Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. С. Барановский, О стационарном движении вязко-упругой жидкости типа Олдройда, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 6, 3–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8265>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:50:33

УДК 517.958

Е. С. Барановский

О стационарном движении вязкоупругой жидкости типа Олдройда

Рассматривается математическая модель, описывающая стационарное движение вязкоупругой среды типа Олдройда при условии проскальзывания Навье на границе. В реологическом соотношении используется объективная регуляризованная производная Яуманна. Доказана разрешимость соответствующей краевой задачи в слабой постановке. Получена оценка нормы решения через данные задачи. Установлено свойство секвенциальной слабой замкнутости множества решений. Кроме того, в работе дано аналитическое решение краевой задачи, описывающей течение вязкоупругой жидкости в плоском канале при условии проскальзывания на стенках.

Библиография: 13 названий.

Ключевые слова: неньютоновские жидкости, вязкоупругие среды, модель Олдройда, условие проскальзывания Навье, течение в канале.

DOI: 10.4213/sm8265

§ 1. Введение

Хорошо известно, что при изучении течения жидкости важную роль играет постановка краевых условий, т.е. условий, описывающих процессы, происходящие на границе объема жидкости. Экспериментальные данные и теоретические разработки указывают на различные возможности поведения жидкости на границе (см., например, [1]). Наряду с классическим условием прилипания широко используется условие проскальзывания Навье (см. [2])

$$v \cdot n = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad (1.1)$$

$$v_\tau = -\mu(|(Tn)_\tau|) \frac{(Tn)_\tau}{|(Tn)_\tau|} \quad \text{на } \Gamma, \quad (1.2)$$

где v – вектор скорости, n – единичный вектор внешней нормали к границе Γ , $v \cdot n$ – скалярное произведение векторов v , n в $\mathbb{R}^3$, $v_\tau = v - (v \cdot n)n$ – касательная составляющая вектора скорости, T – тензор напряжения, $(Tn)_\tau$ – касательная составляющая вектора Tn , функция $\mu: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ характеризует интенсивность проскальзывания.

В настоящей работе изучается краевая задача, описывающая стационарное течение вязкоупругой среды типа Олдройда с объективной регуляризованной производной Яуманна при условиях проскальзывания (1.1), (1.2) на границе. Модель Олдройда¹ – одна из основных моделей неньютоновской гидродинамики (см. [3], [4]). Эта модель и различные ее модификации описывают течение

¹В литературе эту модель иногда называют моделью Джеффриса.

таких сред, как полимеры и их растворы, битумы, смазки, бетон, земная кора, тесто, кровь и др.

На основе принципа Лере–Шаудера в работе доказана разрешимость рассматриваемой краевой задачи в слабой постановке. Получена оценка нормы решения через данные задачи. Установлено свойство секвенциальной слабой замкнутости множества решений. Кроме того, в работе дано аналитическое решение краевой задачи, описывающей течение вязкоупругой жидкости в плоском канале при условии проскальзывания на стенках.

Отметим, что существование слабых решений краевой задачи для стационарных уравнений модели Олдройда с субстанциональной производной в реологическом соотношении при условии прилипания на границе было доказано Д. А. Воротниковым (см. [5]). Разрешимость соответствующей неоднородной задачи Дирихле без каких-либо ограничений на величины данных была установлена автором (см. [6]). Результаты о разрешимости начально-краевой задачи (с однородными краевыми условиями) для уравнений модели Олдройда с объективной регуляризованной производной Яуманна получены в работе [7]. Теорема о существовании и единственности локального по времени решения начально-краевой задачи для уравнений модели с объективной производной Олдройда доказана Гильопе и Со (см. [8]).

§ 2. Модель Олдройда движения вязкоупругой среды

Как известно, общие уравнения движения сплошной несжимаемой среды имеют вид (см., например, [9])

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) + \nabla p - \operatorname{Div} \sigma = \rho f, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} v = 0. \quad (2.2)$$

Здесь $n = 2, 3$ – размерность пространства, $x_1, \dots, x_n$ – координаты в пространстве, t – время, $v = v(x, t)$ – вектор скорости, $p = p(x, t)$ – давление, $f = f(x, t)$ – известная плотность внешних сил, ρ – плотность среды (далее для простоты будем считать, что $\rho = 1$), $\sigma = \sigma(x, t)$ – тензор касательных напряжений (симметрическая матрица), $\operatorname{Div} \sigma$ – вектор с координатами

$$(\operatorname{Div} \sigma)_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}.$$

Для того чтобы описать движение конкретной среды, к системе (2.1), (2.2) добавляют дополнительные уравнения. Обычно используют соотношения между тензором касательных напряжений σ и тензором скоростей деформации $\mathcal{E}(v)$, компоненты которого определяются по формуле

$$\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Связь между тензорами σ и $\mathcal{E}$ называется уравнением состояния или реологическим соотношением.

Модель Олдройда движения вязкоупругой среды (с объективной производной Яуманна) предполагает следующее реологическое соотношение (см. [4]):

$$\sigma + \lambda_1 \frac{D\sigma}{Dt} = 2\eta \left(\mathcal{E} + \lambda_2 \frac{D\mathcal{E}}{Dt} \right). \quad (2.3)$$

Здесь $\eta > 0$, $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, η – вязкость среды, λ_1 – время релаксации, λ_2 – время запаздывания, символ $\frac{D}{Dt}$ обозначает производную Яуманна

$$\frac{D\sigma}{Dt} = \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + \sigma W - W\sigma,$$

где W – тензор завихренности

$$W_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$

Известно, что реологическое соотношение (2.3) удовлетворяет принципу объективности поведения материала. Этот принцип выражает тот факт, что свойства материала не зависят от наблюдателя. Математически это означает, что уравнение (2.3) не меняет форму при изменении системы отсчета.

В соответствии с [7] мы будем использовать следующую регуляризацию (2.3):

$$\begin{aligned} \sigma + \lambda_1 \left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + \sigma W_\rho - W_\rho \sigma \right) \\ = 2\eta \left(\mathcal{E} + \lambda_2 \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i} + \mathcal{E} W_\rho - W_\rho \mathcal{E} \right) \right), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где W_ρ – усредненный тензор завихренности

$$W_\rho(v)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x - y) W(v)(y, t) dy, \quad (2.5)$$

ядро усреднения $\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкая функция с компактным носителем такая, что $\rho(x) = \rho(y)$, если $|x| = |y|$, и

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx = 1.$$

Нетрудно проверить (см. [7]), что реологическое соотношение (2.4), так же как и (2.3), удовлетворяет принципу объективности.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае, когда рассматривается течение в области Ω , в формуле (2.5) будем полагать, что $v(x, t) = 0$, если $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$.

§ 3. Постановка задачи и основной результат работы

Рассмотрим краевую задачу, описывающую стационарное течение вязкоупругой среды с реологическим соотношением (2.4) в ограниченной области

при условии проскальзывания Навье на границе

$$\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \nabla p - \operatorname{Div} \sigma = f, \quad x \in \Omega, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma + \lambda_1 \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} + \sigma W_\rho - W_\rho \sigma \right) \\ = 2\eta \left(\mathcal{E} + \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x_i} + \mathcal{E} W_\rho - W_\rho \mathcal{E} \right) \right), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3.3)$$

$$v \cdot n = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (3.4)$$

$$v_\tau = -\mu(|(\operatorname{Tn})_\tau|) \frac{(\operatorname{Tn})_\tau}{|(\operatorname{Tn})_\tau|}, \quad x \in \Gamma. \quad (3.5)$$

Здесь Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с локально-липшицевой границей Γ , вектор $n = n(x)$ – единичный вектор внешней нормали к границе Γ в точке x , вектор $v_\tau = v - (v \cdot n)n$ – касательная составляющая вектора скорости, $T = -pI + \sigma$ – тензор напряжения, $(\operatorname{Tn})_\tau$ – касательная составляющая вектора Tn , функция $\mu: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ характеризует интенсивность проскальзывания.

Предположим, что функция μ удовлетворяет следующим условиям:

i) существуют константы $\kappa_0, \kappa_1 > 0$ такие, что

$$\frac{t}{\kappa_0} \leq \mu(t) \leq \frac{t}{\kappa_1};$$

ii) функция μ непрерывна и строго монотонна.

Задачу (3.1)–(3.5) мы будем изучать в слабой (обобщенной) постановке. Чтобы сформулировать определение слабого решения и доказать разрешимость задачи (3.1)–(3.5), нам потребуются следующие функциональные пространства.

$M^{n \times n}$ – пространство матриц размера $n \times n$ со скалярным произведением

$$(A, B)_{M^{n \times n}} = \sum_{i,j=1}^n A_{ij} B_{ij}$$

для матриц $A = (A_{ij})$, $B = (B_{ij})$.

$M_s^{n \times n}$ – подпространство $M^{n \times n}$, состоящее из симметрических матриц.

Пусть F – одно из конечномерных пространств $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $M^{n \times n}$, $M_s^{n \times n}$. Мы будем использовать стандартные обозначения $L_p(\Omega, F)$, $H^m(\Omega, F) = W_2^m(\Omega, F)$ для пространств Лебега и Соболева функций со значениями в F . Скалярное произведение в L_2 обозначим $(\cdot, \cdot)$.

Пусть $C_0^\infty(\Omega, F)$ – пространство C^∞ -гладких функций $v: \Omega \rightarrow F$ с носителем в Ω .

Пространство $H_0^1(\Omega, F)$ определим как замыкание $C_0^\infty(\Omega, F)$ в $H^1(\Omega, F)$. Скалярное произведение в $H_0^1(\Omega, F)$ определим следующим образом:

$$(v, w)_{H_0^1(\Omega, F)} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_i} \right).$$

Норма, соответствующая скалярному произведению $(\cdot, \cdot)_{H_0^1(\Omega, F)}$, эквивалентна норме, индуцированной из $H^1(\Omega, F)$.

При изучении задачи (3.1)–(3.5) нам потребуется корректно определить сужение функции $v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ на Γ . Для этого мы будем использовать оператор следа (см., например, [10]) – линейный непрерывный и сюръективный оператор

$$\gamma_\Gamma: H^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma, \mathbb{R}^n)$$

такой, что $\gamma_\Gamma v = v|_\Gamma$, когда $v \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Сужение функции $v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ на Γ определим по формуле $v|_\Gamma = \gamma_\Gamma v$.

Введем пространство

$$X(\Omega, \mathbb{R}^n) = \{v \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^n) : \operatorname{div} v = 0, v|_\Gamma \cdot n = 0\}.$$

Скалярное произведение в $X(\Omega, \mathbb{R}^n)$ определим по формуле

$$(v, w)_{X(\Omega, \mathbb{R}^n)} = (\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(w)) + \alpha \int_\Gamma v_\tau \cdot w_\tau d\Gamma,$$

где $\alpha = \varkappa_1 \lambda_1 / (2\eta \lambda_2)$, $\varkappa_1$ – константа из условия i). Целесообразность такого выбора значения α станет очевидной при выводе априорных оценок решений (см. § 4, доказательство леммы 1).

В силу неравенства Корна (см, например, [11]) норма, соответствующая скалярному произведению $(\cdot, \cdot)_{X(\Omega, \mathbb{R}^n)}$, эквивалентна норме, индуцированной из $H^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Через $\nabla \varphi$ обозначим матрицу Якоби функции $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Пусть $f \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Слабым решением задачи (3.1)–(3.5) назовем пару функций $(v, \sigma) \in X(\Omega, \mathbb{R}^n) \times L_2(\Omega, M_s^{n \times n})$ такую, что

$$-\sum_{i=1}^n (v_i v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}) + (\sigma, \nabla \varphi) + \int_\Gamma \frac{\mu^{-1}(|v_\tau|)}{|v_\tau|} v_\tau \cdot \varphi_\tau d\Gamma = (f, \varphi), \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} & (\sigma, \Phi) - \lambda_1 \sum_{i=1}^n \left(v_i \sigma, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + \lambda_1 (\sigma W_\rho - W_\rho \sigma, \Phi) \\ & = -2\eta(v, \operatorname{Div} \Phi) - 2\eta \lambda_2 \left(\sum_{i=1}^n v_i \mathcal{E}(v), \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + 2\eta \lambda_2 (\mathcal{E} W_\rho - W_\rho \mathcal{E}, \Phi) \end{aligned} \quad (3.7)$$

для любых $\varphi \in X(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Phi \in C_0^\infty(\Omega, M_s^{n \times n})$.

Такая постановка задачи соответствует стандартному подходу при определении слабых (в другой терминологии – обобщенных) решений краевых задач гидродинамики, в том числе краевых задач с условием проскальзывания (см., например, [11]). Поясним, как возникают соотношения (3.6), (3.7). Пусть тройка функций (v, σ, p) – классическое решение задачи (3.1)–(3.5). Умножим скалярно в L_2 равенство (3.1) на $\varphi \in X(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$\sum_{i=1}^n \left(v_i \frac{\partial v}{\partial x_i}, \varphi \right) + (\nabla p, \varphi) - (\operatorname{Div} \sigma, \varphi) = (f, \varphi).$$

С учетом соотношения $T = -pI + \sigma$ имеем

$$\sum_{i=1}^n \left(v_i \frac{\partial v}{\partial x_i}, \varphi \right) - (\operatorname{Div} T, \varphi) = (f, \varphi).$$

Используя правило интегрирования по частям, получим

$$- \sum_{i=1}^n \left(v_i v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + (T, \nabla \varphi) - \int_{\Gamma} T n \cdot \varphi \, d\Gamma = (f, \varphi). \quad (3.8)$$

Так как $\varphi \cdot n = 0$ при $x \in \Gamma$, то

$$\int_{\Gamma} T n \cdot \varphi \, d\Gamma = \int_{\Gamma} (T n)_{\tau} \cdot \varphi_{\tau} \, d\Gamma.$$

Из соотношения (3.5) следует, что

$$(T n)_{\tau} = - \frac{\mu^{-1}(|v_{\tau}|)}{|v_{\tau}|} v_{\tau}.$$

Поэтому

$$\int_{\Gamma} T n \cdot \varphi \, d\Gamma = - \int_{\Gamma} \frac{\mu^{-1}(|v_{\tau}|)}{|v_{\tau}|} v_{\tau} \cdot \varphi_{\tau} \, d\Gamma. \quad (3.9)$$

Кроме того, нетрудно проверить, что

$$(T, \nabla \varphi) = (\sigma, \nabla \varphi). \quad (3.10)$$

С учетом (3.9), (3.10) равенство (3.8) принимает вид

$$\sum_{i=1}^n \left(v_i v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + (\sigma, \nabla \varphi) + \int_{\Gamma} \frac{\mu^{-1}(|v_{\tau}|)}{|v_{\tau}|} v_{\tau} \cdot \varphi_{\tau} \, d\Gamma = (f, \varphi).$$

Таким образом, мы получили соотношение (3.6) из определения слабых решений задачи (3.1)–(3.5). Аналогично, умножая скалярно в L_2 равенство (3.2) на $\Phi \in C_0^{\infty}(\Omega, M_s^{n \times n})$ и преобразуя полученные выражения по правилу интегрирования по частям, приходим к равенству (3.7).

Сформулируем теперь основной результат работы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия i), ii). Тогда

1) задача (3.1)–(3.5) имеет по крайней мере одно слабое решение, удовлетворяющее оценке

$$\begin{aligned} 2\eta^2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 \| \mathcal{E}(v) \|_{L_2(\Omega, M^{n \times n})}^2 + \eta \kappa_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \| v_{\tau} \|_{L_2(\Gamma, \mathbb{R}^n)}^2 \\ + \frac{\lambda_2}{2(\lambda_1 - \lambda_2)} \| S \|_{L_2(\Omega, M^{n \times n})}^2 \leq \| f \|_{[X(\Omega, \mathbb{R}^n)]^*}^2, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $S = \sigma - 2\eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathcal{E}(v)$ – упругая компонента тензора касательных напряжений;

2) множество слабых решений задачи (3.1)–(3.5) секвенциально слабо замкнуто в пространстве $X(\Omega, \mathbb{R}^n) \times L_2(\Omega, M_s^{n \times n})$.

§ 4. Доказательство теоремы

Сначала докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Обозначим

$$\theta_1 = \eta \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \theta_2 = \frac{\eta - \theta_1}{\lambda_1}. \quad (4.1)$$

Равенства (3.6), (3.7) перепишем в виде

$$2\theta_1(\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\varphi)) + (S, \nabla \varphi) - \sum_{i=1}^n \left(v_i v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + \int_{\Gamma} \frac{\mu^{-1}(|v_{\tau}|)}{|v_{\tau}|} v_{\tau} \cdot \varphi_{\tau} d\Gamma = (f, \varphi), \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{\lambda_1}(S, \Phi) + 2\theta_2(v, \text{Div } \Phi) - \sum_{i=1}^n \left(v_i S, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + (SW_{\rho} - W_{\rho}S, \Phi) = 0. \quad (4.3)$$

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$, $t \in [0, 1]$. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу: требуется найти пару $(v, S) \in X(\Omega, \mathbb{R}^n) \times H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n})$ такую, что

$$2\theta_1(\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\varphi)) + 2\theta_1\alpha(1-t) \int_{\Gamma} v_{\tau} \cdot \varphi_{\tau} d\Gamma + t(S, \nabla \varphi) - t \sum_{i=1}^n \left(v_i v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + t \int_{\Gamma} \frac{\mu^{-1}(|v_{\tau}|)}{|v_{\tau}|} v_{\tau} \cdot \varphi_{\tau} d\Gamma = t(f, \varphi), \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_1}(S, \Phi) + 2t\theta_2(v, \text{Div } \Phi) - t \sum_{i=1}^n \left(v_i S, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) \\ + t(SW_{\rho} - W_{\rho}S, \Phi) + \frac{1}{m}(\nabla S, \nabla \Phi) = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

для любых $\varphi \in X(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Phi \in H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n})$. Здесь ∇S обозначает упорядоченный набор матриц Якоби столбцов матрицы-функции S .

Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 1. Пусть $(v, S) \in X(\Omega, \mathbb{R}^n) \times H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n})$ – решение задачи (4.4), (4.5). Тогда выполнена оценка

$$2\theta_1^2 \|v\|_{X(\Omega, \mathbb{R}^n)}^2 + \frac{\theta_1}{2\lambda_1\theta_2} \|S\|_{L_2(\Omega, M_s^{n \times n})}^2 + \frac{\theta_1}{2\theta_2 m} \|S\|_{H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n})}^2 \leq \|f\|_{[X(\Omega, \mathbb{R}^n)]^*}^2. \quad (4.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим в равенствах (4.4), (4.5) $\varphi = v$, $\Phi = S/(2\theta_2)$. Сложим полученные равенства. Принимая во внимание соотношения

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(v_i v, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) &= 0, & \sum_{i=1}^n \left(v_i S, \frac{\partial S}{\partial x_i} \right) &= 0, \\ (S, \nabla v) + (v, \text{Div } S) &= 0, & (SW_{\rho} - W_{\rho}S, S) &= 0, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} 2\theta_1(\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(v)) + 2\theta_1\alpha \int_{\Gamma} v_{\tau} \cdot v_{\tau} d\Gamma + t \int_{\Gamma} \left(\frac{\mu^{-1}(|v_{\tau}|)}{|v_{\tau}|} - 2\theta_1\alpha \right) v_{\tau} \cdot v_{\tau} d\Gamma \\ + \frac{1}{2\lambda_1\theta_2}(S, S) + \frac{1}{2m\theta_2}(\nabla S, \nabla S) = t(f, v). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из условия i) вытекает, что $\mu^{-1}(|v_\tau|)/|v_\tau| \geq \varkappa_1$, и, следовательно,

$$\frac{\mu^{-1}(|v_\tau|)}{|v_\tau|} - 2\theta_1\alpha \geq 0.$$

Поэтому из (4.7) следует, что

$$\begin{aligned} 2\theta_1 \left((\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(v)) + \alpha \int_{\Gamma} v_\tau \cdot v_\tau d\Gamma \right) + \frac{1}{2\lambda_1\theta_2} (S, S) \\ + \frac{1}{2m\theta_2} (\nabla S, \nabla S) \leq \|f\|_{[X(\Omega, \mathbb{R}^n)]^*} \|v\|_{X(\Omega, \mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} 2\theta_1 \|v\|_{X(\Omega, \mathbb{R}^n)}^2 + \frac{1}{2\lambda_1\theta_2} \|S\|_{L_2(\Omega, M_s^{n \times n})}^2 + \frac{1}{2m\theta_2} \|S\|_{H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n})}^2 \\ \leq \|f\|_{[X(\Omega, \mathbb{R}^n)]^*} \|v\|_{X(\Omega, \mathbb{R}^n)}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Полученное неравенство позволяет оценить норму $\|v\|_{X(\Omega, \mathbb{R}^n)}$ следующим образом:

$$\|v\|_{X(\Omega, \mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{2\theta_1} \|f\|_{[X(\Omega, \mathbb{R}^n)]^*}. \quad (4.9)$$

Из (4.8), (4.9) следует требуемая оценка (4.6).

Лемма доказана.

ЛЕММА 2. Задача (4.4), (4.5) имеет по крайней мере одно решение $(v, S) \in X(\Omega, \mathbb{R}^n) \times H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала дадим операторную трактовку задачи (4.4), (4.5). Пусть $\varphi \in X(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Phi \in H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n})$. Введем следующие операторы:

$$\begin{aligned} A: X(\Omega, \mathbb{R}^n) &\rightarrow [X(\Omega, \mathbb{R}^n)]^*, \\ \langle A(v), \varphi \rangle &= 2\theta_1 (\mathcal{E}(v), \mathcal{E}(\varphi)) + 2\theta_1 \alpha \int_{\Gamma} v_\tau \cdot \varphi_\tau d\Gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B: X(\Omega, \mathbb{R}^n) &\rightarrow [X(\Omega, \mathbb{R}^n)]^*, \\ \langle B(v), \varphi \rangle &= \int_{\Gamma} \left(\frac{\mu^{-1}(|v_\tau|)}{|v_\tau|} - 2\theta_1 \alpha \right) v_\tau \cdot \varphi_\tau d\Gamma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_1: X(\Omega, \mathbb{R}^n) &\rightarrow [X(\Omega, \mathbb{R}^n)]^*, \\ \langle K_1(v), \varphi \rangle &= - \sum_{i=1}^n \left(v_i v, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_1: H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n}) &\rightarrow [X(\Omega, \mathbb{R}^n)]^*, \\ \langle N_1(S), \varphi \rangle &= (S, \nabla \varphi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_m: H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n}) &\rightarrow [H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n})]^*, \\ \langle A_m(S), \Phi \rangle &= \frac{1}{\lambda_1} (S, \Phi) + \frac{1}{m} (\nabla S, \nabla \Phi), \end{aligned}$$

$$K_2: X(\Omega, \mathbb{R}^n) \times H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n}) \rightarrow [H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n})]^*,$$

$$\begin{aligned}
\langle K_2(v, S), \Phi \rangle &= - \sum_{i=1}^n \left(v_i S, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right), \\
N_2: X(\Omega, \mathbb{R}^n) &\rightarrow [H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n})]^*, \\
\langle N_2(v), \Phi \rangle &= 2\theta_2(v, \operatorname{Div} \Phi), \\
F: X(\Omega, \mathbb{R}^n) \times H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n}) &\rightarrow [H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n})]^*, \\
\langle F(v, S), \Phi \rangle &= (SW_\rho(v) - W_\rho(v)S, \Phi), \\
\mathcal{A}_m: X(\Omega, \mathbb{R}^n) \times H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n}) &\rightarrow [X(\Omega, \mathbb{R}^n)]^* \times [H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n})]^*, \\
\mathcal{A}_m(v, S) &= (A(v), A_m(S)), \\
Q: X(\Omega, \mathbb{R}^n) \times H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n}) &\rightarrow [X(\Omega, \mathbb{R}^n)]^* \times [H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n})]^*, \\
Q(v, S) &= (K_1(v) + N_1(S) + B(v) - f, K_2(v, S) + N_2(v) + F(v, S)).
\end{aligned}$$

Ясно, что задача (4.4), (4.5) эквивалентна операторному уравнению

$$\mathcal{A}_m(v, S) + tQ(v, S) = 0. \quad (4.10)$$

Поэтому для доказательства леммы достаточно доказать разрешимость (4.10).

Заметим, что непрерывные линейные операторы A , A_m , определяющие отображение $\mathcal{A}_m$, являются коэрцитивными и, следовательно, непрерывно обратимы. Поэтому непрерывно обратим и оператор $\mathcal{A}_m$.

Перейдем от уравнения (4.10) к уравнению

$$(v, S) + t\mathcal{A}_m^{-1}Q(v, S) = 0. \quad (4.11)$$

Покажем, что отображение $\mathcal{A}_m^{-1}Q$ непрерывно и компактно. Для этого заметим следующее.

Согласно теоремам вложения соболевских пространств (см., например, [12]), пространство $X(\Omega, \mathbb{R}^n)$ компактно вложено в пространство $L_4(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Непосредственно проверяется, что оператор K_1 непрерывен как отображение из $L_4(\Omega, \mathbb{R}^n)$ в $[X(\Omega, \mathbb{R}^n)]^*$. Поэтому оператор K_1 является непрерывным компактным отображением из $X(\Omega, \mathbb{R}^n)$ в $[X(\Omega, \mathbb{R}^n)]^*$. Аналогично доказывается, что оператор K_2 непрерывен и компактен как отображение из $X(\Omega, \mathbb{R}^n) \times H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n})$ в $[H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n})]^*$.

Оператор B можно представить в виде $B = \tilde{B} \circ \gamma_\Gamma$, где $\gamma_\Gamma: X(\Omega, \mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\Gamma, \mathbb{R}^n)$ – компактный оператор следа, а отображение

$$\tilde{B}: L_2(\Gamma, \mathbb{R}^n) \rightarrow [X(\Omega, \mathbb{R}^n)]^*$$

задается формулой

$$\langle \tilde{B}(w), \varphi \rangle = \int_\Gamma \left(\frac{\mu^{-1}(|w_\tau|)}{|w_\tau|} - 2\theta_1 \alpha \right) w_\tau \cdot \varphi_\tau \, d\Gamma.$$

Из оценки $\mu^{-1}(s)/s \leq \kappa_0$ и теоремы М. А. Красносельского об операторе суперпозиции (см., например, [13]) следует, что отображение $\tilde{B}$ непрерывно. Поэтому оператор B является непрерывным и компактным отображением из $X(\Omega, \mathbb{R}^n)$ в $[X(\Omega, \mathbb{R}^n)]^*$.

Отображение F непрерывно и компактно, так как F можно представить в виде $F = \tilde{F} \circ I$, где I – компактный оператор вложения

$$I: X(\Omega, \mathbb{R}^n) \times H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n}) \rightarrow L_4(\Omega, \mathbb{R}^n) \times L_4(\Omega, M_s^{n \times n}),$$

$\tilde{F}$ – непрерывное отображение, заданное по формулам

$$\tilde{F}: L_4(\Omega, \mathbb{R}^n) \times L_4(\Omega, M_s^{n \times n}) \rightarrow [H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n})]^*,$$

$$\langle \tilde{F}(v, S), \Phi \rangle = (SU(v) - U(v)S, \Phi),$$

$$U_{ij}(v) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(v_j(y) \frac{\partial \rho(x-y)}{\partial x_i} - v_i(y) \frac{\partial \rho(x-y)}{\partial x_j} \right) dy.$$

Заметим также, что линейный оператор N_1 , рассматриваемый как отображение из $L_2(\Omega, M_s^{n \times n})$ в $[X(\Omega, \mathbb{R}^n)]^*$, ограничен и, следовательно, непрерывен. Поскольку $H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n})$ компактно вложено в $L_2(\Omega, M_s^{n \times n})$, оператор N_1 является компактным отображением из $H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n})$ в $[X(\Omega, \mathbb{R}^n)]^*$. Рассуждая аналогично, можно показать, что компактен и оператор N_2 .

Таким образом, отображение Q , а вместе с ним и отображение $\mathcal{A}_m^{-1}Q$, непрерывно и компактно, что и требовалось установить.

Рассмотрим однопараметрическое семейство уравнений

$$(v, S) + \omega \mathcal{A}_m^{-1}Q(v, S) = 0, \quad \omega \in [0, 1]. \quad (4.12)$$

Из леммы 1 следует, что множество решений (4.12) содержится в некотором шаре $\mathcal{B} \subset X(\Omega, \mathbb{R}^n) \times H_0^1(\Omega, M_s^{n \times n})$ с центром в нуле. В этом случае, согласно принципу Лере–Шаудера (см., например, [11]), уравнение (4.12) имеет решение в $\mathcal{B}$ при каждом ω , $0 \leq \omega \leq 1$, в том числе при $\omega = t$.

Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Докажем сначала утверждение п. 1). Пусть (v^k, S^k) – решение задачи (4.4), (4.5) при $m = k$, $t = 1$. Из леммы 1 следует, что нормы $\|w^k\|_{X(\Omega, \mathbb{R}^n)}$, $\|S^k\|_{L_2(\Omega, M_s^{n \times n})}$, $k = 1, 2, \dots$, равномерно ограничены. Поэтому существует пара $(v^0, S^0) \in X(\Omega, \mathbb{R}^n) \times L_2(\Omega, M_s^{n \times n})$ такая, что для некоторой подпоследовательности $\{k_j\}$ справедливо

$$v^{k_j} \rightarrow v^0 \quad \text{слабо в } X(\Omega, \mathbb{R}^n), \quad (4.13)$$

$$v^{k_j}|_\Gamma \rightarrow v^0|_\Gamma \quad \text{сильно в } L_2(\Gamma, \mathbb{R}^n), \quad (4.14)$$

$$v^{k_j} \rightarrow v^0 \quad \text{сильно в } L_4(\Omega, \mathbb{R}^n), \quad (4.15)$$

$$S^{k_j} \rightarrow S^0 \quad \text{слабо в } L_2(\Omega, M_s^{n \times n}). \quad (4.16)$$

Покажем, что пара (v^0, S^0) является решением задачи (4.2), (4.3). В равенствах (4.4), (4.5) положим $v = v^{k_j}$, $S = S^{k_j}$, $m = k_j$, $t = 1$. Зафиксируем произвольные $\varphi \in X(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Phi \in C_0^\infty(\Omega, M_s^{n \times n})$. В силу (4.13)–(4.16) и соотношения

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{k_j} (\nabla S^{k_j}, \nabla \Phi) \right| &= \left| \frac{1}{k_j} (S^{k_j}, \Delta \Phi) \right| \\ &\leq \frac{1}{k_j} \|S^{k_j}\|_{L_2(\Omega, M_s^{n \times n})} \|\Delta \Phi\|_{L_2(\Omega, M_s^{n \times n})} \rightarrow 0 \quad \text{при } j \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где Δ – оператор Лапласа, предельный переход при $j \rightarrow \infty$ в равенствах (4.4), (4.5) дает

$$2\theta_1(\mathcal{E}(v^0), \mathcal{E}(\varphi)) + (S^0, \nabla \varphi) - \sum_{i=1}^n \left(v_i^0 v^0, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) + \int_{\Gamma} \frac{\mu^{-1}(|v_{\tau}^0|)}{|v_{\tau}^0|} v_{\tau}^0 \cdot \varphi_{\tau} d\Gamma = (f, \varphi), \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{\lambda_1} (S^0, \Phi) + 2\theta_2(v^0, \text{Div } \Phi) - \sum_{i=1}^n \left(v_i^0 S^0, \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + (S^0 W_{\rho}(v^0) - W_{\rho}(v^0) S^0, \Phi) = 0. \quad (4.18)$$

Из соотношений (4.17), (4.18) и (4.1) следует, что пара $(v^0, \sigma^0) \in X(\Omega, \mathbb{R}^n) \times L_2(\Omega, M_s^{n \times n})$, где $\sigma^0 = S^0 + 2\theta_1 \mathcal{E}(v^0)$, удовлетворяет (3.6), (3.7). Поэтому (v^0, σ^0) – слабое решение задачи (3.1)–(3.5). Оценка (3.11) следует из (4.6). Пункт 1) доказан.

Докажем теперь п. 2). Пусть (v^j, σ^j) , $j = 1, 2, \dots$, – слабые решения задачи (3.1)–(3.5), $v^j \rightarrow \tilde{v}$ слабо в $X(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\sigma^j \rightarrow \tilde{\sigma}$ слабо в $L_2(\Omega, M_s^{n \times n})$. Покажем, что $(\tilde{v}, \tilde{\sigma})$ – слабое решение задачи (3.1)–(3.5).

В равенствах (3.6), (3.7) положим $v = v^j$, $\sigma = \sigma^j$ и зафиксируем произвольные $\varphi \in X(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Phi \in C_0^{\infty}(\Omega, M_s^{n \times n})$. Как и ранее, с помощью предельного перехода при $j \rightarrow \infty$ установим, что пара функций $(\tilde{v}, \tilde{\sigma}) \in X(\Omega, \mathbb{R}^n) \times L_2(\Omega, M_s^{n \times n})$ удовлетворяет (3.6), (3.7) и, следовательно, является слабым решением задачи (3.1)–(3.5).

Теорема доказана.

§ 5. Течение вязкоупругой жидкости в плоском канале

В этом параграфе мы рассмотрим краевую задачу, описывающую стационарное движение вязкоупругой жидкости в бесконечном плоском канале при наличии постоянного перепада давления и условии проскальзывания Навье на стенках канала.

Пусть жидкость, заключенная между плоскостями $z = h$, $z = -h$, движется вдоль оси x под действием постоянного градиента давления, равного ξ . Предположим, что на стенках канала выполняются условия

$$v \cdot n = 0, \quad z = \pm h, \quad (5.1)$$

$$v_{\tau} = -k(\text{Tn})_{\tau}, \quad z = \pm h. \quad (5.2)$$

Предположим также, что жидкость удовлетворяет исходному (без усреднения тензора завихренности) реологическому соотношению (2.3).

Требуется определить распределение скоростей и компоненты тензора касательных напряжений σ .

По физическому смыслу задачи решение следует искать в виде

$$v_1 = w(z), \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z). \quad (5.3)$$

В этом случае

$$\begin{aligned} v_1 \frac{\partial v}{\partial x} + v_2 \frac{\partial v}{\partial y} + v_3 \frac{\partial v}{\partial z} &= 0, & v_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \sigma}{\partial y} + v_3 \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= 0, \\ v_1 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial y} + v_3 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Поэтому уравнения движения (3.1) и реологическое соотношение (2.3) упрощаются, принимая следующий вид:

$$\text{Div } \sigma = \nabla p, \quad (5.4)$$

$$\sigma + \lambda_1(\sigma W - W\sigma) = 2\eta\mathcal{E} + 2\eta\lambda_2(\mathcal{E}W - W\mathcal{E}). \quad (5.5)$$

Рассмотрим сначала нелинейное уравнение (5.5). С учетом (5.3) и равенства $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ уравнение (5.5) сводится к следующей системе:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} - \lambda_1\sigma_{13}w'_z + \eta\lambda_2(w'_z)^2 & \sigma_{12} - \frac{\lambda_1}{2}\sigma_{23}w'_z & \sigma_{13} + \frac{\lambda_1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{33})w'_z - \eta w'_z \\ \sigma_{12} - \frac{\lambda_1}{2}\sigma_{23}w'_z & \sigma_{22} & \sigma_{23} + \frac{\lambda_1}{2}\sigma_{12}w'_z \\ \sigma_{13} + \frac{\lambda_1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{33})w'_z - \eta w'_z & \sigma_{23} + \frac{\lambda_1}{2}\sigma_{12}w'_z & \sigma_{33} + \lambda_1\sigma_{13}w'_z - \eta\lambda_2(w'_z)^2 \end{bmatrix} = 0.$$

Из соотношений

$$\sigma_{12} - \frac{\lambda_1}{2}\sigma_{23}w'_z = 0, \quad \sigma_{23} + \frac{\lambda_1}{2}\sigma_{12}w'_z = 0$$

следует, что $\sigma_{12} = \sigma_{23} = 0$. Ясно также, что $\sigma_{22} = 0$.

Таким образом, остаются неизвестными только три элемента σ_{11} , σ_{13} , σ_{33} тензора касательных напряжений. Эти функции можно выразить через w'_z из замкнутой системы

$$\begin{aligned} \sigma_{11} - \lambda_1\sigma_{13}w'_z + \eta\lambda_2(w'_z)^2 &= 0, & \sigma_{13} + \frac{\lambda_1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{33})w'_z - \eta w'_z &= 0, \\ \sigma_{33} + \lambda_1\sigma_{13}w'_z - \eta\lambda_2(w'_z)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{\eta(\lambda_2 - \lambda_1)(w'_z)^2}{\lambda_1^2(w'_z)^2 + 1}, & \sigma_{13} &= \frac{\eta w'_z(\lambda_1\lambda_2(w'_z)^2 + 1)}{\lambda_1^2(w'_z)^2 + 1}, \\ \sigma_{33} &= \frac{\eta(\lambda_2 - \lambda_1)(w'_z)^2}{\lambda_1^2(w'_z)^2 + 1}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения для σ_{ij} в (5.4), получим определяющее уравнение для функции w'_z

$$\frac{\eta w'_z(\lambda_1\lambda_2(w'_z)^2 + 1)}{\lambda_1^2(w'_z)^2 + 1} = \xi z + C, \quad (5.6)$$

где C – константа.

В силу симметричности течения относительно плоскости $z = 0$ константа C должна равняться нулю.

Функция $\psi(a) = \eta a(\lambda_1 \lambda_2 a^2 + 1)/(\lambda_1^2 a^2 + 1)$ монотонна и коэрцитивна, если $3\lambda_2 \geq \lambda_1$. В этом случае при любом $z = z_0$ уравнение (5.6) имеет единственное решение $w'_z(z_0)$. Значение $w'_z(z_0)$ может быть вычислено по известным формулам как вещественный корень алгебраического уравнения

$$(\eta \lambda_1 \lambda_2) a^3 - (\xi \lambda_1^2 z_0) a^2 + \eta a - \xi z_0 = 0$$

относительно a . Функция w получается простым интегрированием w'_z .

Если величина ξh достаточно мала, т.е. перепад давления невысок и/или толщина канала невелика, то для вычисления функции w можно использовать описанную выше процедуру, не предполагая, что $3\lambda_2 \geq \lambda_1$.

Из формулы (5.6) следует, что функция w четная. (Очевидно, что это свойство вытекает и из физического смысла задачи.) Поэтому, чтобы удовлетворить двум краевым условиям (при $z = h$ и $z = -h$), достаточно одной константы, появившейся при интегрировании.

Определим распределение скоростей на стенках канала. Пусть $z = h$. Согласно краевым условиям задачи (5.1), (5.2) имеем

$$v(x, y, h) = (-k\sigma_{13}(h), 0, 0).$$

Из соотношения (5.4) и условия $\frac{\partial p}{\partial x} = \xi$ следует, что $\sigma_{13}(z) = \xi z$. Поэтому

$$v(x, y, h) = (-k\xi h, 0, 0).$$

Аналогично получаем

$$v(x, y, -h) = (-k\xi h, 0, 0).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. В предельном случае модели, когда $\lambda_1 = \lambda_2$, из формулы (5.6) следует, что $w'_z = (\xi/\eta)z$, т.е. распределение скоростей получается таким же, как и в случае течения ньютоновской жидкости (ср. [9]).

Список литературы

- [1] К. Р. Раджагопал, “О некоторых нерешенных проблемах нелинейной динамики жидкостей”, *УМН*, **58:2(350)** (2003), 111–122; англ. пер.: K. R. Rajagopal, “On some unresolved issues in non-linear fluid dynamics”, *Russian Math. Surveys*, **58:2** (2003), 319–330.
- [2] С. Л. М. Н. Navier, “Memoire sur le lois du mouvement des fluides”, *Mem. Acad. Roy. Sci. Paris*, **6** (1823), 389–416.
- [3] М. Рейнер, *Реология*, Физматгиз, М., 1965, 226 с.; пер. с англ.: M. Reiner, “Rheology”, *Handbuch der Physik*, v. 6: *Elastizität und Plastizität*, herausgegeben von S. Flügge, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1958, 434–550.
- [4] G. Astarita, G. Marucci, *Principles of non-Newtonian fluid mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1974, 296 pp.
- [5] Д. А. Воротников, “О существовании слабых стационарных решений краевой задачи в модели Джеффриса движения вязкоупругой среды”, *Изв. вузов. Матем.*, **9** (2004), 13–17; англ. пер.: D. A. Vortnikov, “On the existence of weak stationary solutions of a boundary value problem in the Jeffreys model of the motion of a viscoelastic medium”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **48:9** (2004), 10–14.

- [6] Е. С. Барановский, “Неоднородная краевая задача для стационарных уравнений модели Джеффриса движения вязкоупругой среды”, *Сиб. журн. индустр. матем.*, **15**:3 (2012), 16–23; англ. пер. Е. S. Baranovskii, “An inhomogeneous boundary value problem for the stationary motion equations of Jeffreys viscoelastic medium”, *J. Appl. Ind. Math.*, **7**:1 (2013), 22–28.
- [7] V. G. Zvyagin, D. A. Vorotnikov, “Approximating-topological methods in some problems of hydrodynamics”, *J. Fixed Point Theory Appl.*, **3**:1 (2008), 23–49.
- [8] C. Guillopé, J.-C. Saut, “Existence results for the flow of viscoelastic fluids with a differential constitutive law”, *Nonlinear Anal.*, **15**:9 (1990), 849–869.
- [9] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика*, т. VI: *Гидродинамика*, 5-е изд., Физматлит, М., 2006, 736 с.; англ. пер. 3-го изд.: L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Course of theoretical physics*, v. 6: *Fluid mechanics*, 2nd ed., Pergamon Press, Oxford, 1987, xiv+539 pp.
- [10] Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, *Неоднородные граничные задачи и их приложения*, т. I, Мир, М., 1971, 371 с.; пер. с фр.: J.-L. Lions, E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, v. 1, Travaux et Recherches Mathématiques, **17**, Dunod, Paris, 1968, xx+372 pp.
- [11] В. Г. Литвинов, *Движение нелинейно-вязкой жидкости*, Наука, М., 1982, 375 с.
- [12] Р. Темам, *Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ*, Мир, М., 1981, 408 с.; пер. с англ.: R. Temam, *Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis*, rev. ed., Stud. Math. Appl., **2**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, 1979, x+519 pp.
- [13] И. В. Скрыпник, *Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач*, Наука, М., 1990, 448 с.; англ. пер.: I. V. Skrypnik, *Methods for analysis of nonlinear elliptic boundary value problems*, Transl. Math. Monogr., **139**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, xii+348 pp.

Евгений Сергеевич Барановский
(Evgenii S. Baranovskii)

Воронежский государственный университет
инженерных технологий
E-mail: esbaranovskii@gmail.com

Поступила в редакцию
20.06.2013 и 30.03.2014