Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. А. Алиев, $N^{\pm}$ -интегралы и граничные значения интегралов типа Коши конечных мер, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 7, 3–24

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8268>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 17:03:57

УДК 517.518.234+517.547.73

Р. А. Алиев

$N^\pm$ -интегралы и граничные значения интегралов типа Коши конечных мер

Пусть Γ – простой замкнутый ляпуновский контур, на котором задана конечная комплексная мера ν , G^+ – ограниченная и G^- – неограниченная области с границей Γ . В работе с использованием новых понятий (так называемых N -интегрирования и N^+ -, N^- -интегралов) доказано, что интегралы типа Коши $F^+(z)$, $z \in G^+$, и $F^-(z)$, $z \in G^-$, меры ν являются соответственно N^+ - и N^- -интегралами Коши. При получении соответствующих результатов существенную роль играют наличие свойства аддитивности и справедливость формулы замены переменной для N^+ - и N^- -интегралов.

Библиография: 21 название.

Ключевые слова: конечная комплексная борелевская мера, интеграл типа Коши, некасательные граничные значения, интеграл Коши, Q -интеграл, Q' -интеграл, N -интегрирование.

DOI: 10.4213/sm8268

§ 1. Введение

Пусть Γ – простой замкнутый ляпуновский контур, на котором задана конечная комплексная мера ν , G^+ – ограниченная и G^- – неограниченная области с границей Γ . Функции

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\nu(\tau)}{\tau - z}, \quad z \in G^+, \quad F^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\nu(\tau)}{\tau - z}, \quad z \in G^-,$$

называются интегралами типа Коши меры ν по контуру Γ .

В. И. Смирновым (см. [1]) доказано, что аналитические функции $F^+(z)$ и $F^-(z)$ имеют конечные некасательные граничные значения $F^+(\tau)$ и $F^-(\tau)$ почти для всех точек $\tau \in \Gamma$ (см. статью В. П. Хавина [2]).

Из результатов О. Д. Келлога [3] о конформных отображениях следует, что если граница области G^+ – простой замкнутый ляпуновский контур, то классы функций Смирнова $E_p(G^+)$ и Харди $H_p(G^+)$ совпадают для любого $0 < p < \infty$ (см. [4]) и интеграл типа Коши конечной комплексной меры принадлежит классам $E_p(G^+) = H_p(G^+)$ при любом $0 < p < 1$. Но для того чтобы интеграл типа Коши $F^+(z)$ стал интегралом Коши, т.е. для справедливости равенства

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F^+(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in G^+, \quad (1.1)$$

необходимо и достаточно, чтобы $F^+(z) \in E_1(G^+) = H_1(G^+)$ (см. [5]). Из теоремы А. Зигмунда (см., например, [6; гл. 5, С, § 3°]) следует, что если мера ν

абсолютно непрерывна: $d\nu(\tau) = f(\tau) d\tau$ и $f \in L \log L(\Gamma)$, то $F^+(z) \in E_1(G^+) = H_1(G^+)$, и поэтому интеграл типа Коши является интегралом Коши, т.е. имеет место равенство (1.1). Если же $f \in L(\Gamma)$, но $f \notin L \log L(\Gamma)$, то даже в случае окружности $T = \{z \in C : |z| = 1\}$ может оказаться, что граничные значения $F^+(\tau)$ и $F^-(\tau)$ не будут интегрируемы на T в смысле Лебега, и поэтому равенство (1.1) в этом случае не удовлетворяется.

Используя понятие A -интегрирования, П. Л. Ульянов в [7] (в случае единичной окружности) и в [8] (в случае простого замкнутого ляпуновского контура) установил, что если мера ν абсолютно непрерывна: $d\nu(t) = f(t) dt$ и $f \in L(\Gamma)$, то имеет место равенство

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} (A) \int_{\Gamma} \frac{F^+(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in G^+, \quad (1.2)$$

т.е. интеграл типа Коши абсолютно непрерывной меры является A -интегралом Коши.

И. А. Виноградовой в [9], [10] было введено понятие LG^* -интеграла и доказано, что если функция $F(z)$ представима LG^* -интегралом типа Коши внутри единичной окружности, то $F(z)$ представима LG^* -интегралом Коши. Так как LG^* -интеграл является сужением A -интеграла, то формула (1.2) остается в силе и в этом случае.

А. Б. Александров (см. [11]) установил справедливость равенства (1.2) для аналитических в единичном круге функций, принадлежащих классу Смирнова и удовлетворяющих условию $\lambda m\{\tau \in T : |F^+(\tau)| > \lambda\} = o(1)$, $\lambda \rightarrow +\infty$.

Для функций, аналитических в ограниченных односвязных областях G с простой спрямляемой границей ∂G и удовлетворяющих условию $\lambda m\{\tau \in \partial G : |F_{\alpha}^*(\tau)| > \lambda\} = o(1)$, $\lambda \rightarrow +\infty$, для некоторого $\alpha > 1$, равенство (1.2) доказано Т. С. Салимовым в [12] при $\alpha > 2$ и автором в [13] при $\alpha > 1$; $F_{\alpha}^*(\tau) = \sup\{|F(z)| : z \in G, |z - \tau| < \alpha\rho(z, \partial G)\}$ – аналог некасательной максимальной функции, $\rho(z, \partial G)$ – расстояние от точки $z \in G$ до границы ∂G .

А. Б. Александровым в [11] установлено также, что если пользоваться лишь понятием интеграла, значение которого от любой почти всюду действительной функции также является действительным, то для интегралов типа Коши конечной комплексной борелевской меры формулы, аналогичные формулам (1.1) и (1.2), вообще говоря, могут не иметь места и, следовательно, необходимо привлечь к рассмотрению интегралы с комплексными значениями.

В случае, когда мера ν не является абсолютно непрерывной, граничные значения $F^+(\tau)$ интеграла типа Коши $F^+(z)$ при $z \rightarrow \tau \in \Gamma$ не удовлетворяют условию $\lambda m\{\tau \in \Gamma : |F^+(\tau)| > \lambda\} = o(1)$, $\lambda \rightarrow +\infty$, и поэтому формула (1.2) теряет силу. Можно было бы ожидать, что в этом случае интеграл типа Коши является Q' -интегралом Коши, введенным Э. Титчмаршем в [14], т.е. имеет место равенство

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_{\lambda}} \frac{F^+(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in G^+, \quad (1.3)$$

где

$$\Gamma_{\lambda} = \left\{ \tau \in \Gamma : \left| \frac{F^+(\tau)}{\tau - z} \right| \leq \lambda \right\}.$$

Однако, как следует из результатов автора [15], в единичной окружности $\Gamma = T$ для интегралов типа Коши конечной комплексной борелевской меры предел в правой части равенства (1.3) существует, т.е. граничные значения $F^+(\tau)$ являются Q' -интегрируемыми на Γ , но сама формула (1.3) в силу появления добавочного слагаемого в правой части (см. [11; теорема 2, формула (7)]) не имеет места, т.е. интеграл типа Коши конечной комплексной борелевской меры не является Q' -интегралом Коши. Поскольку Q' -интеграл не является аддитивным в классе Q' -интегрируемых функций, то возникает потребность в отыскании такого класса функций, в котором содержатся граничные значения интеграла типа Коши и Q' -интеграл обладает свойством аддитивности. Далее, путем добавления к значению Q' -интеграла подходящего слагаемого мы получаем новый интеграл, названный N^+ -интегралом, который позволяет установить аналогии формул (1.1) и (1.2) для интегралов типа Коши конечных комплексных борелевских мер. Отметим, что N -интегрируемость шире A -интегрируемости, но уже Q' -интегрируемости (в смысле класса интегрируемых функций).

В настоящей работе доказано, что интегралы типа Коши $F^+(z)$ и $F^-(z)$ произвольной конечной комплексной борелевской меры являются соответственно N^+ - и N^- -интегралами Коши. Следует особо отметить, что при получении соответствующих результатов существенную роль играют наличие свойства аддитивности и справедливость формулы замены переменной для N^+ - и N^- -интегралов.

Полученные в настоящей работе результаты распределены по параграфам следующим образом.

В § 2 найден критерий Q' -интегрируемости и Q -интегрируемости комплексных функций (лемма 2), а также:

- доказано, что из Q' -интегрируемости функции следует ее Q -интегрируемость, при этом Q' - и Q -интегралы этой функции совпадают (теорема 1);
- найден класс функций $M([a, b]; C)$ (см. определение 4) такой, что в этом классе Q' -интеграл совпадает с Q -интегралом (теорема 2);
- доказано, что из Q' -интегрируемости (Q -интегрируемости) функции $f \in M([a, b]; C)$ и A -интегрируемости функции g следует Q' -интегрируемость (Q -интегрируемость) их суммы $f + g$ и Q' -интеграл (Q -интеграл) этой суммы равен сумме Q' -интеграла (Q -интеграла) функции f и A -интеграла функции g (теорема 3 и следствие 1);
- найден класс функций $SM([0, 2\pi]; C)$ (см. определение 5) такой, что в этом классе Q' -интеграл и Q -интеграл обладают свойством аддитивности (теорема 5 и следствие 4);
- доказана формула замены переменной для Q' -интеграла при условии, что подынтегральная функция $f \in SM([0, 2\pi]; C)$ и является Q' -интегрируемой на $[0, 2\pi]$ (теорема 6).

В § 3 введены понятия N -интегрируемости функций, N^+ - и N^- -интегралов функций (см. определения 6 и 7) и приведены формулы для их вычисления, а также доказаны свойства аддитивности (теорема 7) и формулы замены переменной для N^+ - и N^- -интегралов (теорема 8).

В § 4 доказано, что интегралы типа Коши $F^+(z)$ и $F^-(z)$ конечной комплексной борелевской меры являются соответственно N^+ - и N^- -интегралами Коши

(теоремы 11, 13 и 15), т.е. имеют место равенства

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} (N^+) \int_{\Gamma} \frac{F^+(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in G^+, \quad (1.4)$$

$$F^-(z) = -\frac{1}{2\pi i} (N^-) \int_{\Gamma} \frac{F^-(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in G^-; \quad (1.5)$$

доказано, что моменты некасательных граничных значений интеграла типа Коши конечной комплексной борелевской меры равны нулю, т.е. для любой функции g , аналитической в ограниченной области G^+ и непрерывной по Гёльдеру в замыкании $\overline{G^+}$, имеют место равенства (теоремы 12 и 14)

$$(N^+) \int_{\Gamma} F^+(\tau) g(\tau) d\tau = 0.$$

§ 2. Об аддитивности Q -интеграла и Q' -интеграла

Для измеримой на отрезке $[a, b] \subset R$ комплексной функции f положим

$$\begin{aligned} [f(x)]_n &= [f(x)]^n = f(x) \quad \text{при} \quad |f(x)| \leq n, \\ [f(x)]_n &= n \cdot \operatorname{sgn} f(x), \quad [f(x)]^n = 0 \quad \text{при} \quad |f(x)| > n, \quad n \in N, \end{aligned}$$

где $\operatorname{sgn} z = z/|z|$ при $z \neq 0$ и $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

В 1929 г. Э. Титчмаршем (см. [14]) были введены понятия Q - и Q' -интегралов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f(x)]_n dx$ (соответственно $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f(x)]^n dx$), то функция f называется Q -интегрируемой (Q' -интегрируемой) на $[a, b]$, т.е. $f \in Q[a, b]$ ($f \in Q'[a, b]$), а значение этого предела называется Q -интегралом (Q' -интегралом) этой функции и обозначается

$$(Q) \int_a^b f(x) dx \quad \left((Q') \int_a^b f(x) dx \right).$$

В этой же работе Э. Титчмаршем установлено, что при исследовании свойств тригонометрических рядов, сопряженных к рядам Фурье суммируемых по Лебегу функций, Q -интегрирование приводит к ряду естественных результатов. Весьма неудобным фактом, затрудняющим применение Q -интеграла и Q' -интеграла при исследовании различных задач теории функций, является отсутствие свойства аддитивности, т.е. из Q -интегрируемости (Q' -интегрируемости) двух функций еще не следует Q -интегрируемость (Q' -интегрируемость) их суммы. Если же к определению Q -интегрируемости (Q' -интегрируемости) измеримой на отрезке $[a, b]$ функции f добавить условие

$$\lambda m\{x \in [a, b] : |f(x)| > \lambda\} = o(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (2.1)$$

где m – мера Лебега, то Q -интеграл и Q' -интеграл совпадают ($Q[a, b] = Q'[a, b]$) и эти интегралы становятся аддитивными.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Если $f \in Q'[a, b]$ (либо $f \in Q[a, b]$) и выполняется условие (2.1), то функция f называется *A-интегрируемой на $[a, b]$* , $f \in A[a, b]$, и предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f(x)]^n dx$ (либо предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f(x)]_n dx$) в этом случае обозначается

$$(A) \int_a^b f(x) dx.$$

Как было отмечено выше, Q -интеграл и Q' -интеграл не обладают свойством аддитивности. Э. Титчмарш в [14] установил, что если действительные функции $f \in Q[a, b]$, $g \in L[a, b]$ (т.е. функция g интегрируема по Лебегу на отрезке $[a, b]$), то $f + g \in Q[a, b]$ и

$$(Q) \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = (Q) \int_a^b f(x) dx + (L) \int_a^b g(x) dx. \quad (2.2)$$

Докажем, что равенство (2.2) остается в силе и для комплекснозначных функций. Обозначим $\theta_n = [f + g]_n - [f]_n - g$. Сначала покажем, что для любого $x \in [a, b]$ справедливо неравенство

$$|\theta_n(x)| \leq 3|g(x)|. \quad (2.3)$$

В случае $|f(x) + g(x)| \leq n$, $|f(x)| \leq n$ имеем $\theta_n(x) = 0$, и справедливость (2.3) очевидна.

В случае $|f(x) + g(x)| > n$, $|f(x)| \leq n$

$$\begin{aligned} |\theta_n(x)| &= |n \operatorname{sgn}(f(x) + g(x)) - f(x) - g(x)| = \left| n \frac{f(x) + g(x)}{|f(x) + g(x)|} - (f(x) + g(x)) \right| \\ &= |n - |f(x) + g(x)|| = |f(x) + g(x)| - n \leq |f(x)| + |g(x)| - n \leq |g(x)|. \end{aligned}$$

В случае $|f(x) + g(x)| \leq n$, $|f(x)| > n$

$$\begin{aligned} |\theta_n(x)| &= |f(x) + g(x) - n \operatorname{sgn} f(x) - g(x)| = |f(x) - n \operatorname{sgn} f(x)| \\ &= \left| f(x) - n \frac{f(x)}{|f(x)|} \right| = |f(x)| - n \leq |f(x) + g(x)| + |g(x)| - n \leq |g(x)|. \end{aligned}$$

В случае $|f(x) + g(x)| > n$, $|f(x)| > n$

$$\begin{aligned} |\theta_n(x)| &= |n \operatorname{sgn}(f(x) + g(x)) - n \operatorname{sgn} f(x) - g(x)| \\ &\leq n |\operatorname{sgn}(f(x) + g(x)) - \operatorname{sgn} f(x)| + |g(x)| \\ &\leq n |g(x)| \left[\frac{1}{|f(x) + g(x)|} + \frac{1}{|f(x)|} \right] + |g(x)| \leq 3|g(x)|. \end{aligned}$$

Из неравенства (2.3) следует оценка

$$\left| \int_a^b \theta_n(x) dx \right| = \left| \int_{E_n} \theta_n(x) dx \right| \leq \int_{E_n} |\theta_n(x)| dx \leq 3 \int_{E_n} |g(x)| dx,$$

где $E_n = \{x : |f(x)| > n\} \cup \{x : |f(x) + g(x)| > n\}$. Отсюда в силу интегрируемости по Лебегу функции g и равенства $\lim_{n \rightarrow \infty} mE_n = 0$ получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \theta_n(x) dx = 0.$$

Из последнего равенства следует, что если $f \in Q[a, b]$, то $f + g \in Q[a, b]$ и справедливо (2.2).

Следующий пример показывает, что Q' -интеграл не обладает этим свойством, а именно существуют функции $f_0 \in Q'[-1, 1]$ и $g_0 \in L[-1, 1]$ такие, что $f_0 + g_0 \notin Q'[-1, 1]$.

ПРИМЕР 1. Функция $f_0(x) = 2^k \operatorname{sgn} x$ при

$$x \in \left[-\frac{1}{2^{k-1}}; -\frac{1}{2^k}\right) \cup \left(\frac{1}{2^k}; \frac{1}{2^{k-1}}\right], \quad k \in N, \quad f_0(0) = 0,$$

является Q' -интегрируемой на отрезке $[-1, 1]$ и

$$(Q') \int_{-1}^1 f_0(x) dx = 0,$$

а функция $\varphi_0 = f_0 + g_0$, где $g_0 \equiv 1$, не является Q' -интегрируемой.

Кроме того, следует отметить, что существуют функции $f_0 \in Q[-1, 1]$ и $g_0 \in A[-1, 1]$ такие, что $f_0 + g_0 \notin Q[-1, 1]$.

ПРИМЕР 2. Функция $f_0(x) = e^{1/|x|} \operatorname{sgn} x$ при $x \neq 0$, $f_0(0) = 0$, является Q -интегрируемой на отрезке $[-1, 1]$ и

$$(Q) \int_{-1}^1 f_0(x) dx = 0,$$

а функция

$$g_0(x) = \begin{cases} -\frac{1}{(x+1)(1-\ln(x+1))} & \text{при } x \in [-1, 0], \\ \frac{1}{x(1-\ln x)} & \text{при } x \in (0, 1] \end{cases}$$

является A -интегрируемой на отрезке $[-1, 1]$ и

$$(A) \int_{-1}^1 g_0(x) dx = 0,$$

но их сумма не является Q -интегрируемой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть ν – конечная комплексная борелевская мера на полуинтервале $[0, 2\pi)$; тогда 2π -периодическая функция

$$\tilde{\nu}(t) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\{\tau \in [0, 2\pi) : |\tau - t| > \varepsilon\}} \operatorname{ctg} \frac{t - \tau}{2} d\nu(\tau), \quad t \in [0, 2\pi),$$

называется *функцией, сопряженной мере ν* . В частности, если ν абсолютно непрерывна и $d\nu(t) = f(t) dt$, то $\tilde{\nu}$ называется *функцией, сопряженной функцией f* , и обозначается через $\bar{f}$.

С. А. Виноградовым и С. В. Хрущевым (см. [16]) доказано следующее свойство сопряженных функций.

ТЕОРЕМА А. Для любой конечной комплексной борелевской меры μ на единичной окружности $T = \{z \in C : |z| = 1\}$ справедливо равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \cdot m\{t \in [0, 2\pi) : |\tilde{\mu}(e^{it})| > \lambda\} = \frac{2}{\pi} \|\mu_s\|,$$

где μ_s – сингулярная часть меры μ , $\|\mu_s\|$ – полная вариация меры μ_s на окружности T .

Для измеримой на отрезке $[a, b]$ действительной функции f положим

$$\begin{aligned} (f > \lambda) &= \{x \in [a, b] : f(x) > \lambda\}, & (f < \lambda) &= \{x \in [a, b] : f(x) < \lambda\}, \\ (f \geq \lambda) &= \{x \in [a, b] : f(x) \geq \lambda\}, & (f \leq \lambda) &= \{x \in [a, b] : f(x) \leq \lambda\}. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Обозначим через $M([a, b]; C)$ класс измеримых на отрезке $[a, b]$ комплекснозначных функций f , для которых существует конечный предел $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \cdot m(|f| > \lambda)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Теорема А показывает, что функции, сопряженные конечным комплексным борелевским мерам, вообще говоря, не удовлетворяют условию (2.1), но принадлежат классу $M([a, b]; C)$.

ЛЕММА 1. Если функция f принадлежит $M([a, b]; C)$, а функция g удовлетворяет условию (2.1) на $[a, b]$, то их сумма $f + g$ принадлежит классу $M([a, b]; C)$; при этом выполняется равенство

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \cdot m(|f + g| > \lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \cdot m(|f| > \lambda).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \cdot m(|f| > \lambda) = \alpha$. Если $\alpha = 0$, то утверждение леммы очевидно. Рассмотрим случай $\alpha > 0$. Для любого $\varepsilon > 0$ в силу включений

$$((|f| > (1 + \varepsilon)\lambda) \setminus (|g| > \varepsilon\lambda)) \subset (|f + g| > \lambda) \subset ((|f| > (1 - \varepsilon)\lambda) \cup (|g| > \varepsilon\lambda))$$

имеют место неравенства

$$\begin{aligned} m(|f| > (1 + \varepsilon)\lambda) - m(|g| > \varepsilon\lambda) &\leq m(|f + g| > \lambda) \\ &\leq m(|f| > (1 - \varepsilon)\lambda) + m(|g| > \varepsilon\lambda). \end{aligned}$$

Отсюда с учетом равенств

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \cdot m(|g| > \lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \cdot m(|f| > \lambda) = \alpha$$

имеем

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \cdot m(|f + g| > \lambda) \leq \frac{\alpha}{1 - \varepsilon}, \quad \underline{\lim}_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \cdot m(|f + g| > \lambda) \geq \frac{\alpha}{1 + \varepsilon},$$

а в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получим

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \cdot m(|f + g| > \lambda) = \alpha = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \cdot m(|f| > \lambda).$$

Лемма доказана.

Следующий пример показывает, что если $f \in M([a, b]; C)$ и $g \in M([a, b]; C)$, то их сумма $f + g$, вообще говоря, не принадлежит классу $M([a, b]; C)$.

ПРИМЕР 3. Функции

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, 1], \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{при } x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2k+1}}, \frac{1}{2^{2k}} \right], \\ -\frac{1}{x} & \text{при } x \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{2k+2}}, \frac{1}{2^{2k+1}} \right] \end{cases}$$

принадлежат классу $M([0, 1]; C)$, но их сумма $f + g$ не принадлежит классу $M([0, 1]; C)$.

Пусть f – измеримая комплексная функция на отрезке $[a, b]$. Обозначим

$$h_n = \int_{(|f| > n)} \operatorname{sgn} f(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

ЛЕММА 2. *Имеют место следующие соотношения:*

- а) $f \in Q[a, b] \iff \text{ряд } \sum_{n=0}^{\infty} h_n \text{ сходится};$
 б) $f \in Q'[a, b] \iff \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} n(h_{n-1} - h_n) \text{ сходится}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу оценки ($k = 1, 2, \dots$)

$$\begin{aligned} \left| \int_{(k-1 < |f| \leq k)} f(x) dx - k(h_{k-1} - h_k) \right| &= \left| \int_{(k-1 < |f| \leq k)} \{f(x) - k \operatorname{sgn} f(x)\} dx \right| \\ &\leq \int_{(k-1 < |f| \leq k)} \left| f(x) - k \frac{f(x)}{|f(x)|} \right| dx \\ &= \int_{(k-1 < |f| \leq k)} ||f(x)| - k| dx \leq m(k-1 < |f| \leq k), \end{aligned}$$

получаем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \int_{(k-1 < |f| \leq k)} f(x) dx - k(h_{k-1} - h_k) \right\}$$

абсолютно сходится. Отсюда, поскольку

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x)]_n dx &= \int_{(|f| \leq n)} f(x) dx + nh_n = \sum_{k=1}^n \int_{(k-1 < |f| \leq k)} f(x) dx + nh_n \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\int_{(k-1 < |f| \leq k)} f(x) dx - k(h_{k-1} - h_k) \right) + \sum_{k=1}^n k(h_{k-1} - h_k) + nh_n \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\int_{(k-1 < |f| \leq k)} f(x) dx - k(h_{k-1} - h_k) \right) + \sum_{k=0}^{n-1} h_k, \quad n \in N, \end{aligned}$$

следует утверждение п. а). Утверждение п. б) имеет место в силу равенства

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x)]^n dx &= \int_{(|f| \leq n)} f(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\int_{(k-1 < |f| \leq k)} f(x) dx - k(h_{k-1} - h_k) \right) + \sum_{k=1}^n k(h_{k-1} - h_k). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f \in Q'[a, b]$. Тогда $f \in Q[a, b]$ и справедливо равенство

$$(Q) \int_a^b f(x) dx = (Q') \int_a^b f(x) dx. \quad (2.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из условия $f \in Q'[a, b]$ согласно п. б) леммы 2 следует, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n(h_{n-1} - h_n)$ сходится. Отсюда аналогично рассуждениям в доказательстве теоремы 8 из [17] получаем сходимость ряда $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ и справедливость равенства $\sum_{n=1}^{\infty} n(h_{n-1} - h_n) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n$. Тогда согласно п. а) леммы 2 имеем $f \in Q[a, b]$ и

$$\begin{aligned} (Q) \int_a^b f(x) dx - (Q') \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b [f(x)]_n dx - \int_a^b [f(x)]^n dx \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^{n-1} h_k - \sum_{k=1}^n k(h_{k-1} - h_k) \right) = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Теорема 1 доказана Э. Титчмаршом (см. [14]) для монотонных и М. П. Ефимовой (см. [17]) для действительных функций.

ТЕОРЕМА 2. В классе функций $M([a, b]; C)$ Q -интеграл и Q' -интеграл совпадают, т.е. если $f \in M([a, b]; C)$, то для существования $(Q) \int_a^b f(x) dx$ необходимо и достаточно существование $(Q') \int_a^b f(x) dx$, при этом имеет место равенство (2.4).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 1 из $f \in Q'[a, b]$ следует, что $f \in Q[a, b]$ и справедливо равенство (2.4). Остается доказать, что в классе функций $M([a, b]; C)$ из $f \in Q[a, b]$ следует $f \in Q'[a, b]$. Если функция $f \in Q[a, b]$ принадлежит классу $M([a, b]; C)$, то существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} nm(|f| \geq n) = \alpha$ и согласно п. а) леммы 2 ряд $\sum_{n=0}^{\infty} h_n$ сходится. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $n(\varepsilon) \in N$ такое, что при $n > n(\varepsilon)$ выполняются неравенства

$$\alpha - \varepsilon < nm(|f| \geq n) < \alpha + \varepsilon, \quad \left| \sum_{j=1}^p h_{n+j} \right| < \frac{\varepsilon^2}{\alpha + 1}$$

для любого $p \in N$. Для $n \in N$ обозначим $p_n = [\varepsilon n / (\alpha + 1)] + 1$, где $[\theta]$ – целая часть числа θ . Тогда при $n > n(\varepsilon)$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} |nh_n| &< \frac{\alpha + 1}{\varepsilon} |p_n h_n| = \frac{\alpha + 1}{\varepsilon} \left| \sum_{j=1}^{p_n} (h_n - h_{n+j}) + \sum_{j=1}^{p_n} h_{n+j} \right| \\ &< \frac{\alpha + 1}{\varepsilon} \left(\sum_{j=1}^{p_n} m(n < |f| \leq n + j) + \frac{\varepsilon^2}{\alpha + 1} \right) \\ &< \frac{\alpha + 1}{\varepsilon} p_n m(n < |f| \leq n + p_n) + \varepsilon \\ &< \frac{\alpha + 1}{\varepsilon} p_n \left(\frac{\alpha + \varepsilon}{n} - \frac{\alpha - \varepsilon}{n + p_n} \right) + \varepsilon < 4\varepsilon + \frac{8\alpha + 1}{n} + \frac{4\alpha(\alpha + 1)}{\varepsilon n^2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nh_n = 0. \quad (2.5)$$

Теперь, учитывая (2.5) и равенство

$$\int_a^b [f(x)]_n dx - \int_a^b [f(x)]^n dx = \sum_{k=0}^{n-1} h_k - \sum_{k=1}^n k(h_{k-1} - h_k) = nh_n,$$

получим, что $f \in Q'[a, b]$ и справедливо равенство (2.4). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. Если функция $f \in M([a, b]; C)$ является Q' -интегрируемой на отрезке $[a, b]$, а функция g является A -интегрируемой на $[a, b]$, то их сумма $f + g \in M([a, b]; C)$ Q' -интегрируема на $[a, b]$ и справедливо равенство

$$(Q') \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = (Q') \int_a^b f(x) dx + (A) \int_a^b g(x) dx. \quad (2.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $g \in A[a, b]$, то в силу леммы 1 имеем $f + g \in M([a, b]; C)$. Докажем, что имеют место соотношения

$$\lambda m((|f| > \lambda) \cap (|f + g| \leq \lambda)) = o(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty, \quad (2.7)$$

$$\lambda m((|f| \leq \lambda) \cap (|f + g| > \lambda)) = o(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty. \quad (2.8)$$

Пусть $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda m(|f| > \lambda) = \alpha$. Для любого $\varepsilon > 0$ в силу включений

$$\begin{aligned} &(|f| > \lambda) \cap (|f + g| \leq \lambda) \\ &\subset (\lambda < |f| \leq (1 + \varepsilon)\lambda) \cup ((|f| > (1 + \varepsilon)\lambda) \cap (|f + g| \leq \lambda)) \\ &\subset ((|f| > \lambda) \setminus (|f| > (1 + \varepsilon)\lambda)) \cup (|g| > \varepsilon\lambda) \end{aligned}$$

имеет место неравенство

$$m((|f| > \lambda) \cap (|f + g| \leq \lambda)) \leq m(|f| > \lambda) - m(|f| > (1 + \varepsilon)\lambda) + m(|g| > \varepsilon\lambda),$$

откуда следует, что

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \cdot m((|f| > \lambda) \cap (|f + g| \leq \lambda)) \leq \alpha - \frac{\alpha}{1 + \varepsilon} = \frac{\varepsilon\alpha}{1 + \varepsilon}.$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получим равенство (2.7). Равенство (2.8) доказывается аналогично с учетом леммы 1.

Теперь докажем, что $f + g \in Q'[a, b]$. Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. В силу равенств (2.7), (2.8) и A -интегрируемости функции g имеем

$$\begin{aligned} \int_{(|f+g| \leq \lambda)} (f(x) + g(x)) dx &= \int_{(|f+g| \leq \lambda) \cap (|f| \leq \lambda)} (f(x) + g(x)) dx + o(1) \\ &= \int_{(|f+g| \leq \lambda) \cap (|f| \leq \lambda) \cap (|g| \leq \varepsilon \lambda)} (f(x) + g(x)) dx + o(1) \\ &= \int_{(|f+g| \leq \lambda) \cap (|f| \leq \lambda) \cap (|g| \leq \varepsilon \lambda)} f(x) dx + \int_{(|f+g| \leq \lambda) \cap (|f| \leq \lambda) \cap (|g| \leq \varepsilon \lambda)} g(x) dx + o(1) \\ &= \int_{(|f| \leq \lambda)} f(x) dx + \int_{(|g| \leq \varepsilon \lambda)} g(x) dx \\ &\quad - \int_{(|g| \leq \varepsilon \lambda) \cap (|f| > \lambda)} g(x) dx + o(1), \quad \lambda \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Поскольку

$$\left| \int_{(|g| \leq \varepsilon \lambda) \cap (|f| > \lambda)} g(x) dx \right| \leq \varepsilon \lambda m(|f| > \lambda),$$

то из равенства (2.9) следует, что при достаточно больших значениях λ выполняется неравенство

$$\left| \int_{(|f+g| \leq \lambda)} (f(x) + g(x)) dx - \int_{(|f| \leq \lambda)} f(x) dx - \int_{(|g| \leq \varepsilon \lambda)} g(x) dx \right| \leq \varepsilon + \varepsilon(\alpha + \varepsilon).$$

Отсюда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ следует, что функция $f + g$ является Q' -интегрируемой и справедливо равенство (2.6). Теорема доказана.

Из теорем 2 и 3 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 1. Если функция $f \in M([a, b]; C)$ является Q -интегрируемой на отрезке $[a, b]$, а функция g является A -интегрируемой на $[a, b]$, то их сумма $f + g$ принадлежит классу $M([a, b]; C)$, Q -интегрируема на $[a, b]$ и справедливо равенство

$$(Q) \int_a^b [f(x) + g(x)] dx = (Q) \int_a^b f(x) dx + (A) \int_a^b g(x) dx.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $f \in M([a, b]; C)$, а измеримая на $[a, b]$ функция g такая, что разность $f - g$ удовлетворяет условию (2.1). Если функции f и g являются Q' -интегрируемыми на отрезке $[a, b]$, то их разность $f - g$ является A -интегрируемой на $[a, b]$ и справедливо равенство

$$(A) \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = (Q') \int_a^b f(x) dx - (Q') \int_a^b g(x) dx.$$

Доказательство теоремы 4 проводится аналогично доказательству теоремы 2 (вместо функции g следует рассмотреть функцию $g - f$).

Из теорем 2 и 4 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $f \in M([a, b]; C)$, а измеримая на $[a, b]$ функция g такая, что разность $f - g$ удовлетворяет условию (2.1). Если функции f и g являются Q -интегрируемыми на отрезке $[a, b]$, то их разность $f - g$ является A -интегрируемой на $[a, b]$ и справедливо равенство

$$(A) \int_a^b [f(x) - g(x)] dx = (Q) \int_a^b f(x) dx - (Q) \int_a^b g(x) dx.$$

Пусть f – измеримая действительная 2π -периодическая функция и такая, что для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset R$ существует конечный предел

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda m\{x \in [\alpha, \beta] : |f(x)| > \lambda\}.$$

Обозначим (см. [15])

$$P(f; q; x; t) = \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi q^{n-1}}{2} f(t)$$

при $t \in (x - \pi q^{n-1}, x - \pi q^n) \cup (x + \pi q^n, x + \pi q^{n-1})$, $n \in Z_+$, $0 < q < 1$,

$$P_1(f; x) = \lim_{q \rightarrow 1-} \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \eta m\{t \in (x, x + \pi) : |P(f; q; x; t)| > \eta\}, \quad (2.10)$$

$$P_2(f; x) = \lim_{q \rightarrow 1-} \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \eta m\{t \in (x - \pi, x) : |P(f; q; x; t)| > \eta\}, \quad (2.11)$$

$$r_{\lambda, f}(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(P_2(f; x) - P_1(f; x)) & \text{при } f(x) > \lambda, \\ 0 & \text{при } |f(x)| \leq \lambda, \\ \operatorname{sgn}(P_1(f; x) - P_2(f; x)) & \text{при } f(x) < -\lambda \end{cases}$$

при условии, что существуют конечные пределы в правых частях равенств (2.10) и (2.11) для почти всех $x \in [0, 2\pi)$. Для любой измеримой комплексной функции $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$, определенной на промежутке $[0, 2\pi)$, обозначим $r_{\lambda, f}(x) = r_{\lambda, \operatorname{Re} f}(x) + i r_{\lambda, \operatorname{Im} f}(x)$ при условии, что существуют $r_{\lambda, \operatorname{Re} f}(x)$ и $r_{\lambda, \operatorname{Im} f}(x)$ для почти всех $x \in [0, 2\pi)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Обозначим через $SM([0, 2\pi]; C)$ класс комплексных измеримых на промежутке $[0, 2\pi)$ функций f , для которых существует $r_{\lambda, f}(x)$ для почти всех $x \in [0, 2\pi)$, существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_{\alpha-\varepsilon}^{\beta-\varepsilon} r_{\lambda, f}(t) dt$$

для любого промежутка $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi)$ и функция $f - \tilde{\nu}$ удовлетворяет условию (2.1), где $\tilde{\nu}$ – функция, сопряженная мере ν , определенной как

$$\nu([\alpha, \beta]) = \frac{\pi}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_{\alpha-\varepsilon}^{\beta-\varepsilon} r_{\lambda, f}(t) dt$$

для любого промежутка $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi)$.

Отметим, что для любой функции $f = \tilde{\nu} + g$, где ν – конечная борелевская мера на промежутке $[0, 2\pi)$, а измеримая функция g удовлетворяет условию (2.1), для почти всех $x \in [0, 2\pi)$ существует $r_{\lambda, f}(x)$ и для любого промежутка $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi)$ справедливо равенство (см. [15; теорема 3])

$$\nu_s([\alpha, \beta]) = \frac{\pi}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_{\alpha-\varepsilon}^{\beta-\varepsilon} r_{\lambda, f}(t) dt, \quad (2.12)$$

где ν_s – сингулярная часть меры ν .

Равенство (2.12) показывает, что класс функций $SM([0, 2\pi]; C)$ совпадает с классом функций, имеющих представление $f = \tilde{\nu}_s + g$, где ν_s – конечная сингулярная комплексная борелевская мера на промежутке $[0, 2\pi)$, а измеримая на $[0, 2\pi)$ комплексная функция g удовлетворяет условию (2.1).

Нам понадобится следующая теорема, доказанная Т. С. Салимовым в [18].

ТЕОРЕМА В. *Для любой конечной комплексной борелевской меры μ на окружности T справедливо равенство*

$$(Q') \int_0^{2\pi} \tilde{\mu}(e^{it}) dt = 0.$$

Отсюда с учетом теорем 3 и 4 имеем

СЛЕДСТВИЕ 3. *Для любой функции $f = \tilde{\nu}_s + g \in SM([0, 2\pi]; C)$ Q' -интегрируемость (Q -интегрируемость) функции f на отрезке $[0, 2\pi]$ равносильна A -интегрируемости функции g на $[0, 2\pi]$ и справедливо равенство*

$$(Q') \int_0^{2\pi} f(x) dx = (A) \int_0^{2\pi} g(x) dx \quad \left((Q) \int_0^{2\pi} f(x) dx = (A) \int_0^{2\pi} g(x) dx \right).$$

ТЕОРЕМА 5. *В классе функций $SM([0, 2\pi]; C)$ Q' -интеграл обладает свойством аддитивности, т.е. если функции $f_1, f_2 \in SM([0, 2\pi]; C)$ Q' -интегрируемы на отрезке $[0, 2\pi]$, то их сумма $f_1 + f_2$ также принадлежит классу $SM([0, 2\pi]; C)$, Q' -интегрируема на этом отрезке и справедливо равенство*

$$(Q') \int_0^{2\pi} [f_1(x) + f_2(x)] dx = (Q') \int_0^{2\pi} f_1(x) dx + (Q') \int_0^{2\pi} f_2(x) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, из Q' -интегрируемости функций $f_1 = \tilde{\nu}_{s,1} + g_1 \in SM([0, 2\pi]; C)$, $f_2 = \tilde{\nu}_{s,2} + g_2 \in SM([0, 2\pi]; C)$ согласно следствию 3 следует A -интегрируемость функций g_1 и g_2 . Так как A -интеграл обладает свойством аддитивности, то функция $g_1 + g_2$ является A -интегрируемой, откуда в силу следствия 3 функция $f_1 + f_2$ является Q' -интегрируемой и

$$\begin{aligned} (Q') \int_0^{2\pi} [f_1(x) + f_2(x)] dx &= (A) \int_0^{2\pi} [g_1(x) + g_2(x)] dx \\ &= (A) \int_0^{2\pi} g_1(x) dx + (A) \int_0^{2\pi} g_2(x) dx \\ &= (Q') \int_0^{2\pi} f_1(x) dx + (Q') \int_0^{2\pi} f_2(x) dx. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Из теорем 2 и 5 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 4. В классе функций $SM([0, 2\pi]; C)$ Q -интеграл обладает свойством аддитивности, т.е. если функции $f_1, f_2 \in SM([0, 2\pi]; C)$ Q -интегрируемы на отрезке $[0, 2\pi]$, то их сумма $f_1 + f_2$ также принадлежит классу $SM([0, 2\pi]; C)$, Q -интегрируема на этом отрезке и справедливо равенство

$$(Q) \int_0^{2\pi} [f_1(x) + f_2(x)] dx = (Q) \int_0^{2\pi} f_1(x) dx + (Q) \int_0^{2\pi} f_2(x) dx.$$

ТЕОРЕМА 6. Пусть функция $f(x) \in SM([0, 2\pi]; C)$ является Q' -интегрируемой на отрезке $[0, 2\pi]$, функция $x = \varphi(t)$ осуществляет взаимно однозначное дифференцируемое отображение отрезка $[0, 2\pi]$ на себя, производная $\varphi'(t)$ непрерывна по Гёльдеру и удовлетворяет условиям $|\varphi'(t)| \geq D_1 > 0$, $t \in [0, 2\pi]$, $\varphi'(0) = \varphi'(2\pi)$. Тогда функция $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ принадлежит классу $SM([0, 2\pi]; C)$, Q' -интегрируема на $[0, 2\pi]$ и выполняется равенство

$$(Q') \int_0^{2\pi} f(x) dx = (Q') \int_0^{2\pi} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (2.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in SM([0, 2\pi]; C)$; тогда $f = \tilde{\nu}_s + g$, где ν_s – конечная сингулярная комплексная борелевская мера на $[0, 2\pi)$, а g – измеримая на $[0, 2\pi)$ комплексная функция, удовлетворяющая условию (2.1).

Рассмотрим меру $\mu_s([\alpha, \beta]) = \nu_s([\varphi(\alpha), \varphi(\beta)])$, $[\alpha, \beta] \subset [0, 2\pi)$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}_s(t) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{(|\tau-t|>\varepsilon)} \operatorname{ctg} \frac{t-\tau}{2} d\nu_s(\tau) \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{(|\varphi(\tau)-t|>\varepsilon)} \operatorname{ctg} \frac{t-\varphi(\tau)}{2} d\mu_s(\tau), \end{aligned}$$

и поэтому

$$\tilde{\nu}_s(\varphi(t)) \varphi'(t) - \tilde{\mu}_s(t) = \int_0^{2\pi} \left[\operatorname{ctg} \frac{\varphi(t) - \varphi(\tau)}{2} \cdot \varphi'(t) - \operatorname{ctg} \frac{t-\tau}{2} \right] d\mu_s(\tau).$$

Так как по условиям теоремы функция

$$K(t, \tau) = \operatorname{ctg} \frac{\varphi(t) - \varphi(\tau)}{2} \cdot \varphi'(t) - \operatorname{ctg} \frac{t-\tau}{2}$$

абсолютно интегрируема по τ и существует интеграл

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} |K(t, \tau)| d\tau \right) dt,$$

то по теореме Фубини (см., например, [19; гл. 5, § 6])

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} (\tilde{\nu}_s(\varphi(t)) \varphi'(t) - \tilde{\mu}_s(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left[\operatorname{ctg} \frac{\varphi(t) - \varphi(\tau)}{2} \cdot \varphi'(t) - \operatorname{ctg} \frac{t-\tau}{2} \right] d\mu_s(\tau) \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \left[\operatorname{ctg} \frac{\varphi(t) - \varphi(\tau)}{2} \cdot \varphi'(t) - \operatorname{ctg} \frac{t-\tau}{2} \right] dt \right) d\mu_s(\tau) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом теоремы 1 из [8] следует, что функция

$$f(\varphi(t))\varphi'(t) = \tilde{\mu}_s(t) + [\tilde{\nu}_s(\varphi(t))\varphi'(t) - \tilde{\mu}_s(t)] + g(\varphi(t))\varphi'(t)$$

принадлежит классу $SM([0, 2\pi]; C)$, Q' -интегрируема на $[0, 2\pi]$ и выполняется равенство (2.13). Теорема доказана.

§ 3. $N^\pm$ -интегралы: определения и некоторые свойства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Если функция f принадлежит классу $SM([0, 2\pi]; C)$ и Q' -интегрируема на отрезке $[0, 2\pi]$, то функция f называется N -интегрируемой на $[0, 2\pi]$. Сумма

$$(Q') \int_0^{2\pi} f(x) dx + \frac{\pi}{2i} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, f}(x) dx$$

называется N^+ -интегралом, а разность

$$(Q') \int_0^{2\pi} f(x) dx - \frac{\pi}{2i} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \int_0^{2\pi} r_{\lambda, f}(x) dx$$

называется N^- -интегралом функции f на отрезке $[0, 2\pi]$; они обозначаются соответственно через $(N^+) \int_0^{2\pi} f(x) dx$ и $(N^-) \int_0^{2\pi} f(x) dx$.

Равенство (2.12) показывает, что если известна сингулярная мера ν_s в разложении $f = \tilde{\nu}_s + g \in SM([0, 2\pi]; C)$, то N^+ - и N^- -интегралы вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} (N^+) \int_0^{2\pi} f(x) dx &= (Q') \int_0^{2\pi} f(x) dx - i \int_0^{2\pi} d\nu_s(x) \\ &= (A) \int_0^{2\pi} g(x) dx - i \int_0^{2\pi} d\nu_s(x), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} (N^-) \int_0^{2\pi} f(x) dx &= (Q') \int_0^{2\pi} f(x) dx + i \int_0^{2\pi} d\nu_s(x) \\ &= (A) \int_0^{2\pi} g(x) dx + i \int_0^{2\pi} d\nu_s(x). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для комплексной измеримой на отрезке $[a, b]$ функции f через f^* обозначим 2π -периодическую функцию, определенную при $x \in [0, 2\pi)$ равенством

$$f^*(x) = \frac{b-a}{2\pi} f\left(a + \frac{b-a}{2\pi} x\right).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Если функция f^* является N -интегрируемой на отрезке $[0, 2\pi]$, то функция f называется N -интегрируемой на отрезке $[a, b]$, а N^+ - и N^- -интегралы функции f на отрезке $[a, b]$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} (N^+) \int_a^b f(x) dx &= (N^+) \int_0^{2\pi} f^*(x) dx, \\ (N^-) \int_a^b f(x) dx &= (N^-) \int_0^{2\pi} f^*(x) dx. \end{aligned}$$

ПРИМЕР 4. Если интегрируемая по Лебегу на $[a, b]$ функция φ непрерывна по Гёльдеру в точке $x_0 \in (a, b)$, т.е. существуют числа $\delta > 0$, $C > 0$, $\alpha \in (0, 1]$ такие, что $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha$ при любых $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, то

$$\begin{aligned} (N^+) \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x - x_0} dx &= \text{v.p.} \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x - x_0} dx - \pi i \varphi(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x - x_0 + i\varepsilon} dx, \\ (N^-) \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x - x_0} dx &= \text{v.p.} \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x - x_0} dx + \pi i \varphi(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x - x_0 - i\varepsilon} dx. \end{aligned}$$

Так как по теореме 5 в классе функций $SM([0, 2\pi]; C)$ Q' -интеграл обладает свойством аддитивности, то из равенств (3.1) и (3.2) следует

ТЕОРЕМА 7. N^+ -интеграл и N^- -интеграл обладают свойством аддитивности, т.е. если функции f_1 и f_2 N -интегрируемы на отрезке $[a, b]$, то их сумма $f_1 + f_2$ также N -интегрируема на $[a, b]$ и справедливы равенства

$$\begin{aligned} (N^+) \int_a^b (f_1 + f_2)(x) dx &= (N^+) \int_a^b f_1(x) dx + (N^+) \int_a^b f_2(x) dx, \\ (N^-) \int_a^b (f_1 + f_2)(x) dx &= (N^-) \int_a^b f_1(x) dx + (N^-) \int_a^b f_2(x) dx. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 8. Пусть функция $f(x)$ является N -интегрируемой на отрезке $[a, b]$, а функция $x = \varphi(t)$ осуществляет взаимно однозначное дифференцируемое отображение отрезка $[c, d]$ на отрезок $[a, b]$, производная $\varphi'(t)$ непрерывна по Гёльдеру и удовлетворяет условиям $|\varphi'(t)| \geq D_0 > 0$, $t \in [c, d]$, $\varphi'(d) = \varphi'(c)$. Тогда функция $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ является N -интегрируемой на $[c, d]$ и выполняются равенства

$$(N^+) \int_a^b f(x) dx = (N^+) \int_c^d f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt, \quad (3.3)$$

$$(N^-) \int_a^b f(x) dx = (N^-) \int_c^d f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функция f является N -интегрируемой на $[a, b]$, то согласно определению 2π -периодическая функция, определенная при $t \in [0, 2\pi]$ равенством

$$f^*(t) = \frac{b-a}{2\pi} f\left(a + \frac{b-a}{2\pi} t\right),$$

является N -интегрируемой на отрезке $[0, 2\pi]$. Пусть $f^* = \tilde{\nu}_s + g$. Обозначим

$$\varphi^*(t) = \left[\varphi\left(c + \frac{d-c}{2\pi} t\right) - a \right] \cdot \frac{2\pi}{b-a}.$$

Тогда по теореме 6 функция $f^*(\varphi^*(t))(\varphi^*)'(t)$ является Q' -интегрируемой на $[0, 2\pi]$ и выполняется равенство

$$(Q') \int_0^{2\pi} f^*(x) dx = (Q') \int_0^{2\pi} f^*(\varphi^*(t))(\varphi^*)'(t) dt. \quad (3.5)$$

Рассмотрим меру $\mu_s([\alpha, \beta)) = \nu_s([\varphi(\alpha), \varphi(\beta)))$, $[\alpha, \beta) \subset [0, 2\pi)$. Из равенства $f^* = \tilde{\nu}_s + g$ следует, что $f^*(\varphi^*)(\varphi^*)' = \tilde{\mu}_s + g^*$, где функция g^* удовлетворяет условию (2.1). Учитывая также, что

$$\int_0^{2\pi} d\nu_s(x) = \int_0^{2\pi} d\mu_s(x),$$

в силу равенств (3.1), (3.2) и (3.5) получим

$$\begin{aligned} (N^+) \int_a^b f(x) dx &= (N^+) \int_0^{2\pi} f^*(x) dx = (Q') \int_0^{2\pi} f^*(x) dx - i \int_0^{2\pi} d\nu_s(x) \\ &= (Q') \int_0^{2\pi} f^*(\varphi^*(t))(\varphi^*)'(t) dt - i \int_0^{2\pi} d\mu_s(x) = (N^+) \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t) dt, \end{aligned}$$

т.е. справедливо равенство (3.3). Равенство (3.4) доказывается аналогично. Теорема доказана.

§ 4. $N^\pm$ -интегралы и граничные значения интегралов типа Коши конечных мер

Используя понятие N^+ -интеграла, теорему 4 из [15] и теорему 2 из [20] можно сформулировать соответственно следующим образом.

ТЕОРЕМА 9. Пусть ν – конечная комплексная борелевская мера на $[0, 2\pi)$, $u(re^{it})$ – ее интеграл Пуассона, $\vartheta(re^{it})$ – гармонически сопряженная функция с $u(re^{it})$, $F(z) = u(z) + i\vartheta(z)$, $z = re^{it} \in D^+ = \{z \in C : |z| < 1\}$, $F(e^{it})$ – некасательные граничные значения функции $F(z)$ при $z \rightarrow e^{it} \in T = \{z \in C : |z| = 1\}$. Тогда справедливо равенство

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} (N^+) \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} F(e^{it})}{e^{it} - z} dt.$$

ТЕОРЕМА 10. Пусть $F(z)$ – функция, определенная в теореме 9, и $F(e^{it})$ – некасательные граничные значения функции $F(z)$ при $z \rightarrow e^{it} \in T$. Тогда справедливы равенства

$$(N^+) \int_0^{2\pi} e^{ikt} F(e^{it}) dt = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Пусть измеримая функция f задана на простом замкнутом ляпуновском контуре Γ и $\xi = \xi(s)$, $s \in [0, l]$, – параметрическое уравнение Γ , где s – длина дуги части контура от точки $\xi_0 = \xi(0)$ до точки $\xi_s = \xi(s)$. Обозначим $f^*(t) = f(\xi(t)) \cdot \xi'(t)$, $t \in [0, l]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Если функция f^* является N -интегрируемой на отрезке $[0, l]$, то функция f называется N -интегрируемой на контуре Γ , а N^+ - и N^- -интегралы функции f на Γ определяются по формулам

$$(N^+) \int_\Gamma f(x) dx = (N^+) \int_0^l f^*(t) dt, \quad (N^-) \int_\Gamma f(x) dx = (N^-) \int_0^l f^*(t) dt.$$

Теорема 8 показывает, что если контур Γ задан параметрическим уравнением $\xi = \xi(t)$, $t \in [a, b]$, причем функция $\xi = \xi(t)$ дифференцируема на $[a, b]$, производная $\xi'(t)$ непрерывна по Гёльдеру и удовлетворяет условиям $|\xi'(t)| \geq D_0 > 0$,

$t \in [a, b]$, $\xi'(a) = \xi'(b)$, то N -интегрируемость функции f на Γ равносильна N -интегрируемости функции $f(\xi(t)) \cdot \xi'(t)$ на $[a, b]$, при этом N^+ - и N^- -интегралы этих функций равны.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если функция φ непрерывна по Гёльдеру на простом замкнутом ляпуновском контуре Γ , то согласно формуле Сохоцкого (см., например, [21; гл. I, § 4]) функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} (N^-) \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in \overline{G^+},$$

непрерывна в замыкании $\overline{G^+}$, где G^+ – ограниченная область с границей Γ , а функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} (N^+) \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in \overline{G^-},$$

непрерывна в замыкании $\overline{G^-}$, где G^- – неограниченная область с границей Γ .

ТЕОРЕМА 11. Если μ – конечная комплексная борелевская мера на единичной окружности $T = \{z \in C : |z| = 1\}$ и

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{d\mu(\tau)}{\tau - z}, \quad z \in D^+ = \{z \in C : |z| < 1\},$$

то

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} (N^+) \int_T \frac{F^+(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in D^+,$$

где $F^+(\tau)$ – некасательные предельные значения функции $F^+(z)$ при $z \rightarrow \tau \in T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим меру

$$d\nu(t) = \frac{e^{-it}}{2i} d\mu(e^{it})$$

на $[0, 2\pi)$. Тогда

$$F^+(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} d\nu(t)}{e^{it} - z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\nu(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\nu(t) = F_1(z) + c_0,$$

где

$$F_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} d\nu(t), \quad c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\nu(t).$$

Из теоремы 9 и аддитивности N^+ -интеграла следует, что

$$\begin{aligned} F^+(z) &= \frac{1}{2\pi} (N^+) \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} F_1(e^{it})}{e^{it} - z} dt + c_0 = \frac{1}{2\pi} (N^+) \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} (F_1(e^{it}) + c_0)}{e^{it} - z} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} (N^+) \int_T \frac{F^+(\tau)}{\tau - z} d\tau. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 12. Если функция g аналитическая в области D^+ и непрерывная по Гёльдеру в замыкании $\overline{D^+}$, то справедливо равенство

$$(N^+) \int_T F^+(\tau) g(\tau) d\tau = 0,$$

где $F^+(\tau)$ – некасательные граничные значения функции $F^+(z)$, определенной в теореме 11.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала отметим, что если ν – конечная комплексная борелевская мера на $[0, 2\pi)$, $u(re^{it})$ – ее интеграл Пуассона, $\vartheta(re^{it})$ – гармонически сопряженная функция с $u(re^{it})$, $F_1(z) = u(z) + i\vartheta(z)$, $z = re^{it}$, $F_1(e^{it})$ – некасательные граничные значения функции $F_1(z)$ при $z \rightarrow e^{it}$, то аналогично теореме 10 с учетом равенства $\overline{e^{it}g(e^{it})} = -ie^{it}g(e^{it})$ имеем

$$(N^+) \int_0^{2\pi} g(e^{it}) F_1(e^{it}) dt = 0.$$

Рассмотрим меру

$$d\nu(t) = \frac{e^{-it}}{2i} d\mu(e^{it})$$

на $[0, 2\pi)$. Тогда $F^+(z) = F_1(z) + c_0$, где $F_1(z)$ и c_0 определены в доказательстве теоремы 11, и поэтому

$$\begin{aligned} (N^+) \int_T F^+(\tau) g(\tau) d\tau &= (N^+) i \int_0^{2\pi} [F_1(e^{it}) + c_0] g(e^{it}) e^{it} dt \\ &= (N^+) i \int_0^{2\pi} F_1(e^{it}) g(e^{it}) e^{it} dt = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 13. Пусть G^+ – ограниченная область с простой замкнутой ляпуновской границей Γ . Если ν – конечная комплексная борелевская мера на Γ и

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\nu(\tau)}{\tau - z}, \quad z \in G^+,$$

то

$$F^+(z) = \frac{1}{2\pi i} (N^+) \int_\Gamma \frac{F^+(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in G^+, \quad (4.1)$$

где $F^+(\tau)$ – некасательные граничные значения функции $F^+(z)$ при $z \rightarrow \tau \in \Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $z = \xi(u)$ осуществляет взаимно однозначное и конформное отображение единичного круга $D^+ = \{u \in C : |u| < 1\}$ на область G^+ . Тогда (см. [3]) функция $z = \xi(u)$ и ее производная непрерывно продолжаемы на границу $T = \partial D^+ = \{u \in C : |u| = 1\}$, при этом функция $z = \xi(u)$ и ее производная будут непрерывными по Гёльдеру в замыкании $\overline{D^+}$. Положим $\Phi^+(u) = F^+(\xi(u))$. На единичной окружности T рассмотрим меру

$$d\mu(t) = \frac{1}{\xi'(t)} d\nu(\xi(t)).$$

Обозначая

$$\Psi^+(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{d\mu(t)}{t - u}, \quad u \in D^+,$$

согласно теореме 11 имеем

$$\Psi^+(u) = \frac{1}{2\pi i} (N^+) \int_T \frac{\Psi^+(t)}{t - u} dt, \quad (4.2)$$

где $\Psi^+(t)$ – некасательные граничные значения функции $\Psi^+(u)$ при $u \rightarrow t \in T$. Так как по условиям теоремы функция

$$\begin{aligned} X^+(u) &= \Phi^+(u) - \Psi^+(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\nu(\tau)}{\tau - \xi(u)} - \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{d\mu(t)}{t - u} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_T \left[\frac{\xi'(t)}{\xi(t) - \xi(u)} - \frac{1}{t - u} \right] d\mu(t) \end{aligned}$$

принадлежит классу Харди H_1 , то (см. [5; гл. II, § 5])

$$X^+(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_T \frac{X^+(t)}{t - u} dt, \quad (4.3)$$

где $X^+(t)$ – некасательные граничные значения функции $X^+(u)$ при $u \rightarrow t \in T$. Из равенств (4.2), (4.3) и теоремы 7 получим

$$\begin{aligned} \Phi^+(u) &= X^+(u) + \Psi^+(u) = \frac{1}{2\pi i} (N^+) \int_T \frac{X^+(t) + \Psi^+(t)}{t - u} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} (N^+) \int_T \frac{\Phi^+(t)}{t - u} dt, \end{aligned}$$

где $\Phi^+(t)$ – некасательные граничные значения функции $\Phi^+(u)$ при $u \rightarrow t \in T$, откуда

$$F^+(\xi(u)) = \frac{1}{2\pi i} (N^+) \int_T \frac{F^+(\xi(t))}{t - u} dt. \quad (4.4)$$

Кроме того, из теоремы 12 следует, что для любого $u \in D^+$

$$(N^+) \int_T F^+(\xi(t)) g_u(t) dt = \int_T X^+(t) g_u(t) dt + (N^+) \int_T \Psi^+(t) g_u(t) dt = 0, \quad (4.5)$$

где

$$g_u(t) = \frac{\xi'(t)}{\xi(t) - \xi(u)} - \frac{1}{t - u}, \quad u \in D^+.$$

Складывая (4.4) и (4.5), получаем равенство

$$F^+(\xi(u)) = \frac{1}{2\pi i} (N^+) \int_T \frac{F^+(\xi(t)) \xi'(t)}{\xi(t) - \xi(u)} dt.$$

Отсюда с учетом теоремы 8 для любого $u \in D^+$ имеем

$$F^+(\xi(u)) = \frac{1}{2\pi i} (N^+) \int_{\Gamma} \frac{F^+(\tau)}{\tau - \xi(u)} d\tau. \quad (4.6)$$

Поскольку $z = \xi(u)$ – взаимно однозначное отображение единичного круга D^+ на область G^+ , то $\xi(u)$ – произвольная точка из G^+ , и потому из (4.6) следует равенство (4.1). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 14. Если функция g аналитическая в ограниченной области G^+ с простой замкнутой ляпуновской границей Γ и непрерывная по Гёльдеру в замыкании $\overline{G^+}$, то

$$(N^+) \int_{\Gamma} F^+(\tau) g(\tau) d\tau = 0, \quad (4.7)$$

где $F^+(\tau)$ – некасательные граничные значения функции $F^+(z)$, определенной в теореме 13, при $z \rightarrow \tau \in \Gamma$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $z = \xi(u)$ осуществляет взаимно однозначное и конформное отображение единичного круга $D^+ = \{u \in C : |u| < 1\}$ на область G^+ . Рассмотрим функцию $g_1(u) = g(\xi(u))\xi'(u)$, $u \in D^+$. Из условия теоремы следует, что функция g_1 аналитическая в области D^+ и непрерывная по Гёльдеру в замыкании $\overline{D^+}$. Тогда аналогично доказательству равенства (4.5) имеем

$$(N^+) \int_T F^+(\xi(t))g_1(t) dt = 0.$$

Отсюда с учетом теоремы 8 получаем справедливость равенства (4.7). Теорема доказана.

Для интегралов типа Коши $F^-(z)$, $z \in G^-$, имеет место аналог теоремы 13 (доказательство проводится аналогичным образом).

ТЕОРЕМА 15. Пусть G^- – неограниченная область с простой замкнутой ляпуновской границей Γ . Если ν – конечная комплексная борелевская мера на Γ и

$$F^-(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{d\nu(\tau)}{\tau - z}, \quad z \in G^-,$$

то

$$F^-(z) = -\frac{1}{2\pi i} (N^-) \int_{\Gamma} \frac{F^-(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \in G^-,$$

где $F^-(\tau)$ – некасательные граничные значения функции $F^-(z)$ при $z \rightarrow \tau \in \Gamma$.

Автор выражает глубокую благодарность Н. А. Ильясову за полезные обсуждения и замечания.

Список литературы

- [1] V. Smirnoff, “Sur les valeurs limites des fonctions régulières à l’intérieur d’un cercle”, *Журн. Ленинград. физ.-матем. об-ва*, **2:2** (1928), 22–37.
- [2] В. П. Хавин, “Граничные свойства интегралов типа Коши и гармонически сопряженных функций в областях со спрямляемой границей”, *Матем. сб.*, **68(110):4** (1965), 499–517.
- [3] O. D. Kellogg, “Harmonic functions and Green’s integral”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **13:1** (1912), 109–132.
- [4] P. L. Duren, *Theory of H^p spaces*, Pure and Applied Mathematics, **38**, Academic Press, New York–London, 1970, xii+258 pp.
- [5] И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций*, 2nd ed., ГИТТЛ, М.–Л., 1950, 336 с.
- [6] П. Кусис, *Введение в теорию пространств H^p* , С приложением доказательства Вольффа теоремы о короне, Мир, М., 1984, 364 с.; пер. с англ.: P. Koosis, *Introduction to H^p spaces*, With an appendix on Wolff’s proof of the corona theorem, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **40**, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1980, xv+376 pp.
- [7] П. Л. Ульянов, “Об A -интеграле Коши. I”, *УМН*, **11:5(71)** (1956), 223–229.
- [8] П. Л. Ульянов, “Об интегралах типа Коши”, Сборник статей. Посвящается академику Михаилу Алексеевичу Лаврентьеву к его шестидесятилетию, Тр. МИАН СССР, **60**, Изд-во АН СССР, М., 1961, 262–281; англ. пер.: P. L. Ul’yanov, “Integrals of Cauchy type”, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, **44**, 1965, 129–150.

- [9] И. А. Виноградова, “Обобщенный интеграл и сопряженные функции”, *Матем. сб.*, **99(141)**:1 (1976), 84–120; англ. пер.: I. A. Vinogradova, “A generalized integral and conjugate functions”, *Math. USSR-Sb.*, **28**:1 (1976), 73–106.
- [10] И. А. Виноградова, “Об LG^* -интеграле типа Коши”, *Матем. заметки.*, **20**:5 (1976), 645–653; англ. пер.: I. A. Vinogradova, “Cauchy-type LG^* integral”, *Math. Notes*, **20**:5 (1976), 922–927.
- [11] А. Б. Александров, “Об A -интегрируемости граничных значений гармонических функций”, *Матем. заметки*, **30**:1 (1981), 59–72; англ. пер.: A. B. Aleksandrov, “ A -integrability of the boundary values of harmonic functions”, *Math. Notes*, **30**:1 (1981), 515–523.
- [12] Т. С. Салимов, “ A -интеграл и граничные значения аналитических функций”, *Матем. сб.*, **136(178)**:1(5) (1988), 24–40; англ. пер.: T. S. Salimov, “The A -integral and boundary values of analytic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **64**:1 (1989), 23–39.
- [13] Р. А. Алиев, “Existence of angular boundary values and Cauchy–Green formula”, *Журн. матем. физ., анализ, геом.*, **7**:1 (2011), 3–18.
- [14] Е. С. Титчмарш, “On conjugate functions”, **29**:1 (1929), 49–80.
- [15] Р. А. Алиев, “О представимости аналитических функций по своим граничным значениям”, *Матем. заметки*, **73**:1 (2003), 8–21; англ. пер.: R. A. Aliev, “Representability of analytic functions in terms of their boundary values”, *Math. Notes*, **73**:1 (2003), 8–20.
- [16] S. V. Hruščev, S. A. Vinogradov, “Free interpolation in the space of uniformly convergent Taylor series”, *Complex analysis and spectral theory* (Leningrad, 1979/1980), *Lecture Notes in Math.*, **864**, Springer, Berlin–New York, 1981, 171–213.
- [17] М. П. Ефимова, “О свойствах Q -интеграла”, *Матем. заметки*, **90**:3 (2011), 340–350; англ. пер.: M. P. Efimova, “On the properties of the Q -integral”, *Math. Notes*, **90**:3 (2011), 322–332.
- [18] Т. С. Салимов, “К теореме Е. Титчмарша о сопряженной функции”, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, **102** (1993), 99–114.
- [19] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, 6-е изд., Наука, М., 1989, 624 с.; франц. пер.: A. Kolmogorov, S. Fomine, *Éléments de la théorie des fonctions et de l’analyse fonctionnelle*, Ellipses, Paris; MIR, М., 1994, 536 pp.
- [20] R. A. Aliev, “On boundary properties of analytical functions”, *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci.*, **29**:4, Mathematics and Mechanics (2009), 3–10.
- [21] Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, 2-е изд., Физматгиз, М., 1963, 639 с.; англ. пер.: F. D. Gakhov, *Boundary value problems*, Pergamon Press, Oxford–New York–Paris; Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass.–London, 1966, xix+561 pp.

Рашид Авязага Алиев
(Rashid A. Aliev)

Бакинский государственный университет,
Азербайджан

E-mail: aliyevrashid@hotmail.ru;
aliyevrashid@box.az

Поступила в редакцию
01.07.2013 и 06.03.2014