Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Д. Киселев, Оптимальные оценки индекса Шура и реализуемость представлений, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 4, 69–78

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8259>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 03:56:16

УДК 512.547.2+512.623.32

Д. Д. Киселев

Оптимальные оценки индекса Шура и реализуемость представлений

Дана оптимальная оценка индекса Шура неприводимого комплексного представления над полем рациональных чисел на классе конечных групп заданного порядка либо заданной экспоненты. Получено достаточное условие реализуемости неприводимого комплексного характера χ конечной группы G экспоненты n с индексом Шура m , который является либо нечетным числом, либо 2-часть этого числа не менее 4, над полем рациональных чисел в поле L , являющемся подполем в $\mathbb{Q}(\sqrt[n]{1})$, причем $(L : \mathbb{Q}(\chi)) = m$. Это условие обобщает известное условие Б. Фейна, полученное им для случая $n = p^\alpha q^\beta$. Обобщена постановка задачи Грюнвальда–Ванга о реализуемости представлений, и получены некоторые достаточные условия.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: конечная группа, индекс Шура, реализуемость представления.

DOI: 10.4213/sm8259

§ 1. Введение

1.1. В теории индекса Шура вполне естественно поставить следующую задачу: дана произвольная конечная группа G порядка (экспоненты) n ; что можно сказать про значение $m_{\mathbb{Q}}(\chi)$ индекса Шура неприводимого комплексного характера χ ? В работе [1] решалась похожая задача только с той разницей, что у группы G было известно лишь множество простых делителей порядка. Такая версия может рассматриваться с точки зрения новой постановки как корректирующая. Если множество простых делителей порядка n известно точно, но кратности даны с ошибками, то оценить индекс Шура лучше, чем в [1; теорема 3], не удастся.

П. Шмид в своей замечательной работе [2] определил так называемые группы Шура типа $G(p^a, q)$ и $G(p^a, q, r)$, а также пять исключительных типов групп Шура. Эти группы обладают таким свойством: пусть для данной конечной группы G p -компонента $m_{\mathbb{Q}}(\chi)_p$ индекса Шура неприводимого комплексного характера χ над полем $\mathbb{Q}$ равна $p^a \geq 2$. Тогда в группе G существует секция H , изоморфная одной из групп Шура (см. [2; § 1]), причем H является с точностью до изоморфизма одной из исключительных групп Шура в том и только в том случае, когда $p^a = 2$ и $\varepsilon_4 \notin \mathbb{Q}(\chi)$ (см. [2; § 6, (6.1)]). Этот результат позволяет построить оптимальную равномерную оценку индекса Шура над полем $\mathbb{Q}$ на классе конечных групп заданного порядка (экспоненты). Такая оценка будет указана в теореме 1.

1.2. Пусть задана конечная группа G экспоненты n и ее неприводимый комплексный характер χ с индексом Шура $m \geq 3$ над полем $\mathbb{Q}$. Б. Фейн в своей работе [3] впервые построил пример, когда для произвольного поля L в башне $\mathbb{Q}(\chi) \subset L \subset \mathbb{Q}(\varepsilon_n)$ такого, что $(L : \mathbb{Q}(\chi)) = m$, тем не менее $m_L(\chi) \neq 1$. Он же показал, что для случая $n = p^\alpha q^\beta$ таких примеров построить нельзя (см. [3]). Позднее Р. Моллин в [4] и Е. Шпигель совместно с А. Трояном в [5] построили ряд достаточных признаков того, что указанное поле L все-таки обладает свойством $m_L(\chi) = 1$. Однако их достаточные условия невозможно проверить, если не известны значения характера χ . Например, пусть r – минимальное натуральное число такое, что $\mathbb{Q}(\chi) \subseteq \mathbb{Q}(\varepsilon_r)$, а $h(\mathbb{Q}(\chi))$ – число классов поля $\mathbb{Q}(\chi)$, тогда одним из достаточных условий будет такое (см. [5; следствие 6]):

$$(m_{\mathbb{Q}}(\chi), (\mathbb{Q}(\varepsilon_r) : \mathbb{Q}(\chi)), h(\mathbb{Q}(\chi))) = 1.$$

Используя группы Шура, мы даем обобщение результата Б. Фейна на случай, когда n не обязательно делится только на два различных простых числа. Этот результат изложен в теореме 2.

1.3. Хорошо известно, что если индекс Шура неприводимого комплексного характера χ конечной группы G относительно поля алгебраических чисел k равен m , то можно найти циклическое расширение $K/k(\chi)$ степени m такое, что $m_K(\chi) = 1$. Этот результат составляет содержание известной теоремы Грюнвальда–Ванга (см. [6; теорема 32.18]).

Пусть $K/k(\chi)$ – циклическое расширение полей алгебраических чисел степени $\tilde{m}$, где $\tilde{m} \mid m$. Мы изучаем достаточные условия того, что найдется циклическое расширение $L/k(\chi)$ степени m , причем, во-первых, $K \subseteq L$, а во-вторых, $m_L(\chi) = 1$. Такие условия найдены в теореме 3.

1.4. Обозначения. Приведем некоторые обозначения, используемые в работе: $X * Y$ – свободное произведение групп X и Y ; $[A, B, C] := [[A, B], C]$ – взаимный коммутант групп A, B, C , взятый в некоторой объемлющей группе; $\langle X \rangle$ – группа, порожденная множеством X ; $\mathfrak{G}_{\exp}(n)$ – класс конечных групп экспоненты n ; $\mathfrak{G}_{\text{ord}}(n)$ – класс групп порядка n ; $C_B(A)$ – подгруппа в группе B , состоящая из элементов, неподвижно действующих на группе A (считается, что задано действие группы B на A); $M(G)$ – мультипликатор Шура конечной группы G ; $\text{Irr } G$ – множество неприводимых комплексных характеров конечной группы G ; $m_k(\chi)$ – индекс Шура неприводимого комплексного характера χ конечной группы G над полем нулевой характеристики k ; $A(k, G, \chi)$ – простая компонента групповой алгебры kG конечной группы G , соответствующая характеру $\chi \in \text{Irr } G$, поле k имеет нулевую характеристику; $K \cdot L$ – композит полей K и L , взятый в некотором объемлющем поле; ε_n – примитивный корень степени n из единицы в алгебраическом замыкании некоторого поля нулевой характеристики; $(L : K)$ – размерность поля L как векторного пространства над своим подполем K (предполагается, что L/K – конечное расширение); n_p – p -часть числа n ; $|q \bmod r|$ – порядок простого числа q как элемента группы обратимых элементов кольца $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ (r – простое число, отличное от q); $\overline{m}, \overline{n}$ – множество натуральных чисел от m до n включительно

(считается, что $m, n \in \mathbb{N}$, а также что $m \leq n$); $\pi(n)$ – множество простых делителей числа $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$.

§ 2. Оптимальная оценка

2.1. Напомним определения групп Шура типа $G(p^a, q)$ и $G(p^a, q, r)$, впервые рассмотренных в работе [2].

Пусть p, q – простые числа, $a \in \mathbb{N}$; при этом $q \equiv 1 \pmod{p^a}$. Пусть, далее, P – циклическая группа порядка $p^a(q-1)_p$, Q – циклическая группа порядка q . Группой типа $G(p^a, q)$ называется полупрямое произведение $G = P \ltimes Q$, где P действует на Q и справедливо условие $|P/C_P(Q)| \geq p^a$. Следующее предложение очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть p, q – простые числа, $a \in \mathbb{N}$ такие, что $q \equiv 1 \pmod{p^a}$. Тогда существует группа G типа $G(p^a, q)$.

Пусть теперь p, q, r – различные простые числа, $a \in \mathbb{N}$; пусть также $q \equiv 1 \pmod{p^a}$, $r \equiv 1 \pmod{p^a}$. Возьмем p -группу P класса 2 с двумя образующими такую, что $|P'| = p^a$, причем $P' \leq Z \leq \Phi(P)$ для некоторой циклической центральной подгруппы Z . Обозначим через Q, R – циклические группы порядков q и r соответственно. Полупрямое произведение $G = P \ltimes (Q \times R)$ называется группой типа $G(p^a, q, r)$, если выполнены следующие условия:

- 1) $Z = C_P(Q \cdot R)$;
- 2) $|q \bmod r|_p \geq |P/C_P(R)| \cdot \max\{1, |Z|/(q-1)_p\}$;
- 3) $\exp C_P(R) < p^a(q-1)_p$.

Следующая характеристика p -групп, являющихся силовскими подгруппами в группах Шура типа $G(p^a, q, r)$, указана в [2; § 3].

ЛЕММА 1. Пусть $\bar{X}, \bar{Y}, Z$ – циклические p -группы порядков, не меньших p^a . Рассмотрим группу Z как тривиальный $\bar{P}$ -модуль, где $\bar{P} := \bar{X} \times \bar{Y}$. Группа P , порождаемая классом $\alpha \in H^2(\bar{P}, Z)$, тогда и только тогда является силовой p -подгруппой некоторой группы типа $G(p^a, q, r)$, когда образ $\pi(\alpha)$ в точной последовательности универсальных коэффициентов

$$0 \longrightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\bar{P}, Z) \xrightarrow{i} H^2(\bar{P}, Z) \xrightarrow{\pi} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M(\bar{P}), Z) \longrightarrow 0$$

имеет порядок p^a , и в случае $|Z| > p^a$ прообраз $\bar{X}$ или $\bar{Y}$ в P циклический.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть p, q, r – различные простые числа, $a \in \mathbb{N}$; пусть также $q \equiv 1 \pmod{p^a}$ и $r \equiv 1 \pmod{p^a}$. Пусть $|q \bmod r|_p \geq p^a$. Тогда существует группа G типа $G(p^a, q, r)$, причем p -силовая подгруппа P в G имеет порядок p^{3a} и экспоненту, равную p^a при $p > 2$ и 2^{a+1} в противном случае. Более того, группа $Z = Z(P) = P'$ имеет порядок p^a , группы $C_P(Q)$ и $C_P(R)$ имеют порядок p^{2a} . Группа P является минимальной как по порядку, так и по экспоненте.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В качестве группы P возьмем $A * B/[A, B, A][A, B, B]$, где A, B – циклические группы порядков p^a . Непосредственно проверяется, что $Z := Z(P) = P'$ – циклическая группа порядка p^a , $\exp P = p^a$ при $p > 2$

и $\exp P = 2^{a+1}$ при $p = 2$, $|P| = p^{3a}$. Условия леммы 1 также выполнены. Так как группа P является центральным расширением прямого произведения $\overline{X} \times \overline{Y}$ циклических групп $\overline{X}$, $\overline{Y}$ порядков p^a , то в P существуют нормальные подгруппы X , Y порядков p^{2a} , пересекающиеся по подгруппе Z . В частности, $P = X \cdot Y$. Можно, очевидно, задать гомоморфизмы группы P в $\text{Aut } Q$ и в $\text{Aut } R$, где Q , R – циклические группы порядков q и r соответственно, причем так, чтобы эти гомоморфизмы имели ядра X и Y соответственно. В таком случае $C_P(Q) = X$, $C_P(R) = Y$, $Z = C_P(Q \cdot R)$. Группа $G = P \ltimes (Q \times R)$ с определенным выше действием P является искомой группой типа $G(p^a, q, r)$.

2.2. Пусть задано натуральное число n , тогда определено разложение $n = p_1^{k_1} \cdots p_s^{k_s}$ на простые множители, причем $p_1 < p_2 < \cdots < p_s$. Определим функцию $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ следующим образом.

1. $\psi(1) := 1$ (при этом, естественно, $s = 0$); если $s = 1$, $p_1 = 2$, $k_1 \geq 3$, то положим $\psi(n) := 2$; если $s = 1$, $p_1 > 2$ либо $s = 1$, $p_1 = 2$, $k_1 \leq 2$, то положим $\psi(n) := 1$.
2. Пусть $s \geq 2$. Для каждого $i \in \overline{1, s}$ положим

$$\psi_1^{(p_i)}(n) := \max\{p_i^r \mid 2r \leq k_i, \exists j \in \overline{1, s} \setminus \{i\} : p_j \equiv 1 \pmod{p_i^r}, p_i^r(p_j - 1)_{p_i} \leq p_i^{k_i}\}.$$

Если максимум берется по пустому множеству, то полагаем

$$\psi_1^{(p_i)}(n) := \begin{cases} 1 & \text{при } p_i \neq 2, \\ 2 & \text{при } p_i = 2, k_i \geq 3, \\ 1 & \text{при } p_i = 2, k_i \leq 2. \end{cases}$$

В случае $s = 2$ полагаем $\psi_1^{(p_i)}(n) := 1$.

3. Пусть $s \geq 3$. Для каждого $i \in \overline{1, s}$ положим

$$\begin{aligned} \psi_2^{(p_i)}(n) &:= \max\{p_i^r \mid 3r \leq k_i, \exists j_1, j_2 \in \overline{1, s} \setminus \{i\} : \\ &j_1 \neq j_2, p_{j_1} \equiv 1 \pmod{p_i^r}, p_{j_2} \equiv 1 \pmod{p_i^r}, \\ &\max\{|p_{j_1} \bmod p_{j_2}|_{p_i}, |p_{j_2} \bmod p_{j_1}|_{p_i}\} \geq p_i^r\}. \end{aligned}$$

Если максимум берется по пустому множеству, то полагаем

$$\psi_2^{(p_i)}(n) := \begin{cases} 1 & \text{при } p_i \neq 2, \\ 2 & \text{при } p_i = 2, k_i \geq 3, \\ 1 & \text{при } p_i = 2, k_i \leq 2. \end{cases}$$

4. Если $\psi(n)$ еще не было определено, то

$$\psi(n) := \prod_{i=1}^s \max\{\psi_1^{(p_i)}(n), \psi_2^{(p_i)}(n)\}.$$

Определим функцию $\gamma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ следующим образом.

1. $\gamma(1) := 1$ (при этом, естественно, $s = 0$); если $s = 1$, $p_1 = 2$, $k_1 \geq 2$, то положим $\gamma(n) := 2$; если $s = 1$, $p_1 > 2$ либо $s = 1$, $p_1 = 2$, $k_1 = 1$, то положим $\gamma(n) := 1$.
2. Пусть $s \geq 2$. Для каждого $i \in \overline{1, s}$ положим

$$\gamma_1^{(p_i)}(n) := \max\{p_i^r \mid 2r \leq k_i, \exists j \in \overline{1, s} \setminus \{i\} : \\ p_j \equiv 1 \pmod{p_i^r}, p_i^r(p_j - 1)_{p_i} \leq p_i^{k_i}\}.$$

Если максимум берется по пустому множеству, то полагаем

$$\gamma_1^{(p_i)}(n) := \begin{cases} 1 & \text{при } p_i \neq 2, \\ 2 & \text{при } p_i = 2, k_i \geq 2, \\ 1 & \text{при } p_i = 2, k_i = 1. \end{cases}$$

В случае $s = 2$ полагаем $\gamma_2^{(p_i)}(n) := 1$.

3. Пусть $s \geq 3$. Если $p_1 = 2$, то положим $f_n(p_1) := k_1 - 1$. Для $p_1 \neq 2$ полагаем $f_n(p_1) := k_1$. Для $i \in \overline{2, s}$ полагаем $f_n(p_i) := k_i$. Для каждого $i \in \overline{1, s}$ положим

$$\gamma_2^{(p_i)}(n) := \max\{p_i^r \mid r \leq f_n(p_i), \exists j_1, j_2 \in \overline{1, s} \setminus \{i\} : \\ j_1 \neq j_2, p_{j_1} \equiv 1 \pmod{p_i^r}, p_{j_2} \equiv 1 \pmod{p_i^r}, \\ \max\{p_{j_1} \bmod p_{j_2}|_{p_i}, p_{j_2} \bmod p_{j_1}|_{p_i}\} \geq p_i^r\}.$$

Если максимум берется по пустому множеству, то полагаем

$$\gamma_2^{(p_i)}(n) := \begin{cases} 1 & \text{при } p_i \neq 2, \\ 2 & \text{при } p_i = 2, k_i \geq 2, \\ 1 & \text{при } p_i = 2, k_i = 1. \end{cases}$$

4. Если $\gamma(n)$ еще не было определено, то

$$\gamma(n) := \prod_{i=1}^s \max\{\gamma_1^{(p_i)}(n), \gamma_2^{(p_i)}(n)\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть n – произвольное натуральное число. Для любой группы $G \in \mathfrak{G}_{\text{ord}}(n)$ и любого характера $\chi \in \text{Irr } G$ справедлива оптимальная оценка $m_{\mathbb{Q}}(\chi) \mid \psi(n)$. Для любой конечной группы $G \in \mathfrak{G}_{\text{exp}}(n)$ и любого характера $\chi \in \text{Irr } G$ справедлива оптимальная оценка $m_{\mathbb{Q}}(\chi) \mid \gamma(n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – конечная группа, $\chi \in \text{Irr } G$, причем $m_{\mathbb{Q}}(\chi) = m \geq 2$. Пусть сначала $G \in \mathfrak{G}_{\text{ord}}(n)$. Нам необходимо доказать, что $m \mid \psi(n)$ и что данная оценка неулучшаема на классе $\mathfrak{G}_{\text{ord}}(n)$. Для этого достаточно доказать, что для произвольного простого $p \mid n$ p -часть $\psi(n)_p$ невозможно улучшить и что $m_p \mid \psi(n)_p$. Поэтому без ограничения общности предположим, что $m_p = m = p^a$. Разберем сначала случай $p^a > 2$. Тогда, как отмечено в п. 1.1, существует секция H группы G , которая является группой типа $G(p^a, q)$ или типа $G(p^a, q, r)$. Более того, индекс Шура некоторого точного характера $\xi \in \text{Irr } H$

относительно поля рациональных чисел равен как раз p^a (если H – группа типа $G(p^a, q)$, то это непосредственно следует из [2; теорема (4.3)]; если же H – группа типа $G(p^a, q, r)$, то априори лишь q -локальный индекс характера ξ равен p^a , но, поскольку $m_p = m = p^a$, также все в порядке). В таком случае $p^a \mid \psi(n)_p$ в силу определения функции ψ в п. 2.2, а также в силу предложений 1, 2 и известного результата Фейна–Ямады о том, что квадрат индекса Шура неприводимого комплексного характера конечной группы над полем рациональных чисел делит порядок этой группы (см. [7; гл. 9, теорема 9.1]). Более того, существует группа H типа $G(p^a, q)$ или типа $G(p^a, q, r)$ с характером $\xi \in \text{Irr } H$ и индексом Шура $m_{\mathbb{Q}}(\xi) = \psi(n)_p$: равенство индекса Шура над $\mathbb{Q}$ числу $\psi(n)_p$ в случае групп типа $G(p^a, q, r)$ следует из [2; замечание (4.4)] и определения функции ψ – в качестве p -силовой подгруппы P в искомой группе Шура типа $G(p^a, q, r)$ можно взять группу порядка p^{3a} и экспоненты p^a (см. предложение 2), что гарантирует выполнение условий $\exp C_P(Q) < p^a(q-1)_p$ и $\exp C_P(R) < p^a(r-1)_p$. Возьмем циклическую группу T порядка $n/|H|$ и рассмотрим группу $G := H \times T$ с характером $\chi = \xi \otimes 1_T$. Тогда $m_{\mathbb{Q}}(\chi) = \psi(n)_p$, причем $H \in \mathfrak{G}_{\text{ord}}(n)$.

Теперь рассмотрим случай $p^a = 2$. Тогда если $2 \mid \psi(n)$, то проведенное выше доказательство остается справедливым (данный случай можно реализовать с использованием групп Шура типа $G(2, q)$ или $G(2, q, r)$ либо $2^3 \mid n$, и тогда можно в качестве группы H взять группу кватернионов Q_8). Если же $2 \nmid \psi(n)$ либо $2^3 \nmid n$, то случай, согласно разделу 1.1, возможен, лишь когда в группе G есть секция, являющаяся исключительной группой Шура (см. [2; (3.3)–(3.7)]). Во всех таких исключительных группах 2-силовая подгруппа имеет порядок не менее 8, поэтому получаем противоречие.

Тем самым оценку $m \mid \psi(n)$ нельзя улучшить на классе $\mathfrak{G}_{\text{ord}}(n)$.

Случай $G \in \mathfrak{G}_{\text{exp}}(n)$ рассматривается аналогично с учетом хорошо известной теоремы Фейна–Ямады (см. [7; гл. 9, теорема 9.1]) и того факта, что во всех исключительных группах Шура экспонента 2-силовой подгруппы делится на 4. Теорема полностью доказана.

§ 3. Вопросы реализации

3.1. Как отмечалось в п. 1.2, вопрос о реализуемости неприводимого комплексного представления конечной группы G экспоненты n с характером χ и индексом Шура m над полем рациональных чисел в поле алгебраических чисел L таком, что $(L : \mathbb{Q}(\chi)) = m$, причем $L \subset \mathbb{Q}(\varepsilon_n)$, весьма нетривиален.

Напомним сначала общее определение (см. [2; определение (5.1)]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть K – поле алгебраических чисел. Пусть $\chi \in \text{Irr } G$ для некоторой конечной группы G . Пусть также $m_K(\chi)_p = p^a \geq 2$. Пара (G_0, χ_0) называется K -редукцией пары (G, χ) по отношению к простому p , если выполнены следующие условия:

- 1) $G_0 = \tilde{G}_0 / \ker \tilde{\chi}_0$ для некоторой $K(\chi)$ -элементарной подгруппы $\tilde{G}_0$ группы G , где характер $\tilde{\chi}_0 \in \text{Irr } \tilde{G}_0$ такой, что

$$(K(\tilde{\chi}_0, \chi) : K(\chi))(\chi, \tilde{\chi}_0^G) \not\equiv 0 \pmod{p};$$

- 2) χ_0 – точный характер, индуцированный характером $\tilde{\chi}_0$ на группу G_0 , причем χ_0 является $K(\chi_0, \chi)$ -примитивным (т.е. если $\chi_0 = \chi_1^{G_0}$ для некоторой собственной подгруппы, то $K(\chi_1, \chi) \not\subseteq K(\chi_0, \chi)$).

Мы даем обобщение известного результата Б. Фейна [3].

ТЕОРЕМА 2. Пусть конечная группа G экспоненты n такова, что для любого простого $p \mid n$ существует не более одного простого $q \mid n$ такого, что $p \mid (q - 1)$. Тогда для произвольного неприводимого характера $\chi \in \text{Irr } G$ с индексом Шура $m_{\mathbb{Q}}(\chi) = m$, удовлетворяющим условию $m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 4} \cup \{1\}$, существует поле L в башне $\mathbb{Q}(\chi) \subseteq L \subseteq \mathbb{Q}(\varepsilon_n)$ такое, что $(L : \mathbb{Q}(\chi)) = m$, причем $m_L(\chi) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем произвольный неприводимый характер $\chi \in \text{Irr } G$ конечной группы G , экспонента которой удовлетворяет условиям теоремы. Тогда определена центральная простая алгебра $A(\mathbb{Q}(\chi), G, \chi)$ над полем $\mathbb{Q}(\chi)$, являющаяся простой компонентой групповой алгебры $\mathbb{Q}(\chi)G$, соответствующей характеру χ . Если мы для каждого простого $p \mid m$ найдем поле $L^{(p)}$ такое, что $\mathbb{Q}(\chi) \subseteq L^{(p)} \subseteq \mathbb{Q}(\varepsilon_n)$ и $(L^{(p)} : \mathbb{Q}(\chi)) = m_p$, причем $m_{L^{(p)}}(\chi)_p = 1$, то в качестве искомого поля L можно взять композит $\prod_{p \mid m} L^{(p)}$. Поэтому мы считаем, что $m = m_p$ для некоторого простого $p \mid m$. Это допущение не ограничивает общность рассуждений. В самом деле, ограничение $m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 4} \cup \{1\}$ наследуется.

Выберем поле K , соответствующее p -силовской подгруппе в группе Галуа $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/\mathbb{Q}(\chi))$. Очевидно, что $K \neq \mathbb{Q}(\varepsilon_n)$, поскольку иначе $p \nmid m$ вопреки предположению. Согласно теореме Брауэра–Витта (см. [7; гл. 3]) для пары (G, χ) существует K -редукция (G_0, χ_0) относительно простого числа p такая, что $[A(K, G_0, \chi_0)] = [A(K, G, \chi)]$ в группе Брауэра $B(K)$. Из условия теоремы следует, что существует ровно одно простое число $q \equiv 1 \pmod{p}$ (если таких нет, то $m_p = 1$ и доказывать нечего) такое, что $q \mid |G_0|$. В таком случае $m_K(\chi_0) = m_{K \cdot \mathbb{Q}_q}(\chi_0)$. Поэтому существует поле $\tilde{L}$ в башне $K \subseteq \tilde{L} \subseteq \mathbb{Q}(\varepsilon_n)$ такое, что $(\tilde{L} : K) = m_p$ с условием $m_{\tilde{L}}(\chi_0)_p = 1$. В самом деле, согласно условию теоремы и результату [2; предложение (5.2)] можно считать, что $|G_0|$ делится ровно на два простых числа. Из теоремы Бенарда–Шахера (см. [8; теорема 1]), а также из теоремы о подгруппе Шура 2-локального поля (см. [7; гл. 5, следствие 5.4]) и условия $m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 4} \cup \{1\}$ следует, что индексы Шура характера χ_0 относительно поля $K \cdot \mathbb{R}$ и относительно поля $K \cdot \mathbb{Q}_2$ равны единице. Теперь к группе G_0 и характеру χ_0 применим результат Б. Фейна [3]. Значит, существует поле $L^{(p)} \subset \tilde{L}$ в башне $\mathbb{Q}(\chi) \subseteq L^{(p)} \subseteq \mathbb{Q}(\varepsilon_n)$ со свойством $(L^{(p)} : \mathbb{Q}(\chi)) = m_p$, причем $m_{L^{(p)}}(\chi)_p = 1$. Теорема полностью доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если условие $m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 4} \cup \{1\}$ теоремы 2 не выполнено, то, очевидно, $m_2 = 2$. В этом случае может оказаться, что индекс Шура характера χ не равен единице относительно поля $\mathbb{R}$, а также поля $\mathbb{Q}_2$. Заключение теоремы 2 останется справедливым, если дополнительно предположить, во-первых, $\mathbb{Q}(\chi) \not\subseteq \mathbb{R}$, а во-вторых, $(\mathbb{Q}_2(\varepsilon_n) : \mathbb{Q}_2(\chi)) \not\equiv 0 \pmod{2}$. В последнем случае расширение $\mathbb{Q}(\chi, \varepsilon_4)/\mathbb{Q}(\chi)$ имеет степень два. Поэтому $m_{\mathbb{Q}_2(\chi, \varepsilon_4)}(\chi) = 1$. Итак, условие $m_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 4} \cup \{1\}$ можно отбросить при $m_{\mathbb{R}}(\chi) = 1$ и $m_{\mathbb{Q}_2}(\chi) = 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если $m_2 \neq 1$, то из условия теоремы 2 следует, что n делится ровно на два простых числа (случай, когда n есть степень двойки, не может возникнуть, так как тогда $m_2 = m = 2$). То есть в этом случае обобщить результат Б. Фейна [3] не удастся. Однако для случая $m_2 = 1$ получаем обобщение. Для случая $m_2 \neq 1$ обобщение можно получить, если постулировать следующее условие: пусть K_p – подполе в $\mathbb{Q}(\varepsilon_n)$, отвечающее p -силовой подгруппе группы Галуа $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\varepsilon_n)/\mathbb{Q}(\chi))$. Пусть для любого простого $p \mid n$ такого, что $K_p \neq \mathbb{Q}(\varepsilon_n)$, существует не более одного простого $q \mid n$ с условием $p \mid (q-1)$ и $\varepsilon_q \notin K_p$. Тогда справедливо заключение теоремы 2. Для доказательства нужно воспользоваться понятием “терминальной K_p -редукции” (K_p -редукция понимается в смысле определения 1, а “терминальность” означает невозможность дальнейшего редуцирования) и результатом [2; предложение (5.2)].

3.2. Нам осталось исследовать, при каких достаточных условиях неприводимое представление конечной группы G с характером $\chi \in \text{Irr } G$ и индексом Шура $m_k(\chi) = m > 1$ над полем алгебраических чисел k реализуется в поле L степени m над $k(\chi)$, причем таком, что $L/k(\chi)$ – циклическое расширение Галуа, содержащее заданное циклическое подрасширение $K/k(\chi)$ степени $\tilde{m} \mid m$.

Рассмотрим задачу погружения заданного циклического расширения $K/k(\chi)$ с группой F порядка $\tilde{m}$ в расширение с циклической группой Галуа H порядка m или, кратко, задачу $(K/k(\chi), H, \varphi)$, где $\varphi: H \rightarrow F$ – естественный эпиморфизм. Для каждого простого $p \mid m$ такого, что $m_{k(\chi) \cdot \mathbb{Q}_p}(\chi) = m^{(p)} \neq 1$, выберем произвольным образом простую точку $\mathfrak{p}$ поля $k(\chi)$, лежащую над ним. Тогда определено множество локальных задач погружения

$$M_{k(\chi)} := \{(K \otimes_{k(\chi)} k(\chi)_{\mathfrak{p}}/k(\chi)_{\mathfrak{p}}, H, \varphi_{\mathfrak{p}}) \mid m^{(p)} \neq 1\}. \quad (1)$$

Хорошо известно, что локальные задачи погружения сопутствуют исходной в том смысле, что из разрешимости последней следует их разрешимость (см. [9; гл. 1, § 11])¹. Заметим, что, вообще говоря, алгебра Галуа $K \otimes_{k(\chi)} k(\chi)_{\mathfrak{p}}$ не является полем, но в любом случае определено поле-ядро $K_{\mathfrak{p}}$, являющееся расширением Галуа поля $k(\chi)_{\mathfrak{p}}$ с группой Галуа $F_{\mathfrak{p}}$, допускающей вложение в $F = \text{Gal}(K/k(\chi)) \cong \text{Gal}(K \otimes_{k(\chi)} k(\chi)_{\mathfrak{p}}/k(\chi)_{\mathfrak{p}})$ (см. [9; гл. 1, § 5]). Пусть $H_{\mathfrak{p}}$ – полный прообраз подгруппы $F_{\mathfrak{p}}$ в группе H при эпиморфизме $\varphi_{\mathfrak{p}}$, тогда определено множество задач погружения

$$\widetilde{M}_{k(\chi)} := \{(K_{\mathfrak{p}}/k(\chi)_{\mathfrak{p}}, H_{\mathfrak{p}}, \varphi_{\mathfrak{p}}) \mid m^{(p)} \neq 1\}, \quad (2)$$

причем соответствующие друг другу задачи из множеств в (1) и (2) разрешимы или неразрешимы одновременно (см. [9; гл. 1, § 6, следствие 6]).

Очевидно, что для существования поля L степени m над $k(\chi)$ такого, что $m_L(\chi) = 1$, причем решающего задачу $(K/k(\chi), H, \varphi)$, необходимо выполнение условия

$$m^{(p)} \mid |H_{\mathfrak{p}}| \quad \forall p : m^{(p)} \neq 1. \quad (3)$$

Пусть для краткости $n := m/\tilde{m}$.

¹Здесь и далее разрешимость задач погружения понимается в смысле алгебр Галуа (см. [9; гл. 1, § 4]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть циклическое расширение Галуа $K/k(\chi)$ таково, что

$$\pi(\tilde{m}) = \pi(n) = \pi\left(\frac{|H_p|}{n}\right).$$

Тогда для существования поля L степени m , содержащего K в качестве подполя и имеющего над $k(\chi)$ циклическую группу Галуа со свойством $m_L(\chi) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы, помимо условия (3), образ класса коцикла $c \in H^2(\text{Gal}(K/k(\chi)), \langle \varepsilon_n \rangle)$, соответствующего расширению группы F до H с помощью $\ker \varphi$, в группе $H^2(\text{Gal}(K/k(\chi)), K^*)$ при отображении, индуцированном вложением $\varepsilon_n \hookrightarrow K^{*2}$, являлся нулевым³.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, условие (3) необходимо для справедливости теоремы. Заметим, что в силу теоремы Бенарда–Шахера (см. [8; теорема 1]) задача $(K/k(\chi), H, \varphi)$ является брауэровской (определение см. в [9; гл. 3, § 1]). Поэтому условием разрешимости такой задачи (которое будет также необходимо для справедливости теоремы) будет выполнение условия согласности Фаддеева–Хассе⁴. Поскольку искомая задача брауэровская, это условие в точности совпадает с гомологическим условием в формулировке теоремы. Итак, необходимость полностью доказана.

Заметим, что всякое решение задачи $(K/k(\chi), H, \varphi)$ является полем в силу условий теоремы и классического результата [9; гл. 1, § 6, следствие 5]. В то же самое время выполнение условия согласности в задаче $(K/k(\chi), H, \varphi)$ влечет разрешимость всех локальных задач (см. [9; гл. 3, § 14, предложение 3.14]). В частности, все локальные задачи из множества $M_{k(\chi)}$ в (1) разрешимы. Но тогда разрешимы и все задачи из множества $\widetilde{M}_{k(\chi)}$ в (2); по условию теоремы все их решения также являются полями.

Выберем произвольным образом для каждой задачи из множества $\widetilde{M}_{k(\chi)}$ поле-решение L_p , тогда алгебры Галуа вида $\widetilde{L}_p := \text{ind}_{H_p}^H L_p$ являются решениями соответствующих задач из множества $M_{k(\chi)}$ (см. [9; гл. 1, § 6]). Нам остается показать существование решения L исходной задачи, локализации которого по всем простым точкам поля $k(\chi)$, параметризующим множество $M_{k(\chi)}$, совпадают с соответствующими алгебрами вида $\widetilde{L}_p$. Это частный случай проблемы существования решения глобальной разрешимой задачи погружения с заданными локализациями. Такая проблема для случая абелева ядра была полностью решена В.В. Ишхановым в работе [10; теорема 1]. Для случая, когда группа Галуа погружаемого расширения является циклической, никаких дополнительных препятствий не возникает (см. [10; следствие 2]). Итак, наша теорема полностью доказана.

Список литературы

²В силу теоремы Бенарда–Шахера (см. [8; теорема 1]) такое вложение существует.

³Условие (3) легко формулируется в терминах расширения $K/k(\chi)$, так как ядра всех задач из (2) совпадают с ядром исходной задачи.

⁴Обстоятельное изложение условия согласности можно найти в [9; гл. 2].

- [1] Д. Д. Киселев, “Об оценке индекса Шура неприводимых представлений конечных групп”, *Матем. сб.*, **204**:8 (2013), 73–82; англ. пер.: D. D. Kiselev, “A bound for the Schur index of irreducible representations of finite groups”, *Sb. Math.*, **204**:8 (2013), 1152–1160.
- [2] P. Schmid, “Schur indices and Schur groups”, *J. Algebra*, **169**:1 (1994), 226–247.
- [3] B. I. Fein, “Minimal splitting fields for group representations”, *Pacific J. Math.*, **51**:2 (1974), 427–431.
- [4] R. A. Mollin, “Splitting fields and group characters”, *J. Reine Angew. Math.*, **315** (1980), 107–114.
- [5] E. Spiegel, A. Trojan, “Minimal splitting fields in cyclotomic extensions”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **87**:1 (1983), 33–37.
- [6] I. Reiner, *Maximal orders*, London Math. Soc. Monogr. (N.S.), **28**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2003, xiv+395 pp.
- [7] T. Yamada, *The Schur subgroup of the Brauer group*, Lecture Notes in Math., **397**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1974, v+159 pp.
- [8] M. Benard, M. M. Schacher, “The Schur subgroup. II”, *J. Algebra*, **22**:2 (1972), 378–385.
- [9] В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, Д. К. Фаддеев, *Задача погружения в теории Галуа*, Современная алгебра, **17**, Наука, М., 1990, 270 с.; англ. пер.: V. V. Ishkhanov, B. B. Lur’e, D. K. Faddeev, *The embedding problem in Galois theory*, Transl. Math. Monogr., **165**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, xii+182 pp.
- [10] В. В. Ишханов, “Задача погружения с данными локализациями”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **39**:3 (1975), 512–522; англ. пер.: V. V. Ishkhanov, “The embedding problem with given localizations”, *Math. USSR-Izv.*, **9**:3 (1975), 481–492.

Денис Дмитриевич Киселев
(Denis D. Kiselev)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: denmexmath@yandex.ru

Поступила в редакцию
12.06.2013