутое множество вида $Y = C \sqcup T^p(C)$ (для некоторого $p \in \mathbb{Z}$) такое, что $x \in Y$ и $T^i(Y) \cap T^j(Y) = \emptyset$ для любых $-q \leq i \neq j \leq q$, где $q = \max_{x \in X} |f_Q(x)|$, и такое, что ни одно из множеств $\{T^j(Y) : -q \leq j \leq q\}$ не содержит точку y .

Зафиксируем любую биекцию π , которая отображает I^- на I^+ и I^+ на I^- . Положим $I = I^- \cup I^+$. Определим гомеоморфизм P_2 следующим образом: $P_2|_{T^n(Y)} = T^{\pi(n)-n}|_{T^n(Y)}$ для любого $n \in I$ и $P_2 = \text{id}$ в других местах. Заметим, что $P_2 \in [[T]]$ и P_2 – инволюция. Заметим, что $P_2 \in [[T]]_y$, так как множество Y было выбрано так, чтобы $\{T^j(Y) : -q \leq j \leq q\}$ не содержало точку y . Поскольку $Y = C \sqcup T^p(C)$, элемент P_2 является произведением двух изоморфных инволюций (построенных соответственно над C и $T^p(C)$). Отсюда следует, что $P_2 \in [[T]]'$. Поэтому $P_2 \in [[T]]_y$.

Положим $P_1 = QP_2^{-1} \in [[T]]'$. Пусть $x_n = T^n(x)$. Если $n \in I^+$, то Q переводит $P_2^{-1}x_n$ в положительную полуорбиту точки x . Таким образом, $P_1x_n = QP_2^{-1}x_n \in O^+(x)$. Аналогично, если $n \notin I^+$, то $P_2(x_n) \in O^+(x)$. Отсюда следует, что $P_1 \in [[T]]_x$.

Список литературы

- [1] S. Thomas, *Topological full groups of minimal subshifts and just-infinite groups*, 2012.
- [2] H. A. Dye, “On groups of measure preserving transformations. II”, *Amer. J. Math.*, **85**:4 (1963), 551–576.
- [3] M. Rubin, “On the reconstruction of topological spaces from their groups of homeomorphisms”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **312**:2 (1989), 487–538.
- [4] E. Glasner, B. Weiss, “Weak orbit equivalence of Cantor minimal systems”, *Internat. J. Math.*, **6**:4 (1995), 559–579.
- [5] T. Giordano, I. F. Putnam, C. F. Skau, “Full groups of Cantor minimal systems”, *Israel J. Math.*, **111**:1 (1999), 285–320.
- [6] S. Bezuglyi, J. Kwiatkowski, “The topological full group of a Cantor minimal system is dense in the full group”, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, **16**:2 (2000), 371–397.
- [7] S. Bezuglyi, K. Medynets, “Full groups, flip conjugacy, and orbit equivalence of Cantor minimal systems”, *Colloq. Math.*, **110**:2 (2008), 409–429.
- [8] K. Medynets, “Reconstruction of orbits of Cantor systems from full groups”, *Bull. Lond. Math. Soc.*, **43**:6 (2011), 1104–1110.
- [9] H. Matui, “Topological orbit equivalence of locally compact Cantor minimal systems”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **22**:6 (2002), 1871–1903.

- [10] B. D. Miller, C. Rosendal, “Isomorphism of Borel full groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **135**:2 (2007), 517–522.
- [11] V. Zhuravlev, *Two theorems of Dye in the almost continuous category*, Thesis (Ph.D.), University of Toronto, Canada, 2009, 89 pp.
- [12] T. Ibarlucia, J. Melleray, *Full groups of minimal homeomorphisms and Baire category methods*, arXiv: 1309.3114.
- [13] H. Matui, “Some remarks on topological full groups of Cantor minimal systems”, *Internat. J. Math.*, **17**:2 (2006), 231–251.
- [14] Р. И. Григорчук, “Степени роста конечно порожденных групп и теория инвариантных средних”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:5 (1984), 939–985; англ. пер.: R. I. Grigorchuk, “Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means”, *Math. USSR-Izv.*, **25**:2 (1985), 259–300.
- [15] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Grad. Texts in Math., **79**, Springer-Verlag, New York–Berlin, 1982, ix+250 pp.
- [16] F. Hahn, Y. Katznelson, “On the entropy of uniquely ergodic transformations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **126**:2 (1967), 335–360.
- [17] C. Grillenberger, “Constructions of strictly ergodic systems. I. Given entropy”, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, **25** (1972/73), 323–334.
- [18] K. Juschenko, N. Monod, “Cantor systems, piecewise translations and simple amenable groups”, *Ann. of Math. (2)*, **178**:2 (2013), 775–787; arXiv: 1204.2132.
- [19] G. Elek, N. Monod, “On the topological full group of a minimal Cantor Z^2 -system”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **141**:10 (2013), 3549–3552; arXiv: 1201.0257.
- [20] Р. И. Григорчук, “Пример конечно определенной аменабельной группы, не принадлежащей классу EG”, *Матем. сб.*, **189**:1 (1998), 79–100; англ. пер.: R. I. Grigorchuk, “An example of a finitely presented amenable group that does not belong to the class EG”, *Sb. Math.*, **189**:1 (1998), 75–95.
- [21] Ching Chou, “Elementary amenable groups”, *Illinois J. Math.*, **24**:3 (1980), 396–407.
- [22] А. М. Вершик, Е. И. Гордон, “Группы, локально вложимые в класс конечных групп”, *Алгебра и анализ*, **9**:1 (1997), 71–97; англ. пер.: A. M. Vershik, E. I. Gordon, “Groups that are locally embeddable in the class of finite groups”, *St. Petersburg Math. J.*, **9**:1 (1998), 49–67.
- [23] T. Ceccherini-Silberstein, M. Coornaert, *Cellular automata and groups*, Springer Monogr. Math., Springer-Verlag, Berlin, 2010, xx+439 pp.
- [24] G. Elek, *Full groups and soficity*, arXiv: 1211.0621.
- [25] R. Grigorchuk, “Solved and unsolved problems around one group”, *Infinite groups: geometric, combinatorial and dynamical aspects*, Progr. Math., **248**, Birkhäuser, Basel, 2005, 117–218.
- [26] В. И. Суцанский, “Сплетения и периодические факторизуемые группы”, *Матем. сб.*, **180**:8 (1989), 1073–1091; англ. пер.: V. I. Sushchanskii, “Wreath products and periodic factorable groups”, *Math. USSR-Sb.*, **67**:2 (1990), 535–553.
- [27] M. Abért, “Group laws and free subgroups in topological groups”, *Bull. London Math. Soc.*, **37**:4 (2005), 525–534.
- [28] O. Belegardek, “Local embeddability”, *Algebra Discrete Math.*, **14**:1 (2012), 14–28.
- [29] А. М. Слободской, “Неразрешимость универсальной теории конечных групп”, *Алгебра и логика*, **20**:2 (1981), 207–230; англ. пер.: A. M. Slobodskoi, “Unsolvability of the universal theory of finite groups”, *Algebra and Logic*, **20**:2 (1981), 139–156.
- [30] F. Durand, “Decidability of uniform recurrence of morphic sequences”, *Internat. J. Found. Comput. Sci.*, **24**:1 (2013), 123–146.
- [31] А. М. Вершик, “Несвободные действия счетных групп и их характеры”, *Теория представлений, динамические системы, комбинаторные методы. XVIII*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **378**, ПОМИ, С-Пб, 2010, 5–16; англ. пер.: A. M. Vershik,

- “Nonfree actions of countable groups and their characters”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **174**:1 (2011), 1–6.
- [32] Ya. Vorobets, “Notes on the Schreier graphs of the Grigorchuk group”, *Dynamical systems and group actions*, Contemp. Math., **567**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2012, 221–248.
- [33] R. H. Herman, I. F. Putnam, C. F. Skau, “Ordered Bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics”, *Internat. J. Math.*, **3**:6 (1992), 827–864.
- [34] T. Giordano, I. F. Putnam, C. F. Skau, “Topological orbit equivalence and C^* -crossed products”, *J. Reine Angew. Math.*, **469** (1995), 51–111.
- [35] S. Bezuglyi, A. H. Dooley, K. Medynets, “The Rokhlin lemma for homeomorphisms of a Cantor set”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **133**:10 (2005), 2957–2964.
- [36] K. Medynets, “On approximation of homeomorphisms of a Cantor set”, *Fund. Math.*, **194**:1 (2007), 1–13.

Ростислав Иванович Григорчук
(Rostislav I. Grigorchuk)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
Department of Mathematics, Texas A&M University,
USA

E-mail: grigorch@math.tamu.edu

Поступила в редакцию
11.06.2013 и 10.02.2014

Константин Сергеевич Мединец
(Konstantin S. Medynets)

Department of Mathematics, U.S. Naval Academy,
Annapolis, USA

E-mail: medynets@usna.edu