Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Шлихенмайер, Многоточечные алгебры операторов
Лакса. Почти градуированная структура и центральные
расширения, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 5, 117–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8258>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 15:58:18

УДК 512.554.32

М. Шлихенмайер

Многоточечные алгебры операторов Лакса. Почти градуированная структура и центральные расширения

Алгебры операторов Лакса – это новый класс алгебр типа токов. Они были введены И. М. Кричевером и О. К. Шейнманом на основе развитой Кричевером теории операторов Лакса и представляют собой почти градуированные алгебры Ли токов на римановых поверхностях произвольного рода с отмеченными точками (точками входа и выхода, а также тюринскими точками). Предыдущая совместная статья автора и О. К. Шейнмана содержит классификацию локальных коциклов и задаваемых ими почти градуированных центральных расширений в случае одной точки входа и одной точки выхода. Оказалось, что почти градуированное расширение по существу единственно. В работе рассматривается общий случай алгебр операторов Лакса с несколькими точками входа и выхода. Сначала доказывается, что они почти градуированы, причем градуировка задается расщеплением отмеченных нетюринских точек на точки входа и выхода. Затем получены классификационные результаты как для локальных, так и для ограниченных коциклов. Из них вытекает единственность почти градуированного центрального расширения. Эти обобщения предыдущих результатов получены с помощью новой техники, развитой в статье.

Библиография: 30 названий.

Ключевые слова: бесконечномерные алгебры Ли, алгебры токов, алгебры типа Кричевера–Новикова, центральные расширения, когомологии алгебр Ли, интегрируемые системы.

DOI: 10.4213/sm8258

§ 1. Введение

Алгебры операторов Лакса – это недавно появившийся новый класс алгебр Ли типа токов. В полной общности они были введены И. М. Кричевером и О. К. Шейнманом в работе [1], где понятие операторов Лакса на алгебраической кривой, изучавшееся Кричевером в [2], было обобщено до понятия $\mathfrak{g}$ -значных операторов Лакса для любой классической комплексной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. И. М. Кричевер в [2] распространил обычное представление оператора Лакса с рациональным параметром на случай алгебраической кривой любого рода. Такие обобщенные операторы Лакса возникают во многих вопросах. Они тесно связаны с интегрируемыми системами (уравнения Кричевера–Новикова на эллиптических кривых, эллиптические системы Калоджеро–Мозера, функции Бейкера–Ахиезера; см. [2], [3]), а также имеют важные приложения к пространствам модулей расслоений. В частности, они связаны с результатами А. Н. Тюрина [4] о классификации оснащенных полустабильных голоморфных

векторных расслоений на алгебраических кривых. В классификации используются параметры Тюринга таких расслоений, состоящие из точек γ_s , $s = 1, \dots, ng$, и связанных с ними элементов $\alpha_s \in \mathbb{P}^{n-1}(C)$ (здесь g обозначает род римановой поверхности Σ , а n – ранг расслоения). Эти приложения далее в статье не рассматриваются. Помимо указанных выше работ дальнейшую информацию о случае интегрируемых систем можно найти у О. К. Шейнмана в [5], [6].

Нас интересует математическая структура алгебр операторов Лакса. Будучи бесконечномерными алгебрами Ли геометрического происхождения, они представляют собой интересные математические объекты. В отличие от классических алгебр рода нуль, возникающих в конформной теории поля, они не градуированы. Мы введем на них почти градуированную структуру (см. определение 3.1), которая окажется незаменимым средством исследования. Основной задачей в теории таких бесконечномерных алгебр Ли является построение и классификация центральных расширений, что и делается в настоящей работе. Мы ограничиваемся теми центральными расширениями, на которые можно продолжить почти градуировку.

В некоторых аспектах алгебры операторов Лакса можно рассматривать как обобщение аффинных алгебр и алгебр токов старшего рода типа Кричевера–Новикова (см. [7]–[12]), которые сами являются обобщением классических аффинных алгебр Ли, введенных В. Г. Кацем (см. [13], [14]) и Р. Муди (см. [15]).

Результаты, полученные в двухточечном случае (который определяется в следующем абзаце) переносятся в настоящей работе на многоточечный случай. О понятии почти градуировки в двухточечном случае см. работу И. М. Кричевера и О. К. Шейнмана [1], а о центральных расширениях в двухточечном случае – совместную работу автора и О. К. Шейнмана [16].

Для описания полученных результатов приведем сначала краткую постановку задачи, оставляя подробное изложение до § 2. Пусть $\mathfrak{g}$ – одна из классических алгебр $\mathfrak{gl}(n)$, $\mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{sp}(n)$ над $\mathbb{C}$, а Σ – компактная риманова поверхность. Пусть A – конечное множество точек из Σ , разбитое на два непустых непересекающихся подмножества I и O . Пусть, далее, W – другое конечное множество точек (его элементы называются слабыми особыми точками). Наша алгебра операторов Лакса состоит из мероморфных функций $\Sigma \rightarrow \mathfrak{g}$, голоморфных вне $W \cup A$, имеющих не более чем полюсы порядка 1 (или 2 для случая $\mathfrak{sp}(n)$) в точках множества W и удовлетворяющих некоторым зависящим от $\mathfrak{g}$ дальнейшим условиям на лорановские разложения в этих точках (см., например, (2.6)). Оказывается (см. [1]), что благодаря этим условиям указанное множество матричнозначных функций образует алгебру Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ относительно поточечного коммутирования. Если $W = \emptyset$, то $\bar{\mathfrak{g}}$ есть алгебра токов типа Кричевера–Новикова (ассоциированная с исходной конечномерной алгеброй Ли). Такие алгебры активно изучались в работах И. М. Кричевера и С. П. Новикова, О. К. Шейнмана, М. Шлихенмайера (см., например, [7]–[12], [18]). Заметим, что алгебры типа Кричевера–Новикова можно определить для любой конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

¹По поводу G_2 см. недавний препринт О. К. Шейнмана [17] и замечание в конце введения.

Далее, если род римановой поверхности равен нулю и A состоит только из двух точек (которые в этом случае можно считать равными $\{0\}$ и $\{\infty\}$), то указанные алгебры становятся обычными классическими алгебрами токов. Они допускают градуировку, используемую, в частности, для введения представлений старшего веса, модулей Верма, пространств Фока и для классификации этих представлений. К сожалению, алгебры, изучаемые нами, не градуированы. Они допускают лишь почти градуировку (см. определение 3.1), которая, однако, как заметили И. М. Кричевер и С. П. Новиков в [7], в большинстве приложений успешно заменяет градуировку. Этими авторами был также указан способ построения почти градуировки на двухточечных алгебрах типа Кричевера–Новикова.

Для многоточечных алгебр типа Кричевера–Новикова почти градуировка была построена автором настоящей работы (см. [12], [19]–[23], а также [24]). Здесь важно то, что почти градуировка зависит от расщепления множества A на подмножества I и O . Разные расщепления приводят к разным почти градуировкам. Таким образом, многоточечный случай сложнее двухточечного.

Градуировка алгебры токов Кричевера–Новикова $\bar{\mathfrak{g}}$ индуцируется градуировкой алгебры функций (см. указанные выше работы автора) благодаря тому, что алгебра токов является тензорным произведением. Если $W \neq \emptyset$, то алгебра операторов Лакса уже не является тензорным произведением, и почти градуировку приходится строить напрямую. Для двухточечного случая такое построение провели И. М. Кричевер и О. К. Шейнман в [1].

Первым результатом настоящей статьи является построение почти градуировки на $\bar{\mathfrak{g}}$ в самом общем многоточечном случае. Как уже говорилось, эта конструкция существенно зависит от представления A в виде $I \cup O$. Она осуществлена в § 3 и является намного более сложной, чем в двухточечном случае.

Наша вторая цель – изучить центральные расширения $\hat{\mathfrak{g}}$ алгебры операторов Лакса $\bar{\mathfrak{g}}$. Как известно, центральные расширения задаются 2-коциклами алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ со значениями в тривиальном модуле $\mathbb{C}$. Классы эквивалентности центральных расширений находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами пространства $H^2(\bar{\mathfrak{g}}, \mathbb{C})$ когомологий алгебры Ли. В то время как для классических алгебр токов, ассоциированных с конечномерной простой алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, класс расширения оказывается единственным, это уже не так для старшего рода и даже для рода нуль в многоточечном случае. Но нас интересуют только те центральные расширения $\hat{\mathfrak{g}}$, на которые поднимается почти градуировка с $\bar{\mathfrak{g}}$. Это сужает диапазон возможностей. Условие на коцикл, задающий центральное расширение, состоит в том, что он должен быть локальным (см. (5.13)) относительно почти градуировки, заданной расщеплением $A = I \cup O$. Таким образом, условие локальности коцикла также зависит от расщепления.

Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста, то пространство локальных когомологических классов для $\bar{\mathfrak{g}}$ одномерно. Для $\mathfrak{gl}(n)$ надо добавить еще одно естественное свойство коцикла – инвариантность относительно алгебры векторных полей $\mathcal{L}$ (см. (5.3)). В этом случае пространство локальных $\mathcal{L}$ -инвариантных классов коциклов будет двумерным.

Действие алгебры векторных полей $\mathcal{L}$ на $\bar{\mathfrak{g}}$ задается с помощью некоторой связности $\nabla^{(\omega)}$ (см. п. 4.2). Эта связность позволяет определить геометриче-

ские коциклы

$$\gamma_{1,\omega,C}(L, L') = \frac{1}{2\pi i} \int_C \text{tr}(L \cdot \nabla^{(\omega)} L'), \quad (1.1)$$

$$\gamma_{2,\omega,C}(L, L') = \frac{1}{2\pi i} \int_C \text{tr}(L) \cdot \text{tr}(\nabla^{(\omega)} L'), \quad (1.2)$$

где C – произвольный цикл на Σ , не проходящий через возможные особые точки. Коцикл $\gamma_{2,\omega,C}$ отличен от нуля только в $\mathfrak{gl}(n)$ -случае.

Примерами путей интегрирования являются окружности C_i вокруг точек из I (или соответственно из O), а также любой путь C_S , отделяющий точки из I от точек из O .

Наш основной результат – теорема 6.7 о единственности классов локальных коциклов и о том, что эти коциклы заданы интегрированием по C_S . Доказательство приведено в § 6 и основано на теореме 6.4, дающей классификацию всех ограниченных (сверху) когомологических классов (см. (5.12)). Ограниченные когомологические классы образуют подпространство размерности N (или $2N$ для $\mathfrak{gl}(n)$), где $N = \#I$, а интегрирование осуществляется по C_i , $i = 1, \dots, N$.

Теорема 6.4 доказывается в § 7 и § 8. Используется рассуждение по индукции, описанное в [25] и [12]. Из ограниченности и $\mathcal{L}$ -инвариантности мы выводим, что такой коцикл задается своими значениями на парах однородных элементов с нулевой суммой степеней. Затем доказывается, что всякий ограниченный $\mathcal{L}$ -инвариантный коцикл однозначно кодируется конечным числом своих значений. Дальнейший анализ показывает, что все такие коциклы имеют вид, указанный выше. В § 8 установлено, что в случае простой алгебры Ли в каждом ограниченном когомологическом классе найдется представитель, являющийся $\mathcal{L}$ -инвариантным коциклом. Для этого используется внутренняя структура алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$, связанная с системой корней исходной конечномерной простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а также почти градуировка на $\bar{\mathfrak{g}}$. Напомним, что в классическом случае $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ алгебра градуирована. В этом очень частном случае наши рассуждения упрощаются и становятся похожими на рассуждения Х. Гарланда в [26].

Как уже отмечалось выше, двухточечный случай был разобран в совместной работе автора и О.К. Шейнмана [16], результаты которой в настоящей статье обобщаются на многоточечный случай. К сожалению, наши более общие результаты не выводятся из предыдущих, но приходится проводить все доказательства заново (передоказывая, тем самым, и двухточечный случай). Лишь в немногих местах можно будет сослаться на доказательства из [16].

Я благодарен О.К. Шейнману за продолжительные обсуждения, оказавшиеся очень полезными в процессе написания статьи. После окончания этой моей работы ему удалось в [17] дать определение алгебры операторов Лакса для исключительной алгебры Ли G_2 , так что все свойства и утверждения, представленные здесь, остаются верными и в этом новом случае. Таким образом, добавлен новый элемент в список алгебр операторов Лакса, ассоциированных с простыми алгебрами Ли.

§ 2. Алгебры

2.1. Алгебры операторов Лакса. Пусть $\mathfrak{g}$ – одна из классических матричных алгебр $\mathfrak{gl}(n)$, $\mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{sp}(2n)$ или алгебра $\mathfrak{s}(n)$ скалярных матриц. Изучаемые далее алгебры будут состоять из $\mathfrak{g}$ -значных мероморфных функций, форм и т.д., определенных на римановых поверхностях с дополнительной структурой (отмеченные точки, ассоциированные с этими точками векторы и т.д.).

Точнее, рассмотрим компактную риманову поверхность Σ рода g (g произвольно) и конечное множество A точек из Σ , разбитое на два непустых непересекающихся подмножества

$$I := \{P_1, P_2, \dots, P_N\}, \quad O := \{Q_1, Q_2, \dots, Q_M\}, \quad (2.1)$$

где $\#A = N + M$. Точки из I называются точками входа, а точки из O – точками выхода.

Для определения алгебр операторов Лакса нужны некоторые дополнительные данные. Фиксируем число $K \in \mathbb{N}_0$ и набор точек

$$W := \{\gamma_s \in \Sigma \setminus A \mid s = 1, \dots, K\}. \quad (2.2)$$

Припишем каждой точке γ_s вектор $\alpha_s \in \mathbb{C}^n$ (или $\alpha_s \in \mathbb{C}^{2n}$ для $\mathfrak{sp}(2n)$). Набор

$$\mathcal{T} := \{(\gamma_s, \alpha_s) \in \Sigma \times \mathbb{C}^n \mid s = 1, \dots, K\} \quad (2.3)$$

называется *данными Тюринга*. Здесь мы встаем на более общую точку зрения, чем в [16], не только в том отношении, что A теперь может содержать более двух точек, но и в том, что для K не фиксируется значение $n \cdot g$. Допускается даже $K = 0$. В этом случае данные Тюринга будут пустыми.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Как показал А. Н. Тюрин в [4], при $K = n \cdot g$ для значений (γ_s, α_s) общего положения с $\alpha_s \neq 0$ наборы пар $(\gamma_s, [\alpha_s])$ с $[\alpha_s] \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$ параметризуют оснащенные полустабильные голоморфные векторные расслоения ранга n и степени ng . Отсюда происходит название “данные Тюринга”.

Фиксируем локальные координаты z_l , $l = 1, \dots, N$, с центрами в точках $P_l \in I$ и w_s с центрами γ_s , $s = 1, \dots, K$. От выбора w_s на самом деле ничего не будет зависеть, да и от выбора z_l по существу тоже. Только 1-струя последних будет использоваться для однозначной нормировки элементов некоторых базисов.

Рассмотрим $\mathfrak{g}$ -значные мероморфные функции

$$L: \Sigma \rightarrow \mathfrak{g}, \quad (2.4)$$

голоморфные вне $W \cup A$, имеющие полюс порядка не более чем 1 (или 2 для $\mathfrak{sp}(2n)$) в каждой точке множества W и удовлетворяющие в этих точках некоторым условиям, зависящим от $\mathcal{T}$, A и $\mathfrak{g}$. Эти условия будут подробно описаны ниже. Особенности в точках из W называются *слабыми особенностями*. Эти объекты были введены И. М. Кричевером в [2] для случая $\mathfrak{gl}(n)$ в контексте

операторов Лакса на алгебраических кривых, а затем обобщены И. М. Кричевером и О. К. Шейнманом в [1]. Налагаемые нами условия в точности те же, что и в [16], но для удобства читателей мы все же напомним их.

Для $\mathfrak{gl}(n)$ эти условия таковы. При $s = 1, \dots, K$ требуется существование $\beta_s \in \mathbb{C}^n$ и $\kappa_s \in \mathbb{C}$ таких, что L имеет в точке $\gamma_s \in W$ лорановское разложение вида

$$L(w_s) = \frac{L_{s,-1}}{w_s} + L_{s,0} + \sum_{k>0} L_{s,k} w_s^k, \quad (2.5)$$

где

$$L_{s,-1} = \alpha_s \beta_s^t, \quad \text{tr}(L_{s,-1}) = \beta_s^t \alpha_s = 0, \quad L_{s,0} \alpha_s = \kappa_s \alpha_s. \quad (2.6)$$

В частности, если матрица $L_{s,-1}$ ненулевая, то она имеет ранг 1, а если вектор α_s не равен нулю, то он является собственным вектором матрицы $L_{s,0}$.

Условия (2.6) не зависят от выбора координат w_s , а множество всех удовлетворяющих им функций является ассоциативной алгеброй относительно поточечного матричного умножения (см. [1]). Доказательство переносится без изменений на многоточечный случай. (Для удобства читателей и в иллюстративных целях мы, тем не менее, приводим это доказательство в § 9). Обозначим полученную алгебру через $\overline{\mathfrak{gl}}(n)$. Конечно, она зависит еще и от римановой поверхности Σ , конечного множества A и данных Тюринга $\mathcal{T}$. Но если нет опасности путаницы, мы предпочитаем избегать сложных обозначений и пишем просто $\overline{\mathfrak{gl}}(n)$. Это относится и к другим алгебрам Ли.

Заметим, что если какой-то из векторов α_s равен нулю, то условия, налагаемые в точке γ_s , означают, что функция L должна быть там голоморфной. Такую точку можно удалить из данных Тюринга. Далее, если $\alpha_s \neq 0$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, то векторы α и $\lambda \alpha$ задают одни и те же условия в точке γ_s . Поэтому важен только проективный вектор $[\alpha_s] \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$.

Расщепление $\mathfrak{gl}(n) = \mathfrak{s}(n) \oplus \mathfrak{sl}(n)$, заданное формулой

$$X \mapsto \left(\frac{\text{tr}(X)}{n} I_n, X - \frac{\text{tr}(X)}{n} I_n \right), \quad (2.7)$$

где I_n есть единичная $(n \times n)$ -матрица, индуцирует соответствующее расщепление алгебры операторов Лакса $\overline{\mathfrak{gl}}(n)$:

$$\overline{\mathfrak{gl}}(n) = \overline{\mathfrak{s}}(n) \oplus \overline{\mathfrak{sl}}(n). \quad (2.8)$$

Единственное дополнительное условие на элементы $\overline{\mathfrak{sl}}(n)$ состоит в том, что все матрицы $L_{s,k}$ в (2.5) имеют нулевой след. Условия (2.6) не меняются.

В случае $\overline{\mathfrak{s}}(n)$ все матрицы в (2.5) являются скалярными. Отсюда вытекает, что матрицы $L_{s,-1}$ равны нулю. В частности, элементы из $\overline{\mathfrak{s}}(n)$ голоморфны на W . При этом для скалярной матрицы $L_{s,0}$ каждый вектор α_s является собственным. Тем самым, никаких дальнейших условий, кроме голоморфности, нет, и мы получаем, что $\overline{\mathfrak{s}}(n) \cong \mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ есть (ассоциативная) алгебра мероморфных функций на Σ , голоморфных вне множества A . Это (многоточечная) алгебра функций типа Кричевера–Новикова, далее обсуждаемая в п. 3.2.

В случае $\mathfrak{so}(n)$ требуется, чтобы все матрицы $L_{s,k}$ в (2.5) были кососимметрическими (и, в частности, имели нулевой след). Как и в [1], надо несколько

модифицировать постановку задачи. Во-первых, допускаются только те параметры Тюринга α_s , для которых $\alpha_s^t \alpha_s = 0$. Тогда первое условие в (2.6) заменяется на

$$L_{s,-1} = \alpha_s \beta_s^t - \beta_s \alpha_s^t, \quad \text{tr}(L_{s,-1}) = \beta_s^t \alpha_s = 0, \quad L_{s,0} \alpha_s = \kappa_s \alpha_s. \quad (2.9)$$

В случае $\mathfrak{sp}(2n)$ рассмотрим симплектическую форму $\hat{\sigma}$ на $\mathbb{C}^{2n}$, заданную некоторой невырожденной кососимметрической матрицей σ . Алгебра Ли $\mathfrak{sp}(2n)$ состоит из всех матриц X со свойством $X^t \sigma + \sigma X = 0$. Условие $\text{tr}(X) = 0$ выполнено автоматически. В слабых особых точках имеем разложение

$$L(z_s) = \frac{L_{s,-2}}{w_s^2} + \frac{L_{s,-1}}{w_s} + L_{s,0} + L_{s,1} w_s + \sum_{k>1} L_{s,k} w_s^k. \quad (2.10)$$

Условие (2.6) модифицируется так (см. [1]): найдутся $\beta_s \in \mathbb{C}^{2n}$ и $\nu_s, \kappa_s \in \mathbb{C}$, для которых

$$L_{s,-2} = \nu_s \alpha_s \alpha_s^t \sigma, \quad L_{s,-1} = (\alpha_s \beta_s^t + \beta_s \alpha_s^t) \sigma, \quad \beta_s^t \sigma \alpha_s = 0, \quad L_{s,0} \alpha_s = \kappa_s \alpha_s. \quad (2.11)$$

Требуется также выполнение равенства

$$\alpha_s^t \sigma L_{s,1} \alpha_s = 0. \quad (2.12)$$

И в этом случае множество всех таких отображений образует алгебру Ли относительно взятия поточечного коммутатора матриц.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – пространство операторов Лакса, ассоциированное с конечномерной классической алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ (одной из указанных выше). Тогда $\bar{\mathfrak{g}}$ является алгеброй Ли относительно взятия поточечного матричного коммутатора, а в случае $\bar{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{gl}}(n)$ – ассоциативной алгеброй относительно поточечного умножения матриц.

Доказательство из [1] легко переносится на многоточечный случай (см. пример в §9).

Алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$, упомянутые в теореме 2.2, называются *алгебрами операторов Лакса*.

2.2. Алгебры Кривевера–Новикова типа токов. Пусть $\mathcal{A}$ – (ассоциативная) алгебра мероморфных функций на Σ , голоморфных вне A , а $\mathfrak{g}$ – произвольная конечномерная алгебра Ли. Структура алгебры Ли на тензорном произведении $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$ задается формулой

$$[x \otimes f, y \otimes g] := [x, y] \otimes (f \cdot g), \quad x, y \in \mathfrak{g}, \quad f, g \in \mathcal{A}. \quad (2.13)$$

Элементы этой алгебры Ли можно рассматривать как мероморфные отображения $\Sigma \rightarrow \mathfrak{g}$, голоморфные вне A . Эти алгебры называются (*многоточечными*) *алгебрами Кривевера–Новикова типа токов*; см. [7]–[9], [11], [12], [27], [28].

Если род римановой поверхности равен нулю и A состоит из двух точек, то алгебры токов Кривевера–Новикова суть классические алгебры токов (или петель) $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z^{-1}, z]$.

Если в определении алгебры операторов Лакса нет слабых особых точек (т.е. все α_s равны нулю), то все условия на $\mathfrak{g}$ -значные мероморфные функции сводятся к их голоморфности вне A . Следовательно, для таких $\mathfrak{g}$ получаем алгебру Кричевера–Новикова типа токов. Заметим, что не для всех конечномерных $\mathfrak{g}$ понятие алгебры токов Кричевера–Новикова обобщается до понятия алгебры операторов Лакса.

§ 3. Почти градуированная структура

3.1. Утверждения. При построении некоторых важных представлений бесконечномерных алгебр Ли (представления в пространстве Фока, модули Верма и т.д.) обычно предполагается и существенно используется наличие градуировки. Однако изучаемые нами алгебры в случае старшего рода и даже для рода нуль, но со многими отмеченными точками (где могут быть полюсы), не допускают нетривиальной градуировки. И. М. Кричевер и С. П. Новиков в [7] обнаружили, что для указанных выше построений достаточно более слабого понятия почти градуировки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Алгебра Ли V называется *почти градуированной* (над $\mathbb{Z}$), если существуют конечномерные подпространства V_m и константы $S_1, S_2 \in \mathbb{Z}$ такие, что:

- 1) $V = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} V_m$;
- 2) $\dim V_m < \infty$ при всех $m \in \mathbb{Z}$;
- 3) $[V_n, V_m] \subseteq \sum_{h=n+m+S_1}^{n+m+S_2} V_h$.

Если существует число R такое, что $\dim V_m \leq R$ для всех m , то алгебра Ли V называется *сильно почти градуированной*.

Аналогично определяется почти градуировка ассоциативных алгебр, а также модулей над почти градуированными алгебрами.

Далее мы введем (сильную) почти градуированную структуру на множестве многоточечных операторов Лакса. Она будет определяться расщеплением множества A на подмножества I и O . Напомним, что $I = \{P_1, P_2, \dots, P_N\}$. Для двухточечных алгебр Кричевера–Новикова (состоящих из функций, векторных полей или токов) это было сделано И. М. Кричевером и С. П. Новиковым (см. [7]), а для двухточечных алгебр операторов Лакса – И. М. Кричевером и О. К. Шейнманом (см. [1]). Конечно, в двухточечном случае есть только одно расщепление, в отличие от более сложного многоточечного случая. Различные многоточечные алгебры Кричевера–Новикова изучались в работах М. Шлихенмайера [19]–[21], результаты которых приводятся в п. 3.2.

В п. 3.3 для каждого $m \in \mathbb{Z}$ будет определено подпространство $\bar{\mathfrak{g}}_m$ в $\bar{\mathfrak{g}}$, называемое (квази)однородным подпространством степени m . Эта степень тесно связана с порядками полюсов элементов $\bar{\mathfrak{g}}$ в точках множества I . Будет доказана

ТЕОРЕМА 3.2. Выбор расщепления $A = I \cup O$ превращает (многоточечную) алгебру операторов Лакса $\bar{\mathfrak{g}}$ в (сильно) почти градуированную алгебру Ли

$$\bar{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \bar{\mathfrak{g}}_m, \quad \dim \bar{\mathfrak{g}}_m = N \cdot \dim \mathfrak{g}, \quad [\bar{\mathfrak{g}}_m, \bar{\mathfrak{g}}_n] \subseteq \bigoplus_{h=n+m}^{n+m+S} \bar{\mathfrak{g}}_h, \quad (3.1)$$

где константа S не зависит от n и m .

Будет также доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть X – произвольный элемент алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда для каждой пары (m, s) , где $m \in \mathbb{Z}$ и $s = 1, \dots, N$, существует единственный элемент $X_{m,s}$ из $\bar{\mathfrak{g}}_m$ такой, что локально в окрестности каждой точки $P_p \in I$ выполнено равенство²

$$X_{m,s}|(z_p) = Xz_p^m \cdot \delta_s^p + O(z_p^{m+1}) \quad \forall p = 1, \dots, N. \quad (3.2)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Пусть $\{X^u \mid u = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}\}$ – базис конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда множество

$$\mathcal{B}_m := \{X_{m,p}^u, u = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}, p = 1, \dots, N\} \quad (3.3)$$

является базисом в $\bar{\mathfrak{g}}_m$, а множество $\mathcal{B} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{B}_m$ – базисом в $\bar{\mathfrak{g}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно (3.1) $\dim \bar{\mathfrak{g}}_m = N \cdot \dim \mathfrak{g}$. Все элементы множества $\mathcal{B}_m$ попарно различны. Чтобы эти $\# \mathcal{B}_m = N \cdot \dim \mathfrak{g}$ элементов $\{X_{m,p}^u\}$ образовывали базис в $\bar{\mathfrak{g}}_m$, достаточно их линейной независимости. Допустим, что их линейная комбинация $\sum_u \sum_p \alpha_{m,p}^u X_{m,p}^u$ равна нулю. Рассмотрим локальные разложения в точках P_s , $s = 1, \dots, N$. Из (3.2) получаем, что

$$0 = \left(\sum_u \alpha_{m,s}^u X^u \right) z_s^m + O(z_s^{m+1}).$$

Следовательно, $0 = \sum_u \alpha_{m,s}^u X^u$. Поскольку X^u образуют базис в $\mathfrak{g}$, отсюда вытекает, что $\alpha_{m,s}^u = 0$ для всех u, s . То, что $\mathcal{B}$ является базисом всей алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$, вытекает из разложения последней в прямую сумму в (3.1).

Очень удобно ввести соответствующую фильтрацию

$$\bar{\mathfrak{g}}_{(k)} := \bigoplus_{m \geq k} \bar{\mathfrak{g}}_m, \quad \bar{\mathfrak{g}}_{(k)} \subseteq \bar{\mathfrak{g}}_{(k')}, \quad k \geq k'. \quad (3.4)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Имеем:

- (a) $\bar{\mathfrak{g}} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \bar{\mathfrak{g}}_{(m)}$;
- (b) $[\bar{\mathfrak{g}}_{(k)}, \bar{\mathfrak{g}}_{(m)}] \subseteq \bar{\mathfrak{g}}_{(k+m)}$;
- (c) $\bar{\mathfrak{g}}_{(m)} / \bar{\mathfrak{g}}_{(m+1)} \cong \bar{\mathfrak{g}}_m$;
- (d) классы эквивалентности элементов множества $\mathcal{B}_m$ (см. (3.3)) образуют базис факторпространства $\bar{\mathfrak{g}}_{(m)} / \bar{\mathfrak{g}}_{(m+1)}$.

Из уравнения (3.1) напрямую вытекают утверждения (a), (b) и (c). Утверждение (d) следует из предложения 3.4.

Имеется еще одна фильтрация

$$\bar{\mathfrak{g}}'_{(m)} := \{L \in \bar{\mathfrak{g}} \mid \text{ord}_{P_s}(L) \geq m, s = 1, \dots, N\}. \quad (3.5)$$

Заметим, что ее элементы L являются мероморфными отображениями из Σ в $\mathfrak{g}$ и, следовательно, можно говорить о порядках коэффициентов их разложений по некоторому базису. В (3.5) имеется в виду минимальный из этих порядков.

²Здесь δ_s^p – символ Кронекера, равный 1 при $s = p$ и 0 в противном случае.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. (а) Имеем $\bar{\mathfrak{g}} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \bar{\mathfrak{g}}'_{(m)}$.

(б) Две введенные выше фильтрации совпадают, т.е.

$$\bar{\mathfrak{g}}_{(m)} = \bar{\mathfrak{g}}'_{(m)} \quad \forall m \in \mathbb{Z}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $L \in \bar{\mathfrak{g}}$. Тогда порядки полюсов коэффициентов разложения этой $\mathfrak{g}$ -значной мероморфной функции в точках P_s индивидуально ограничены. Поскольку их конечное число, существует оценка k на порядки полюсов, откуда $L \in \bar{\mathfrak{g}}_{(-k)}$. Этим доказано утверждение (а), а значит, и то, что подпространства $(\bar{\mathfrak{g}}'_{(m)})$ образуют фильтрацию.

По предложению 3.4 множество $\mathcal{B}$ является базисом $\bar{\mathfrak{g}}$. Пусть $L \in \bar{\mathfrak{g}}'_{(m)}$. Каждый матричный элемент функции $L \in \bar{\mathfrak{g}}$ есть конечная линейная комбинация базисных элементов. Элементы множества $\mathcal{B}_k$ имеют порядок ровно k и линейно независимы. При этом каждому базисному элементу исходной конечномерной алгебры Ли отвечают N базисных элементов из $\mathcal{B}_k$ с порядками, указанными в (3.2). Поэтому индивидуальные порядки в точках P_s не могут возрастать при взятии нетривиальных линейных комбинаций. Значит, в комбинации могут участвовать только элементы с номерами $k \geq m$. Этим доказано, что $L \in \bar{\mathfrak{g}}_{(m)}$. Обратно, все элементы из $\mathcal{B}_k$ при $k \geq m$, очевидно, принадлежат множеству (3.5). Получаем требуемое равенство.

Второе описание фильтрации имеет то преимущество, что оно очень естественно. Для него нужно знать только представление множества A в виде $I \cup O$, так что оно канонически определяется множеством I . Напротив, для определения первого описания $\bar{\mathfrak{g}}_m$ в многоточечном случае при $\#O > 1$ требуется, как мы увидим, сделать ряд произвольных выборов: занумеровать точки множества O , по-разному обращаться с разными точками из O . Однако предложение 3.6 показывает, что полученная фильтрация (3.4) не будет зависеть от этих выборов.

Заметим еще, что приведенное выше доказательство предложения 3.6 опирается на результаты (теорема 3.2 и предложение 3.3), которые будут доказаны только в п. 3.3. Поскольку там нашей отправной точкой будет фильтрация $\bar{\mathfrak{g}}'_{(m)}$, мы не можем принять равенство фильтраций на веру с самого начала.

Следующий факт очень важен.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. Пусть $X_{k,s}$ и $Y_{m,p}$ – элементы из $\bar{\mathfrak{g}}_k$ и $\bar{\mathfrak{g}}_m$, порожденные элементами $X, Y \in \mathfrak{g}$ соответственно. Тогда

$$[X_{k,s}, Y_{m,p}] = [X, Y]_{k+m,s} \delta_s^p + L, \quad (3.6)$$

где $[X, Y]$ обозначает скобку в $\mathfrak{g}$, а $L \in \bar{\mathfrak{g}}_{(k+m+1)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь формулой (3.2) для $X_{k,s}$ и $Y_{m,p}$, получаем, что

$$[X_{k,s}, Y_{m,p}]_l(z_t) = [X, Y]_s^{k+m} \delta_t^p \delta_t^s + O(z_t^{k+m+1})$$

для всех t . Поэтому элемент

$$[X_{k,s}, Y_{m,p}] - ([X, Y])_{k+m,s} \delta_s^p$$

имеет порядок $\geq k + m + 1$ в каждой точке множества I . Из (3.5) и предложения 3.6 вытекает, что он принадлежит $\bar{\mathfrak{g}}_{(k+m+1)}$, что и требовалось.

3.2. Алгебра функций $\mathcal{A}$ и алгебра векторных полей $\mathcal{L}$. Прежде чем переходить к доказательствам утверждений, сделанных в п. 3.1, введем нужные нам для дальнейшего алгебры типа Кричевера–Новикова. Начнем с алгебры функций $\mathcal{A}$ и алгебры векторных полей $\mathcal{L}$. Эти алгебры почти градуированы:

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{A}_m, \quad \mathcal{L} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{L}_m, \quad (3.7)$$

причем их почти градуировка индуцирована тем же представлением A в виде $I \cup O$, что и выше в определении алгебр операторов Лакса. Напомним, что $I = \{P_1, \dots, P_N\}$ и $O = \{Q_1, \dots, Q_M\}$.

Пусть $\mathcal{A}$ (соответственно $\mathcal{L}$) есть пространство мероморфных функций (соответственно мероморфных векторных полей) на Σ , голоморфных на $\Sigma \setminus A$. В частности, элементы этих алгебр голоморфны в точках множества W . Ясно, что $\mathcal{A}$ – ассоциативная алгебра относительно умножения функций, а $\mathcal{L}$ – алгебра Ли относительно скобки Ли векторных полей. Почти градуировка этих алгебр была введена И. М. Кричевером и С. П. Новиковым (см. [7]) в двухточечном случае и М. Шлихенмайером (см. [20], [21]) в многоточечном. Опишем результаты указанных работ.

Базисом однородного пространства $\mathcal{A}_m$ является множество функций $\{A_{m,s}, s = 1, \dots, N\}$, заданных условиями

$$\text{ord}_{P_i}(A_{m,s}) = (n+1) - \delta_i^s, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.8)$$

и некоторыми компенсирующими условиями в точках множества O , определяющими эти функции однозначно с точностью до умножения на скаляр. Например, в случае, когда $\#O = M = 1$, а род либо равен нулю, либо ≥ 2 , причем все точки находятся в общем положении, эти условия имеют вид (для всех m , кроме конечного их числа)

$$\text{ord}_{Q_M}(A_{m,s}) = -N \cdot (n+1) - g + 1. \quad (3.9)$$

Для единственности определения потребуем, чтобы локальные разложения в точках P_s относительно выбранных локальных координат z_s имели вид

$$A_{n,s}|(z_s) = z_s^n + O(z_s^{n+1}). \quad (3.10)$$

Алгебра векторных полей $\mathcal{L}_m$ имеет базис $\{e_{m,s} \mid s = 1, \dots, N\}$, элементы которого $e_{m,s}$ заданы условиями

$$\text{ord}_{P_i}(e_{m,s}) = (n+2) - \delta_i^s, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.11)$$

и некоторыми компенсирующими условиями в точках множества O , определяющими эти векторные поля однозначно с точностью до умножения на скаляр. В ситуации, приведенной для примера выше, эти условия имеют вид

$$\text{ord}_{Q_M}(e_{m,s}) = -N \cdot (n+2) - 3(g-1). \quad (3.12)$$

Локальные разложения в точках P_s имеют вид

$$e_{n,s}|(z_s) = (z_s^{n+1} + O(z_s^{n+2})) \frac{d}{dz_s}. \quad (3.13)$$

Существуют константы S_1 и S_2 (не зависящие от m, n) такие, что

$$\mathcal{A}_k \cdot \mathcal{A}_m \subseteq \bigoplus_{h=k+m}^{k+m+S_1} \mathcal{A}_h, \quad [\mathcal{L}_k, \mathcal{L}_m] \subseteq \bigoplus_{h=k+m}^{k+m+S_2} \mathcal{L}_h. \quad (3.14)$$

Таким образом, имеем почти градуировку. В дальнейшем нам потребуется более тонкая почти градуированная структура

$$A_{k,s} \cdot A_{m,t} = A_{k+m,s} \delta_s^t + Y, \quad Y \in \sum_{h=k+m+1}^{k+m+S_1} \mathcal{A}_h, \quad (3.15)$$

$$[e_{k,s}, e_{m,t}] = (m-k)e_{k+m,s} \delta_s^t + Z, \quad Z \in \sum_{h=k+m+1}^{k+m+S_2} \mathcal{L}_h. \quad (3.16)$$

Снова имеем индуцированные фильтрации $\mathcal{A}_{(m)}$ и $\mathcal{L}_{(m)}$.

Элементы алгебры Ли $\mathcal{L}$ действуют на $\mathcal{A}$ дифференцированием. Тем самым, $\mathcal{A}$ становится почти градуированным модулем над $\mathcal{L}$. В частности,

$$e_{k,s} \cdot A_{m,r} = m A_{k+m} \delta_s^r + U, \quad U \in \sum_{h=k+m+1}^{k+m+S_3} \mathcal{A}_h, \quad (3.17)$$

где константа S_3 не зависит от k и m .

Почти градуировка алгебры $\mathcal{A} = \bigoplus_m \mathcal{A}_m$ индуцирует почти градуировку алгебры токов типа Кричевера–Новикова по формуле

$$\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A})_m, \quad (\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A})_m := \mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}_m \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (3.18)$$

3.3. Доказательства. При первом прочтении этот весьма технический пункт (содержащий применение теоремы Римана–Роха) можно пропустить и перейти сразу к § 4.

Напомним определение фильтрации

$$\bar{\mathfrak{g}}'_{(m)} := \{L \in \bar{\mathfrak{g}} \mid \text{ord}_{P_s}(L) \geq m, s = 1, \dots, N\}. \quad (3.19)$$

Поскольку в данном пункте встречается только эта фильтрация, мы для удобства обозначений опускаем знак $'$. Будет показано, что штрихованные и нештрихованные объекты совпадают.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. *Для любых $X \in \mathfrak{g}$, $X \neq 0$, $s = 1, \dots, N$, $m \in \mathbb{Z}$ найдется хотя бы одна функция $X_{m,s}$ такая, что*

$$X_{m,s|}(z_p) = X z_s^m \delta_p^s + O(z_p^{m+1}). \quad (3.20)$$

Доказательство опирается на теорему Римана–Роха. Поскольку соответствующая техника используется всюду в этом пункте, мы введем ряд обозначений прежде чем переходить к доказательству. Для каждого $m \in \mathbb{Z}$ рассмотрим дивизоры

$$D_m = (D_m)_I + D_W + (D_m)_O, \quad (3.21)$$

где

$$(D_m)_I = -m \sum_{s=1}^N P_s, \quad (D_m)_O = \sum_{s=1}^M a_{s,m} Q_s, \quad a_{s,m} \in \mathbb{Z}, \quad (3.22)$$

$$D_W = \varepsilon \sum_{s=1}^K \gamma_s, \quad \varepsilon = 1 \text{ для } \mathfrak{gl}(n), \mathfrak{sl}(n), \mathfrak{so}(n), \quad \varepsilon = 2 \text{ для } \overline{\mathfrak{sp}}(n).$$

Напомним, что род Σ равен g . Обозначим через $\mathcal{K}$ канонический дивизор, а через $L(D)$ – пространство мероморфных функций u на Σ , дивизоры которых удовлетворяют условию $(u) \geq -D$. Теорема Римана–Роха гласит, что

$$\dim L(D) - \dim L(\mathcal{K} - D) = \deg D - g + 1. \quad (3.23)$$

В частности,

$$\dim L(D) \geq \deg D - g + 1. \quad (3.24)$$

Следующие частные случаи используются в дальнейшем:

- 1) если $\deg D \geq 2g - 1$, то в (3.24) имеет место равенство;
- 2) если D – дивизор общего положения, то при $g \leq \deg D \leq 2g - 2$ также имеет место равенство;
- 3) если $D \geq 0$ и D – дивизор общего положения, то $\dim L(D) = 1$ при $0 \leq \deg D \leq g - 1$;
- 4) если $D \not\geq 0$ (т.е. носитель D содержит хотя бы одну точку отрицательной кратности) и D – дивизор общего положения, то $\dim L(D) = 0$ при $0 \leq \deg D \leq g - 1$;
- 5) при $g = 0$ все дивизоры общего положения и в (3.24) имеет место равенство всякий раз, когда правая часть ≥ 0 . Иными словами, $\dim L(D) = \max(0, \deg D + 1)$.

О дивизорах, теореме Римана–Роха и ее приложениях см., например, [29], а также [30].

В случае векторнозначных функций $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)$ определим $L(D)$ как векторное пространство всех таких функций u , для которых $(u) \geq -D$. Это означает, что $(u_i) \geq -D$ при $i = 1, \dots, r$. Теперь все формулы для размерностей надо умножать на r :

$$\dim L(D) \geq r(\deg D - g + 1). \quad (3.25)$$

Чтобы применить изложенные соображения к алгебре операторов Лакса $\bar{\mathfrak{g}}$, рассмотрим функции u_i , $i = 1, \dots, r = \dim \mathfrak{g}$, являющиеся коэффициентами разложения по фиксированному базису. Положим

$$L'(D) := \{u \in L(D) \mid u \text{ задает элемент из } \bar{\mathfrak{g}}\} \subseteq L(D). \quad (3.26)$$

При определении $L'(D_m)$ надо учесть, что в слабых особых точках γ_s должны выполняться еще H дополнительных линейных условий на элементы пространства решений $L(D_m)$. Они формулируются в терминах соответствующих α_s и налагаются на некоторую конечную часть ряда Лорана. Общее количество всех условий конечно. В случае, когда все α_s общего положения, этим в точности компенсируются все возможные полюсы в точках γ_s (см. [1]). Но пока мы продолжаем считать α_s произвольными.

По самому определению фильтрации всегда выполнено

$$\bar{\mathfrak{g}}_{(m)} = L'((D_m)_I), \quad \bar{\mathfrak{g}}_{(m)} \geq L'(D_m). \quad (3.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 3.8. Начнем с дивизора D_m , выбирая его часть $(D_m)_O = T$ так, чтобы степени дивизоров D_m и $D_m - \sum P_i$ были настолько велики, что для обоих дивизоров имеет место случай 1) равенства Римана–Роха (3.25) и выполнено неравенство $\dim L(D) = l \geq r(N+1) + H$. Налагая еще H линейных условий, имеем $\dim L'(D) \geq r(N+1)$. Фиксируем точку P_s множества I и рассмотрим дивизоры

$$D'_m = D_m - \sum_{i=1}^N P_i, \quad D''_m = D'_m + P_s. \quad (3.28)$$

Тогда

$$\dim L'(D'_m) = l - rN, \quad \dim L'(D''_m) = l - rN + r. \quad (3.29)$$

Элементы пространства $L'(D'_m)$ имеют порядки $\geq m+1$ во всех точках множества I , а элементы пространства $L'(D''_m)$ имеют порядки $\geq m+1$ во всех точках P_i , $i \neq s$, и порядки $\geq m$ в точке P_s . Из формулы размерностей (3.29) мы заключаем, что найдутся r элементов порядка ровно m в точке P_s и $\geq m+1$ в остальных точках множества I . Тем самым, для каждого базисного элемента X^u алгебры Ли $\mathfrak{g}$ некоторый элемент $X^u_{m,s} \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеет порядок m в точке P_s , порядок выше m во всех остальных точках множества I и при этом записывается в них формулой (3.20). По линейности получаем требуемое утверждение для всех $X \in \mathfrak{g}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.9. 1. Модифицируя дивизор T по степени, можно даже установить существование элементов, для которых порядки $X_{m,s}$ во всех точках P_p , $p \neq s$, равны $m+1$.

2. Заметим, что доказательство не использует соображений общего положения ни для точек множеств A и W , ни для параметра α_s . Тем самым, утверждение верно во всех ситуациях.

3. Хотя само определение элемента $X_{m,s}$ использует локальную координату z_s , этот элемент зависит только от струи первого порядка указанной координаты. Два разных элемента отличаются масштабированием.

4. Элементы $X_{m,s}$ весьма не единственны. Для построения почти градуировки потребуется сделать их почти единственными за счет выбора наименьшего возможного дивизора T с требуемыми свойствами. (Мы вернемся к этому вопросу ниже.)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.10. Пусть X^u , $u = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$, – базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а элементы

$$X^u_{m,s}, \quad u = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}, \quad s = 1, \dots, N, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (3.30)$$

выбраны произвольно в соответствии с предложением 3.8. Тогда:

- (а) эти элементы линейно независимы;
- (б) классы $[X^u_{m,s}]$, $u = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$, $s = 1, \dots, N$, образуют базис факторпространства $\bar{\mathfrak{g}}_{(m)}/\bar{\mathfrak{g}}_{(m+1)}$;
- (в) $\dim \bar{\mathfrak{g}}_{(m)}/\bar{\mathfrak{g}}_{(m+1)} = N \cdot \dim \mathfrak{g}$;
- (г) классы элементов $X^u_{m,s}$ не зависят от выбора этих элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Линейная независимость элементов (3.30) устанавливается с помощью их локальных разложений так же, как в доказательстве предложения 3.4. Этим доказан п. (а). Игнорируя старшие порядки, т.е. элементы из $\bar{\mathfrak{g}}_{(m+1)}$, мы сохраняем линейную независимость. Получаем п. (b), из которого следует (c). Утверждение (d) выполнено по самому определению элементов.

Для каждого $X \in \mathfrak{g}$ временно обозначим через $X_{m,s}$ любой элемент, для которого выполнены условия предложения 3.8. Поскольку доказательство предложения 3.7 проходит и для этих элементов, имеем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.11. *Алгебра $\bar{\mathfrak{g}}$ является фильтрованной посредством фильтрации $(\bar{\mathfrak{g}}_{(m)})$, т.е.*

$$[\bar{\mathfrak{g}}_{(m)}, \bar{\mathfrak{g}}_{(k)}] \subseteq \bar{\mathfrak{g}}_{(m+k)}. \quad (3.31)$$

При этом

$$[X_{k,s}, Y_{m,p}] = [X, Y]_{k+m,s} \delta_s^p + L, \quad L \in \bar{\mathfrak{g}}_{(m+k+1)}. \quad (3.32)$$

Наша следующая цель – определить однородные подпространства $\bar{\mathfrak{g}}_m$. Было бы наивным взять в качестве $\bar{\mathfrak{g}}_m$ линейную оболочку какого-нибудь фиксированного множества элементов (3.30): тогда условие почти градуированности выполнялось бы для нижней границы $m+k$, но не обязательно для верхней границы. Чтобы исправить положение, надо наложить более сильные условия на порядки полюсов в точках множества O , причем дивизоры $(D_m)_O$ для разных m должны быть согласованы. Мы опишем ниже способ сделать элементы по существу единственными в ситуации общего положения по крайней мере для почти всех m . Для α_s не общего положения может потребоваться модификация определения конкретных функций-коэффициентов. Но все такие модификации меняют только верхнюю границу на константу.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.12. Прежде чем продолжать, напомним, что алгебра $\mathcal{A}$ и обычная алгебра токов Кричевера–Новикова $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{A}$ уже снабжены почти градуированной структурой.

1. В § 2 установлено разложение в прямую сумму (2.8). При этом $\bar{\mathfrak{s}}(n) \cong \mathcal{A}$. Значит, скалярная часть почти градуирована, и для нее выполнены теорема 3.2 и предложение 3.3. Если доказать эти утверждения для $\bar{\mathfrak{s}}(n)$, то они будут установлены и для $\bar{\mathfrak{gl}}(n)$. Поэтому достаточно в дальнейшем рассматривать случай, когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ проста.

2. Если данные Тюриня пусты (или все α_s равны нулю), то наши алгебры операторов Лакса сводятся к алгебрам токов Кричевера–Новикова, для которых требуемые утверждения выполнены. Поэтому достаточно рассматривать алгебры операторов Лакса с непустыми данными Тюриня. Это позволит уменьшить перебор различных случаев в доказательстве.

Опишем теперь общую конструкцию в случае общего положения для простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и приведем подробное доказательство утверждения о почти градуировке. Будут также указаны модификации, необходимые в случаях не общего положения.

Напомним разложение (3.21) дивизора D_m . Оставим слагаемые $(D_m)_I$ и D_W прежними, а в качестве $(D_m)_O$ возьмем

$$(D_m)_O = \sum_{i=1}^M (a_i m + b_{m,i}) Q_i, \quad (3.33)$$

где $a_i, b_{m,i} \in \mathbb{Q}$ таковы, что $a_i m + b_{m,i} \in \mathbb{Z}$, $a_i > 0$ и для некоторого B имеем $|b_{m,i}| < B$ при всех $m \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, M$. Далее,

$$\sum_{i=1}^M a_i = N, \quad \sum_{i=1}^M b_{m,i} = N + g - 1, \quad (D_{m+1})_O > (D_m)_O. \quad (3.34)$$

Вычислим степени дивизоров:

$$\deg((D_m)_O) = m \cdot N + (N + g - 1), \quad \deg((D_{m+1})_O) = \deg((D_m)_O) + N. \quad (3.35)$$

ПРИМЕР 3.13. 1. При $M = 1$ имеем единственное решение

$$(D_m)_O = (N \cdot m + (N + g - 1)) Q_M. \quad (3.36)$$

2. При $N \geq M$ подходит выбор

$$(D_m)_O = (m + 1) \sum_{j=1}^{M-1} Q_j + ((N - M + 1)(m + 1) + g - 1) Q_M. \quad (3.37)$$

Кроме слагаемого D_W , соответствующий дивизор D_m был введен в работе [21], где впервые рассматривалась почти градуировка многоточечных алгебр Кричевера–Новикова и тензоров (см. также [24]).

3. В [21] были даны рецепты и для случая $N < M$, но мы не будем воспроизводить их здесь.

Итак, во всех случаях можно найти требуемые дивизоры.

Теперь положим

$$\bar{\mathfrak{g}}_m := \{L \in \bar{\mathfrak{g}} \mid (L) \geq -D_m\}. \quad (3.38)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.14. (а) Имеем $\dim \bar{\mathfrak{g}}_m = N \dim \mathfrak{g}$.

(б) Базис пространства $\bar{\mathfrak{g}}_m$ задается элементами $X_{m,s}^u$, $u = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$, $s = 1, \dots, N$, удовлетворяющими условиям

$$X_{m,s}^u(z_p) = X^u z_s^m \delta_p^s + O(z_p^{m+1}). \quad (3.39)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $r := \dim \mathfrak{g}$. Сначала рассмотрим случай общего положения. Как объяснено выше, число условий в слабых особых точках равно числу параметров, доставляемых полюсами. Поэтому при вычислении $\dim L'(D)$ вклад степени дивизора D_W (равный $\varepsilon \cdot K$) сокращается с числом соотношений (равным $r \cdot \varepsilon \cdot K$). Здесь ε равно 1 или 2 в зависимости от $\mathfrak{g}$. Вычислим степень дивизора D_m :

$$\deg D_m = g + (N - 1) + \varepsilon K \geq g. \quad (3.40)$$

Мы остаемся в области, где (3.25) является равенством, и получаем

$$\dim L'(D_m) = \dim L(D_m) - \varepsilon rK = rN + r\varepsilon K - \varepsilon rK = rN. \quad (3.41)$$

Поскольку по определению имеем $\bar{\mathfrak{g}}_m = L'(D_m)$, этим доказано утверждение (а).

Теперь рассмотрим дивизор $D'_m = D_m - \sum_{i=1}^N P_i$. Его степень равна

$$\deg \left(D_m - \sum_{i=1}^N P_i \right) = g - 1 + \varepsilon K.$$

Поскольку $K \geq 1$, мы все еще находимся в области, где справедливо равенство Римана–Роха. Поэтому $\dim L'(D'_m) = 0$. Теперь для $D''_m = D'_m + P_s$ получаем $\dim L'(D''_m) = r$. Это означает, что для каждого базисного элемента X^u алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует единственный (с точностью до умножения на скаляр) элемент $X_{m,s}^u \in \bar{\mathfrak{g}}_m$ с локальным разложением

$$X_{m,s}^u|_{(z_p)} = X^u \delta_s^p z_p + O(z_p^{m+1}). \quad (3.42)$$

Отсюда вытекает утверждение (b).

В случае не общего положения надо минимальным образом изменить порядки полюсов в определении дивизора $(D_m)_O$, добавляя или вычитая конечное число точек так, чтобы получить в точности формулу для размерности и существование базиса требуемого вида. При этом следует убедиться, что нужное число изменений ограничено константой, не зависящей от m . Фактически это число не превосходит числа точек Q из O , которые надо добавить к дивизору D_m из случая общего положения (имеющему степень $N + g - 1 + \varepsilon K$) для того, чтобы получить дивизор D'_m с условием $\deg D'_m \geq 2g - 1 + H$, где H – число соотношений на α_s .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.15. *Имеем*

$$\bar{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \bar{\mathfrak{g}}_m. \quad (3.43)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Элементы $X_{m,s}^u$, принятые нами в качестве базисных для $\bar{\mathfrak{g}}_m$, являются элементами типа описанных в предложении 3.8 относительно градуировки. В силу предложения 3.10 они остаются линейно независимыми, даже если рассматривать все значения m вместе (потому что их классы линейно независимы). Следовательно, сумма в правой части (3.43) является прямой.

Чтобы не заботиться о специальных поправках в случае не общего положения, возьмем $m \gg 0$ и рассмотрим дивизор

$$E_m := -(D_m)_I + D_W + (D_m)_O = m \sum_{i=1}^N P_i + D_W + (D_m)_O, \quad (3.44)$$

где $(D_m)_O$ – это дивизор, использовавшийся для фиксации базиса в $\bar{\mathfrak{g}}_m$; см. (3.33). Вычислим степень:

$$\deg E_m = 2mN + (N + g - 1) + \varepsilon K. \quad (3.45)$$

При $m \gg 0$ мы находимся в области, где неравенство (3.25) является равенством. Поэтому, вычитая число соотношений, имеем

$$\dim L'(E_m) = \dim \mathfrak{g} \cdot ((2m+1)N). \quad (3.46)$$

Базисные элементы

$$X_{k,s}^u, \quad u = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}, \quad s = 1, \dots, N, \quad -m \leq k \leq m, \quad (3.47)$$

лежат в $L'(E_m)$. Покажем это подсчетом порядков на I и O . Для I утверждение очевидно. Для O воспользуемся тем, что $(D_{(k+1)})_O > (D_k)_O$ согласно (3.34). Поэтому $-(D_m)_O$ является нижней границей для O -частей дивизоров элементов (3.47). Но там выписано $(2m+1) \cdot N \cdot \dim \mathfrak{g}$ линейно независимых элементов. Следовательно,

$$L'(E_m) = \bigoplus_{k=-m}^m \bar{\mathfrak{g}}_k. \quad (3.48)$$

Произвольный элемент $L \in \bar{\mathfrak{g}}$ имеет лишь полюсы конечного порядка в точках множеств I и O . Покажем, что $L \in L'(E_m)$ для некоторого m . Для точек из I это снова очевидно, а для точек из O воспользуемся тем, что $a_i > 0$ при $i = 1, \dots, M$ согласно условиям на $(D_m)_O$ в (3.33). Поэтому любой порядок полюса на O будет превзойден дивизором $(D_m)_O$ для достаточно большого m , чем утверждение и доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.16. *Существует не зависящая от n и m константа S такая, что*

$$[\bar{\mathfrak{g}}_m, \bar{\mathfrak{g}}_k] \subseteq \bigoplus_{h=m+k}^{m+k+S} \bar{\mathfrak{g}}_h. \quad (3.49)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем доказательство для случая общего положения (и простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$), а затем укажем, какие изменения надо сделать в общем случае. Пусть $L \in [\bar{\mathfrak{g}}_m, \bar{\mathfrak{g}}_k]$. Тогда

$$(L) \geq -(D_m + D_k)_I - D_W - (D_m + D_k)_O \quad (3.50)$$

(заметим, что D_W здесь не удваивается). Рассмотрим дивизоры D_h . Напомним формулу (3.33). Поскольку $a_i > 0$ для всех i , найдется h_0 такое, что при всех $h \geq h_0$ имеем

$$(D_h)_O \geq (D_m + D_k)_O. \quad (3.51)$$

Значит, существует наименьшее $h \in \mathbb{Z}$, при котором (3.51) все еще верно. Обозначим это значение через $h_{\max}$. В силу (3.34) $h_{\max} \geq m + k$. Рассмотрим дивизор

$$E_m = (D_m + D_k)_I + D_W + (D_{h_{\max}})_O. \quad (3.52)$$

Из (3.35) получаем

$$\deg((D_{h_{\max}})_O) = \deg((D_m + D_k)_O) + (h_{\max} - (m + k))N. \quad (3.53)$$

Следовательно,

$$\deg(E_m) = -(m + k)N + \varepsilon K + h_{\max} \cdot N + (N + g - 1). \quad (3.54)$$

Поскольку $\deg(E_m) \geq g$, в общем положении мы остаемся в области, где

$$\dim L'(E_m) = \deg \mathfrak{g} \cdot (h_{\max} - (m + k) + 1)N. \quad (3.55)$$

Как и в доказательстве предложения 3.15, получаем, что все элементы (3.47) с $m + k \leq h \leq h_{\max}$ лежат в $L'(E_m)$. Они линейно независимы и, значит,

$$L'(E_m) = \bigoplus_{h=n+m}^{h_{\max}} \bar{\mathfrak{g}}_h. \quad (3.56)$$

В силу (3.50) тот элемент L , с которого мы начинали, также лежит в $L'(E_m)$, а значит, и в правой части равенства (3.56).

Для доказательства свойства почти градуировки надо установить существование числа S (не зависящего от m и k), для которого $h_{\max} = m + k + S$. Перепишем (3.51) в виде

$$a_i h + b_{h,i} \geq a_i(m + k) + b_{m,i} + b_{k,i} \quad \forall i = 1, \dots, M, \quad (3.57)$$

или, эквивалентно,

$$h \geq m + k + \frac{b_{m,i} + b_{k,i} - b_{h,i}}{a_i} \quad \forall i = 1, \dots, M. \quad (3.58)$$

Минимальное h , для которого это верно, задается формулой

$$h_{\max} = m + k + \min_{i=1, \dots, M} \left\lceil \frac{b_{m,i} + b_{k,i} - b_{h,i}}{a_i} \right\rceil, \quad (3.59)$$

где при каждом вещественном x через $\lceil x \rceil$ обозначается наибольшее целое число, не превосходящее x . Поскольку числа $|b_{m,i}|$ равномерно ограничены некоторой константой B , третье слагаемое в (3.59) также равномерно ограничено некоторой константой S . Свойство почти градуировки доказано. В случае точек и векторов α_s не общего положения дивизоры на O надо модифицировать конечное число раз. При этом S придется увеличить на конечную константу, но свойство почти градуировки сохранится.

Проведенное доказательство позволяет при необходимости даже вычислить $h_{\max}$. Например, имеет место

СЛЕДСТВИЕ 3.17. *В случае общего положения и простой алгебры Ли для $N \geq M$ и при стандартном выборе (3.37) выполнено равенство*

$$h_{\max} = n + m + S,$$

где

$$S = \begin{cases} 0, & g = 0, \ N = M = 1, \\ 1, & g = 0, \ M > 1, \\ 1, & g = 1, \\ 1 + \left\lceil \frac{g-1}{N-M+1} \right\rceil, & g \geq 2. \end{cases} \quad (3.60)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При стандартном выборе имеем

$$\begin{aligned} a_i &= 1, & i &= 1, \dots, M-1, & a_M &= N-M+1, \\ b_i &= b_{m,i} = 1, & i &= 1, \dots, M-1, & b_M &= b_{m,M} = N-M+g. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Значит,

$$S = \max_{i=1, \dots, M} \left\lceil \frac{b_i}{a_i} \right\rceil, \quad (3.62)$$

откуда и вытекает требуемый результат.

Теперь мы готовы собрать воедино результаты предложений 3.14–3.16. В совокупности они утверждают ровно то же, что и теорема 3.2 вместе с предложением 3.3. Таким образом, все утверждения из п. 3.1 доказаны. В частности, теперь мы знаем, что фильтрации (3.5) и (3.4) совпадают. Поэтому фильтрация (3.4) канонически определяется расщеплением множества A на подмножества I и O .

Алгебра Ли $\mathcal{V}$ называется *совершенной*, если $\mathcal{V} = [\mathcal{V}, \mathcal{V}]$. Конечно, все простые алгебры Ли совершенны. Алгебры токов Кричевера–Новикова $\bar{\mathfrak{g}}$ также совершенны для простых $\mathfrak{g}$ (см. [12; предложение 3.2]). Алгебры операторов Лакса не обязательно совершенны (по крайней мере у нас нет доказательства того, что они совершенны). Следующую лемму можно рассматривать как ослабленный аналог этого свойства.

ЛЕММА 3.18. *Пусть $\mathfrak{g}$ – простая алгебра Ли и $y \in \bar{\mathfrak{g}}$. Тогда для каждого $m \in \mathbb{Z}$ найдется конечный набор элементов $y^{(s,1)}, y^{(s,2)} \in \bar{\mathfrak{g}}$, $i = 1, \dots, l = l(m)$, для которого*

$$y - \sum_{s=1}^l [y^{(s,1)}, y^{(s,2)}] \in \bar{\mathfrak{g}}_m. \quad (3.63)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть y – любой элемент из $\bar{\mathfrak{g}}$. Тогда при некотором k имеем $y \in \bar{\mathfrak{g}}_k$, но $y \notin \bar{\mathfrak{g}}_{k+1}$. В частности, для каждой точки P_i найдутся такие элементы $X_{k,i}^i$, что

$$y - \sum_{i=1}^N X_{k,i}^i \in \bar{\mathfrak{g}}_{k+1}, \quad (3.64)$$

где $X_{k,i}^i = (X^i)_{k,i}$ есть элемент, соответствующий $X^i \in \mathfrak{g}$. Поскольку $\mathfrak{g}$ совершенна, имеем $X^i = [Y^i, Z^i]$ для некоторых $Y^i, Z^i \in \mathfrak{g}$. Получаем

$$X_{k,i}^i = [Y_{0,i}^i, Z_{k,i}^i] + y^i, \quad y^{(i)} \in \bar{\mathfrak{g}}_{k+1}. \quad (3.65)$$

В сумме имеем

$$y^{(k)} = y - \sum_{i=1}^N [Y_{0,i}^i, Z_{k,i}^i] \in \bar{\mathfrak{g}}_{k+1}. \quad (3.66)$$

Повторяя это рассуждение для $y^{(k)}$ и т.д., мы можем аппроксимировать y суммами коммутаторов с точностью до любого конечного порядка.

§ 4. Структура модуля

4.1. Алгебры операторов Лакса как модули над $\mathcal{A}$. Пространство $\bar{\mathfrak{g}}$ является $\mathcal{A}$ -модулем относительно поточечного умножения. Ясно, что свойства (2.5), (2.6), (2.9), (2.11) при таком умножении сохраняются.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. (а) *Алгебра операторов Лакса $\bar{\mathfrak{g}}$ является почти градуированным модулем над $\mathcal{A}$, т.е. существует константа S_4 (не зависящая от k и m) такая, что*

$$\mathcal{A}_k \cdot \bar{\mathfrak{g}}_m \subseteq \bigoplus_{h=k+m}^{k+m+S_4} \bar{\mathfrak{g}}_h. \quad (4.1)$$

(б) *Для $X \in \mathfrak{g}$ имеем*

$$A_{m,s} \cdot X_{n,p} = X_{m+n,s} \delta_p^s + L, \quad L \in \bar{\mathfrak{g}}_{m+n+1}. \quad (4.2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим порядки элементов на I и O . Рассуждая, как в доказательстве предложения 3.16, устанавливаем существование константы S_4 со свойством (4.1). Утверждение (а) доказано.

Изучим члены наименьшего порядка в разложении $A_{m,s} \cdot X_{n,r}$ в точке $P_i \in I$. Из (3.20), (3.8), (3.10) видим при $s \neq r$, что $A_{m,s} \cdot X_{n,r} \in \bar{\mathfrak{g}}_{m+n+1}$, так как все порядки $\geq n + m + 1$. При $s = r$ то же самое верно для элемента $A_{m,s} \cdot X_{n,s} - X_{m+n,s}$. Утверждение доказано.

Отметим, что равенство $A_{m,s} \cdot X_{0,s} = X_{m,s}$, вообще говоря, неверно, так как порядки на O не совпадают. Кроме того, $A_{m,s} \cdot X$ не обязательно принадлежит $\bar{\mathfrak{g}}$.

4.2. Алгебры операторов Лакса как модули над $\mathcal{L}$. Определим действие $\mathcal{L}$ на $\bar{\mathfrak{g}}$. Это делается с помощью некоторой связности $\nabla^{(\omega)}$ способом, указанным в [1]–[3], с учетом модификации, сделанной в [16]. Форма связности ω – это $\mathfrak{g}$ -значная мероморфная 1-форма, голоморфная вне I , O , W и имеющая предписанное поведение в точках множества W . Для точек $\gamma_s \in W$ с $\alpha_s = 0$ это поведение состоит в том, что ω там регулярна. Для точек γ_s с $\alpha_s \neq 0$ требуется, чтобы лорановское разложение имело вид

$$\omega(z_s) = \left(\frac{\omega_{s,-1}}{z_s} + \omega_{s,0} + \omega_{s,1} + \sum_{k>1} \omega_{s,k} z_s^k \right) dz_s \quad (4.3)$$

со следующими условиями.

Условие для $\mathfrak{gl}(n)$: найдутся $\tilde{\beta}_s \in \mathbb{C}^n$ и $\tilde{\kappa}_s \in \mathbb{C}$ такие, что

$$\omega_{s,-1} = \alpha_s \tilde{\beta}_s^t, \quad \omega_{s,0} \alpha_s = \tilde{\kappa}_s \alpha_s, \quad \text{tr}(\omega_{s,-1}) = \tilde{\beta}_s^t \alpha_s = 1. \quad (4.4)$$

Условие для $\mathfrak{so}(n)$: найдутся $\tilde{\beta}_s \in \mathbb{C}^n$ и $\tilde{\kappa}_s \in \mathbb{C}$ такие, что

$$\omega_{s,-1} = \alpha_s \tilde{\beta}_s^t - \tilde{\beta}_s \alpha_s^t, \quad \omega_{s,0} \alpha_s = \tilde{\kappa}_s \alpha_s, \quad \tilde{\beta}_s^t \alpha_s = 1. \quad (4.5)$$

Условие для $\mathfrak{sp}(2n)$: найдутся $\tilde{\beta}_s \in \mathbb{C}^{2n}$ и $\tilde{\kappa}_s \in \mathbb{C}$ такие, что

$$\omega_{s,-1} = (\alpha_s \tilde{\beta}_s^t + \tilde{\beta}_s \alpha_s^t) \sigma, \quad \omega_{s,0} \alpha_s = \tilde{\kappa}_s \alpha_s, \quad \alpha_s^t \sigma \omega_{s,1} \alpha_s = 0, \quad \tilde{\beta}_s^t \sigma \alpha_s = 1. \quad (4.6)$$

Существование нетривиальных форм связностей, удовлетворяющих перечисленным условиям, устанавливается с помощью теоремы Римана–Роха, как в предложении 3.8. Можно даже потребовать (и мы всегда будем так поступать), чтобы форма связности была голоморфна на I . Заметим еще, что если все α_s равны нулю, то можно взять $\omega = 0$.

Форма связности ω задает связность $\nabla^{(\omega)}$ на $\bar{\mathfrak{g}}$ по правилу

$$\nabla^{(\omega)} = d + [\omega, \cdot]. \quad (4.7)$$

Пусть $e \in \mathcal{L}$ – произвольное векторное поле. В локальной координате z можно записать форму связности и векторное поле в виде $\omega = \tilde{\omega} dz$ и $e = \tilde{e} \frac{d}{dz}$ для некоторых локальной функции $\tilde{e}$ и локальной матричнозначной функции $\tilde{\omega}$. Ковариантная производная в направлении e задается формулой

$$\nabla_e^{(\omega)} = dz(e) \frac{d}{dz} + [\omega(e), \cdot] = e \cdot + [\tilde{\omega} \tilde{e}, \cdot] = \tilde{e} \cdot \left(\frac{d}{dz} + [\tilde{\omega}, \cdot] \right). \quad (4.8)$$

Здесь слагаемое $e \cdot$ соответствует взятию обычной производной от каждого матричного элемента по отдельности, тогда как $\tilde{e} \cdot$ означает умножение на локальную функцию $\tilde{e}$.

С помощью последнего описания мы получаем для $L \in \bar{\mathfrak{g}}$, $g \in \mathcal{A}$, $e, f \in \mathcal{L}$ формулы

$$\nabla_e^{(\omega)}(g \cdot L) = (e \cdot g) \cdot L + g \cdot \nabla_e^{(\omega)} L, \quad \nabla_{g \cdot e}^{(\omega)} L = g \cdot \nabla_e^{(\omega)} L, \quad (4.9)$$

$$\nabla_{[e, f]}^{(\omega)} = [\nabla_e^{(\omega)}, \nabla_f^{(\omega)}]. \quad (4.10)$$

Доказательство следующего предложения совпадает с доказательством его двухточечного аналога в [16] и потому опускается.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. (а) Оператор $\nabla_e^{(\omega)}$ является дифференцированием алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$, т.е.

$$\nabla_e^{(\omega)}[L, L'] = [\nabla_e^{(\omega)} L, L'] + [L, \nabla_e^{(\omega)} L']. \quad (4.11)$$

(б) Ковариантная производная делает $\bar{\mathfrak{g}}$ модулем Ли над $\mathcal{L}$.

(с) Разложение $\bar{\mathfrak{gl}}(n) = \bar{\mathfrak{s}}(n) \oplus \bar{\mathfrak{sl}}(n)$ является разложением на $\mathcal{L}$ -модули, т.е.

$$\nabla_e^{(\omega)}: \bar{\mathfrak{s}}(n) \rightarrow \bar{\mathfrak{s}}(n), \quad \nabla_e^{(\omega)}: \bar{\mathfrak{sl}}(n) \rightarrow \bar{\mathfrak{sl}}(n). \quad (4.12)$$

При этом $\mathcal{L}$ -модуль $\bar{\mathfrak{s}}(n)$ эквивалентен $\mathcal{L}$ -модулю $\mathcal{A}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. (а) $\bar{\mathfrak{g}}$ является почти градуированным $\mathcal{L}$ -модулем.

(б) Для соответствующего $\mathcal{L}$ -действия имеем

$$\nabla_{e_{k,s}}^{(\omega)} X_{m,r} = m \cdot X_{k+m,s} \delta_s^r + L, \quad L \in \bar{\mathfrak{g}}_{k+m+1}. \quad (4.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) По предложению 4.2 $\bar{\mathfrak{g}}$ является $\mathcal{L}$ -модулем. Остается доказать существование верхней границы вида $n + m + S_5$ для порядка элементов, где S_5 не зависит от n и m (но может зависеть от ω). Записывая (4.8) для однородных элементов, получаем

$$\nabla_{e_{k,s}}^{(\omega)} X_{m,r} = e_{k,s} \cdot X_{m,r} + [\tilde{\omega} \tilde{e}_{k,s}, X_{m,r}]. \quad (4.14)$$

Форма ω имеет фиксированные порядки на I и O , действие $\mathcal{L}$ на $\mathcal{A}$ почти градуировано, а скобка соответствует коммутатору в почти градуированной алгебре $\bar{\mathfrak{g}}$. Рассматривая соответствующие оценки для порядков полюсов на I и O , получаем требуемую универсальную оценку.

(b) Локально в точке P_i , $i = 1, \dots, N$, имеем

$$X_{m,r}|(z_i) = X z_i^m \delta_i^r + O(z_i^{m+1}), \quad e_k|(z_i) = z_i^{k+1} \delta_i^k \frac{d}{dz} + O(z_i^{k+2}). \quad (4.15)$$

Отсюда вытекает, что

$$e_{k,s} \cdot X_{m,r}(z_i) = m X z_i^{k+m} \delta_i^r \delta_i^s + O(z_i^{k+m+1}), \quad \tilde{\omega} \tilde{e}_k(z_i) = B z_i^{k+1} + O(z_i^{k+2}), \quad (4.16)$$

где $B \in \mathfrak{gl}(n)$. Поэтому

$$[\tilde{\omega} \tilde{e}_k, X_m] = O(z_i^{k+m+1}) \quad \forall i, \quad (4.17)$$

а второе слагаемое в правой части второго равенства в (4.16) вносит вклад только в члены старшего порядка. Остается рассмотреть первое слагаемое в (4.14). Если $r \neq s$, то $e_{k,s} \cdot X_{m,r}(z_i) \in O(z_i^{k+m+1})$ для всех i . Если $r = s$, то $(e_{k,s} \cdot X_{m,s} - m X_{m+k,s})(z_i) \in O(z_i^{k+m+1})$. Отсюда вытекает (4.13).

4.3. Структура модуля над $\mathcal{D}^1$ и алгебра $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$. Алгебра Ли $\mathcal{D}^1$ мероморфных дифференциальных операторов степени ≤ 1 на Σ , голоморфных вне $I \cup O$, определяется как полупрямая сумма алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{L}$, коммутатор между которыми задается действием $\mathcal{L}$ на $\mathcal{A}$. Она представляет собой прямую сумму векторных пространств $\mathcal{D}^1 = \mathcal{A} \oplus \mathcal{L}$, снабженную скобкой Ли

$$[(g, e), (h, f)] := (e \cdot h - f \cdot g, [e, f]). \quad (4.18)$$

В частности,

$$[e, h] = e \cdot h. \quad (4.19)$$

Это почти градуированная алгебра Ли (см. [25]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. *Алгебра операторов Лакса $\bar{\mathfrak{g}}$ становится почти градуированным модулем Ли над $\mathcal{D}^1$, если положить*

$$e \cdot L := \nabla_e^{(\omega)} L, \quad h \cdot L := h \cdot L. \quad (4.20)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\bar{\mathfrak{g}}$ является почти градуированным $\mathcal{A}$ - и $\mathcal{L}$ -модулем, достаточно проверить выполнение соотношения (4.19). Для $e \in \mathcal{L}$, $h \in \mathcal{A}$, $L \in \bar{\mathfrak{g}}$ мы выводим из (4.8), что

$$\begin{aligned} e \cdot (h \cdot L) - h \cdot (e \cdot L) &= \nabla_e^{(\omega)}(hL) - h \nabla_e^{(\omega)}(L) \\ &= \tilde{e} \left(\frac{d(hL)}{dz} + [\tilde{\omega}, hL] \right) - h \tilde{e} \left(\frac{dL}{dz} + [\tilde{\omega}, L] \right) = \left(\tilde{e} \frac{dh}{dz} \right) L = (e \cdot h) L = [e, h] \cdot L. \end{aligned}$$

Алгебра операторов Лакса $\bar{\mathfrak{g}}$ является модулем над алгеброй Ли $\mathcal{L}$, которая действует на $\bar{\mathfrak{g}}$ дифференцированиями (согласно предложению 4.2). Поэтому, как и выше, можно рассмотреть полупрямую сумму $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1 = \bar{\mathfrak{g}} \oplus \mathcal{L}$, произведение Ли на которой для смешанных пар задается формулой

$$[e, L] := e \cdot L = \nabla_e^{(\omega)} L. \quad (4.21)$$

Соответствующая конструкция для классических алгебр Кричевера–Новикова аффинного типа приведена в [12].

§ 5. Коциклы

В этом параграфе изучаются 2-коциклы алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ со значениями в $\mathbb{C}$. Хорошо известно, что соответствующее пространство когомологий $H^2(\bar{\mathfrak{g}}, \mathbb{C})$ классифицирует классы эквивалентности (одномерных) центральных расширений алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$.

Для удобства читателей напомним, что 2-коциклом на $\bar{\mathfrak{g}}$ называется антисимметричная билинейная форма $\gamma: \bar{\mathfrak{g}} \times \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющая условию

$$\gamma([L, L'], L'') + \gamma([L', L''], L) + \gamma([L'', L], L') = 0, \quad L, L', L'' \in \bar{\mathfrak{g}}. \quad (5.1)$$

2-коцикл γ называется кограницей, если существует линейная форма ϕ на $\bar{\mathfrak{g}}$ такая, что

$$\gamma(L, L') = \phi([L, L']), \quad L, L' \in \bar{\mathfrak{g}}. \quad (5.2)$$

С каждым 2-коциклом γ на $\bar{\mathfrak{g}}$ связано центральное расширение $\widehat{\mathfrak{g}}_\gamma$. Оно представляет собой прямую сумму векторных пространств $\widehat{\mathfrak{g}}_\gamma = \bar{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{C} \cdot t$, снабженную произведением Ли

$$[\widehat{L}, \widehat{L'}] = [\widehat{L}, \widehat{L'}] + \gamma(L, L') \cdot t, \quad [\widehat{L}, t] = 0, \quad L, L' \in \bar{\mathfrak{g}}. \quad (5.3)$$

Здесь используются обозначения $\widehat{L} := (L, 0)$ и $t := (0, 1)$. Обратно, каждое центральное расширение

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \xrightarrow{i_2} \widehat{\mathfrak{g}} \xrightarrow{p_1} \bar{\mathfrak{g}} \longrightarrow 0 \quad (5.4)$$

определяет 2-коцикл $\gamma: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathbb{C}$, если выбрать сечение $s: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{g}}$.

Два центральных расширения $\widehat{\mathfrak{g}}_\gamma$ и $\widehat{\mathfrak{g}}_{\gamma'}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда задающие их коциклы γ и γ' когомологичны.

5.1. Геометрические коциклы. Введем теперь геометрические 2-коциклы. Пусть ω – форма связности, используемая в п. 4.2 при определении связности (4.7), а C – гладкий цикл (не обязательно связный) на Σ , не пересекающийся со множествами $A = I \cup O$ и W .

Как и в двухточечной ситуации, рассмотренной в [16], мы определим две билинейные формы на $\bar{\mathfrak{g}}$:

$$\gamma_{1,\omega,C}(L, L') = \frac{1}{2\pi i} \int_C \text{tr}(L \cdot \nabla^{(\omega)} L'), \quad L, L' \in \bar{\mathfrak{g}}, \quad (5.5)$$

$$\gamma_{2,\omega,C}(L, L') = \frac{1}{2\pi i} \int_C \text{tr}(L) \cdot \text{tr}(\nabla^{(\omega)} L'), \quad L, L' \in \bar{\mathfrak{g}}. \quad (5.6)$$

Доказательства следующих предложений остаются теми же, что и в [16] (конечно, при интерпретации в настоящем более общем контексте), так что мы не будем повторять их.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. *Билинейные формы $\gamma_{1,\omega,C}$, $\gamma_{2,\omega,C}$ являются коциклами.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. (а) *Коцикл $\gamma_{2,\omega,C}$ не зависит от выбора формы связности ω .*

(b) Класс когомологий $[\gamma_{1,\omega,C}]$ не зависит от выбора формы связности ω . Точнее,

$$\gamma_{1,\omega,C}(L, L') - \gamma_{1,\omega',C}(L, L') = \frac{1}{2\pi i} \int_C \text{tr}((\omega - \omega') \cdot [L, L']). \quad (5.7)$$

Поскольку коцикл $\gamma_{2,\omega,C}$ не зависит от ω , мы опускаем букву ω в его обозначении. Заметим, что этот коцикл $\gamma_{2,C}$ равен нулю на $\bar{\mathfrak{g}}$ для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n), \mathfrak{so}(n), \mathfrak{sp}(2n)$. Однако он не равен нулю на $\mathfrak{sl}(n)$ и, тем самым, на $\bar{\mathfrak{gl}}(n)$.

5.2. $\mathcal{L}$ -инвариантные коциклы. Согласно п. 4.2 для любой фиксированной формы связности ω' алгебра векторных полей $\mathcal{L}$ действует на $\bar{\mathfrak{g}}$ посредством ковариантного дифференцирования $e \mapsto \nabla_e^{(\omega')}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. Коцикл γ на $\bar{\mathfrak{g}}$ называется $\mathcal{L}$ -инвариантным (относительно ω'), если

$$\gamma(\nabla_e^{(\omega')} L, L') + \gamma(L, \nabla_e^{(\omega')} L') = 0 \quad \forall e \in \mathcal{L}, \quad \forall L, L' \in \bar{\mathfrak{g}}. \quad (5.8)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.4. (a) Коцикл $\gamma_{2,C}$ является $\mathcal{L}$ -инвариантным.

(b) Если $\omega = \omega'$, то коцикл $\gamma_{1,\omega,C}$ является $\mathcal{L}$ -инвариантным.

Доказательство такое же, как в [16] для двухточечного случая.

Назовем класс когомологий $\mathcal{L}$ -инвариантным, если среди его представителей есть $\mathcal{L}$ -инвариантный коцикл. Предостережем читателя от мнения, что тогда все представляющие коциклы $\mathcal{L}$ -инвариантны: на самом деле верно обратное (см. следствие 6.5). Ясно, что $\mathcal{L}$ -инвариантные классы образуют векторное подпространство в $H^2(\bar{\mathfrak{g}}, \mathbb{C})$. Мы обозначаем это подпространство через $H^2_{\mathcal{L}}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathbb{C})$.

5.3. Замечания о коциклах на $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$. В дальнейшем будем считать, что $\omega = \omega'$. Опишем более глубокий смысл свойства $\mathcal{L}$ -инвариантности коцикла. В п. 4.3 была введена алгебра $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$. Алгебра операторов Лакса $\bar{\mathfrak{g}}$ является ее подалгеброй. Каждый 2-коцикл γ на $\bar{\mathfrak{g}}$ продолжается до билинейной формы на $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ с помощью следующих формул (в которых $L, L' \in \bar{\mathfrak{g}}, e, f \in \mathcal{L}$):

$$\tilde{\gamma}(L, L') = \gamma(L, L'), \quad \tilde{\gamma}(e, L) = \tilde{\gamma}(L, e) = 0, \quad \tilde{\gamma}(e, f) = 0. \quad (5.9)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.5. Продолженная билинейная форма $\tilde{\gamma}$ является коциклом на $\mathcal{D}_{\mathfrak{g}}^1$ тогда и только тогда, когда коцикл γ является $\mathcal{L}$ -инвариантным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Условия, определяющие коцикл, очевидно, выполняются для троек элементов, состоящих либо из токов, либо из векторных полей. Единственное условие на $\tilde{\gamma}$, не вытекающее автоматически из (5.9), – это равенство

$$\tilde{\gamma}([L, L'], e) + \tilde{\gamma}([L', e], L) + \tilde{\gamma}([e, L], L') = 0. \quad (5.10)$$

Пользуясь (4.21), мы видим, что (5.10) выполнено тогда и только тогда, когда

$$\gamma(\nabla_e^{(\omega)} L, L') + \gamma(L, \nabla_e^{(\omega)} L') = 0, \quad (5.11)$$

что равносильно $\mathcal{L}$ -инвариантности.

5.4. Ограниченные и локальные коциклы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.6. Пусть дана почти градуированная алгебра Ли

$$\mathcal{V} = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}_m.$$

Коцикл γ называется *ограниченным* (*сверху*), если существует константа $R_1 \in \mathbb{Z}$ такая, что

$$\gamma(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_m) \neq 0 \implies n + m \leq R_1. \quad (5.12)$$

Аналогично определяется ограниченность снизу.

Коцикл называется *локальным*, если он ограничен и сверху, и снизу. Эквивалентно, существуют $R_1, R_2 \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$\gamma(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_m) \neq 0 \implies R_2 \leq n + m \leq R_1. \quad (5.13)$$

Почти градуировка алгебры Ли $\mathcal{V}$ может быть продолжена с $\mathcal{V}$ на центральное расширение $\widehat{\mathcal{V}}_\gamma$ (5.3) приписыванием центральному элементу t некоторой степени (например, степени 0) тогда и только тогда, когда определяющий коцикл этого центрального расширения локален.

Назовем класс когомологий *ограниченным* (*локальным*), если он содержит ограниченный (локальный) представляющий коцикл. Еще раз отметим, что не каждый коцикл, представляющий ограниченный (или локальный) класс когомологий, является ограниченным (или локальным). Множество ограниченных когомологических классов образует векторное подпространство в $H^2(\bar{\mathfrak{g}}, \mathbb{C})$, обозначаемое через $H_b^2(\bar{\mathfrak{g}}, \mathbb{C})$. Оно содержит подпространство локальных когомологических классов, обозначаемое через $H_{\text{loc}}^2(\bar{\mathfrak{g}}, \mathbb{C})$, и классифицирует все почти градуированные центральные расширения алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ с точностью до эквивалентности. Оба последних пространства содержат дальнейшие подпространства, состоящие из тех когомологических классов, у которых есть представляющий коцикл, являющийся как ограниченным (или локальным), так и $\mathcal{L}$ -инвариантным. Эти подпространства обозначаются через $H_{b, \mathcal{L}}^2(\bar{\mathfrak{g}}, \mathbb{C})$ и $H_{\text{loc}, \mathcal{L}}^2(\bar{\mathfrak{g}}, \mathbb{C})$ соответственно.

Геометрические коциклы $\gamma_{2,C}$ и $\gamma_{1,\omega,C}$, полученные интегрированием по произвольному циклу, вообще говоря, не являются ни ограниченными, ни локальными, как и определяемые ими классы когомологий.

Рассмотрим теперь специальные пути интегрирования. Обозначим через C_i положительно ориентированные (деформированные) окружности вокруг точек P_i множества I , $i = 1, \dots, N$, а через C_j^* — такие же положительно ориентированные окружности вокруг точек Q_j множества O , $j = 1, \dots, M$. Значения коциклов γ , заданных интегрированием по таким циклам, можно найти с помощью вычетов. Например,

$$\gamma_{1,\omega,C_i}(L, L') = \text{res}_{P_i}(\text{tr}(L \cdot \nabla^{(\omega)} L')), \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.14)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.7. (а) 1-форма $\text{tr}(L \cdot \nabla^{(\omega)} L')$ не имеет полюсов вне $A = I \cup O$.

(б) 1-форма $\text{tr}(L) \cdot \text{tr}(dL')$ не имеет полюсов вне $A = I \cup O$.

Утверждение (а) доказано в [1], утверждение (б) — в [16].

Цикл C_S называется разделяющим, если он является гладким, положительно ориентированным циклом кратности 1, отделяющим точки из I от точек из O и не проходящим через точки множеств A и W . Он может иметь кратные компоненты. В определении коциклов (5.5), (5.6) формы из предложения 5.7 интегрируются по замкнутой кривой C . Из указанного предложения вытекает, что результаты интегрирования по C и C' совпадают, если $[C] = [C']$ в $H^0(\Sigma \setminus A, \mathbb{Z})$. Заметим, что слабые особые точки никак не проявляют себя в этом контексте. В этом смысле для каждого разделяющего цикла можно записать

$$[C_S] = \sum_{i=1}^K [C_i] = - \sum_{j=1}^M [C_j^*], \quad (5.15)$$

где знак минус возникает из-за противоположной ориентации. В частности, значения коцикла, полученного интегрированием по C_S , могут быть найдены как через сумму вычетов по точкам из I , так и через сумму вычетов по точкам из O .

ТЕОРЕМА 5.8. Пусть ω совпадает с формой связности ω' , ассоциированной с $\mathcal{L}$ -действием. Тогда:

- (а) при $i = 1, \dots, N$ коциклы γ_{1,ω,C_i} и γ_{2,C_i} , где C_i – окружность вокруг P_i , ограничены сверху и $\mathcal{L}$ -инвариантны;
- (б) при $j = 1, \dots, M$ коциклы γ_{1,ω,C_j^*} и γ_{2,C_j^*} , где C_j^* – окружность вокруг Q_j , ограничены снизу и $\mathcal{L}$ -инвариантны;
- (с) коциклы γ_{1,ω,C_S} и γ_{2,C_S} , где C_S – разделяющий цикл, локальны и $\mathcal{L}$ -инвариантны;
- (д) в случаях (а) и (с) верхняя граница равна нулю.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждения об $\mathcal{L}$ -инвариантности вытекают из предложения 5.4. Условие $\omega = \omega'$ нужно только здесь.

Как отмечалось выше, вычисление коцикла, заданного интегрированием по C_i (или C_j^*), сводится к подсчету вычетов. Пусть $L \in \bar{\mathfrak{g}}_n$ и $L' \in \bar{\mathfrak{g}}_m$. Тогда $\text{ord}_{P_i}(L) \geq n$ и $\text{ord}_{P_i}(L') \geq m$. В силу голоморфности ω в точке P_i

$$\text{ord}_{P_i}(dL') \geq m - 1, \quad \text{ord}_{P_i}(\nabla^{(\omega)} L') \geq m - 1.$$

Поэтому при $n + m > 0$ ни одна из 1-форм, входящих в определение изучаемых коциклов, не имеет полюсов на I , а значит, имеет там нулевые вычеты. Утверждение (а) доказано.

В случае (б) надо рассмотреть порядки базисных элементов из $\bar{\mathfrak{g}}_m$ на множестве O . Согласно правилам (3.33) и (3.34) и с учетом возможных полюсов ω на O мы находим такое число R_2 , что при $n + m \leq R_2$ подынтегральные выражения не будут иметь никаких полюсов. Утверждение (б) доказано.

Согласно (5.15) значения коцикла, заданного интегрированием по C_S , можно найти через сумму вычетов как по I , так и по O . Значит, этот коцикл ограничен и сверху, и снизу, т.е. локален.

Наконец то, что верхняя граница равна нулю, было уже установлено по ходу доказательства.

§ 6. Классификационные результаты

Напомним, что изучается многоточечный случай, когда $A = I \cup O$, $\#I = N$. Через C_i , C_j^* и C_S обозначаются специальные циклы, введенные в п. 5.4. Говоря об *ограниченных* коциклах, мы по умолчанию имеем в виду ограниченность сверху.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. *Коциклы γ_{1,ω,C_i} , $i = 1, \dots, N$ (а также γ_{2,C_i} , $i = 1, \dots, N$, для $\bar{\mathfrak{gl}}(n)$), линейно независимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что они связаны линейным соотношением

$$0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i \gamma_{1,\omega,C_i} + \sum_{i=1}^N \beta_i \gamma_{2,C_i}, \quad \alpha_i, \beta_i \in \mathbb{C}, \quad (6.1)$$

где в случае простой алгебры Ли вторая сумма отсутствует. Напомним, что значения этих коциклов на любой паре $L, L' \in \bar{\mathfrak{g}}$ вычисляются через вычеты:

$$0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i \operatorname{res}_{P_i}(\operatorname{tr}(L \cdot \nabla^{(\omega)} L')) + \sum_{i=1}^N \beta_i \operatorname{res}_{P_i}(\operatorname{tr}(L) \cdot \operatorname{tr}(\nabla^{(\omega)} L')). \quad (6.2)$$

В первой сумме представлена форма Картана–Киллинга, а она невырождена. Поэтому найдутся $X, Y \in \mathfrak{g}$ такие, что $\operatorname{tr}(XY) \neq 0$, но $\operatorname{tr}(X) = \operatorname{tr}(Y) = 0$. При $k = 1, \dots, N$, пользуясь почти градуированной структурой и следуя предложению 3.3, возьмем $L = X_{1,k}$ и $L' = Y_{-1,k}$. Тогда в окрестности точки P_l , $l = 1, \dots, N$, имеем

$$\begin{aligned} L(z_l) &= X z_l \delta_l^k + O(z_l^2), & L'(z_l) &= Y z_l^{-1} \delta_l^k + O(z_l^0), \\ \nabla^{(\omega)} L'(z_l) &= -Y z_l^{-2} \delta_l^k + O(z_l^{-1}), \end{aligned} \quad (6.3)$$

поскольку $\nabla^{(\omega)} L' = dL' + [\omega, L']$. Значит,

$$\operatorname{res}_{P_l}(\operatorname{tr}(L \cdot \nabla^{(\omega)} L')) = -\operatorname{tr}(XY) \delta_l^k. \quad (6.4)$$

Так как $\operatorname{tr}(X) = 0$, то вторая сумма так или иначе равна нулю, и мы заключаем, что $\alpha_k = 0$ для всех $k = 1, \dots, N$. Чтобы разобраться со второй суммой, возьмем в качестве $X = Y$ любую невырожденную скалярную матрицу и положим $L = X_{1,k}$ и $L' = X_{-1,k}$. Получаем, что $\beta_k = 0$ для всех $k = 1, \dots, N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.2. *Пусть $\bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{gl}}(n)$ и $\gamma = \sum_{i=1}^N \beta_i \gamma_{2,C_i}$ – нетривиальная линейная комбинация. Тогда она не является кограницей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним (см. (2.8)), что $\bar{\mathfrak{s}}(n)$ является абелевой подалгеброй в $\bar{\mathfrak{gl}}(n)$. Поэтому сужение на нее любой кограницы тождественно равно нулю. Выбирая элементы $X_{1,k}$ и $X_{-1,k}$ скалярной подалгебры так же, как в предыдущем доказательстве, получаем, что $\beta_k = 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3. *Пусть $\gamma = \sum_{i=1}^N \alpha_i \gamma_{1,\omega,C_i}$ – нетривиальная линейная комбинация. Тогда она не является кограницей.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что γ – кограница, т.е. существует линейная форма $\phi: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathbb{C}$ такая, что для любых $L, L' \in \bar{\mathfrak{g}}$

$$\gamma(L, L') = \sum_{i=1}^N \alpha_i \operatorname{res}_{P_i} \operatorname{tr}(L \cdot \nabla^{(\omega)} L') = \phi([L, L']). \quad (6.5)$$

Мы считаем, что $\gamma \neq 0$. Значит, хотя бы один из коэффициентов α_k ненулевой. Выберем $H \in \mathfrak{h}$ с $\kappa(H, H) \neq 0$, где $\mathfrak{h}$ – подалгебра Картана простой части $\mathfrak{g}$, а κ – ее форма Картана–Киллинга. Пусть $H_{0,k} \in \bar{\mathfrak{g}}$ есть элемент, определенный равенством (3.2). В частности, $H_{0,k} = H + O(z_k)$. Полагая³ $H_{(n,k)} := H_{0,k} \cdot A_{n,k} \in \bar{\mathfrak{g}}$, имеем $H_{(n,k)} = H \cdot A_{n,k} + O(z_k^{n+1})$ в окрестности точки P_k . Напомним, что согласно локальному виду (3.2) и (3.8) наших базисных элементов в окрестностях точек P_l , $l \neq k$, выполнено

$$H_{n,k} = O(z_l^{n+1}), \quad A_{n,k} = O(z_l^{n+1}), \quad H_{(n,k)} = O(z_l^{n+1}). \quad (6.6)$$

В дальнейшем считаем, что $n \neq 0$. Имеем

$$\nabla^{(\omega)} H_{(n,k)} = \nabla^{(\omega)} (H_{0,k} \cdot A_{n,k}) = \nabla^{(\omega)} (H_{0,k}) \cdot A_{n,k} + H_{0,k} dA_{n,k}. \quad (6.7)$$

Выражение $\nabla^{(\omega)} H_{0,k}$ имеет неотрицательный порядок, $A_{n,k}$ – порядок n , $H_{0,k}$ – порядок 0, а $dA_{n,k}$ – порядок $n-1$ в точке P_k . Значит,

$$\nabla^{(\omega)} H_{(n,k)} = H_{0,k} dA_{n,k} + O(z_k^n) dz_k. \quad (6.8)$$

Теперь получаем

$$\begin{aligned} \gamma(H_{(-1,k)}, H_{(1,k)}) &= \sum_{i=1}^N \alpha_i \operatorname{res}_{P_i} \operatorname{tr}(H_{(-1,k)} \cdot \nabla^{(\omega)} H_{(1,k)}) \\ &= \alpha_k \operatorname{res}_{P_k} \operatorname{tr}(H_{(-1,k)} \cdot \nabla^{(\omega)} H_{(1,k)}). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Последнее равенство вытекает из отсутствия (согласно (6.6)) полюсов в точках P_l с $l \neq k$. Следовательно,

$$(\alpha_k)^{-1} \gamma(H_{(-1,k)}, H_{(1,k)}) = \operatorname{res}_{P_k} \operatorname{tr}(H_{0,k} A_{-1,k} H_{0,k} dA_{1,k}) = \operatorname{res}_{P_k} \operatorname{tr} \left(H_{0,k}^2 \frac{dz_k}{z_k} \right). \quad (6.10)$$

Так как $H_{0,k}^2 = H^2 + O(z_k)$, то получаем

$$(\alpha_k)^{-1} \gamma(H_{(-1,k)}, H_{(1,k)}) = \operatorname{res}_{P_k} \left(\operatorname{tr}(H^2) \frac{dz_k}{z_k} \right) = \operatorname{tr}(H^2) = \beta \cdot \kappa(H, H) \neq 0, \quad (6.11)$$

где β – ненулевая константа, связывающая форму следа и форму Картана–Киллинга. Но

$$[H_{(-1,k)}, H_{(1,k)}] = [H_{0,k} A_{-1,k}, H_{0,k} A_{1,k}] = [H_{0,k}, H_{0,k}] A_{-1,k} A_{1,k} = 0. \quad (6.12)$$

Соотношения (6.11) и (6.12) противоречат (6.5).

³Заметим, что $H_{(n,k)}$ и $H_{n,k}$, вообще говоря, различны, хотя и совпадают с точностью до членов высшего порядка.

Теперь мы можем сформулировать основную теорему.

ТЕОРЕМА 6.4. (а) Если $\mathfrak{g}$ проста (т.е. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n), \mathfrak{so}(n), \mathfrak{sp}(2n)$), то пространство ограниченных когомологических классов N -мерно. Для любой фиксированной формы связности ω классы коциклов γ_{1,ω,C_i} , $i = 1, \dots, N$, образуют базис этого пространства. Всякий $\mathcal{L}$ -инвариантный (относительно ω) ограниченный коцикл является линейной комбинацией коциклов γ_{1,ω,C_i} .

(б) Для $\bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{gl}}(n)$ пространство локальных когомологических классов, сужение которых на скалярную подалгебру $\mathcal{L}$ -инвариантно, имеет размерность $2N$. Для любой фиксированной формы связности ω классы коциклов γ_{1,ω,C_i} и γ_{2,C_i} , $i = 1, \dots, N$, образуют базис этого пространства. Всякий $\mathcal{L}$ -инвариантный локальный коцикл является линейной комбинацией коциклов γ_{1,ω,C_i} и γ_{2,C_i} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограничимся здесь только наброском доказательства, отложив технические детали до § 7 и § 8.

Из предложений 7.8 и 7.10 вытекает, что все $\mathcal{L}$ -инвариантные ограниченные коциклы являются линейными комбинациями указанного вида. Это доказывает теорему для пространства когомологий $H_{b,\mathcal{L}}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathbb{C})$. Для скалярной подалгебры также все доказано, так как $\mathcal{L}$ -инвариантность включена в условие теоремы. Для полупростых алгебр надо еще доказать существование $\mathcal{L}$ -инвариантного представителя в каждом локальном классе когомологий. Но по теореме 8.1 пространство $H_b(\bar{\mathfrak{g}}, \mathbb{C})$ не более чем N -мерно. Поскольку по предложению 6.3 никакая нетривиальная линейная комбинация коциклов γ_{1,ω,C_i} не является кограницей, это пространство в точности N -мерно и классы $[\gamma_{1,\omega,C_i}]$, $i = 1, \dots, N$, образуют его базис, что и требуется.

СЛЕДСТВИЕ 6.5. Пусть $\mathfrak{g}$ – простая классическая алгебра Ли, а $\bar{\mathfrak{g}}$ – соответствующая алгебра операторов Лакса. Фиксируем форму связности ω . Тогда в каждом классе $[\gamma] \in H_b(\bar{\mathfrak{g}}, \mathbb{C})$ существует единственный представитель γ' , являющийся ограниченным и $\mathcal{L}$ -инвариантным (относительно ω). При этом $\gamma' = \sum_{i=1}^N a_i \gamma_{1,\omega,C_i}$ для некоторых $a_i \in \mathbb{C}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.6. (а) Пусть γ – ограниченный $\mathcal{L}$ -инвариантный коцикл, являющийся кограницей. Тогда $\gamma = 0$.

(б) В случае простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ коцикл γ_{1,ω',C_i} является $\mathcal{L}$ -инвариантным относительно ω тогда и только тогда, когда $\omega = \omega'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) По теореме 6.4 имеем $\gamma = \sum_{i=1}^N (\alpha_i \gamma_{1,\omega,C_i} + \beta_i \gamma_{2,C_i})$, где все β_i равны нулю в случае простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Слагаемые этой суммы образуют базис в когомологиях. Поэтому γ может быть кограницей, только если все коэффициенты равны нулю.

(б) Поскольку коциклы γ_{1,ω,C_i} и γ_{1,ω',C_i} локальны и $\mathcal{L}$ -инвариантны относительно ω , их разность $\gamma_{1,\omega,C_i} - \gamma_{1,\omega',C_i}$ также локальна и $\mathcal{L}$ -инвариантна. По предложению 5.2 она является кограницей, а тогда в силу утверждения (а) $\gamma_{1,\omega,C_i} - \gamma_{1,\omega',C_i} = 0$. Явное выражение левой части этого равенства дается формулой (5.7). Допустим, что $\omega \neq \omega'$, и обозначим через m порядок элемента

$$\theta = \omega - \omega' = (\theta_m z_i^m + O(z_i^m)) dz_i \quad (6.13)$$

в точке P_i . В силу простоты $\mathfrak{g}$ форма следа $\text{tr}(A \cdot B)$ невырождена, и мы находим такой элемент

$$\widehat{\theta} = \widehat{\theta}_{-m-1} z_i^{-m-1} + O(z_i^{-m}), \quad (6.14)$$

что $\beta = \text{tr}(\theta_m \cdot \widehat{\theta}_{-m-1}) \neq 0$. По лемме 3.18 получаем, что $\widehat{\theta} = [L, L'] + L''$, где $\text{ord}_{P_i}(L'') \geq -m$. Поэтому

$$\begin{aligned} 0 \neq \beta &= \text{tr}(\theta_m \cdot \widehat{\theta}_{-m-1}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} \text{tr}((\omega - \omega') \cdot ([L, L'] + L'')) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} \text{tr}((\omega - \omega') \cdot [L, L']) = \gamma_{1,\omega,C_i}(L, L') - \gamma_{1,\omega',C_i}(L, L') = 0, \end{aligned} \quad (6.15)$$

что дает противоречие.

От результатов об ограниченных коциклах перейдем к классификационной теореме для локальных коциклов. Это еще один из основных результатов статьи. Из нее, например, вытекает, что алгебры операторов Лакса, ассоциированные с простыми алгебрами Ли, допускают только одно (с точностью до масштабирования и эквивалентности) нетривиальное почти градуированное центральное расширение.

Напомним формулу для разделяющего цикла:

$$[C_S] = \sum_{i=1}^N [C_i] = - \sum_{j=1}^M [C_j^*]. \quad (6.16)$$

Аналогичное соотношение верно и для коцикла, заданного интегрированием по C_S .

ТЕОРЕМА 6.7. (а) Если $\mathfrak{g}$ проста (т.е. $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n), \mathfrak{so}(n), \mathfrak{sp}(2n)$), то пространство локальных когомологических классов одномерно. Для любой фиксированной формы связности ω это пространство порождено классом коцикла γ_{1,ω,C_S} . Всякий $\mathcal{L}$ -инвариантный (относительно связности ω) локальный коцикл является скалярным кратным коцикла γ_{1,ω,C_S} .

(б) Для $\bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{gl}}(n)$ пространство локальных когомологических классов, сужение которых на скалярную подалгебру $\mathcal{L}$ -инвариантно, является двумерным. Для любой фиксированной формы связности ω это пространство порождается классами коциклов γ_{1,ω,C_S} и γ_{2,C_S} . Всякий $\mathcal{L}$ -инвариантный локальный коцикл является линейной комбинацией коциклов γ_{1,ω,C_S} и γ_{2,C_S} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть коцикл γ локален, т.е. ограничен сверху и снизу. Положим для простоты в этом доказательстве

$$\gamma_{1,i} := \gamma_{1,\omega,C_i}, \quad \gamma_{2,i} := \gamma_{2,C_i}, \quad \gamma_{1,j}^* := \gamma_{1,\omega,C_j^*}, \quad \gamma_{2,j}^* := \gamma_{2,C_j^*}. \quad (6.17)$$

Меняя местами I и O , получаем обратную почти градуировку. Всякий коцикл, ограниченный снизу для исходной градуировки, будет ограничен сверху для обратной. Применяя теорему 6.4 в обоих направлениях, получаем два представления одного и того же коцикла:

$$\gamma = \sum_{i=1}^N a_i \gamma_{1,i} + \sum_{i=1}^N b_i \gamma_{2,i} = - \sum_{j=1}^M a_j^* \gamma_{1,j}^* - \sum_{j=1}^M b_j^* \gamma_{2,j}^*, \quad \text{где } a_i, a_j^*, b_i, b_j^* \in \mathbb{C}. \quad (6.18)$$

Если $N = 1$ или $M = 1$, то согласно (6.16) наш коцикл получается интегрированием по разделяющему циклу. В этом случае теорема доказана.

Будем считать, что $N, M > 1$. По предложению 6.1 коциклы первого и второго типов линейно независимы, так что их можно рассматривать по отдельности. Сначала рассмотрим первый тип. Из (6.16) получаем, что

$$\sum_{i=1}^N \gamma_{1,i} = - \sum_{j=1}^M \gamma_{1,j}^*. \quad (6.19)$$

Значит,

$$\gamma_{1,1}^* = - \sum_{i=1}^N \gamma_{1,i} - \sum_{j=2}^M \gamma_{1,j}^*. \quad (6.20)$$

Из (6.18) получаем, что

$$0 = \sum_{i=1}^N a_i \gamma_{1,i} + \sum_{j=1}^M a_j^* \gamma_{1,j}^*. \quad (6.21)$$

Подставляя (6.20) в это соотношение, имеем

$$0 = (a_1 - a_1^*) \sum_{i=1}^N \gamma_{1,i} + \sum_{i=2}^N (a_i - a_1) \gamma_{1,i} + \sum_{j=2}^M (a_j^* - a_1^*) \gamma_{1,j}^*. \quad (6.22)$$

Фиксируем k и возьмем такие $X, Y \in \bar{\mathfrak{g}}$, что $\text{tr}(XY) \neq 0$. По теореме Римана–Роха найдутся элементы $L', L \in \bar{\mathfrak{g}}$ с разложением вблизи P_k вида

$$L(z_k) = Xz_k + O(z_k^2), \quad L'(z_k) = Yz_k^{-1} + O(z_k^0), \quad (6.23)$$

голоморфные всюду на O и во всех точках P_l , $l \neq 1, k$. Существование таких элементов обеспечивается разрешением им иметь полюсы достаточно высокого порядка в точке P_1 . Слабые особенности при этом не затрагиваются. По построению

$$\begin{aligned} \gamma_{1,k}(L, L') &\neq 0, & \gamma_{1,l}(L, L') &= 0, & l &= 2, \dots, N, & l &\neq k, \\ \gamma_{1,j}^*(L, L') &= 0, & j &= 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^N \gamma_{1,i}(L, L') = - \sum_{j=1}^M \gamma_{1,j}^*(L, L') = 0. \quad (6.25)$$

При подстановке (L, L') в (6.22) все слагаемые, кроме одного, в (6.22) обращаются в нуль и получается равенство

$$0 = (a_k - a_1) \gamma_{1,k}(L, L'). \quad (6.26)$$

Отсюда вытекает, что $a_k = a_1$ для всех k . (Аналогично получаем, что $a_j^* = a_1^*$ для всех j .) В частности, наш исходный коцикл (соответственно его γ_1 -часть) является скалярным кратным коцикла, полученного интегрированием по разделяющему циклу, что и требовалось. Доказательство для γ_2 -части точно такое же, только в качестве $X = Y$ надо выбирать ненулевую скалярную матрицу.

Как и в ограниченном случае, для локального случая получаем

СЛЕДСТВИЕ 6.8. Пусть $\mathfrak{g}$ – простая классическая алгебра Ли, а $\bar{\mathfrak{g}}$ – соответствующая алгебра операторов Лакса. Фиксируем форму связности ω . Тогда в каждом классе $[\gamma] \in H_{\text{loc}}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathbb{C})$ существует единственный представитель γ' , являющийся локальным и $\mathcal{L}$ -инвариантным (относительно ω). При этом $\gamma' = a\gamma_{1,\omega}$ для некоторого $a \in \mathbb{C}$.

§ 7. Единственность $\mathcal{L}$ -инвариантных коциклов

7.1. Шаг индукции. В § 3 на алгебре операторов Лакса $\bar{\mathfrak{g}}$ была введена почти градуированная структура, включающая в себя разложение $\bar{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\mathfrak{g}}_n$ на подпространства однородных элементов степени n , а также базис $\{L_{n,p}^u \mid u = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}, p = 1, \dots, N\}$ подпространства $\bar{\mathfrak{g}}_n$ (см. (3.3)).

Пусть $\mathcal{L}$ -инвариантный коцикл γ на алгебре $\bar{\mathfrak{g}}$ ограничен сверху, т.е. существует число R (не зависящее от n и m) такое, что если $\gamma(\bar{\mathfrak{g}}_n, \bar{\mathfrak{g}}_m) \neq 0$, то $n + m \leq R$. Напомним также, что связность ω , используемая в определении $\mathcal{L}$ -действия на $\bar{\mathfrak{g}}$, выбирается голоморфной во всех точках множества I .

Уровнем пары $(L_{n,k}^u, L_{m,t}^v)$ однородных элементов будем называть число $n + m$. Применим технику, развитую в [25]: рассмотрим значения $\gamma(L_{n,k}^u, L_{m,t}^v)$ изучаемого коцикла на парах уровня $l = n + m$ и проведем индукцию по уровню. В силу ограниченности сверху коцикл равен нулю на всех парах достаточно высокого уровня. Мы покажем, что наш коцикл однозначно определяется своими значениями на парах уровня 0 и, наконец, является линейной комбинацией N (или $2N$) базисных коциклов, указанных в теореме 6.4.

Говоря о значениях коцикла γ на парах элементов уровня l , мы будем обозначать символом $\equiv$ равенство с точностью до значений γ на парах высших уровней в следующем сильном смысле: запись

$$\sum \alpha_{(u,v)}^{(n,p,t)} \gamma(L_{n,p}^u, L_{l-n,t}^v) \equiv 0, \quad \alpha_{(u,v)}^{(n,p,t)} \in \mathbb{C}, \quad (7.1)$$

означает сравнение по модулю линейной комбинации значений γ на парах базисных элементов уровня $l' > l$, причем коэффициенты этой линейной комбинации, а также числа $\alpha_{(u,v)}^{(n,p,t)}$ зависят только от структуры алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$ и не зависят от γ .

Тот же символ $\equiv$ в уравнениях на $\bar{\mathfrak{g}}$ будет означать равенство по модулю членов высшей степени по сравнению с рассматриваемыми.

В силу $\mathcal{L}$ -инвариантности имеем

$$\gamma(\nabla_{e_{k,r}}^{(\omega)} L_{m,p}^u, L_{n,s}^v) + \gamma(L_{m,p}^u, \nabla_{e_{k,r}}^{(\omega)} L_{n,s}^v) = 0. \quad (7.2)$$

Пользуясь почти градуированной структурой (4.13), получаем сравнение (с точностью до порядка $> k + m + n$)

$$m\gamma(L_{k+m,p}^u, L_{n,s}^v)\delta_r^p + n\gamma(L_{m,p}^v, L_{n+k,s}^v)\delta_r^s \equiv 0, \quad (7.3)$$

верное для всех $n, m, k \in \mathbb{Z}$.

Если в (7.3) все три индекса r, p, s различны, то левая часть обращается в нуль. При $r = p \neq s$ получаем

$$m\gamma(L_{k+m,p}^u, L_{n,s}^v) \equiv 0 \quad (7.4)$$

для всех m . Следовательно,

$$\gamma(L_{l,p}^u, L_{n,s}^v) \equiv 0 \quad \text{при } p \neq s. \quad (7.5)$$

В оставшемся случае $r = p = s$ получается, что

$$m\gamma(L_{k+m,s}^u, L_{n,s}^v) + n\gamma(L_{m,s}^v, L_{n+k,s}^v) \equiv 0. \quad (7.6)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.1. *Если $m + n \neq 0$, то на уровне $m + n$ имеем*

$$\gamma(\bar{\mathfrak{g}}_m, \bar{\mathfrak{g}}_n) \equiv 0. \quad (7.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (7.5) видно, что только элементы с одинаковыми вторыми индексами могут внести какой-то вклад на уровне $m + n$. Полагая $k = 0$ в (7.6), получаем

$$(m + n)\gamma(L_{m,s}^u, L_{n,s}^v) \equiv 0 \quad \forall u, v. \quad (7.8)$$

Отсюда при $m + n \neq 0$ вытекает требуемое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.2. *Имеем*

$$\gamma(\bar{\mathfrak{g}}_m, \bar{\mathfrak{g}}_0) \equiv 0 \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \quad (7.9)$$

Вычисляя (7.6) для значений $m = 1$ и $n = 0$, получаем требуемое.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.3. (а) *Имеем $\gamma(\bar{\mathfrak{g}}_n, \bar{\mathfrak{g}}_m) = 0$ при $n + m > 0$. Иными словами, коцикл ограничен сверху нулем.*

(б) *Если $\gamma(\bar{\mathfrak{g}}_n, \bar{\mathfrak{g}}_{-n}) = 0$, то коцикл γ тождественно равен нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (Оно дословно то же, что и в [16], но поскольку это — одно из центральных рассуждений в статье, мы напомним его для удобства читателей.)

Если $\gamma = 0$, то доказывать нечего. Пусть $\gamma \neq 0$. В силу ограниченности γ сверху найдется минимальная верхняя граница l такая, что все значения коцикла на уровнях выше l равны нулю. Если $l > 0$, то по предложению 7.1 значения на уровне l выражаются через значения на уровнях выше l . Но там коцикл равен нулю. Значит, он равен нулю и на уровне l . Полученное противоречие доказывает часть (а).

По индукции, опять пользуясь предложением 7.1, получаем, что если коцикл равен нулю на уровне 0, то он равен нулю всюду. Этим доказана часть (б).

Объединяя предложения 7.2 и 7.3, получаем

СЛЕДСТВИЕ 7.4. *Имеем*

$$\gamma(\bar{\mathfrak{g}}_m, \bar{\mathfrak{g}}_0) = 0 \quad \forall m \geq 0. \quad (7.10)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.5. *Имеем*

$$\gamma(L_{n,r}^u, L_{-n,s}^v) = n \cdot \gamma(L_{1,r}^u, L_{-1,r}^v) \delta_r^s, \quad (7.11)$$

$$\gamma(L_{1,r}^u, L_{-1,s}^v) = \gamma(L_{1,s}^v, L_{-1,r}^u). \quad (7.12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $s \neq r$. Тогда все выражения – положительного уровня и γ обращается в нуль по предложению 7.3, что и дает требуемое утверждение. При $r = s$ выберем в (7.6) значения $n = -p$, $m = 1$ и $k = p - 1$. Это дает формулу (7.11) с точностью до членов старшего уровня. Но поскольку уровень равен нулю, эти члены старшего уровня обращаются в нуль. Полагая $n = -1$ в (7.11), получаем (7.12).

Независимо от структуры алгебры Ли $\mathfrak{g}$ мы установили следующие результаты для всех $\mathcal{L}$ -инвариантных ограниченных коциклов γ :

- 1) коцикл ограничен сверху нулем;
- 2) коцикл однозначно определяется своими значениями на уровне 0;
- 3) на уровне 0 коцикл однозначно задается значениями $\gamma(L_{1,s}^u, L_{-1,s}^v)$, где $u, v = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}$ и $s = 1, \dots, N$;
- 4) остальные значения коцикла на уровне 0 таковы: $\gamma(L_{n,s}^u, L_{-n,r}^v) = 0$ при $s \neq r$, $\gamma(L_{0,s}^u, L_{0,s}^v) = 0$, а $\gamma(L_{n,s}^u, L_{-n,s}^v)$ дается формулой (7.11).

Для $X \in \mathfrak{g}$ будем, как обычно, обозначать через $X_{n,s}$, $s = 1, \dots, N$, элемент из $\bar{\mathfrak{g}}$ со старшим членом Xz_s^n в точке P_s и с более высоким порядком в остальных точках множества I . Для $s = 1, \dots, N$ определим отображения $\psi_{\gamma,s}: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ формулой

$$\psi_{\gamma,s}(X, Y) := \gamma(X_{1,s}, Y_{-1,s}). \quad (7.13)$$

Ясно, что $\psi_{\gamma,s}$ – билинейная форма на $\mathfrak{g}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.6. (а) Форма $\psi_{\gamma,s}$ симметрична, т.е.

$$\psi_{\gamma,s}(X, Y) = \psi_{\gamma,s}(Y, X).$$

(б) Форма $\psi_{\gamma,s}$ инвариантна, т.е.

$$\psi_{\gamma,s}([X, Y], Z) = \psi_{\gamma,s}(X, [Y, Z]). \quad (7.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Во-первых, из (7.12) имеем

$$\psi_{\gamma,s}(X, Y) = \gamma(X_{1,s}, Y_{-1,s}) = \gamma(Y_{1,s}, X_{-1,s}) = \psi_{\gamma}(Y, X).$$

Этим доказана симметричность. Далее, пользуясь сравнением $[X_{1,s}, Y_{0,s}] \equiv [X, Y]_{1,s}$, тем, что коцикл равен нулю на положительных уровнях, а также условием коцикла, получаем

$$\begin{aligned} \psi_{\gamma,s}([X, Y], Z) &= \gamma([X, Y]_{1,s}, Z_{-1,s}) = \gamma([X_{1,s}, Y_{0,s}], Z_{-1,s}) \\ &= -\gamma([Y_{0,s}, Z_{-1,s}], X_{1,s}) - \gamma([Z_{-1,s}, X_{1,s}], Y_{0,s}). \end{aligned}$$

Последнее слагаемое равно нулю в силу следствия 7.4. Поэтому

$$\psi_{\gamma,s}([X, Y], Z) = \gamma(X_{1,s}, [Y_{0,s}, Z_{-1,s}]) = \gamma(X_{1,s}, [Y, Z]_{-1,s}) = \psi_{\gamma,s}(X, [Y, Z]).$$

Так как коцикл γ определяется значениями $\gamma(L_{1,s}^u, L_{-1,s}^v)$, $s = 1, \dots, N$, а они задаются билинейными отображениями $\psi_{\gamma,s}$, нами доказана

ТЕОРЕМА 7.7. Пусть γ – ограниченный сверху $\mathcal{L}$ -инвариантный коцикл на $\bar{\mathfrak{g}}$. Тогда γ ограничен сверху нулем и полностью определяется ассоциированными с ним симметрическими инвариантными билинейными формами $\psi_{\gamma,s}$, $s = 1, \dots, N$, на алгебре Ли $\mathfrak{g}$, заданными равенством (7.13).

7.2. Случай простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$. По теореме 7.7 $\mathcal{L}$ -инвариантный коцикл γ полностью задается набором $(\psi_{\gamma,1}, \psi_{\gamma,2}, \dots, \psi_{\gamma,N})$ из N симметрических инвариантных билинейных форм $\psi_{\gamma,s}$. В случае простой конечномерной алгебры Ли всякая такая форма является некоторым кратным формы Картана–Киллинга κ . Поэтому пространство ограниченных коциклов не более чем N -мерно. Наши геометрические коциклы γ_{1,ω,C_i} , $i = 1, \dots, N$ (см. (5.14)), $\mathcal{L}$ -инвариантны и ограничены. Они также линейно независимы (см. предложение 6.1). Поэтому всякий ограниченный $\mathcal{L}$ -инвариантный коцикл является линейной комбинацией коциклов γ_{1,ω,C_i} . Более того, последние образуют базис в пространстве $\mathcal{L}$ -инвариантных ограниченных коциклов. По предложению 6.3 они остаются линейно независимыми и после перехода к когомологиям. Получаем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.8. *Если $\mathfrak{g}$ проста, то*

$$\dim H_{b,\mathcal{L}}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathbb{C}) = N, \quad (7.15)$$

причем это пространство когомологий порождено классами коциклов γ_{1,ω,C_i} , $i = 1, \dots, N$.

7.3. Случай $\bar{\mathfrak{gl}}(n)$. Разложение в прямую сумму $\bar{\mathfrak{gl}}(n) = \bar{\mathfrak{s}}(n) \oplus \bar{\mathfrak{sl}}(n)$ выполнено как равенство алгебр Ли. Для всякого коцикла γ на $\bar{\mathfrak{gl}}(n)$ обозначим через γ' и γ'' его сужения на $\bar{\mathfrak{s}}(n)$ и $\bar{\mathfrak{sl}}(n)$ соответственно. Как в [16], мы получаем из леммы 3.18 следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.9. *Имеем*

$$\gamma(x, y) = 0 \quad \forall x \in \bar{\mathfrak{s}}(n), \quad y \in \bar{\mathfrak{sl}}(n). \quad (7.16)$$

Поэтому можно записать $\gamma = \gamma' \oplus \gamma''$. Если коцикл γ ограничен/локален и/или $\mathcal{L}$ -инвариантен, то таковы же γ' и γ'' .

Сначала рассмотрим алгебру $\bar{\mathfrak{s}}(n)$. Она изоморфна алгебре $\mathcal{A}$ посредством отображения

$$L \mapsto \frac{1}{n} \operatorname{tr}(L). \quad (7.17)$$

Согласно [25; теорема 5.7] ограниченные сверху $\mathcal{L}$ -инвариантные коциклы на $\mathcal{A}$ образуют N -мерное пространство с базисом

$$\gamma_i(f, g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} f dg = \operatorname{res}_{P_i}(f dg), \quad i = 1, \dots, N. \quad (7.18)$$

Поскольку $\mathcal{A}$ абелева, на ней нет нетривиальных кограниц. Получаем, что

$$\gamma'(L, M) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \operatorname{res}_{P_i}(\operatorname{tr}(L) \cdot \operatorname{tr}(dM)) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \gamma_{2,C_i}(L, M) \quad (7.19)$$

по определению (5.6).

Для коцикла γ'' на алгебре $\bar{\mathfrak{sl}}(n)$ из предложения 7.8 получаем, что $\gamma'' = \sum_{i=1}^N \beta_i \gamma_{1,\omega,C_i}$. В итоге доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.10. *Имеем*

$$\dim H_{b,\mathcal{L}}(\bar{\mathfrak{gl}}(n), \mathbb{C}) = 2N. \quad (7.20)$$

Базис этого пространства задается классами коциклов γ_{1,ω,C_i} и γ_{2,C_i} , $i = 1, \dots, N$.

В настоящем параграфе доказаны те утверждения теоремы 6.4, которые касаются $\mathcal{L}$ -инвариантных коциклов. Фактически доказана вся теорема при дополнительном предположении, что наши классы когомологий $\mathcal{L}$ -инвариантны. Для скалярной части это максимум наших ожиданий, так как без условия $\mathcal{L}$ -инвариантности на скалярной алгебре будет намного больше нетривиальных когомологических классов (подробнее см. [25]). В следующем параграфе мы покажем, как избавиться от этого условия для простых алгебр Ли.

§ 8. Общий случай простой алгебры Ли

В этом параграфе алгебра операторов Лакса $\bar{\mathfrak{g}}$ всегда считается отвечающей простой классической алгебре Ли. Как сказано в § 7, теорема 6.4 уже доказана при дополнительном условии $\mathcal{L}$ -инвариантности. Можно было бы закончить доказательство для общего случая, показав, что всякий ограниченный коцикл когомологичен некоторому ограниченному $\mathcal{L}$ -инвариантному коциклу. Так мы и сделаем, но доказательство будет непрямым. Сначала мы совсем другим методом установим, что пространство ограниченных когомологических классов (на алгебре операторов Лакса) не более чем N -мерно, даже если не предполагать $\mathcal{L}$ -инвариантность. Вместе с результатом из § 7 о том, что пространство $\mathcal{L}$ -инвариантных когомологических классов N -мерно, это означает, что в случае простой алгебры Ли каждый ограниченный когомологический класс автоматически $\mathcal{L}$ -инвариантен. Более того, в нем согласно § 7 имеется единственный $\mathcal{L}$ -инвариантный представитель, являющийся линейной комбинацией коциклов γ_{1,ω,C_i} , $i = 1, \dots, N$.

ТЕОРЕМА 8.1. *Пусть $\mathfrak{g}$ – простая классическая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, а $\bar{\mathfrak{g}}$ – соответствующая почти градуированная алгебра операторов Лакса. Тогда каждый ограниченный коцикл на $\bar{\mathfrak{g}}$ когомологичен некоторому выделенному коциклу, ограниченному сверху нулем. Пространство выделенных коциклов не более чем N -мерно.*

ЗАМЕЧАНИЕ 8.2. Фактически будет доказано, что каждый ограниченный сверху коцикл когомологичен некоторому коциклу, определяемому своими значениями на N специальных парах элементов $\bar{\mathfrak{g}}$ (а именно значениями $\gamma(H_{1,s}^\alpha, H_{-1,s}^\alpha)$ для фиксированного простого корня α ; обозначения см. ниже). Кроме структуры $\mathfrak{g}$ используется только почти градуировка на $\bar{\mathfrak{g}}$, старшие члены которой даны в (8.4).

Наше изложение весьма близко к [16], и мы не повторяем доказательства, структура которых та же, что и там.

Сначала напомним нужные факты о базисе Шевалле алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Выберем корневое разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^\alpha$, где Δ , как обычно, обозначает множество всех корней $\alpha \in \mathfrak{h}^*$. Пусть $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p\}$ – множество простых

корней ($p = \dim \mathfrak{h}$). Относительно этого базиса система корней распадается на множества положительных и отрицательных корней Δ_+ и Δ_- соответственно. Если корень α положительный, то $-\alpha$ отрицательный и наоборот. Для $\alpha \in \Delta$ имеем $\dim \mathfrak{g}^\alpha = 1$. Можно выбрать элементы $E^\alpha \in \mathfrak{g}^\alpha$ и $H^\alpha \in \mathfrak{h}$, $\alpha \in \Delta$, так, что для каждого положительного корня α выполнено

$$[E^\alpha, E^{-\alpha}] = H^\alpha, \quad [H^\alpha, E^\alpha] = 2E^\alpha, \quad [H^\alpha, E^{-\alpha}] = -2E^{-\alpha}. \quad (8.1)$$

Элементы, ассоциированные с простыми корнями, будем также обозначать через $H^i := H^{\alpha_i}$, $i = 1, \dots, p$. Базис Шевалле алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (как векторного пространства) задается системой векторов $\{E^\alpha, \alpha \in \Delta; H^i, 1 \leq i \leq p\}$.

Обозначим через $(\cdot, \cdot)$ скалярное произведение на $\mathfrak{h}^*$, индуцированное формой Картана–Киллинга на $\mathfrak{g}$. Имеем

$$\begin{aligned} [H^\alpha, H^\beta] &= 0, & [H^\alpha, E^{\pm\beta}] &= \pm 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)} E^{\pm\alpha}, & [H, E^\alpha] &= \alpha(H) E^\alpha, \quad H \in \mathfrak{h}, \\ [E^\alpha, E^\beta] &= \begin{cases} H^\alpha, & \alpha \in \Delta_+, \beta = -\alpha, \\ -H^\alpha, & \alpha \in \Delta_-, \beta = -\alpha, \\ \pm(r+1)E^{\alpha+\beta}, & \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.2)$$

Здесь r – наибольшее неотрицательное целое число, для которого $\alpha - r\beta$ все еще является корнем.

Как и выше, через $E_{n,s}^\alpha$ и $H_{n,s}^\alpha$ обозначаем те единственные элементы из $\bar{\mathfrak{g}}_n$ (т.е. имеющие степень n), разложения которых в точке P_s начинаются с $E^\alpha z_s^n$ и $H^\alpha z_s^n$ соответственно, а разложения в точках $P_i \in I$, $i \neq s$, начинаются с членов более высокого порядка.

Следующий набор элементов является базисом алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}}$:

$$\{E_{n,s}^\alpha, \alpha \in \Delta; H_{n,s}^i, 1 \leq i \leq p \mid n \in \mathbb{Z}, s = 1, \dots, N\}. \quad (8.3)$$

Структурные уравнения с точностью до членов более высокого порядка имеют вид

$$\begin{aligned} [H_{n,s}^\alpha, H_{m,r}^\beta] &\equiv 0, & [H_{n,s}^\alpha, E_{m,r}^{\pm\beta}] &\equiv \pm 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\beta, \beta)} E_{n+m,r}^{\pm\beta} \delta_r^s, \\ [H_{n,s}, E_{m,r}^\alpha] &\equiv \alpha(H) E_{n+m,r}^\alpha \delta_r^s, & H &\in \mathfrak{h}, \\ [E_{n,s}^\alpha, E_{m,r}^\beta] &\equiv \begin{cases} H_{n+m,s}^\alpha \delta_r^s, & \alpha \in \Delta_+, \beta = -\alpha, \\ -H_{n+m,s}^\alpha \delta_r^s, & \alpha \in \Delta_-, \beta = -\alpha, \\ \pm(r+1)E_{n+m,s}^{\alpha+\beta} \delta_r^s, & \alpha, \beta, \alpha + \beta \in \Delta, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned} \quad (8.4)$$

Напомним, что символ $\equiv$ обозначает равенство с точностью до членов степени выше, чем сумма степеней рассматриваемых элементов. В данном случае невыписываемые элементы имеют степень $> n + m$. Напомним также, что по определению почти градуировки все возникающие элементы имеют степень $\leq n + m + S$ для некоторого числа S (не зависящего от n и m).

Пусть γ' – ограниченный сверху коцикл на $\bar{\mathfrak{g}}$. Элементы алгебры $\mathfrak{g}$ удовлетворяют соотношениям

$$E^{\pm\alpha} = \pm \frac{1}{2} [H^\alpha, E^{\pm\alpha}], \quad H^i = [E^{\alpha_i}, E^{-\alpha_i}], \quad i = 1, \dots, p. \quad (8.5)$$

Поэтому на $\bar{\mathfrak{g}}$ имеем

$$\begin{aligned} E_{n,s}^{\pm\alpha} &= \pm \frac{1}{2} [H_{0,s}^\alpha, E_{n,s}^{\pm\alpha}] + Y(n, s, \alpha), \\ H_{n,s}^i &= [E_{0,s}^{\alpha_i}, E_{n,s}^{-\alpha_i}] + Z(n, s, i), \quad i = 1, \dots, p, \end{aligned} \quad (8.6)$$

где $Y(n, s, \alpha)$ и $Z(n, s, i)$ являются суммами элементов, степени которых лежат между $n+1$ и $n+S$. Фиксируем такое число $M \in \mathbb{Z}$, что коцикл γ' обращается в нуль на всех уровнях $\geq M$, и определим линейное отображение $\Phi: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathbb{C}$ с помощью убывающей индукции по степеням базисных элементов (8.3). Сначала положим

$$\Phi(E_{n,s}^\alpha) := \Phi(H_{n,s}^i) := 0, \quad \alpha \in \Delta, \quad i = 1, \dots, p, \quad s = 1, \dots, N, \quad n \geq M, \quad (8.7)$$

а затем по индукции определим (для $\alpha \in \Delta_+$, $s = 1, \dots, N$)

$$\begin{aligned} \Phi(E_{n,s}^{\pm\alpha}) &:= \pm \frac{1}{2} \gamma'(H_{0,s}^\alpha, E_{n,s}^{\pm\alpha}) + \Phi(Y(n, s, \pm\alpha)), \\ \Phi(H_{n,s}^i) &:= \gamma'(E_{0,s}^{\alpha_i}, E_{n,s}^{-\alpha_i}) + \Phi(Z(n, s, i)). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Коцикл $\gamma = \gamma' - \delta\Phi$ когомологичен исходному коциклу γ' . Поскольку γ' и (по определению) Φ ограничены сверху, коцикл γ также ограничен сверху.

По построению Φ имеем

$$\Phi([H_{0,s}^\alpha, E_{n,s}^{\pm\alpha}]) = \gamma'(H_{0,s}^\alpha, E_{n,s}^{\pm\alpha}), \quad \Phi([E_{0,s}^{\alpha_i}, E_{n,s}^{-\alpha_i}]) = \gamma'(E_{0,s}^{\alpha_i}, E_{n,s}^{-\alpha_i}).$$

Отсюда вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3. *Имеем*

$$\begin{aligned} \gamma(H_{0,s}^\alpha, E_{n,s}^{\pm\alpha}) &= 0, \quad \gamma(E_{0,s}^{\alpha_i}, E_{n,s}^{-\alpha_i}) = 0, \\ \alpha \in \Delta_+, \quad i &= 1, \dots, p, \quad s = 1, \dots, N, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.4. Коцикл γ называется *нормированным*, если для него выполнены равенства (8.9).

Приведенная выше конструкция показывает, что всякий ограниченный сверху коцикл когомологичен некоторому нормированному (и также ограниченно-му сверху) коциклу. В дальнейшем будем считать, что исходный коцикл уже нормирован.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.5. *Пусть α_1 – фиксированный простой корень, α и β – произвольные корни, γ – нормированный коцикл. Тогда для всех $s, r = 1, \dots, N$ и $n, t \in \mathbb{Z}$ имеем*

$$\begin{aligned} \gamma(E_{m,s}^\alpha, H_{n,r}) &\equiv 0, \quad H \in \mathfrak{h}, \quad \alpha \in \Delta, \\ \gamma(E_{m,s}^\alpha, E_{n,r}^\beta) &\equiv 0, \quad \alpha, \beta \in \Delta, \quad \beta \neq -\alpha, \\ \gamma(E_{m,r}^\alpha, E_{n,s}^{-\alpha}) &\equiv u\gamma(H_{m,r}^{\alpha_1}, H_{n,r}^{\alpha_1})\delta_r^s, \quad \alpha \in \Delta, \\ \gamma(H_{m,r}^\alpha, H_{n,s}^\beta) &\equiv t\gamma(H_{m,r}^{\alpha_1}, H_{n,r}^{\alpha_1})\delta_r^s, \quad \alpha, \beta \in \Delta_+, \end{aligned} \quad (8.10)$$

где $u, t \in \mathbb{C}$,

$$\gamma(H_{n,r}^{\alpha_1}, H_{0,s}^{\alpha_1}) \equiv 0, \quad (8.11)$$

$$\gamma(H_{n+1,s}^{\alpha_1}, H_{l-(n+1),r}^{\alpha_1}) \equiv (\gamma(H_{n-1,s}^{\alpha_1}, H_{l-(n-1),s}^{\alpha_1}) + 2\gamma(H_{1,s}^{\alpha_1}, H_{l-1,s}^{\alpha_1}))\delta_r^s. \quad (8.12)$$

Для простого корня α_1 на любом уровне $l \neq 0$ имеем

$$\gamma(H_{n,r}^{\alpha_1}, H_{l-n,s}^{\alpha_1}) \equiv 0. \quad (8.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В двухточечном случае предложение распадается на отдельные утверждения, которые были доказаны в [16]. Данные там доказательства проходят и сейчас, если ко всем элементам Y_n алгебры Ли добавить второй индекс, превратив их в $Y_{n,s}$. По определению почти градуировки или ее тонкой структуры (3.6) выражения вида $[Y_{n,s}, Z_{m,r}]$ могут вносить ненулевой вклад на рассматриваемом уровне только при $s = r$, а если $s \neq r$, то их вклад целиком относится к высшим уровням. Поэтому все соотношения из [16] можно с точностью до высших уровней переписать как соотношения с совпадающими вторыми индексами, и доказательства совершенно аналогичны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.6. Пусть γ – нормированный коцикл. Тогда:

(а) он равен нулю на всех уровнях выше нулевого, т.е.

$$\gamma(\bar{\mathfrak{g}}_n, \bar{\mathfrak{g}}_n) = 0 \quad \text{при } n + m > 0; \quad (8.14)$$

(б) его значения на всех уровнях $l < 0$ определяются значениями на нулевом уровне.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предыдущих предложений вытекает, что значения коцикла на уровне l выражаются через его значения на уровнях $> l$ и значения $\gamma(H_{n,r}^\alpha, H_{l-n,r}^\alpha)$. Последние для уровня $\neq 0$ также выражаются формулами (8.13) через значения на более высоких уровнях. Отсюда по индукции, начиная с верхней границы коцикла, получаем, что верхняя граница уровня значений коцикла равна нулю, а значения коцикла на уровнях $l < 0$ выражаются по индукции через его значения на нулевом уровне.

Итак, остается рассмотреть нулевой уровень.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.7. Пусть α – простой корень. На уровне $l = 0$ значения коцикла для $s = 1, \dots, N$ задаются соотношениями

$$\gamma(H_{n,s}^\alpha, H_{-n,r}^\alpha) = n \cdot \gamma(H_{1,s}^\alpha, H_{-1,s}^\alpha)\delta_s^r, \quad \gamma(H_{0,r}^\alpha, H_{0,s}^\alpha) = 0. \quad (8.15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагая $l = 0$ в (8.12), получаем

$$\gamma(H_{n+1,s}^\alpha, H_{-(n+1),r}^\alpha) \equiv (\gamma(H_{n-1,s}^\alpha, H_{-(n-1),s}^\alpha) + 2\gamma(H_{1,s}^\alpha, H_{-1,s}^\alpha)) \cdot \delta_r^s. \quad (8.16)$$

Поскольку все значения уровней $l > 0$ равны нулю, можно заменить $\equiv$ на $=$. Отсюда вытекает требуемое утверждение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8.1. Добавляя надлежащую кограницу, можно сделать наш коцикл γ нормированным. В силу предложений 8.3, 8.5, 8.7 все определяется значениями $\gamma(H_{1,s}^\alpha, H_{-1,s}^\alpha)$, $s = 1, \dots, N$, для одного (фиксированного) простого корня. Поэтому существует не более N линейно независимых нормированных коциклов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.8. *Если нормированный коцикл γ является кограницей, то он тождественно равен нулю.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы видели, что нормированный коцикл определяется значениями $\gamma(H_{1,s}^\alpha, H_{-1,s}^\alpha)$. Положим

$$H_{(1,s)}^\alpha := H_{0,s}^\alpha A_{1,s} \equiv H_{1,s}^\alpha, \quad H_{(-1,s)}^\alpha := H_{0,s}^\alpha A_{-1,s} \equiv H_{-1,s}^\alpha. \quad (8.17)$$

Тогда

$$[H_{(1,s)}^\alpha, H_{(-1,s)}^\alpha] = [H_{0,s}^\alpha, H_{0,s}^\alpha] A_{1,s} A_{-1,s} = 0. \quad (8.18)$$

Так как коцикл равен нулю на положительных уровнях и по условию $\gamma = \delta\phi$ является кограницей, то

$$\gamma(H_{1,s}^\alpha, H_{-1,s}^\alpha) = \gamma(H_{(1,s)}^\alpha, H_{(-1,s)}^\alpha) = \phi([H_{(1,s)}^\alpha, H_{(-1,s)}^\alpha]) = \phi(0) = 0. \quad (8.19)$$

Тем самым, все значения коцикла равны нулю, что и требовалось.

§ 9. Пример $\mathfrak{gl}(n)$

В этом параграфе в качестве иллюстрации воспроизводится доказательство того, что произведение двух операторов Лакса для алгебры $\mathfrak{gl}(n)$ также является оператором Лакса, т.е. удовлетворяет уравнениям (2.6). Тем самым, алгебра $\bar{\mathfrak{gl}}(n)$ замкнута и относительно взятия коммутатора. Этот результат принадлежит И. М. Кричеверу и О. К. Шейнману (см. [1]). Аналогично рассматриваются и другие случаи (но уже только для коммутаторов), а также доказывается, что операторы связности $\nabla_\epsilon^{(\omega)}$ и в самом деле действуют на $\bar{\mathfrak{g}}$. Первоначальные доказательства (часть из которых содержит утомительные вычисления) можно найти в [1], [6], [16].

На особенности в точках множества A условий не налагается. Поэтому они не создают никаких неудобств в доказательствах и достаточно учитывать только слабые особые точки. Следовательно, все утверждения сохраняют силу и в многоточечном случае.

Начнем с двух элементов L' и L'' с соответствующими им разложениями (2.5) и изучим их произведение $L = L'L''$. Для этого отдельно рассмотрим каждую слабую особую точку γ_s (с локальной координатой w_s), где $\alpha_s \neq 0$. Запишем формулу для L , учитывая только те части, которые могут внести ненулевой вклад:

$$\begin{aligned} L = & \frac{L'_{s,-1} L''_{s,-1}}{w_s^2} + \frac{L'_{s,-1} L''_{s,0} + L'_{s,0} L''_{s,-1}}{w_s^1} \\ & + (L'_{s,-1} L''_{s,1} + L'_{s,0} L''_{s,0} + L'_{s,1} L''_{s,-1}) + O(w_s^1). \end{aligned} \quad (9.1)$$

Разлагая первый числитель, получаем

$$L'_{s,-1} L''_{s,-1} = \alpha_s \beta_s'^t \alpha_s \beta_s''^t = 0, \quad (9.2)$$

поскольку $\beta_s'^t \alpha_s = 0$ в силу (2.6). Значит, полюсов порядка 2 не возникает.

Рассмотрим выражение, отвечающее полюсу порядка 1:

$$L_{s,-1} = L'_{s,-1} L''_{s,0} + L'_{s,0} L''_{s,-1} = \alpha_s \beta_s'^t L''_{s,0} + L'_{s,0} \alpha_s \beta_s''^t. \quad (9.3)$$

Поскольку по условию $L'_{s,0}\alpha_s = \kappa'_s\alpha_s$, можно записать

$$L_{s,-1} = \alpha_s\beta_s^t, \quad \text{где} \quad \beta_s^t = \beta_s'^t L''_{s,0} + \kappa'_s\beta_s''^t. \quad (9.4)$$

Что касается условия следа, мы получаем

$$\text{tr}(L_{s,-1}) = (\beta_s'^t L''_{s,0} + \kappa'_s\beta_s''^t)\alpha_s = \kappa_s''\beta_s'^t\alpha_s + \kappa'_s\beta_s''^t\alpha_s = 0. \quad (9.5)$$

Значит, L имеет требуемый вид.

Наконец, надо проверить, что α_s является собственным вектором матрицы $L_{s,0}$. Сначала отметим, что $L''_{s,-1}\alpha_s = 0$ и $L'_{s,0}L''_{s,0}\alpha_s = \kappa'_s\kappa_s''\alpha_s$. Кроме того,

$$L'_{s,-1}L''_{s,1}\alpha_s = \alpha_s(\beta_s'^t L''_{s,1}\alpha_s) = (\beta_s'^t L''_{s,1}\alpha_s)\alpha_s. \quad (9.6)$$

Тем самым, α_s действительно является собственным вектором, отвечающим собственному значению $\beta_s'^t L''_{s,1}\alpha_s + \kappa'_s\kappa_s''$. Этим доказано, что $L \in \overline{\mathfrak{gl}}(n)$.

Список литературы

- [1] И. М. Кричевер, О. К. Шейнман, “Алгебры операторов Лакса”, *Функц. анализ и его прил.*, **41:4** (2007), 46–59; англ. пер.: I. M. Krichever, O. K. Sheinman, “Lax operator algebras”, *Funct. Anal. Appl.*, **41:4** (2007), 284–294.
- [2] I. M. Krichever, “Vector bundles and Lax equations on algebraic curves”, *Comm. Math. Phys.*, **229:2** (2002), 229–269.
- [3] I. M. Krichever, “Isomonodromy equations on algebraic curves, canonical transformations and Witham equations”, *Mosc. Math. J.*, **2:4** (2002), 717–752.
- [4] А. Н. Тюрин, “Классификация векторных расслоений над алгебраической кривой произвольного рода”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **29:3** (1965), 657–688; англ. пер.: A. N. Tyurin, “Classification of vector bundles over an algebraic curve of arbitrary genus”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **63**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1967, 245–279.
- [5] О. К. Шейнман, “Алгебры операторов Лакса и гамильтоновы интегрируемые иерархии”, *УМН*, **66:1**(397) (2011), 151–178; англ. пер.: O. K. Sheinman, “Lax operator algebras and Hamiltonian integrable hierarchies”, *Russian Math. Surveys*, **66:1** (2011), 145–171.
- [6] O. K. Sheinman, *Current algebras on Riemann surfaces. New results and applications*, de Gruyter Exp. Math., **58**, Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Berlin, 2012, xiv+150 pp.
- [7] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и структуры теории солитонов”, *Функц. анализ и его прил.*, **21:2** (1987), 46–63; англ. пер.: I. M. Krichever, S. P. Novikov, “Algebras of Virasoro type, riemann surfaces and structures of the theory of solitons”, *Funct. Anal. Appl.*, **21:2** (1987), 126–142.
- [8] О. К. Шейнман, “Эллиптические аффинные алгебры Ли”, *Функц. анализ и его прил.*, **24:3** (1990), 51–61; англ. пер.: O. K. Sheinman, “Elliptic affine Lie algebras”, *Funct. Anal. Appl.*, **24:3** (1990), 210–219.
- [9] О. К. Шейнман, “Аффинные алгебры Ли на римановых поверхностях”, *Функц. анализ и его прил.*, **27:4** (1993), 54–62; англ. пер.: O. K. Sheinman, “Affine Lie algebras on Riemann surfaces”, *Funct. Anal. Appl.*, **27:4** (1993), 266–272.

- [10] М. Шлихенмайер, О. К. Шейнман, “Конструкция Сугавара и операторы Казимира для алгебр Кричевера–Новикова”, *Комплексный анализ и теория представлений* – 1, Итоги науки и техники. Совр. матем. и ее прилож. Тематические обзоры, **38**, ВИНТИ, М., 1996; англ. пер.: М. Schlichenmaier, O. K. Sheinman, “The Sugawara construction and Casimir operators for Krichever–Novikov algebras”, *J. Math. Sci.*, **92**:2 (1998), 3807–3834.
- [11] М. Schlichenmaier, *Zwei Anwendungen algebraisch-geometrischer Methoden in der theoretischen Physik: Berezin–Toeplitz quantisierung und globale Algebren der konformen Feldtheorie*, Habilitation Thesis, Univ. of Mannheim, Mannheim, 1996.
- [12] М. Schlichenmaier, “Higher genus affine algebras of Krichever–Novikov type”, *Mosc. Math. J.*, **3**:4 (2003), 1395–1427.
- [13] В. Г. Кац, “Простые неприводимые градуированные алгебры Ли конечного роста”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **32**:6 (1968), 1323–1367; англ. пер.: V. G. Kac, “Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth”, *Math. USSR-Izv.*, **2**:6 (1968), 1271–1311.
- [14] В. Г. Кац, *Бесконечномерные алгебры Ли*, Мир, М., 1993, 426 с.; пер. с англ.: V. G. Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras*, 3rd ed., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990, xxii+400 pp.
- [15] R. V. Moody, “Euclidean Lie algebras”, *Canad. J. Math.*, **21** (1969), 1432–1454.
- [16] М. Шлихенмайер, О. К. Шейнман, “Центральные расширения алгебр операторов Лакса”, *УМН*, **63**:4(382) (2008), 131–172; англ. пер.: М. Schlichenmaier, O. K. Sheinman, “Central extensions of Lax operator algebras”, *Russian Math. Surveys*, **63**:4 (2008), 727–766.
- [17] O. K. Sheinman, *Lax operator algebras of type G_2* , 2013, 20 pp., arXiv:1304.2510v1.
- [18] O. K. Sheinman, “Affine Krichever–Novikov algebras, their representations and applications”, *Geometry, topology and mathematical physics*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **212**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, 297–316.
- [19] М. Schlichenmaier, “Krichever–Novikov algebras for more than two points”, *Lett. Math. Phys.*, **19**:2 (1990), 151–165.
- [20] М. Schlichenmaier, *Verallgemeinerte Krichever–Novikov Algebren und deren Darstellungen*, PhD thesis, Univ. Mannheim, Mannheim, 1990, 176 pp.
- [21] М. Schlichenmaier, “Central extensions and semi-infinite wedge representations of Krichever–Novikov algebras for more than two points”, *Lett. Math. Phys.*, **20**:1 (1990), 33–46.
- [22] М. Schlichenmaier, *From the Virasoro algebra to Krichever–Novikov type algebras and beyond*, 2013, 31 pp., arXiv:1301.7725.
- [23] М. Schlichenmaier, *Krichever–Novikov type algebras. Theory and applications*, De Gruyter Stud. Math., **53**, de Gruyter, Berlin, 2014, x+400 pp. (to appear).
- [24] V. A. Sadov, “Bases on multipunctured Riemann surfaces and interacting string amplitudes”, *Comm. Math. Phys.*, **136**:3 (1991), 585–597.
- [25] М. Schlichenmaier, “Local cocycles and central extensions for multipoint algebras of Krichever–Novikov type”, *J. Reine Angew. Math.*, **559** (2003), 53–94.
- [26] H. Garland, “The arithmetic theory of loop groups”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **52**:1 (1980), 5–136.
- [27] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Алгебры типа Вирасоро, римановы поверхности и струны в пространстве Минковского”, *Функц. анализ и его прил.*, **21**:4 (1987), 47–61; англ. пер.: I. M. Krichever, S. P. Novikov, “Virasoro-type algebras, Riemann surfaces and strings in Minkowsky space”, *Funct. Anal. Appl.*, **21**:4 (1987), 294–307.
- [28] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, “Алгебры типа Вирасоро, тензоры энергии-импульса и операторные разложения на римановых поверхностях”, *Функц. анализ и его прил.*, **23**:1 (1989), 24–40; англ. пер.: I. M. Krichever, S. P. Novikov, “Algebras

- of virasoro type, energy-momentum tensor, and decomposition operators on Riemann surfaces”, *Funct. Anal. Appl.*, **23**:1 (1989), 19–33.
- [29] M. Schlichenmaier, *An introduction to Riemann surfaces, algebraic curves and moduli spaces*, 2nd ed., Theoret. Math. Phys., Springer, Berlin, 2007, xiv+217 pp.
- [30] P. A. Griffiths, *An introduction to the theory of special divisors on algebraic curves*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **44**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1980, v+25 pp.

Мартин Шлихенмайер
(**Martin Schlichenmaier**)

University of Luxembourg

E-mail: martin.schlichenmaier@uni.lu

Поступила в редакцию

11.06.2013