Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. В. Никольская, О геометрии гладкой модели расслоенного произведения семейств КЗ поверхностей, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 2, 123–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8267>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 15:43:00

УДК 512.7+512.72+512.725

О. В. Никольская

О геометрии гладкой модели расслоенного произведения семейств КЗ поверхностей

Доказана гипотеза Ходжа об алгебраических циклах для гладкой проективной модели X расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$ неизотривиальных 1-параметрических семейств КЗ поверхностей (возможно, с вырождениями) $X_k \rightarrow C$ ($k = 1, 2$) над гладкой проективной кривой C при условии, что для общих геометрических слоев X_{1s}, X_{2s} кольцо $\text{End}_{\text{Hg}(X_{1s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ – мнимое квадратичное поле, $\text{rank NS}(X_{1s}) \neq 18$, $\text{End}_{\text{Hg}(X_{2s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ – вполне вещественное поле или $\text{rank NS}(X_{1s}) < \text{rank NS}(X_{2s})$.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: гипотеза Ходжа, КЗ поверхность.

DOI: 10.4213/sm8267

Введение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Гладкая комплексная проективная поверхность S называется КЗ поверхностью, если $\Omega_S^2 \simeq \mathcal{O}_S$ и $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$, где $\mathcal{O}_S$ – пучок ростков голоморфных функций, Ω_S^2 – пучок ростков голоморфных 2-форм.

Пусть $\pi_k: X_k \rightarrow C$ – такой морфизм гладкого проективного трехмерного многообразия на кривую, что все слои морфизма π_k являются объединениями гладких поверхностей кратности 1 с нормальными пересечениями, общий геометрический слой X_{ks} является КЗ поверхностью ($k = 1, 2$). Мы называем семейство $\pi_k: X_k \rightarrow C$ неизотривиальным, если существуют хотя бы два неизоморфных гладких геометрических слоя морфизма π_k .

Для гладкого слоя X_{ks} семейства $X_k \rightarrow C$ обозначим через $\text{Hg}(X_{ks})$ группу Ходжа КЗ поверхности X_{ks} . Пусть $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})^{\perp}$ – трансцендентная часть пространства $H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})$ (ортогональное дополнение подпространства $\text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{NS}(X_{ks}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \subset H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})$ алгебраических классов когомологий относительно индекса пересечения). Известно, что $\text{End}_{\text{Hg}(X_{ks})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})^{\perp}$ – вполне вещественное поле или мнимое квадратичное расширение вполне вещественного поля [1].

В этой статье мы доказываем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Пусть $\pi_k: X_k \rightarrow C$ ($k = 1, 2$) – проективные неизотривиальные семейства КЗ поверхностей (возможно, с вырождениями) над гладкой проективной кривой C . Предположим, что общие геометрические слои X_{1s}, X_{2s} удовлетворяют следующим условиям:

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00097) и некоммерческого фонда “Династия”.

- (i) кольцо $\text{End}_{\text{Hg}(X_{1s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$;
- (ii) $\text{rank NS}(X_{1s}) \neq 18$;
- (iii) $\text{End}_{\text{Hg}(X_{2s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ – вполне вещественное поле или $\text{rank NS}(X_{1s}) < \text{rank NS}(X_{2s})$.

Тогда для любой гладкой проективной модели X расслоенного произведения $X_1 \times_C X_2$ верна гипотеза Ходжа об алгебраических циклах [2].

Здесь общность точки $s \in C$ означает, что она принадлежит множеству $C \setminus \Delta_{\text{countable}}$, где $\Delta_{\text{countable}}$ – счетное подмножество, зависящее от семейств π_k ; мы можем также предполагать, что кольцо $K = \text{End}_{\text{Hg}(X_{1s})} \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ является мнимым квадратичным полем, не зависящим от выбора точки $s \in C \setminus \Delta_{\text{countable}}$, и что функции $s \mapsto \text{rank NS}(X_{ks})$ постоянны на множестве $C \setminus \Delta_{\text{countable}}$ (замечания 1, 2).

Автор благодарит С. Г. Танкеева за внимание к работе.

§ 1. О представлениях монодромии, ассоциированных с гладкими семействами КЗ поверхностей

Пусть $\sigma: X \rightarrow X_1 \times_C X_2$ – разрешение особенностей расслоенного произведения, $\pi: X \rightarrow C$ – структурный морфизм, $q_k: X_1 \times_C X_2 \rightarrow X_k$ – каноническая проекция. Положим $\Delta_k = \{\delta \in C \mid \text{Sing}(X_{k\delta}) \neq \emptyset\}$, $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, $C' = C \setminus \Delta$. Пусть $X' = X \setminus \pi^{-1}(\Delta)$, $X'_k = X_k \setminus \pi_k^{-1}(\Delta)$. Обозначим через $\pi': X' \rightarrow C'$, $\pi'_k: X'_k \rightarrow C'$ соответствующие структурные морфизмы. Фиксируем точку $s \in C'$. Тогда слои X_{1s} и X_{2s} являются КЗ поверхностями. Пусть $\rho^{(i)}: \pi_1(C', s) \rightarrow \text{GL}(H^i(X_s, \mathbb{Q}))$ – представление монодромии, $G^{(i)} = \overline{\rho^{(i)}(\pi_1(C', s))} \subset \text{GL}(H^i(X_s, \mathbb{Q}))$ – замыкание группы $\rho^{(i)}(\pi_1(C', s))$ в топологии Зариского группы $\text{GL}(H^i(X_s, \mathbb{Q}))$. Аналогично определяются группы $G_k^{(i)}$, ассоциированные с представлениями $\rho_k^{(i)}: \pi_1(C', s) \rightarrow \text{GL}(H^i(X_{ks}, \mathbb{Q}))$. Обозначим через $(G^{(i)})^0$ связную компоненту единицы группы $G^{(i)}$. Рассматривая, если необходимо, конечное разветвленное накрытие $\tilde{C} \rightarrow C$ и подходящие гладкие модели $\tilde{X}_k$ многообразий $X_k \times_C \tilde{C}$, мы можем (и будем) считать (принимая во внимание теорему Мамфорда о полустабильных редукциях [3; с. 53–54]), что $G^{(i)} = (G^{(i)})^0$, потому что если гипотеза Ходжа верна для гладкого проективного 5-мерного многообразия $\tilde{X}$ и существует доминантное рациональное отображение $\tilde{X} \rightarrow X$, то гипотеза Ходжа верна для X ([4; следствие 1.2], [5; следствие 1.8]). Группа $G^{(i)}$ полупростая в силу [6; следствие 4.2.9] и не зависит от выбора точки $s \in C'$. Кроме того, можно считать [3; с. 53–54], что все вырожденные слои структурного морфизма $\pi: X \rightarrow C$ являются объединениями гладких многообразий кратности 1 с нормальными пересечениями.

Согласно теореме Делиня [7; теорема 7.3] можно считать, что существует такое счетное подмножество $\Delta_{\text{countable}} \subset C'$, что для любой точки $s \in C' \setminus \Delta_{\text{countable}}$ группа $G_k^{(2)}$ является нормальной подгруппой группы Ходжа $\text{Hg}(X_{ks})$ ($k = 1, 2$). Мы будем называть точку $s \in C' \setminus \Delta_{\text{countable}}$ *общей в смысле Ходжа*. Для такой точки s алгебра Ли $\text{Lie } G_k^{(2)}$ является идеалом в алгебре Ли $\text{Lie Hg}(X_{ks})$.

ЛЕММА 1. Имеем $H^2(X_k, \mathbb{Q}) = \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k)$, $H^2(X, \mathbb{Q}) = \text{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение леммы известно [8; лемма 2.5], а второе доказано там же при дополнительном предположении, что $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$.

Пусть $f: Z \rightarrow \pi^{-1}(\Delta)$ – нормализация схемы $\pi^{-1}(\Delta)$. Тогда Z – несвязное объединение гладких неприводимых компонент дивизора $\pi^{-1}(\Delta)$. Поскольку $f: Z \rightarrow \pi^{-1}(\Delta)$ – разрешение особенностей замкнутого подмногообразия $i_{\Delta}: \pi^{-1}(\Delta) \hookrightarrow X$, то имеется точная последовательность смешанных $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа [9; следствие (8.2.8)]

$$H^0(Z, \mathbb{Q}) \xrightarrow{(i_{\Delta}f)_*} H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Q}),$$

где $(i_{\Delta}f)_*$ – морфизм типа $(1, 1)$ рациональных структур Ходжа. Поэтому

$$(i_{\Delta}f)_* H^0(Z, \mathbb{Q}) = \text{Ker}[H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X', \mathbb{Q})] \quad (1.1)$$

является структурой Ходжа типа $(1, 1)$.

Хорошо известно, что существует канонический сюръективный морфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа $H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q})$ [10; следствие (15.14)], включенный в коммутативную диаграмму с точными строками [10; диаграмма (15.1) для случая $m = 1$]

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & H^2(X, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \psi_2 \\ & & H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) & & & & \\ & & \simeq \downarrow \gamma_2 & & & & \\ & & H^1(C, j_* R^1\pi'_*\mathbb{Q}) & & & & \\ & & \cap & & & & \\ 0 & \longrightarrow & H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\beta_2} & H^2(X', \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) \longrightarrow 0, \end{array} \quad (1.2)$$

где $\gamma_2 \circ \alpha_2$ – морфизм $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа и β_2 – морфизм смешанных структур Ходжа [10; теоремы (15.3), (15.4)]. По теореме Делиня каноническое отображение $H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q})$ – сюръективный морфизм рациональных структур Ходжа [6; пп. 4.1.1, 4.1.2]. Поэтому диаграмма (1.2) дает коммутативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & H^2(X, \mathbb{Q}) & \longrightarrow & H^0(C, R^2\pi_*\mathbb{Q}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \psi_2 \\ & & H^1(C, R^1\pi_*\mathbb{Q}) & & & & \\ & & \cap & & & & \\ 0 & \longrightarrow & H^1(C', R^1\pi'_*\mathbb{Q}) \cap \text{Im}(\varphi_2) & \longrightarrow & \text{Im}(\varphi_2) & \longrightarrow & H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) \longrightarrow 0. \end{array} \quad (1.3)$$

Поскольку $R^1\pi'_*\mathbb{Q} = 0$, то (1.1) и нижняя строка диаграммы (1.3) дают точную последовательность рациональных структур Ходжа

$$0 \rightarrow (i_{\Delta}f)_* H^0(Z, \mathbb{Q}) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0. \quad (1.4)$$

В силу неизотривиальности гладкого семейства КЗ поверхностей $\pi'_k: X'_k \rightarrow C'$ и одного из результатов Ю. Г. Зархина [1; следствие 4.1.1] имеем

$$H^0(C', R^2\pi'_{k*}\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)} \hookrightarrow \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks}). \quad (1.5)$$

Очевидно, что из формулы Кюннета на слоях гладкого морфизма π' следует равенство $H^0(C', R^2\pi'_*\mathbb{Q}) = H^0(C', R^2\pi'_{1*}\mathbb{Q}) \oplus H^0(C', R^2\pi'_{2*}\mathbb{Q})$. Поэтому $H^2(X, \mathbb{Q}) = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X)$ в силу (1.4)–(1.5) и теоремы Лефшеца о дивизорах на X . Лемма доказана.

В силу леммы 1, равенств $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks}) = H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg}(X_{ks})} = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})^{\pi_1(C', s)}$, формул (2.17), (2.18) из [8] и теоремы Делиня [6; теорема 4.1.1] существует каноническое сюръективное отображение ограничения

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k) = H^2(X_k, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^2\pi'_{k*}\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} H^2(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)} = \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks}).$$

Поэтому элементы из $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{ks})$ поднимаются до алгебраических классов из $H^2(X_k, \mathbb{Q})$. С другой стороны, элементы пространства $H^4(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)}$ поднимаются до алгебраических классов из $H^4(X_k, \mathbb{Q})$, потому что каноническое отображение ограничения $H^4(X_k, \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(X_{ks}, \mathbb{Q})^{\pi_1(C', s)}$ сюръективно по теореме Делиня [6; теорема 4.1.1].

Сильная теорема Лефшеца гласит, что $H^4(X_k, \mathbb{Q}) = H^2(X_k, \mathbb{Q}) \smile \mathrm{cl}_{X_k}(H_k)$, где H_k – гиперплоское сечение многообразия X_k . Поэтому из леммы 1 следует, что пространство $H^4(X_k, \mathbb{Q})$ порождается алгебраическими классами когомологий.

ЛЕММА 2. *Если для общих геометрических слоев X_{1s}, X_{2s} кольцо*

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$$

– мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$, $\mathrm{rank} \mathrm{NS}(X_{1s}) \neq 18$, причем

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{2s})} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$$

– вполне вещественное поле или $\mathrm{rank} \mathrm{NS}(X_{1s}) < \mathrm{rank} \mathrm{NS}(X_{2s})$, то

$$\mathrm{Hom}_{\pi_1(C', s)}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}) = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривая, в случае необходимости, подходящее разветвленное накрытие $\tilde{C} \rightarrow C$, мы можем считать, что группы $G_k^{(2)}$ связны ($k = 1, 2$).

Из условий $\mathrm{rank} \mathrm{NS}(X_{1s}) \neq 18$, $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \stackrel{\mathrm{def}}{=} K$ – мнимое квадратичное расширение поля $\mathbb{Q}$ и результатов Ю. Г. Зархина [1; теорема 2.3.1] следует, что группа Ходжа $\mathrm{Hg}(X_{1s})$ является унитарной группой $\mathbb{U}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}), \Phi)$, где $\Phi: \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \times \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \xrightarrow{x \times y \rightarrow \alpha} K$ – спаривание, определенное формулой $\langle ex \smile y \rangle = \mathrm{tr}_{K/\mathbb{Q}}(e\alpha)$ для всех $e \in K$, и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – композиция

$$H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \times H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{x \times y \rightarrow x \smile y} H^4(X_{1s}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(-2) \xrightarrow[\sim]{(2\pi i)^2} \mathbb{Q}.$$

С другой стороны, точка $s \in C$ является общей в смысле Ходжа, поэтому $G_1^{(2)}$ является нетривиальной (в силу неизотривиальности семейства КЗ поверхностей $\pi_1: X_1 \rightarrow C$) нормальной подгруппой алгебраической $\mathbb{Q}$ -группы $\mathrm{Hg}(X_{1s})$.

Заметим, что полупростая часть $\mathrm{Hg}(X_{1s})^{\mathrm{ss}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} [\mathrm{Hg}(X_{1s}), \mathrm{Hg}(X_{1s})]$ редуктивной $\mathbb{Q}$ -группы $\mathrm{Hg}(X_{1s})$ имеет тип A_n , где

$$n = \frac{p_1 - 2}{2}, \quad p_1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} 22 - \mathrm{rank} \mathrm{NS}(X_{1s}) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{NS}(X_{1s})^{\perp},$$

причем $n \geq 2$ в силу неравенства $\mathrm{rank} \mathrm{NS}(X_{1s}) \neq 18$; более того, имеется разложение $(\mathrm{Hg}(X_{1s})^{\mathrm{ss}} \otimes \overline{\mathbb{Q}})$ -модулей $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \overline{\mathbb{Q}} = E(\omega_1) \oplus E(\omega_1)^{\vee}$, где $E(\omega_1)$ – стандартное неприводимое представление группы $\mathrm{Hg}(X_{1s})^{\mathrm{ss}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ типа A_n со старшим весом ω_1 и $E(\omega_1)^{\vee} = E(\omega_n)$ – представление, двойственное стандартному (оно изоморфно n -й внешней степени $\Lambda^n E(\omega_1)$ стандартного представления) [8; п. 1.5].

Поэтому $G_1^{(2)} = \mathrm{Hg}(X_{1s})^{\mathrm{ss}}$ – простая $\mathbb{Q}$ -группа типа A_n ($n \geq 2$).

Если $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{2s})} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ является вполне вещественным полем, то в силу результатов Ю. Г. Зархина о структуре группы Ходжа КЗ поверхности X_{2s} (см. [1]) любой простой фактор алгебры Ли $\mathrm{Lie} \mathrm{Hg}(X_{2s}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ имеет тип A_1 , B_m ($m \geq 2$), D_m ($m \geq 3$) [8; формулы (1.1)–(1.4)]. Поскольку $G_2^{(2)}$ – связная нормальная подгруппа в $\mathrm{Hg}(X_{2s})$, то любой простой фактор полупростой алгебры Ли $\mathrm{Lie} G_2^{(2)} \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ имеет тип A_1 , B_m ($m \geq 2$), D_m ($m \geq 3$). С другой стороны, алгебра Ли $\mathrm{Lie} \mathrm{Hg}(X_{1s})^{\mathrm{ss}} \otimes \overline{\mathbb{Q}} = \mathrm{Lie} G_1^{(2)} \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ имеет тип A_n ($n \geq 2$), поэтому в силу леммы Шура $\mathrm{Hom}_{\pi_1(C', s)}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}) = 0$.

Если $\mathrm{rank} \mathrm{NS}(X_{1s}) < \mathrm{rank} \mathrm{NS}(X_{2s})$, то остается разобрать случай, когда кольцо $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{2s})} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}$ – мнимое квадратичное расширение вполне вещественного поля K_0 степени e_0 над $\mathbb{Q}$. В этом случае полупростая часть $\mathrm{Lie} \mathrm{Hg}(X_{2s})^{\mathrm{ss}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ редуктивной алгебры Ли $\mathrm{Lie} \mathrm{Hg}(X_{2s})^{\mathrm{ss}}$ является произведением e_0 экземпляров простой алгебры Ли типа A_m ($m \geq 1$), и $(\mathrm{Lie} \mathrm{Hg}(X_{2s})^{\mathrm{ss}} \otimes \overline{\mathbb{Q}})$ -модуль $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ допускает разложение

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp} \otimes \overline{\mathbb{Q}} = E(\omega_1^{(1)}) \oplus E(\omega_m^{(1)}) \oplus \cdots \oplus E(\omega_1^{(e_0)}) \oplus E(\omega_m^{(e_0)}),$$

где $E(\omega_1^{(i)})$ – стандартное неприводимое представление i -го простого фактора типа A_m в $(m+1)$ -мерном пространстве над $\overline{\mathbb{Q}}$ и $E(\omega_m^{(i)}) = E(\omega_1^{(i)})^{\vee}$ – представление, двойственное стандартному ([8; п. 1.5]). Из неравенства

$$\mathrm{rank} \mathrm{NS}(X_{1s}) < \mathrm{rank} \mathrm{NS}(X_{2s})$$

следует, что $p_1 = 22 - \mathrm{rank} \mathrm{NS}(X_{1s}) = 2(n+1) > p_2 = 22 - \mathrm{rank} \mathrm{NS}(X_{2s}) = 2e_0(m+1)$. В частности, $n > m$ и, следовательно, рассматривая представления нормальных связных подгрупп $G_k^{(2)} \hookrightarrow \mathrm{Hg}(X_{ks})$, мы получим равенство $\mathrm{Hom}_{\pi_1(C', s)}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{2s})^{\perp}) = 0$ в силу леммы Шура. Лемма доказана.

§ 2. Доказательство теоремы

Используя лемму 2, легко проверить, что при выполнении условий теоремы пространство $H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q})$ порождается образами при краевом отображении алгебраических классов в $H^4(X, \mathbb{Q})$, лежащих в $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_1) \sim \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_2)$, $H^4(X_1, \mathbb{Q})$, $H^4(X_2, \mathbb{Q})$, где $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k)$ отождествляется с образом $\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_k)$ при каноническом отображении $(q_k\sigma)^*: H^2(X_k, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{Q})$, определенном композицией $X \xrightarrow{\sigma} X_1 \times_C X_2 \xrightarrow{q_k} X_k$, и $H^4(X_k, \mathbb{Q})$ отождествляется с образом $H^4(X_k, \mathbb{Q})$ при каноническом отображении $(q_k\sigma)^*: H^4(X_k, \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^4(X, \mathbb{Q})$ [8; формулы (2.16), (2.19), (2.20)]. В частности, точная последовательность [8; формула (2.16)]

$$0 \rightarrow (i_{\Delta}f)_* H^2(Z, \mathbb{Q}) \rightarrow H^4(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0$$

рациональных структур Ходжа дает точную последовательность $\mathbb{Q}$ -структур Ходжа

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow (i_{\Delta}f)_*[H^2(Z, \mathbb{Q}) \cap H^{1,1}(Z, \mathbb{C})] &\rightarrow [H^4(X, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X, \mathbb{C})] \\ &\rightarrow H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Теорема Лефшеца о дивизорах на гладком (возможно, несвязном) многообразии Z показывает, что (2.1) имеет вид

$$0 \rightarrow (i_{\Delta}f)_* \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(Z) \rightarrow [H^4(X, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X, \mathbb{C})] \rightarrow H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q}) \rightarrow 0.$$

По доказанному выше $H^0(C', R^4\pi'_*\mathbb{Q})$ порождается образами алгебраических классов на X , поэтому $H^4(X, \mathbb{Q}) \cap H^{2,2}(X, \mathbb{C})$ порождается классами когомологий алгебраических циклов коразмерности 2 на X . Значит, для X верна гипотеза Ходжа об алгебраических циклах. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если $\mathrm{rank} \mathrm{NS}(X_{1s}) \neq 18$ и кольцо $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} = K$ является мнимым квадратичным полем для некоторой точки $s \in C'$, общей в смысле Ходжа для гладкого семейства КЗ поверхностей $\pi'_1: X'_1 \rightarrow C'$, то можно считать, что для любой точки $t \in C' \setminus \Delta_{\mathrm{countable}}$ имеется равенство $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1t})} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1t})^{\perp} = K$.

Действительно, можно считать, что t – точка, общая в смысле Ходжа (потому что множество точек, не являющихся общими в смысле Ходжа, счетное). Поскольку $K = \mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}$ – мнимое квадратичное поле и существует естественное вложение

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \hookrightarrow \mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})^{\mathrm{ss}}} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp}, \quad (2.2)$$

то, как замечено в доказательстве леммы 2, существует разложение

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^{\perp} \otimes \overline{\mathbb{Q}} = E(\omega_1) \oplus E(\omega_1)^{\vee}$$

модулей над простой алгеброй Ли $\mathrm{Lie}(\mathrm{Hg}(X_{1s}))^{\mathrm{ss}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ типа A_n ($n \geq 2$). С другой стороны, хорошо известно из теории представлений простых алгебр Ли

типа A_n , что $(\mathrm{Lie}(\mathrm{Hg}(X_{1s}))^{\mathrm{ss}} \otimes \overline{\mathbb{Q}})$ -модули $E(\omega_1)$ и $E(\omega_1)^\vee = E(\omega_n)$ неизоморфны в силу неравенства $n \geq 2$, поэтому из леммы Шура следует, что

$$\begin{aligned} & \mathrm{End}_{\mathrm{Lie}(\mathrm{Hg}(X_{1s}))^{\mathrm{ss}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^\perp \otimes \overline{\mathbb{Q}} \\ &= \mathrm{End}_{\mathrm{Lie}(\mathrm{Hg}(X_{1s}))^{\mathrm{ss}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}} E(\omega_1) \oplus \mathrm{End}_{\mathrm{Lie}(\mathrm{Hg}(X_{1s}))^{\mathrm{ss}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}} E(\omega_1)^\vee \\ & \quad \oplus \mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}(\mathrm{Hg}(X_{1s}))^{\mathrm{ss}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}}(E(\omega_1), E(\omega_1)^\vee) \\ & \quad \oplus \mathrm{Hom}_{\mathrm{Lie}(\mathrm{Hg}(X_{1s}))^{\mathrm{ss}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}}(E(\omega_1)^\vee, E(\omega_1)) \\ &= \mathrm{End}_{\mathrm{Lie}(\mathrm{Hg}(X_{1s}))^{\mathrm{ss}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}} E(\omega_1) \oplus \mathrm{End}_{\mathrm{Lie}(\mathrm{Hg}(X_{1s}))^{\mathrm{ss}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}} E(\omega_1)^\vee \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{Q}} \oplus \overline{\mathbb{Q}}. \end{aligned}$$

В итоге (2.2) дает равенство

$$\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^\perp = \mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})^{\mathrm{ss}}} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^\perp. \quad (2.3)$$

Выбор пути на кривой C' от точки s к точке t определяет коммутативную диаграмму [1; п. 3.0]

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(C', s) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(C', t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{GL}(H^2(X_{1s}, \mathbb{Q})) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{GL}(H^2(X_{1t}, \mathbb{Q})). \end{array} \quad (2.4)$$

В силу теоремы Лефшеца о дивизорах группы $\pi_1(C', s)$ и $\pi_1(C', t)$ действуют тривиально на подпространствах алгебраических классов когомологий

$$\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s}) = H^2(X_{1s}, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg}(X_{1s})} \quad \text{и} \quad \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1t}) = H^2(X_{1t}, \mathbb{Q})^{\mathrm{Hg}(X_{1t})},$$

так как точки s, t являются общими в смысле Ходжа и, следовательно, имеются включения

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}[\pi_1(C', s) \rightarrow \mathrm{GL}(H^2(X_{1s}, \mathbb{Q}))] &\subset \mathrm{Hg}(X_{1s}), \\ \mathrm{Im}[\pi_1(C', t) \rightarrow \mathrm{GL}(H^2(X_{1t}, \mathbb{Q}))] &\subset \mathrm{Hg}(X_{1t}). \end{aligned}$$

Поэтому диаграмма (2.4) дает коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(C', s) & \xrightarrow{\sim} & \pi_1(C', t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{GL}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^\perp) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{GL}(\mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1t})^\perp). \end{array} \quad (2.5)$$

С другой стороны, из доказательства леммы 2 известно, что $G_1^{(2)} = \mathrm{Hg}(X_{1s})^{\mathrm{ss}}$, поэтому из коммутативности диаграммы (2.5) следует, что

$$\begin{aligned} & \mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1t})} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1t})^\perp \hookrightarrow \mathrm{End}_{G_1^{(2)}} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1t})^\perp \\ & \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{G_1^{(2)}} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^\perp = \mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})^{\mathrm{ss}}} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^\perp = \mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1s})} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1s})^\perp = K. \end{aligned}$$

Значит, $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1t})} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1t})^\perp = K$ или $\mathrm{End}_{\mathrm{Hg}(X_{1t})} \mathrm{NS}_{\mathbb{Q}}(X_{1t})^\perp = \mathbb{Q}$ (во втором случае, как показано в доказательстве леммы 2, простые факторы полупростой алгебры Ли $\mathrm{Lie} \mathrm{Hg}(X_{1t}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ имеют тип A_1 , B_m ($m \geq 2$), D_m ($m \geq 3$) и,

следовательно, идеал $\mathrm{Lie} G_1^{(2)} \otimes \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathrm{Lie} \mathrm{Hg}(X_{1t}) \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ имеет простые факторы таких же типов, что противоречит равенству $G_1^{(2)} = \mathrm{Hg}(X_{1s})^{\mathrm{ss}}$ и тому факту, что $\mathrm{Lie}(\mathrm{Hg}(X_{1s}))^{\mathrm{ss}} \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ имеет тип A_n ($n \geq 2$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Можно считать, что функции $s \mapsto \mathrm{rank} \mathrm{NS}(X_{ks})$ постоянны на множестве $C \setminus \Delta_{\mathrm{countable}}$ [8; замечание 4.6].

Список литературы

- [1] Yu. G. Zarhin, “Hodge groups of K3 surfaces”, *J. Reine Angew. Math.*, **341** (1983), 193–220.
- [2] W. V. D. Hodge, “The topological invariants of algebraic varieties”, *Proceedings of the International congress of mathematicians*, v. 1 (Cambridge, Mass., 1950), Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1952, 182–192.
- [3] G. Kempf, F. F. Knudsen, D. Mumford, B. Saint-Donat, *Toroidal embeddings*, v. I, Lecture Notes in Math., **339**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1973, viii+209 pp.
- [4] С. Г. Танкеев, “Об арифметике и геометрии общего гиперповерхностного сечения”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 173–204; англ. пер.: S. G. Tankeev, “The arithmetic and geometry of a generic hypersurface section”, *Izv. Math.*, **66**:2 (2002), 393–424.
- [5] С. Г. Танкеев, “Моноидальные преобразования и гипотезы об алгебраических циклах”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **71**:3 (2007), 197–224; англ. пер.: S. G. Tankeev, “Monoidal transformations and conjectures on algebraic cycles”, *Izv. Math.*, **71**:3 (2007), 629–655.
- [6] П. Делинь, “Теория Ходжа. II”, Математика. Сб. пер., **17**, №5, Мир, М., 1973, 3–56; англ. пер.: P. Deligne, “Théorie de Hodge. II”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **40**:1 (1971), 5–57.
- [7] Ю. Г. Зархин, “Веса простых алгебр Ли в когомологиях алгебраических многообразий”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:2 (1984), 264–304; англ. пер.: Yu. G. Zarhin, “Weights of simple Lie algebras in cohomology of algebraic varieties”, *Math. USSR-Izv.*, **24**:2 (1985), 245–281.
- [8] О. В. Никольская, “Об алгебраических циклах на расслоенном произведении семейств K3 поверхностей”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:1 (2013), 145–164; англ. пер.: O. V. Nikol’skaya, “On algebraic cycles on a fibre product of families of K3 surfaces”, *Izv. Math.*, **77**:1 (2013), 143–162.
- [9] P. Deligne, “Théorie de Hodge. III”, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **44**:1 (1974), 5–77.
- [10] S. Zucker, “Hodge theory with degenerating coefficients: L_2 cohomology in the Poincaré metric”, *Ann. of Math.* (2), **109**:3 (1979), 415–476.

Ольга Владимировна Никольская
(Ol’ga V. Nikol’skaya)

Владимирский государственный университет
им. А. Г. и Н. Г. Столетовых
E-mail: papichonok@yandex.ru

Поступила в редакцию
28.06.2013