Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. Б. Беднов, П. А. Бородин, Банаховы пространства,
реализующие минимальные заполнения, *Матем. сб.*,
2014, том 205, номер 4, 3–20

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8264>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 15:29:10

УДК 517.982.256+515.124.4

Б. Б. Беднов, П. А. Бородин

Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения

Доказано, что действительное банахово пространство реализует минимальные заполнения для всех своих конечных подмножеств (кратчайшая сеть, затягивающая заданное конечное подмножество, существует и имеет минимально возможную длину) тогда и только тогда, когда оно предуально к L_1 . Получена характеристика пространства L_1 в терминах точек Штейнера.

Библиография: 25 названий.

Ключевые слова: банахово пространство, кратчайшая сеть, минимальное заполнение, точка Штейнера.

DOI: 10.4213/sm8264

§ 1. Введение

Пусть (X, ρ) – метрическое пространство, $G = (V, E)$ – связный граф со множеством вершин V и множеством ребер E . Отображение $\Gamma: V \rightarrow X$ называется *сетью* в X , параметризованной графом G , или сетью типа G . Вершинами сети Γ называются точки $\Gamma(v)$, $v \in V$, ребрами сети Γ называются пары $\Gamma(v)\Gamma(w)$ при условии, что пара vw соединена ребром в графе G (т.е. $vw \in E$). Длиной ребра $\Gamma(v)\Gamma(w)$ называется число $\rho(\Gamma(v), \Gamma(w))$, а длиной $|\Gamma|$ сети Γ – сумма длин всех ее ребер. Если $M \subset X$ – конечное множество и $M \subset \Gamma(V)$, то говорят, что сеть Γ соединяет (или затягивает) множество M . Число

$$|\text{smt}|(M, X) = \inf\{|\Gamma| : \text{сеть } \Gamma \text{ соединяет } M\}$$

называется длиной кратчайшей сети для M в X , а

$$\text{smt}(M, X) = \{\Gamma : \Gamma \text{ – сеть в } X, \text{ затягивающая } M, |\Gamma| = |\text{smt}|(M, X)\}$$

есть (возможно, пустое) множество кратчайших сетей для M в X .

Теория кратчайших сетей в метрических пространствах весьма обширна и бурно развивается [1]. Недавно в работе А. О. Иванова и А. А. Тужилина [2] намечилось новое направление этой теории, связанное с введенным ими понятием *минимального заполнения* конечного метрического пространства.

Пусть (M, ρ) – конечное метрическое пространство. Число

$$|\text{mf}|(M) = \inf\{|\text{smt}|(\varphi(M), Y) : \varphi: M \rightarrow Y\},$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 14-01-00510 и № 14-01-91158) и Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-3682.2014.1).

где нижняя грань берется по всем изометричным вложениям пространства M в различные метрические пространства Y , называется длиной минимального заполнения пространства M , а сети – элементы множества

$$\text{mf}(M) = \{\Gamma \in \text{smt}(\varphi(M), Y) : |\text{smt}|(\varphi(M), Y) = |\text{mf}|(M)\}$$

– называются минимальными заполнениями пространства M .

Для всякого конечного множества M в метрическом пространстве (X, ρ) , рассматриваемого как метрическое пространство с той же метрикой ρ , выполнено очевидное неравенство

$$|\text{smt}|(M, X) \geq |\text{mf}|(M).$$

Отметим, что определение минимального заполнения аналогично определению минимального поперечника, введенному Р. С. Исмагиловым [3].

Будем говорить, что метрическое пространство (X, ρ) *реализует минимальное заполнение* для своего конечного подмножества M , если $|\text{smt}|(M, X) = |\text{mf}|(M)$ и множество $\text{smt}(M, X)$ не пусто.

А. О. Иванов и А. А. Тужилин [4] поставили задачу об описании всех метрических пространств, реализующих минимальные заполнения для всех своих конечных подмножеств, и вместе со своими учениками (см. [2], [5]) привели нетривиальные примеры таких пространств. В частности, З. Н. Овсянников [5] доказал, что таким пространством является пространство l_∞^n для всякого натурального n (n -мерное действительное пространство с нормой $\|x\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$), а также пространство l_∞ ограниченных последовательностей.

Цель настоящей работы – описать все банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения для всех своих конечных подмножеств (теорема 4). Этими пространствами оказались хорошо известные пространства, дуальные к L_1 , или пространства Линденштраусса (в конечномерном случае это только пространства l_∞^n). При этом оказалось, что для реализации минимальных заполнений для всевозможных конечных наборов точек в банаховом пространстве X достаточно, чтобы X реализовывало минимальные заполнения лишь для всех четверок своих точек. Пространства, реализующие минимальные заполнения для всех троек своих точек, составляют более широкий и хорошо известный класс пространств, обладающих так называемым свойством 3.2.I.P. (теорема 1). В этом классе выделяются пространства L_1 – они характеризуются тем, что минимальное заполнение для всякой тройки их точек существует и единственно (теорема 3).

§ 2. Предварительные сведения

В банаховом пространстве $(X, \|\cdot\|)$ сети можно представлять себе как связные конечные объединения отрезков, соединяющих точки этого пространства, т.е. как связные графы в X с ребрами-отрезками. Нетрудно показать, что кратчайшая сеть $\Gamma \in \text{smt}(M_n, X)$, затягивающая в X заданное n -точечное множество M_n , является деревом, которое имеет не более $(n - 2)$ дополнительных

(отличных от точек из M_n) вершин, причем каждая из этих дополнительных вершин имеет степень не меньше 3 (см., например, [6]).

В частности, для трехточечных множеств M_3 кратчайшая сеть состоит из трех (возможно, вырожденных) отрезков, соединяющих точки из M_3 с их точкой Штейнера, т.е. точкой, сумма расстояний от которой до точек из M_3 минимальна.

В дальнейшем нам понадобится общее определение: для заданного набора $M = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ множество *точек Штейнера* (в англоязычной литературе – медиан) $\text{st}(M, X)$ состоит из таких точек $s \in X$, для которых

$$\sum_{k=1}^n \|x_k - s\| = \inf \left\{ \sum_{k=1}^n \|x_k - x\| : x \in X \right\} =: |\text{st}|(M, X).$$

Кратчайшие сети могут не существовать уже для трехточечных множеств M_3 в банаховом пространстве X – другими словами, множества $\text{smt}(M_3, X)$ и $\text{st}(M_3, X)$ могут быть пустыми. Первый пример таких X и M_3 построил А. Л. Гаркави [7] в 1974 г. Имеются и другие примеры [8]–[11]. Пример в [11] примечателен тем, что в нем, помимо пустоты $\text{smt}(M_3, X)$, выполняется еще и равенство $|\text{smt}|(M_3, X) = |\text{mf}|(M_3)$. Л. Веселы [8] доказал, что всякое нереклексивное банахово пространство X можно так эквивалентно перенормировать, что в новой норме некоторая тройка $M_3 \subset X$ не затягивается кратчайшей сетью. В. М. Кадец [12], не зная о работе Веселы, доказал этот результат иным способом. Наконец, в работе [6] было доказано, что во всяком банаховом пространстве X , 1-дополняемом в своем втором сопряженном (в частности, в любом рефлексивном пространстве, а также в любом пространстве L_1), множество $\text{smt}(M, X)$ не пусто для всякого конечного $M \subset X$; также для всякого $n \geq 3$ в [6] был построен пример банахова пространства X и n -точечного множества $M_n \subset X$, для которых множество $\text{smt}(M, X)$ кратчайших сетей пусто.

В отличие от кратчайших сетей минимальные заполнения всегда существуют [2], т.е. $\text{mf}(M)$ не пусто для всякого конечного метрического пространства M .

Для трехточечного пространства $M_3 = (\{x_1, x_2, x_3\}, \rho)$ минимальное заполнение можно получить [2] в четырехточечном расширении $(\{x_1, x_2, x_3, s\}, \rho)$, где

$$\rho(s, x_i) = \frac{1}{2}(\rho(x_i, x_j) + \rho(x_i, x_k) - \rho(x_j, x_k)), \quad i = 1, 2, 3, \quad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\},$$

в виде сети-дерева с ребрами sx_1 , sx_2 и sx_3 . При этом

$$|\text{mf}|(M_3) = \frac{1}{2}P(x_1, x_2, x_3), \quad (2.1)$$

где $P(x_1, x_2, x_3)$ – периметр треугольника $x_1x_2x_3$.

Для четырехточечного пространства $M_4 = (\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \rho)$ минимальное заполнение имеет длину

$$|\text{mf}|(M_4) = \frac{1}{2}(\max(M_4) + \min(M_4)), \quad (2.2)$$

где $\max(M_4)$ и $\min(M_4)$ – соответственно максимальная и минимальная из сумм $\rho(x_1, x_2) + \rho(x_3, x_4)$, $\rho(x_1, x_3) + \rho(x_2, x_4)$, $\rho(x_1, x_4) + \rho(x_2, x_3)$, и может быть реализовано сетью в некотором не более чем шеститочечном расширении M_4 (см. [2]).

Для произвольных конечных метрических пространств M величина $|\text{mf}|(M)$ как функция расстояний между точками из M может быть вычислена по некоторой переборной формуле, полученной А. Ю. Ереминым [13].

Напомним необходимые сведения из геометрии банаховых пространств.

Пусть $n \geq 3$ – натуральное число. Говорят, что банахово пространство X обладает свойством п.2.И.Р. (п.2 Intersection Property), если всякие n попарно пересекающихся замкнутых шаров в X имеют непустое пересечение.

ТЕОРЕМА А (см. [14]–[16]). *Для действительного банахова пространства X следующие свойства эквивалентны:*

- 1) X обладает свойством п.2.И.Р. для всякого $n \geq 3$;
- 2) X обладает свойством 4.2.И.Р.;
- 3) X^* изометрически изоморфно $L_1(\mu) = L_1(E, \Sigma, \mu)$ для некоторого множества E , некоторой σ -алгебры Σ подмножеств E и некоторой σ -аддитивной меры μ , определенной на Σ ;
- 4) X^{**} 1-дополняемо в любом содержащем его банаховом пространстве Z (т.е. существует линейный проектор $P: Z \rightarrow X^{**}$ нормы 1).

Пространства, удовлетворяющие условиям теоремы А, называются *предуальными к L_1* или *пространствами Линденштраусса*. К этому классу пространств относятся все пространства $C(Q)$ действительных функций, непрерывных на (хаусдорфовом) компакте Q , пространства $c_0(E)$, l_∞ и многие другие. Пространство размерности n предуально к L_1 тогда и только тогда, когда оно изометрически изоморфно l_∞^n .

Предуальные к L_1 пространства достаточно хорошо изучены, и доказательство теоремы 4 ниже использует некоторые специальные свойства этих пространств. В частности, нам понадобится

ТЕОРЕМА В (см. [17]). *Всякое предуальное к L_1 пространство X обладает следующим свойством: если $a_1, \dots, a_n \in X$ и замкнутые шары $B^{**}(a_i, r_i) = \{x \in X^{**} : \|x - a_i\|_{X^{**}} \leq r_i\}$ имеют непустое пересечение в X^{**} , то шары $B(a_i, r_i) = \{x \in X : \|x - a_i\|_X \leq r_i\}$ имеют непустое пересечение в X .*

Отметим также, что класс предуальных к L_1 пространств уже известен как описывающий экстремальное геометрическое свойство: Т. Рао [18] доказал, что действительное пространство X предуально к L_1 тогда и только тогда, когда для всякого конечного множества $M \subset X$ его чебышевский радиус

$$r_C(M) = \inf_{e \in X} \sup_{x \in M} \|x - e\|$$

равен половине диаметра M : $r_C(M) = \text{diam}(M)/2$ (нетрудно видеть, что для всякого ограниченного множества в произвольном банаховом пространстве X имеет место неравенство $r_C(M) \geq \text{diam}(M)/2$). При этом в [18] показано, что чебышевский центр (точка e , для которой $\sup_{x \in M} \|x - e\| = r_C(M)$) в предуальном к L_1 пространстве существует для всякого конечного множества M , т.е.

предуальные к L_1 пространства и только они реализуют “минимальные заполнения” всех своих конечных подмножеств в смысле чебышевских центров.

Ниже будет доказан (теорема 5) аналог этого результата Рао, в котором вместо чебышевских центров фигурируют точки Штейнера.

Банаховы пространства, обладающие свойством 3.2.I.P., составляют класс более широкий, чем класс предуальных к L_1 пространств, и также хорошо изучены [16]. Типичные примеры пространств со свойством 3.2.I.P., не предуальных к L_1 (т.е. не обладающих свойством 4.2.I.P.), представляют собой различные виды пространств L_1 : $L_1[0, 1]$ (пространство действительных функций, интегрируемых по Лебегу на отрезке), l_1^n (n -мерное действительное пространство с нормой $\|x\| = |x_1| + \dots + |x_n|$) при $n \geq 3$, l_1 (пространство суммируемых последовательностей). Эта типичность проявляется в следующем утверждении, которое нам понадобится.

ТЕОРЕМА С (см. [16; следствие 4.5]). Пусть действительное банахово пространство X обладает свойством 3.2.I.P., но не обладает свойством 4.2.I.P. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется линейное вложение $A: l_1^3 \rightarrow X$, для которого $\|x\|_{l_1^3} \leq \|Ax\|_X \leq (1 + \varepsilon)\|x\|_{l_1^3}$, $x \in l_1^3$, и линейный проектор $P: X \rightarrow A(l_1^3)$ с $\|P\| \leq 1 + \varepsilon$.

Конечномерные банаховы пространства со свойством 3.2.I.P. полностью описаны в работе [19]: это пространства, получаемые из одномерных последовательным применением операций l_1 - и l_∞ -суммирования (из пары пространств X и Y образуется прямая сумма $X \oplus Y$ с нормой $\|x\| + \|y\|$ или $\max\{\|x\|, \|y\|\}$ соответственно). Единичные шары таких пространств называются многогранниками Ханнера.

§ 3. Пространства с минимальными заполнениями для троек

Ниже $m[a, b]$ обозначает метрический отрезок с концами a и b в банаховом пространстве X :

$$m[a, b] = \{x \in X : \|x - a\| + \|x - b\| = \|a - b\|\}.$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – действительное банахово пространство. Следующие свойства эквивалентны:

- 1) X реализует минимальное заполнение для всякой тройки своих точек;
- 2) для всякой тройки $a, b, c \in X$ множество $\text{st}(\{a, b, c\}, X)$ не пусто и $|\text{st}(\{a, b, c\}, X)| = \frac{1}{2}P(a, b, c)$;
- 3) для всякой тройки $a, b, c \in X$ пересечение $m[a, b] \cap m[b, c] \cap m[c, a]$ не пусто;
- 4) X обладает свойством 3.2.I.P.

При этом во всяком таком пространстве X для всякой тройки точек выполнено равенство $\text{st}(\{a, b, c\}, X) = m[a, b] \cap m[b, c] \cap m[c, a]$.

Эквивалентность утверждений 3) и 4) фактически доказывалась в [16; теорема 3.2].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) $\implies$ 2) следует из отмечавшихся выше структуры кратчайшей сети и формулы (2.1) для длины минимального заполнения для трехточечных множеств.

2) $\implies$ 3). Если $s \in \text{st}(\{a, b, c\}, X)$ и $\|s - a\| + \|s - b\| + \|s - c\| = \frac{1}{2}P(a, b, c)$, то в каждом из неравенств $\|s - a\| + \|s - b\| \geq \|a - b\|$, $\|s - b\| + \|s - c\| \geq \|b - c\|$, $\|s - c\| + \|s - a\| \geq \|c - a\|$ должно быть равенство, т.е. $s \in m[a, b] \cap m[b, c] \cap m[c, a]$.

3) $\implies$ 4). Пусть $B(a, r_a)$, $B(b, r_b)$, $B(c, r_c)$ – три попарно пересекающихся шара в X . Возьмем какую-нибудь точку $s \in m[a, b] \cap m[b, c] \cap m[c, a]$. Сеть $\Gamma = [a, s] \cup [b, s] \cup [c, s]$ обладает тем свойством, что расстояние вдоль этой сети между любыми двумя ее точками x, y равно $\|x - y\|$. Поэтому множества $B(a, r_a) \cap \Gamma$, $B(b, r_b) \cap \Gamma$ и $B(c, r_c) \cap \Gamma$ связны и попарно пересекаются. Следовательно (например, по теореме Хелли), эти множества имеют общую точку, а значит, и исходные шары имеют общую точку.

4) $\implies$ 1). Пусть $x_1, x_2, x_3 \in X$. Положим

$$r_i = \frac{1}{2}(\|x_i - x_j\| + \|x_i - x_k\| - \|x_j - x_k\|), \quad i = 1, 2, 3, \quad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}.$$

Поскольку $r_i + r_j = \|x_i - x_j\|$, шары $B(x_i, r_i)$, $i = 1, 2, 3$, попарно пересекаются, а значит, имеют общую точку s . Длина сети $\bigcup_{i=1}^3 [x_i, s]$ не превосходит

$$r_1 + r_2 + r_3 = \frac{1}{2}P(x_1, x_2, x_3) = |\text{mf}|(\{x_1, x_2, x_3\}),$$

т.е. X реализует минимальное заполнение для $\{x_1, x_2, x_3\}$.

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть действительное банахово пространство X обладает свойством 3.2.I.P. Тогда для всякого четырехточечного множества $M_4 \subset X$ справедливо равенство

$$|\text{smt}|(M_4, X) = \frac{1}{2}(|\text{st}|(M_4, X) + \min(M_4)), \quad (3.1)$$

где $\min(M_4)$ определяется так же, как в (2.2).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\varepsilon > 0$. Возьмем точку $s \in X$ со свойством

$$\sum_{k=1}^4 \|x_k - s\| < |\text{st}|(M_4, X) + \varepsilon.$$

Без ограничения общности считаем, что $\min(M_4) = \|x_1 - x_2\| + \|x_3 - x_4\|$. Рассмотрим какие-нибудь $s' \in \text{st}(\{x_1, x_2, s\}, X)$ и $s'' \in \text{st}(\{x_3, x_4, s\}, X)$. Тогда сеть, состоящая из отрезков $[x_1, s']$, $[x_2, s']$, $[s', s]$, $[s, s'']$, $[s'', x_3]$, $[s'', x_4]$, соединяет M_4 и имеет длину

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}P(x_1, x_2, s) + \frac{1}{2}P(x_3, x_4, s) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^4 \|x_k - s\| + \|x_1 - x_2\| + \|x_3 - x_4\| \right) \\ &< \frac{1}{2}(|\text{st}|(M_4, X) + \varepsilon + \min(M_4)). \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности ε получаем знак “ $\leq$ ” в формуле (3.1).

Пусть теперь сеть-дерево Γ соединяет M_4 в X и $|\Gamma| < |\text{smt}|(M_4, X) + \varepsilon$. Возьмем на Γ точку s так, чтобы она разбила Γ на два поддерева Γ_1 и Γ_2 ,

$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{s\}$, каждое из которых содержало бы ровно две точки из M_4 . Пусть, скажем, Γ_1 содержит x_i и x_j , а Γ_2 содержит x_l и x_m . Тогда

$$\begin{aligned} |\text{smt}|(M_4, X) + \varepsilon &> |\Gamma| = |\Gamma_1| + |\Gamma_2| \geq |\text{st}|(\{x_i, x_j, s\}, X) + |\text{st}|(\{x_l, x_m, s\}, X) \\ &= \frac{1}{2}P(x_i, x_j, s) + \frac{1}{2}P(x_l, x_m, s) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^4 \|x_k - s\| + \|x_i - x_j\| + \|x_l - x_m\| \right) \\ &\geq \frac{1}{2}(|\text{st}|(M_4, X) + \min(M_4)). \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности ε получаем знак “ $\geq$ ” в (3.1).

Теорема доказана.

Из теоремы 2 и формулы (2.2) минимального заполнения для четырехточечного метрического пространства следует, что банахово пространство X со свойством 3.2.I.P., вообще говоря, не реализует минимальные заполнения для четверок своих точек. Приведем соответствующий пример.

ПРИМЕР 1. В пространстве l_1^3 для множества

$$M_4 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\}$$

имеет место равенство $|\text{smt}|(M_4, l_1^3) = \frac{5}{4}|\text{mf}|(M_4)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все попарные расстояния в этом множестве M_4 равны 2, поэтому по формуле (2.2) получаем $|\text{mf}|(M_4) = \frac{1}{2}(4 + 4) = 4$. Множество $\text{st}(M_4, l_1^3)$ состоит из всех точек (t_1, t_2, t_3) , для которых $t_j \in [0, 1]$, поэтому $|\text{st}|(M_4, l_1^3) = 6$, и по теореме 2 получаем $|\text{smt}|(M_4, l_1^3) = \frac{1}{2}(6 + 4) = 5$.

Доказательство окончено.

Интересно, что для четверки $\widetilde{M}_4 \subset l_1^3$, состоящей из точек $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ и изометричной указанной в примере 1 четверке M_4 (все попарные расстояния также равны 2), имеет место равенство $|\text{smt}|(\widetilde{M}_4, l_1^3) = |\text{mf}|(\widetilde{M}_4) = 4$, т.е. минимальное заполнение реализуется.

§ 4. Характеризация пространства L_1 в терминах точек Штейнера

Среди действительных банаховых пространств, обладающих свойством 3.2.I.P., пространства $L_1(\mu)$ выделяются тем, что в каждом из них для всякой тройки точек точка Штейнера единственна. В самом деле, множество $\text{st}(\{f_1, f_2, f_3\}, L_1(E, \Sigma, \mu))$ состоит из единственной функции s , *средней* для функций f_1, f_2, f_3 (для почти всех $t \in E$ значение $s(t)$ является средним из значений $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$). Оказывается, это свойство единственности точки Штейнера характеризует пространства $L_1(\mu)$ в классе пространств из теоремы 1.

ТЕОРЕМА 3. *Для действительного банахова пространства X следующие условия эквивалентны:*

1) для всяких трех точек $a, b, c \in X$ существует единственная точка $s = st(a, b, c)$, для которой выполнено равенство

$$\|s - a\| + \|s - b\| + \|s - c\| = \frac{1}{2}P(a, b, c);$$

2) для всяких трех точек $a, b, c \in X$ пересечение $m[a, b] \cap m[b, c] \cap m[c, a]$ одноточечно;

3) X изометрически изоморфно некоторому пространству $L_1(\mu)$.

Конечно, это не первая теорема, характеризующая пространство L_1 во “внутренне-метрических” терминах (см., например, теорему 3.10 в [16]). Это и не первая теорема, в которой класс банаховых пространств характеризуется в терминах точек Штейнера – через них уже охарактеризованы гильбертовы пространства [20].

Теорема 3 может быть (нетривиально) сведена к следствию 3.8 работы [16]. Мы приведем прямое

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность условий 1) и 2) доказывается так же, как в теореме 1. Импликация 3) $\implies$ 1) уже отмечалась выше.

Для доказательства 1) $\implies$ 3) покажем, что при условии 1) пространство X удовлетворяет условиям следующего утверждения, характеризующего пространство L_1 в классе банаховых решеток.

ТЕОРЕМА D (см. [21], [22; гл. 1, § b]). Пусть X – банахова решетка со свойством

$$x, y \in X, x \wedge y = 0 \implies \|x + y\| = \|x\| + \|y\|. \quad (4.1)$$

Тогда X изометрически изоморфно (с сохранением порядка) некоторому пространству $L_1(\mu)$.

Для сведения теоремы 3 к теореме D надо сделать из пространства X банахову решетку, т.е. ввести на X частичный порядок, удовлетворяющий аксиомам (см., например, [22; гл. 1, § a]):

а) из $x \leq y$ следует $x + z \leq y + z$ для всех $x, y, z \in X$;

б) если вектор $x \geq 0$ и число $\lambda \geq 0$, то $\lambda x \geq 0$;

с) для всяких $x, y \in X$ существует точная верхняя грань $x \vee y$ ($x \leq x \vee y$, $y \leq x \vee y$, и для любого z $z \geq x$, $z \geq y$ выполнено $z \geq x \vee y$); из существования $x \vee y$ вытекает и существование точной нижней грани $x \wedge y$, которая определяется аналогично и участвует в свойстве (4.1) в теореме D;

д) из $|x| \leq |y|$ следует $\|x\| \leq \|y\|$ (здесь $|x| := x \vee (-x)$).

Кроме того, вводимый порядок должен удовлетворять условию (4.1) теоремы D. Возьмем функционал $f_0 \in S(X_0^*)$, грань $J(f_0) = \{x : f_0(x) = 1\} \cap S(X)$ которого максимальна (т.е. не существует такого функционала $f_0 \in S(X_0^*)$, что его грань $J(f)$ содержит $J(f_0)$ как собственное подмножество; существование функционалов с максимальной гранью нетрудно доказать с помощью леммы Цорна).

Введем на X частичный порядок

$$x \geq y \iff f_0(x - y) = \|x - y\|.$$

Для этого порядка аксиомы а) и б) банаховой решетки очевидно выполняются. Свойство (4.1) из теоремы D также выполнено: при $x, y \geq 0$ (что слабее, чем $x \wedge y = 0$) имеем $\|x + y\| \geq f_0(x + y) = f_0(x) + f_0(y) = \|x\| + \|y\|$, что вместе с неравенством треугольника дает равенство $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$.

Осталось проверить аксиомы с) и d).

ЛЕММА 1. *Для всякого $x \in X$ существует единственный элемент x^+ такой, что $x^+ \geq 0$, $x^+ \in m[0, x]$ и*

$$\|x^+\| = \sup\{\|u\| : u \geq 0, u \in m[0, x]\} =: p(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем два элемента $u, v \in m[0, x]$, $u \geq 0$, $v \geq 0$. Пусть $w = \text{st}(x, u + v, 0)$. Имеем $w \in m[0, x]$ и $w \geq 0$ (поскольку $w \in m[0, u + v]$ и $u + v \geq 0$).

Пусть $w' = \text{st}(x, u + v, u)$. Докажем, что $w = w'$. Во-первых, $w' \in m[x, u + v]$ в силу своего определения. Во-вторых,

$$\begin{aligned} \|w'\| + \|w' - x\| &= \|w'\| + \|x - u\| - \|u - w'\| = \|w'\| + \|x\| - \|u\| - \|u - w'\| \\ &\leq \|w'\| + \|x\| - \|w'\| = \|x\|, \end{aligned}$$

откуда $w' \in m[0, x]$. В-третьих, из $w' \in m[u, u + v]$ и $u \in m[0, u + v]$ следует $w' \in m[0, u + v]$.

Итак, $w' \in m[x, u + v] \cap m[0, x] \cap m[0, u + v]$, т.е. $w' = \text{st}(0, u + v, x) = w$ (именно здесь используется единственность точки Штейнера).

Из доказанного равенства $w = w'$ следует, что $w \in m[u, u + v]$, откуда $w \geq u$.

Аналогично доказывается, что $w \geq v$.

Таким образом, $w \in m[0, x]$, $w \geq 0$, $w \geq u$, $w \geq v$. Следовательно,

$$\|u - v\| \leq \|w - u\| + \|w - v\| = \|w\| - \|u\| + \|w\| - \|v\| \leq 2p(x) - \|u\| - \|v\|.$$

Это неравенство показывает, что всякая последовательность $u_n \in X$ со свойствами $u_n \geq 0$, $u_n \in m[0, x]$, $\|u_n\| \rightarrow p(x)$ фундаментальна и сходится к искомому элементу x^+ .

Лемма доказана.

Положим $x^- = -(-x)^+$. Нетрудно видеть, что $x^- \leq 0$ и $x^- \in m[0, x]$, а также что x^- имеет наибольшую норму среди всех векторов u со свойствами $u \leq 0$, $u \in m[0, x]$.

ЛЕММА 2. *Для всякого вектора $x \in X$ справедливо равенство*

$$\|x\| = \|x^+\| + \|x^-\| + \|x - x^+ - x^-\|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $a = \text{st}(x^+, x^-, x)$. Из $a \in m[x^-, x]$ следует, что $a - x^- \in m[0, x]$, а из $a \in m[x^-, x^+]$ следует, что $a - x^- \geq 0$. Таким образом,

$$\|a - x^-\| \leq \|x^+\|. \quad (4.2)$$

Аналогично доказывается, что

$$\|a - x^+\| \leq \|x^-\|. \quad (4.3)$$

Отсюда

$$\|x^+\| + \|x^-\| = \|x^+ - x^-\| \leq \|a - x^+\| + \|a - x^-\| \leq \|x^-\| + \|x^+\|,$$

так что в (4.2) и (4.3) имеем равенства.

Поскольку $a - x^- \geq 0$, $a - x^- \in m[0, x]$ и $\|a - x^-\| = \|x^+\| = p(x)$, по лемме 1 получаем $a - x^- = x^+$, а поскольку еще $a \in m[x^+, x]$, имеем

$$\|x\| = \|x^+\| + \|x - x^+\| = \|x^+\| + \|a - x^+\| + \|x - a\| = \|x^+\| + \|x^-\| + \|x - x^+ - x^-\|.$$

Лемма доказана.

Докажем теперь, что $x = x^+ + x^-$ для всякого $x \in X$. Пусть для какого-то $x = x^+ + x^- + x_0$ имеем $x_0 \neq 0$.

Возьмем произвольный элемент $a \geq 0$ и положим $v = \text{st}(x_0, a, 0)$. Имеем $v \in [0, a]$, откуда $v \geq 0$. Из включения $v \in m[0, x_0]$ и леммы 2 получаем

$$\begin{aligned} \|x\| &= \|x_0\| + \|x^+\| + \|x - x_0 - x^+\| = \|v\| + \|x_0 - v\| + \|x^+\| + \|x - x_0 - x^+\| \\ &\geq \|v\| + \|x^+\| + \|x - x^+ - v\| = \|v + x^+\| + \|x - (v + x^+)\|, \end{aligned}$$

т.е. $v + x^+ \in [0, x]$. Кроме того, $v + x^+ \geq 0$, так что по определению x^+ имеем $\|x^+\| = p(x) \geq \|x^+ + v\| = \|x^+\| + \|v\|$, откуда $v = 0$.

Поскольку $v \in m[x_0, a]$ и $v = 0$, имеем

$$\|x_0 - a\| = \|x_0\| + \|a\|. \quad (4.4)$$

Аналогично доказывается, что для всякого $a \geq 0$ справедливо равенство

$$\|x_0 + a\| = \|x_0\| + \|a\|. \quad (4.5)$$

В частности, из (4.4) следует, что единичный вектор $s = x_0/\|x_0\|$ не лежит в грани $J(f_0)$ функционала f_0 (иначе для $a = x_0$ в (4.4) получим $0 = 2\|x_0\|$).

Покажем, что вектор x_0 (а значит, и вектор s) не лежит в замыкании линейного подпространства

$$Y_0 = \{a - b : a, b \in X, a \geq 0, b \geq 0\}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \|x_0 - (a - b)\| &\geq \max\{\|x_0 - a\| - \|b\|, \|x_0 + b\| - \|a\|\} \\ &= \max\{\|x_0\| + \|a\| - \|b\|, \|x_0\| + \|b\| - \|a\|\} = \|x_0\| + \left| \|a\| - \|b\| \right| \geq \|x_0\| \end{aligned}$$

(в первом равенстве использованы равенства (4.4) и (4.5)).

На линейном подпространстве

$$Y = \{u + \lambda s : u \in Y_0, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

определим функционал f_1 равенством $f_1(u + \lambda s) = f_0(u) + \lambda$. Для всякого $y = a - b + \lambda s \in Y$, где $a \geq 0$ и $b \geq 0$, имеем

$$|f_1(y)| = |f_0(a) - f_0(b) + \lambda| = \left| \|a\| - \|b\| + \lambda \right| \leq \left| \|a\| - \|b\| \right| + |\lambda| \leq \|y\|$$

– поскольку, например, при $\|a\| \geq \|b\|$ в силу (4.4) и (4.5) имеем

$$\| \|a\| - \|b\| \| + |\lambda| = \|a\| + |\lambda| - \|b\| = \|a + \lambda s\| - \|b\| \leq \|a - b + \lambda s\| = \|y\|.$$

Таким образом, норма функционала f_1 в Y^* равна 1. Продолжив функционал f_1 без увеличения нормы на все пространство X по теореме Хана–Банаха, получим функционал нормы 1, опорная грань которого на сфере $S(X)$ содержит грань $J(f_0)$ и еще вектор s , что противоречит максимальности грани $J(f_0)$.

Итак, $x = x^+ + x^-$ для всякого $x \in X$.

Положим

$$|x| = x^+ - x^-, \quad x \vee y = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2}$$

и проверим оставшиеся аксиомы с) и d) банаховой решетки (равенство $|x| = x \vee (-x)$ для так определенных операций $|\cdot|$ и $\vee$, очевидно, выполнено).

Имеем

$$\| |x| \| = f_0(|x|) = f_0(x^+) - f_0(x^-) = \|x^+\| + \|x^-\| = \|x\| \quad (4.6)$$

(последнее равенство по лемме 2), откуда следует справедливость аксиомы d):

$$|x| \leq |y| \implies \|x\| = \| |x| \| \leq \| |y| \| = \|y\|.$$

Далее, если какой-то элемент $z \in X$ удовлетворяет неравенствам $z \geq x$, $z \geq y$ и $z \leq x \vee y$, то

$$(z - x) + (z - y) \leq 2(x \vee y) - x - y = |x - y|, \quad (4.7)$$

откуда

$$\|z - x\| + \|z - y\| = f_0((z - x) + (z - y)) \leq f_0(|x - y|) = \| |x - y| \| = \|x - y\|$$

(последнее равенство – в силу (4.6)), что вместе с неравенством треугольника дает равенство в (4.7), а значит, и равенство $z = x \vee y$. Таким образом, определенный выше элемент $x \vee y$ – действительно точная верхняя грань.

Теорема доказана.

§ 5. Пространства, реализующие минимальные заполнения

ТЕОРЕМА 4. *Для действительного банахова пространства X следующие условия эквивалентны:*

- 1) X реализует минимальное заполнение для всякого конечного набора своих точек;
- 2) X реализует минимальное заполнение для всякого набора из четырех своих точек;
- 3) X предуально к L_1 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) $\implies$ 2) очевидно.

2) $\implies$ 3). Пространство X реализует минимальное заполнение для всякой тройки своих точек (всякую тройку можно считать четверкой с двумя склеенными точками). По теореме 1 пространство X обладает свойством 3.2.I.P.

Предположим, что X не обладает свойством 4.2.I.P. Тогда по теореме С для всякого $\varepsilon > 0$ найдется линейное вложение $A: l_1^3 \rightarrow X$ со свойствами

$$\|x\|_{l_1^3} \leq \|Ax\|_X \leq (1 + \varepsilon)\|x\|_{l_1^3}, \quad x \in l_1^3,$$

и линейный проектор $P: X \rightarrow A(l_1^3)$ с $\|P\| \leq 1 + \varepsilon$.

Возьмем в l_1^3 четырехточечное множество M_4 из примера 1. По условию множество $A(M_4)$ затягивается в X кратчайшей сетью Γ , длина которой $|\Gamma| = |\text{mf}|(A(M_4)) \leq (1 + \varepsilon)|\text{mf}|(M_4)$ (из формулы (2.2) и свойств оператора A). Тогда сеть $P(\Gamma)$ затягивает $A(M_4)$ в $A(l_1^3)$ и имеет длину не более чем $(1 + \varepsilon)|\Gamma| \leq (1 + \varepsilon)^2|\text{mf}|(M_4)$. В таком случае сеть $A^{-1}(P(\Gamma))$, затягивающая M_4 в самом l_1^3 , имеет длину также не больше чем $(1 + \varepsilon)^2|\text{mf}|(M_4)$. Но

$$|A^{-1}(P(\Gamma))| \geq |\text{smt}|(M_4, l_1^3) = \frac{5}{4}|\text{mf}|(M_4),$$

и при $(1 + \varepsilon)^2 < \frac{5}{4}$ получается противоречие.

3) $\implies$ 1). Пусть X предуально к L_1 . Докажем индукцией по $n \geq 3$, что X реализует минимальные заполнения для всякого набора из n своих точек. Для $n = 3$ это верно, поскольку X обладает свойством 3.2.I.P.

Пусть $n \geq 4$, X реализует минимальное заполнение для всякого своего $(n-1)$ -точечного подмножества и $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X$. Возьмем какое-нибудь минимальное заполнение $\Gamma_0 \in \text{mf}(M)$.

Нам понадобится

ЛЕММА 3 (о склейке метрических пространств). Пусть два метрических пространства (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2) как множества имеют непустую общую часть $X_1 \cap X_2$, на которой метрики ρ_1 и ρ_2 совпадают, причем $X_1 \cap X_2$ полно относительно этой метрики. Тогда существует метрика на $X_1 \cup X_2$, сужение которой на X_k совпадает с ρ_k , $k = 1, 2$.

Эта лемма без условия полноты $X_1 \cap X_2$ и для полуметрик вместо метрик следует из упражнения 3.1.13 книги [23].

Искомая метрика на $X_1 \cup X_2$ определяется так: $\rho(x_1, x_2) := \rho_k(x_1, x_2)$ при $x_1, x_2 \in X_k$, $k = 1, 2$, и

$$\rho(x_1, x_2) := \inf \{ \rho_1(x_1, z) + \rho_2(z, x_2) : z \in X_1 \cap X_2 \}$$

при $x_1 \in X_1 \setminus X_2$ и $x_2 \in X_2 \setminus X_1$. Новые расстояния, определяемые этой формулой, положительны в силу полноты $X_1 \cap X_2$, а неравенства треугольников для треугольников, содержащих эти новые расстояния, нетрудно проверить.

Продолжим доказательство теоремы.

По лемме 3 на $X^{**} \cup \Gamma_0$ можно так определить метрику, что все расстояния внутри X^{**} и внутри Γ_0 сохранятся. Вложим полученное метрическое пространство $X^{**} \cup \Gamma_0$ изометрично в какое-нибудь универсальное банахово пространство C . При этом X^{**} вкладывается линейно по теореме Мазура–Улама. По теореме А X^{**} 1-дополняемо в C , так что сеть $\Gamma_0 \subset C$ можно спроектировать в сеть $\Gamma \subset X^{**}$, затягивающую множество M в X^{**} и имеющую ту же длину $|\text{mf}|(M)$ (меньше длина сети уже не может быть).

На дереве Γ возьмем точку p , разбивающую его на два дерева Γ_1 и Γ_2 ($\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{p\}$), каждое из которых содержит не более $(n-2)$ точек из M . Положим $M_i = M \cap \Gamma_i$, $i = 1, 2$.

В пространстве X^{**} рассмотрим замкнутые шары с центрами $x_k \in M$ и радиусами $\|x_k - p\|_{X^{**}}$. Эти шары имеют непустое пересечение в X^{**} (точка p лежит в каждом из них), следовательно, по теореме В они имеют общую точку $p' \in X$.

По индуктивному предположению X реализует $\text{mf}(M_1 \cup \{p'\})$ в виде сети Γ'_1 , длина которой $|\text{mf}|(M_1 \cup \{p'\}) \leq |\text{mf}|(M_1 \cup \{p\}) = |\Gamma_1|$ (поскольку все расстояния в множестве $M_1 \cup \{p'\}$ не больше соответствующих расстояний в множестве $M_1 \cup \{p\}$). Аналогично, X реализует сеть $\Gamma'_2 \in \text{mf}(M_2 \cup \{p'\})$ и $|\Gamma'_2| \leq |\Gamma_2|$. Отсюда

$$|\Gamma'_1 \cup \Gamma'_2| \leq |\Gamma_1 \cup \Gamma_2| = |\Gamma| = |\text{mf}|(M),$$

и, следовательно, X реализует минимальное заполнение для множества M .

Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. В пространстве $C(Q)$ действительных функций, непрерывных на хаусдорфовом компакте Q , для любого конечного множества $M \subset C(Q)$ существует кратчайшая сеть.

Это следствие отвечает на вопрос, сформулированный в работе [6].

§ 6. Минимальные заполнения типа звезды

Помимо общих минимальных заполнений, в работе [2] вводятся еще так называемые параметрические минимальные заполнения конечных метрических пространств (M, ρ) , в определении которых изометрично вложенное пространство $\varphi(M)$ затягивается в пространстве Y кратчайшей сетью заданного типа. Один из таких типов, специально рассматриваемый в [2], получил название *звезды*: рассматриваемые сети параметризуются графами-деревьями, в которых одна вершина соединена со всеми остальными. Дадим точное определение в терминах точек Штейнера.

Число

$$|\text{st}|(M) = \inf \{ |\text{st}|(\varphi(M), Y) : \varphi : M \rightarrow Y \},$$

где нижняя грань берется по всем изометричным вложениям пространства M в различные метрические пространства Y , называется длиной минимального заполнения типа звезды множества M .

Для трехточечных метрических пространств M_3 величина $|\text{st}|(M_3)$ совпадает с $|\text{mf}|(M_3)$ и равна полупериметру треугольника с вершинами из M_3 .

Для четырехточечных метрических пространств M_4 нетрудно показать, что $|\text{st}|(M_4)$ совпадает с определенной в формуле (2.2) величиной $\max(M_4)$.

Будем говорить, что метрическое пространство (X, ρ) реализует минимальное заполнение типа звезды для своего конечного подмножества M , если $|\text{st}|(M, X) = |\text{st}|(M)$ и множество $\text{st}(M, X)$ не пусто.

ТЕОРЕМА 5. Для действительного банахова пространства X следующие свойства эквивалентны:

- 1) X реализует минимальное заполнение типа звезды для всякого конечного набора своих точек;
- 2) X реализует минимальное заполнение типа звезды для всех троек и четверок своих точек;
- 3) X предуально к L_1 .

Эта теорема аналогична упоминавшемуся в § 2 результату Рао [18] о чебышевских центрах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1) $\implies$ 2) очевидно.

2) $\implies$ 3). Пусть $M_4 = \{a, b, c, d\} \subset X$, $s \in \text{st}(M_4, X)$. По условию

$$|\text{st}|(M_4, X) = \max(M_4) = \|a - b\| + \|c - d\|$$

(последнее равенство – без ограничения общности). Пусть $\min(M_4) = \|a - c\| + \|b - d\|$. Возьмем какие-нибудь $s_1 \in \text{st}(\{a, c, s\}, X)$ и $s_2 \in \text{st}(\{b, d, s\}, X)$. Тогда сеть

$$[a, s_1] \cup [c, s_1] \cup [s_1, s] \cup [s, s_2] \cup [s_2, b] \cup [s_2, d]$$

соединяет M_4 в X и имеет длину

$$\begin{aligned} |\text{st}|(\{a, c, s\}, X) + |\text{st}|(\{b, d, s\}, X) &= \frac{1}{2}(P(a, c, s) + P(b, d, s)) \\ &= \frac{1}{2}(\|a - c\| + \|b - d\| + |\text{st}|(M_4, X)) = \frac{1}{2}(\min(M_4) + \max(M_4)). \end{aligned}$$

Таким образом, в силу формулы (2.2) X реализует минимальное заполнение для всякой четверки своих точек и по теореме 4 X предуально к L_1 .

3) $\implies$ 1). Пусть X предуально к L_1 , $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ – произвольное конечное множество в X . Возьмем какое-нибудь минимальное заполнение $\Gamma_0 \in \text{st}(M)$ типа звезды.

По лемме 3 на $X^{**} \cup \Gamma_0$ можно так определить метрику, что все расстояния внутри X^{**} и внутри Γ_0 сохраняются. Вложим метрическое пространство $X^{**} \cup \Gamma_0$ изометрично в какое-нибудь универсальное банахово пространство C . При этом X^{**} вкладывается линейно по теореме Мазура–Улама. Пространство X^{**} 1-дополняемо в C , так что сеть $\Gamma_0 \subset C$ можно спроектировать в сеть $\Gamma \subset X^{**}$, затачивающую M в X^{**} и имеющую ту же длину $|\text{st}|(M)$. Сеть Γ представляет собой объединение отрезков $[x_k, s]$, где s – некоторая точка из X^{**} .

Замкнутые шары с центрами x_k и радиусами $\|x_k - s\|_{X^{**}}$ имеют общую точку s в X^{**} , а значит, по теореме В они имеют общую точку $s' \in X$. Сеть $\Gamma' = \bigcup_{k=1}^n [x_k, s']$ типа звезды соединяет M в X и имеет длину не больше чем $\sum_{k=1}^n \|x_k - s\| = |\text{st}|(M)$. Следовательно, X реализует минимальное заполнение типа звезды для M .

Теорема доказана.

§ 7. Некоторые задачи

ЗАДАЧА 1. Описать банаховы пространства X , в которых для всякого натурального n величина $|\text{smt}|(\{x_1, \dots, x_n\}, X)$ зависит только от попарных расстояний между точками $x_k \in X$ ($k = 1, \dots, n$).

В класс пространств, обладающих указанным в этой задаче свойством, заведомо входят пространства, предуальные к L_1 , а также гильбертовы (евклидовы) пространства.

Условия задачи 1 можно ослабить, например, так: описать все двумерные банаховы пространства X_2 , в которых указанное в задаче 1 свойство выполнено только для $n = 3$, т.е. для всяких $a, b, c \in X_2$ величина $|\text{st}|(\{a, b, c\}, X_2)$ зависит только от длин сторон треугольника abc . Приведем пример двумерного пространства, не обладающего таким свойством.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим двумерное банахово пространство X_2 , в котором есть два треугольника T и T' с попарно равными сторонами, но $|\text{smt}|(T, X_2) \neq |\text{smt}|(T', X_2)$.

Возьмем двумерное пространство X_2 , единичная сфера в котором – правильный шестиугольник (см. рис. 1). Пусть $T = \{\frac{a-c}{2}, \frac{c-a}{2}, b\}$ (светлые точки на рисунке), $T' = \{a, -a, \frac{b+c}{2}\}$ (темные точки).

Рис. 1

Нетрудно показать, что в каждом из этих треугольников длины сторон равны $\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2$. Для треугольника T пространство X_2 реализует минимальное заполнение с вершиной $\frac{b}{2}$:

$$\left\| \frac{b}{2} - b \right\| + \left\| \frac{b}{2} - \frac{a-c}{2} \right\| + \left\| \frac{b}{2} - \frac{c-a}{2} \right\| = \frac{1}{2} + 1 + 1 = \frac{1}{2}P(T).$$

Если бы у треугольника T' также реализовывалось минимальное заполнение, то в X_2 нашлась бы такая точка p , что

$$\|p - a\| = \|p + a\| = \frac{2 + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}}{2} = 1, \quad \left\| p - \frac{a+c}{2} \right\| = \frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{2} - 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Но первые равенства означают, что $p = 0$, а расстояние от $\frac{a+c}{2}$ до 0 равно 1.

Таким образом, $|\text{smt}|(T', X_2) > \frac{5}{2} = |\text{mf}|(T') = |\text{smt}|(T, X_2)$.

Можно показать, что $\text{st}(T', X_2) \ni 0$, т.е. $|\text{smt}|(T', X_2) = 3$.

Рассмотрение примера закончено.

В связи с теоремой 4 возникает естественный вопрос: во сколько раз величина $|\text{smt}|(M, X)$ может быть больше величины $|\text{mf}|(M)$ для какого-либо конечного множества M в банаховом пространстве X ? Оказывается, не более чем в 2 раза. В работе [2] введено *суботношение Штейнера*

$$\text{ssr}(X) = \inf \left\{ \frac{|\text{mf}|(M)}{|\text{smt}|(M, X)} : M - \text{конечное неодноточечное подмножество в } X \right\}$$

метрического пространства X . В работе [24] показано, что для всякого метрического пространства X справедливы неравенства

$$\frac{1}{2} \leq \text{ssr}(X) \leq 1. \quad (7.1)$$

В этой терминологии теорема 4 описывает банаховы пространства X с $\text{ssr}(X) = 1$ и дополнительным условием существования кратчайших сетей у всех конечных подмножеств.

Правое неравенство в (7.1) очевидно, а левое доказывается достаточно просто. Для всякого X и $M = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ всякая сеть-дерево $\Gamma \in \text{mf}(M)$ имеет обход, при котором каждое ребро в Γ проходится по 2 раза. В этом обходе длина каждой ломаной от вершины x_i до следующей за ней (в порядке обхода) вершины x_j не меньше $\|x_i - x_j\|$. Если L – замкнутая ломаная в X с вершинами только в точках x_k , обходящая эти точки в том же порядке, то получается, что

$$2|\text{mf}|(M) = 2|\Gamma| \geq |L| \geq |\text{smt}|(M, X),$$

откуда и следует левое неравенство в (7.1).

В связи с этим возникает

Задача 2. Существует ли банахово пространство X с $\text{ssr}(X) = \frac{1}{2}$?

Покажем, что указанное в этой задаче равенство не может выполняться для банаховых пространств малых размерностей.

Пусть M – конечное подмножество банахова пространства X размерности d . Возьмем какое-нибудь минимальное заполнение $\Gamma_0 \in \text{mf}(M)$.

По лемме 3 на $X \cup \Gamma_0$ можно так определить метрику, что все расстояния внутри X и внутри Γ_0 сохраняются. Вложим полученное метрическое пространство $X \cup \Gamma_0$ изометрично в какое-нибудь универсальное банахово пространство C . Существует линейный проектор $P: C \rightarrow X$ нормы не больше абсолютной проекционной константы λ_d . Сеть $P(\Gamma_0)$ затыгивает множество M в X и имеет длину не больше $\lambda_d |\Gamma_0|$. Таким образом,

$$|\text{mf}|(M) = |\Gamma_0| \geq \frac{|P(\Gamma_0)|}{\lambda_d} \geq \frac{|\text{smt}|(M, X)}{\lambda_d},$$

откуда $\text{ssr}(X) \geq \frac{1}{\lambda_d}$. Известно [25], что

$$\lambda_2 = \frac{4}{3}, \quad \lambda_3 \leq \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \quad \lambda_4 \leq \frac{3\sqrt{6} + 2}{5}.$$

Эти три числа меньше 2, поэтому для всех не более чем четырехмерных пространств X получается $\text{ssr}(X) > \frac{1}{2}$.

Было бы интересно вычислить величины $\text{ssr}(d) := \inf\{\text{ssr}(X) : \dim X = d\}$. Так, уже можно отметить неравенства

$$\frac{3}{4} \leq \text{ssr}(2) \leq \frac{5}{6}, \quad \frac{2}{\sqrt{5}+1} \leq \text{ssr}(3) \leq \frac{4}{5}.$$

Левые части этих неравенств здесь только что доказаны, а правые – получаются из примеров 2 и 1 соответственно.

Авторы благодарны А. Р. Алимову, Ю. Д. Бураго, А. О. Иванову, А. В. Маринову, П. Папини (P. L. Papini) и А. А. Тужилину за ценные замечания.

Список литературы

- [1] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, *Теория экстремальных сетей*, Современная математика, Институт компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2003, 424 с.
- [2] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, “Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении”, *Матем. сб.*, **203**:5 (2012), 65–118; англ. пер.: A. O. Ivanov, A. A. Tuzhilin, “One-dimensional Gromov minimal filling problem”, *Sb. Math.*, **203**:5 (2012), 677–726.
- [3] Р. С. Исмагилов, “Минимальные поперечники метрических пространств”, *Функц. анализ и его прил.*, **33**:4 (1999), 38–49; англ. пер.: R. S. Ismagilov, “Minimal widths of metric spaces”, *Funct. Anal. Appl.*, **33**:4 (1999), 270–279.
- [4] H. Edelsbrunner, A. Ivanov, R. Karasev, “Current open problems in discrete and computational geometry”, *Модел. и анализ информ. систем*, **19**:5 (2012), 5–17.
- [5] А. О. Иванов, А. А. Тужилин, А. Ю. Еремин, Е. С. Ероховец, З. Н. Овсянников, А. С. Пахомова, О. В. Рублева, Н. П. Стрелкова, Е. И. Филоненко, “Минимальные заполнения псевдометрических пространств”, Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике, **27**, МГУ, М., 2011, 83–105.
- [6] Б. Б. Беднов, Н. П. Стрелкова, “О существовании кратчайших сетей в банаховых пространствах”, *Матем. заметки*, **94**:1 (2013), 46–54; англ. пер.: B. B. Bednov, N. P. Strelkova, “On the existence of shortest networks in Banach spaces”, *Math. Notes*, **94**:1-2 (2013), 41–48.
- [7] А. Л. Гаркави, В. А. Шматков, “О точке Ламе и ее обобщениях в нормированном пространстве”, *Матем. сб.*, **95**(137):2(10) (1974), 272–293; англ. пер.: A. L. Garkavi, V. A. Shmatkov, “On the Lamé point and its generalizations in a normed space”, *Math. USSR-Sb.*, **24**:2 (1974), 267–286.
- [8] L. Veselý, “A characterization of reflexivity in the terms of the existence of generalized centers”, *Extracta Math.*, **8**:2-3 (1993), 125–131.
- [9] M. Baronti, E. Casini, P. L. Papini, “Equilateral sets and their central points”, *Rend. Mat. Appl.* (7), **13**:1 (1993), 133–148.
- [10] P. L. Papini, “Two new examples of sets without medians and centers”, *Top.*, **13**:2 (2005), 315–320.
- [11] П. А. Бородин, “Пример несуществования точки Штейнера в банаховом пространстве”, *Матем. заметки*, **87**:4 (2010), 514–518; англ. пер.: P. A. Borodin, “An example of nonexistence of a Steiner point in a Banach space”, *Math. Notes*, **87**:3-4 (2010), 485–488.
- [12] V. Kadets, “Under a suitable renorming every nonreflexive Banach space has a finite subset without a Steiner point”, *Mat. Stud.*, **36**:2 (2011), 197–200.

- [13] А. Ю. Еремин, “Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства”, *Матем. сб.*, **204**:9 (2013), 51–72; англ. пер.: A. Yu. Eremin, “A formula for the weight of a minimal filling of a finite metric space”, *Sb. Math.*, **204**:9 (2013), 1285–1306.
- [14] A. Grothendieck, “Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L^1 ”, *Canad. J. Math.*, **7**:4 (1955), 552–561.
- [15] J. Lindenstrauss, *Extension of compact operators*, Mem. Amer. Math. Soc., no. 48, 1964, 112 pp.
- [16] Á. Lima, “Intersection properties of balls and subspaces in Banach spaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **227** (1977), 1–62.
- [17] P. Bandyopadhyay, T. S. S. R. K. Rao, “Central subspaces of Banach spaces”, *J. Approx. Theory*, **103**:2 (2000), 206–222.
- [18] T. S. S. R. K. Rao, “Chebyshev centers and centrable sets”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **130**:9 (2002), 2593–2598.
- [19] A. B. Hansen, Á. Lima, “The structure of finite dimensional Banach spaces with the 3.2. intersection property”, *Acta Math.*, **146**:1-2 (1981), 1–23.
- [20] C. Benítez, M. Fernández, M. L. Soriano, “Location of Fermat–Torricelli medians of three points”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **354**:12 (2002), 5027–5038 (electronic).
- [21] S. Kakutani, “Concrete representation of abstract (L) -spaces and the mean ergodic theorem”, *Ann. of Math. (2)*, **42**:2 (1941), 523–537.
- [22] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach spaces*, v. II: *Function spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., **97**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1979, x+243 pp.
- [23] Д. Ю. Бурого, Ю. Д. Бурого, С. В. Иванов, *Курс метрической геометрии*, Институт компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2004, 512 с.
- [24] А. С. Пахомова, “Оценки для суботношения Штейнера и отношения Штейнера–Громова”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, **69**:1 (2014), 17–25; англ. пер.: A. S. Pakhomova, “Estimates of Steiner subratio and Steiner–Gromov ratio”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **69**:1 (2014), 16–23.
- [25] H. König, N. Tomczak-Jaegermann, “Norms of minimal projections”, *J. Funct. Anal.*, **119**:2 (1994), 253–280.

Борислав Борисович Беднов
(Borislav B. Bednov)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: noriiii@inbox.ru

Поступила в редакцию
19.06.2013 и 06.11.2013

Петр Анатольевич Бородин
(Petr A. Borodin)

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова
E-mail: pborodin@inbox.ru