Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Штерн, Строение локально ограниченных конечных
номерных представлений связных локально компактных
групп, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 4, 149–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8269>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 12:21:36

УДК 512.546+517.986.6+512.815.1

А. И. Штерн

Строение локально ограниченных конечномерных представлений связных локально компактных групп

Получен аналог теоремы Ли для (не обязательно непрерывных) конечномерных представлений разрешимых конечномерных локально компактных групп со связной факторгруппой по центру. В качестве следствия получено следующее утверждение об автоматической непрерывности для локально ограниченных конечномерных представлений связных локально компактных групп: если G – связная локально компактная группа, N – ее компактная нормальная подгруппа, фактор по которой является группой Ли, N_0 – связная компонента единицы в N , H – семейство элементов группы G , перестановочных с любым элементом группы N_0 , π – (не обязательно непрерывное) локально ограниченное конечномерное представление группы G , то π непрерывно на коммутанте группы H (во внутренней топологии наибольшей аналитической подгруппы группы G , содержащей этот коммутант).

Библиография: 23 названия.

Ключевые слова: локально компактная группа, конечномерная локально компактная группа, теорема Ли для разрешимых групп, явление Картана–ван дер Вардена, локально ограниченное отображение.

DOI: 10.4213/sm8269

§ 1. Введение

В статье Э. Картана [1] (в которой было доказано, что любое конечномерное (не являющееся непрерывным априори) представление связной простой компактной группы Ли автоматически непрерывно) и в статье ван дер Вардена [2] (где было доказано, что любое локально ограниченное конечномерное (не являющееся непрерывным априори) представление связной простой (не обязательно компактной) группы Ли автоматически непрерывно) приведены первые теоремы об автоматической непрерывности для представлений и гомоморфизмов связных групп Ли и, более общим образом, связных локально компактных групп. Родственный вопрос об автоматической непрерывности автоморфизмов, изоморфизмов и гомоморфизмов, в частности с плотным образом, рассматривался (начиная с 1928 г.) многими авторами (см., например, [3]–[13] и приведенную в этих статьях библиографию), но результаты перечисленных работ связаны либо с условием плотности образа соответствующего отображения, либо с условием алгебраичности рассматриваемых групп, так что эти результаты

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 11-01-00057-а).

нельзя непосредственно применить к изучению конечномерных представлений общих связных групп Ли и тем более общих связных локально компактных групп. Более подробное изложение истории вопроса приведено в [14], где с помощью более ранних результатов автора [15] об автоматической непрерывности локально ограниченных конечномерных линейных представлений связных групп Ли был получен ряд результатов, относящихся к (не обязательно непрерывным) конечномерным унитарным представлениям связных локально компактных групп.

Статья организована следующим образом. Необходимые предварительные сведения изложены в § 2. В § 3 получен аналог теоремы Ли для (не обязательно непрерывных) конечномерных представлений разрешимых конечномерных локально компактных групп со связной факторгруппой по центру. В § 4 доказана теорема об автоматической непрерывности локально ограниченных конечномерных представлений на коммутанте конечномерных локально компактных групп со связной факторгруппой по центру (во внутренней топологии аналитической подгруппы группы G , содержащей этот коммутант). В § 5 изложено следствие об автоматической непрерывности для конечномерных представлений связных локально компактных групп, утверждающее, что если G – связная локально компактная группа, N – ее компактная нормальная подгруппа, фактор по которой является группой Ли, N_0 – связная компонента единицы в N , H – семейство элементов группы G , перестановочных с любым элементом группы N_0 , π – (не обязательно непрерывное) конечномерное представление группы G , то π непрерывно на коммутанте группы H (во внутренней топологии аналитической подгруппы группы G , содержащей этот коммутант).

Часть результатов статьи анонсирована в [16].

§ 2. Предварительные сведения

Напомним некоторые определения и утверждения работы [15], используемые в доказательствах настоящей статьи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть G – группа, X – подмножество в G . Множество X называется *бесконечно делимым*, если для любого элемента $x \in X$ и любого натурального числа p существует такой элемент $y \in X$, что $y^p = x$. Группа G называется *локально бесконечно делимой*, если операция возведения в любую натуральную степень p открыта в единице группы, т.е. множество p -х степеней элементов, пробегающих любую окрестность единицы в G , содержит некоторую окрестность единицы в G .

Очевидно, любая группа Ли локально бесконечно делима. Следующее утверждение показывает, что в любой топологической группе замыкания бесконечно делимых относительно компактных подгрупп бесконечно делимы.

ЛЕММА 1 (см. [15]). Пусть G – топологическая группа, а X – подмножество группы G с компактным замыканием $\overline{X}$ в G . Если X бесконечно делимо, то и $\overline{X}$ бесконечно делимо.

Сформулируем теперь одно из простейших обобщений теоремы Ли.

ТЕОРЕМА А (см. [15]). Пусть G – разрешимая группа, а также пусть каждый коммутативный фактор в композиционном ряду группы G бесконечно делим. Пусть π – представление группы G в конечномерном комплексном линейном пространстве E . Если представление π неприводимо, то пространство представления π одномерно.

Напомним, что любая коммутативная связная локально компактная группа бесконечно делима [15; следствие 1], как и любая компактная связная группа [17; теорема 9.35], а последовательные коммутанты связной топологической группы связны, как и факторгруппы по ним, и поэтому любая связная разрешимая локально компактная группа удовлетворяет всем условиям теоремы А. Отсюда получаем

СЛЕДСТВИЕ 1 (см. [15; следствие 5]). 1) Любое (не обязательно непрерывное) неприводимое конечномерное представление связной разрешимой локально компактной группы одномерно.

2) Любое (не обязательно непрерывное) конечномерное представление связной разрешимой локально компактной группы имеет базис, в котором операторы представления записываются верхними треугольными матрицами.

Напомним следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть G – топологическая группа, π – представление (не обязательно непрерывное) группы G в нормированном пространстве E . Представление π называется *локально равномерно ограниченным* (или просто *локально ограниченным*), если существуют окрестность V единичного элемента e в G и такая постоянная C , что $\|\pi(g)\| \leq C$ для любого $g \in V$, где $\|\cdot\|$ – операторная норма в E .

Приведем один из результатов статьи [15], который был сформулирован в [15] неточно; на самом деле в [15] доказан следующий факт.

ТЕОРЕМА В (см. [15]). Пусть G – связная группа Ли, G' – коммутант G и π – локально ограниченное конечномерное представление группы G . Ограничение $\pi|_{G'}$ представления π на G' непрерывно на G' во внутренней топологии аналитической подгруппы группы G , содержащей G' .

Этот результат об автоматической непрерывности локально ограниченных конечномерных представлений связных локально компактных групп является наилучшим возможным. В частности, любая несовершенная связная группа Ли имеет разрывное локально ограниченное конечномерное представление.

§ 3. Аналог теоремы Ли для (не обязательно непрерывных) конечномерных представлений разрешимых конечномерных локально компактных групп со связной факторгруппой по центру

Начнем изложение со следующего вспомогательного утверждения (лемма 6 в [15]). Для удобства читателя мы воспроизводим ее доказательство.

ЛЕММА 2. Пусть G – группа, N – нормальная подгруппа в G , π – неприводимое представление группы G в конечномерном векторном пространстве E ,

а также пусть существует одномерное подпространство $L \subset E$, инвариантное относительно ограничения σ представления π на N . Если существует бесконечно делимое подмножество $X \subset G/N$, порождающее G/N , то все операторы представления σ кратны единичному оператору в пространстве E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По предположению представление σ имеет одномерное подпредставление и тем самым общий собственный вектор $\xi \in E$ такой, что

$$\sigma(n)\xi = \lambda(n)\xi \quad \text{для всех } n \in N,$$

где $\lambda(n) \in \mathbb{C}^*$, $n \in N$. Тогда

$$\sigma(n)\pi(g)\xi = \pi(g)\sigma(g^{-1}ng)\xi = \lambda(g^{-1}ng)\pi(g)\xi, \quad n \in N, \quad g \in G, \quad (1)$$

и поэтому все векторы вида $\pi(g)\xi$, $g \in G$, – общие собственные векторы для представления σ . Все такие векторы порождают некоторое конечномерное подпространство $F \subset E$ (линейную оболочку всех векторов вида $\pi(g)\xi$, $g \in G$, в подпространстве E), и по построению подпространство F имеет базис из собственных векторов представления σ . Разумеется, любое множество линейно независимых векторов вида $\sigma(g)\xi$, $g \in G$, конечно. Из формулы (1) следует, что ненулевое подпространство F инвариантно относительно представления π группы G . По предположению представление π неприводимо, так что $F = E$. Таким образом, множество различных функций вида λ_g , $g \in G$, конечно, где

$$\lambda_g(n) = \lambda(g^{-1}ng), \quad g \in G, \quad n \in N.$$

Поскольку λ_g , $g \in G$, – комплекснозначные характеры группы N , то они инвариантны относительно внутренних автоморфизмов группы N . Поэтому $\lambda_n = \lambda$, $n \in N$. Тем самым, группа G/N транзитивно действует на (непустом) конечном множестве $\{\lambda_g \mid g \in G\}$ подстановками этого конечного множества, и если число элементов в этом конечном множестве равно m , то образ группы G/N является подгруппой симметрической группы S_m так, что порядок этой подгруппы является делителем числа $m!$. По условию для любого $x \in X$ существует такой элемент $y \in X$, что $y^{m!} = x$. Следовательно, подстановка, отвечающая элементу x , есть $m!$ -я степень подстановки, отвечающей элементу y , и поэтому единична. Так как по условию множество X порождает группу G/N , то все подстановки, определяющие транзитивное действие группы G/N на $\{\lambda_g \mid g \in G\}$, единичны, так что множество $\{\lambda_g \mid g \in G\}$ одноэлементно, $\lambda_g = \lambda$ для всех $g \in G$ и тем самым все операторы представления σ являются скалярными кратными единичному оператору на E (операторами умножения на число, т.е. $\sigma(n) = \lambda(n)1_E$, $n \in N$).

Применим лемму 2 для доказательства аналога теоремы Ли для конечномерных представлений некоторых групп, разрешимых в теоретико-групповом смысле.

ТЕОРЕМА 1. Пусть G – разрешимая группа, Z – ее центр, а также пусть каждый фактор в ряду коммутантов группы G/Z бесконечно делим. Пусть π – представление группы G в конечномерном комплексном линейном пространстве E . Если представление π неприводимо, то пространство представления π одномерно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему индукцией по длине ряда коммутантов группы G/Z . Если эта длина равна 0, то группа $G = Z$ коммутативна, и утверждение справедливо автоматически, что устанавливает базу индукции. Рассмотрим индуктивный шаг. Пусть утверждение справедливо, если длина ряда коммутантов разрешимой группы G/Z , каждый фактор которого бесконечно делим, не выше $n \geq 0$. Пусть также дана разрешимая группа G , для которой длина ряда коммутантов $\{G_i/Z\}$ группы $G/Z = G_0/Z$ равна $n+1 \geq 1$ (так что $G_{n+1}/Z = \{e\}$ и $G_n/Z \neq \{e\}$) и каждый фактор $(G_i/Z)/(G_{i+1}/Z)$, $i = 0, 1, \dots, n$, бесконечно делим (G_i – полный прообраз группы G_i/Z в G). Пусть π – неприводимое представление группы G в конечномерном линейном пространстве E . Рассмотрим подгруппу G_1/N , являющуюся следующим за группой G/N элементом композиционного ряда. Так как группа $G/G_1 = (G/Z)/(G_1/Z)$ коммутативна, то группа G_1/Z содержит все коммутаторы вида $ghg^{-1}h^{-1}Z$, $g, h \in G$. По построению группа G_1 разрешима, длина ряда коммутантов группы G_1/Z не выше n и каждый коммутативный фактор в ряду коммутантов группы G_1/Z бесконечно делим. Пусть ρ – ограничение представления π на подгруппу G_1 , являющуюся полным прообразом группы G_1/Z в G . По предположению индукции представление ρ имеет одномерное подпредставление. По лемме 2, примененной к группе G и ее нормальной подгруппе G_1 , представление ρ есть представление скалярными операторами. Так как коммутант группы G содержится в G_1 , оператор $\rho(ghg^{-1}h^{-1})$, $g, h \in G$, есть скалярное кратное единичного оператора на E (оператор умножения на число $\lambda(ghg^{-1}h^{-1})$). Выберем по представителю в каждом классе смежности вида gZ и обозначим выбранный элемент через g_z . Тогда ввиду центральности произведений вида kzk^{-1} для всех $k \in G$, $z \in Z$ получаем

$$\begin{aligned} \rho(ghg^{-1}h^{-1}) &= \rho(g_z(g_z^{-1}g)h_z(h_z^{-1}h)(g_z(g_z^{-1}g))^{-1}(h_z(h_z^{-1}h))^{-1}) \\ &= \rho(g_zh_z(g_z)^{-1}(h_z)^{-1}(g_z^{-1}g)(h_z^{-1}h)(g_z^{-1}g)^{-1}(h_z^{-1}h)^{-1}) \\ &= \rho(g_zh_z(g_z)^{-1}(h_z)^{-1}) \\ &= \pi(g_z)\pi(h_z)\pi((g_z)^{-1})\pi((h_z)^{-1}) \quad \text{для любых } g, h \in G, \end{aligned}$$

и поэтому $\det \rho(ghg^{-1}h^{-1}) = 1$ или

$$(\lambda(ghg^{-1}h^{-1}))^{\dim E} = 1, \quad g, h \in G. \quad (2)$$

Таким образом, функция λ принимает конечное число значений на всех коммутаторах в группе G , которые автоматически принадлежат подгруппе G_1 .

Если $n = 0$ и $G_1 = Z$, то все коммутаторы $ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in G$, лежат в Z . Так как группа G/Z бесконечно делима по условию, то для любых $g, h \in G$ существуют g_1 и h_1 такие, что $g = g_1^{\dim E} z_g$ и $h = h_1^{\dim E} z_h$ для некоторых $z_g, z_h \in Z$. Тогда если $g_1 h_1 g_1^{-1} = z h_1$, $z \in Z$, то, итерируя, получаем $g_1^{\dim E} h_1 (g_1^{-1})^{\dim E} = z^{\dim E} h_1$, а затем возводим в степень $\dim E$ и имеем

$$\begin{aligned} g_1^{\dim E} h_1^{\dim E} (g_1^{-1})^{\dim E} &= z^{2 \dim E} h_1^{\dim E}, \\ g(z_g)^{-1} h(z_h)^{-1} (z_g) g^{-1} &= z^{2 \dim E} h(z_h)^{-1}, \end{aligned}$$

или

$$ghg^{-1} = z^{2 \dim E} h, \quad ghg^{-1}h^{-1} = z^{2 \dim E}, \quad \lambda(ghg^{-1}h^{-1}) = \lambda(z^{2 \dim E}) = 1.$$

Пусть теперь $n \geq 1$. По построению введенная выше функция λ является одномерным представлением группы G_1 и потому тривиальна на G_2 . Поэтому λ -образ группы G_1 можно рассматривать как образ бесконечно делимой группы G_1/G_2 при гомоморфизме факторгруппы по G_2 , определяемом отображением λ . Поскольку образ бесконечно делимой группы при любом гомоморфизме бесконечно делим, а конечная группа бесконечно делима тогда и только тогда, когда она единична, λ -образ группы G_1 единичен и при $n \geq 1$. Итак,

$$\lambda(ghg^{-1}h^{-1}) \equiv 1 \quad \text{для всех } g, h \in G.$$

Следовательно, ограничение представления ρ на коммутант группы G кратно единичному, и можно считать, что π – представление коммутативной факторгруппы группы G по ее коммутанту. При этом по условию данное представление π неприводимо и, следовательно, одномерно.

ТЕОРЕМА 2. Пусть G – разрешимая локально компактная группа, факторгруппа которой G/Z по ее центру Z связна. Пусть π – представление группы G в конечномерном комплексном линейном пространстве E . Если представление π неприводимо, то пространство представления π одномерно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательные факторы ряда коммутантов группы G/Z – связные коммутативные локально компактные группы, поэтому все они бесконечно делимы. Остается применить теорему 1.

Отметим важное для дальнейшего немедленное следствие теоремы 2.

СЛЕДСТВИЕ 2. Любое (не обязательно непрерывное) конечномерное представление разрешимой локально компактной группы, факторгруппа которой G/Z по ее центру Z связна, имеет базис, в котором операторы представления записываются верхними треугольными матрицами.

Отметим также следующее утверждение.

ЛЕММА 3. Любая разрешимая локально компактная группа, факторгруппа которой по центру связна, коммутативна тогда и только тогда, когда она является [МАР]-группой как дискретная группа¹ (и, таким образом, является конечным расширением произведения компактной абелевой группы и (конечномерной) векторной группы).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть G – разрешимая локально компактная группа, факторгруппа которой по центру связна, а также пусть G является [МАР]-группой как дискретная группа, и тем самым семейство неприводимых (не обязательно непрерывных) конечномерных унитарных представлений группы G разделяет точки этой группы. Согласно следствию 2 эти представления можно считать треугольными, а потому (ввиду унитарности) и диагональными. Таким образом, некоторое семейство одномерных унитарных представлений разделяет точки группы G , откуда непосредственно следует, что группа G коммутативна. Остальное следует из [14; теорема 1].

¹То есть семейство конечномерных (не обязательно непрерывных) унитарных представлений этой группы разделяет точки группы, см. [18].

**§ 4. Теорема об автоматической непрерывности
локально ограниченных конечномерных представлений
на коммутанте для конечномерных локально
компактных групп со связной факторгруппой по центру**

Напомним следствие, сформулированное в [15; следствие 3].

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть G – топологическая группа, E – топологическое векторное пространство, $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, – замкнутые собственные векторные подпространства в E ,

$$\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_{n-1} \subset F_n = E,$$

ρ – такое локально относительно компактное (в сильной операторной топологии²) представление топологической группы G непрерывными линейными операторами в E , что

$$\rho(g)F_k \subset F_k \quad \text{для любых } g \in G, \quad k \in \{1, \dots, n\},$$

и представление, определяемое представлением ρ в F_1 и в каждом факторпространстве

$$F_{k+1}/F_k, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\},$$

непрерывно в сильной операторной топологии пространства непрерывных линейных операторов в F_1 или F_{k+1}/F_k соответственно. Тогда представление ρ группы G в E непрерывно в сильной операторной топологии пространства непрерывных линейных операторов в E .

Отметим очевидное следствие [15; следствие 4].

СЛЕДСТВИЕ 4. Если все неприводимые подфакторы данного локально ограниченного конечномерного представления топологической группы непрерывны, то и все представление непрерывно. Если все неприводимые локально ограниченные конечномерные представления топологической группы непрерывны, то и все локально ограниченные конечномерные представления этой группы непрерывны.

Отсюда и из доказанного выше варианта теоремы Ли получаем следующую теорему.

СЛЕДСТВИЕ 5. Пусть G – связная локально компактная группа, факторгруппа которой по некоторой компактной вполне несвязной нормальной подгруппе N топологически изоморфна группе Ли, G' – коммутант группы G и π – локально ограниченное конечномерное представление группы G . Ограничение $\pi|_{G'}$ представления π на коммутант G' группы G является непрерывным представлением группы G' во внутренней топологии наибольшей аналитической подгруппы группы G , содержащей этот коммутант.

²То есть в топологии, определяемой в пространстве $L(E)$ непрерывных линейных операторов в E условием, что ее база окрестностей нуля состоит из множеств вида $\{T \mid t \in L(E), T(S) \subset V\}$, где S пробегает семейство конечных множеств в E , а V – базис окрестностей нуля в E .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 3 достаточно доказать, что неприводимые подфакторы представления π непрерывны. Поэтому мы вправе дополнительно предположить, что π – неприводимое представление.

Напомним, что радикалом R связной локально компактной группы G называется наибольшая (автоматически замкнутая) связная разрешимая нормальная подгруппа в G (см., например, [19] или [20; теорема 3.7]) и что $N \subset Z$, где Z – центр G . Рассмотрим нормальную подгруппу $H = RN \subset G$. Эта подгруппа разрешима как центральное расширение разрешимой группы и замкнута как произведение замкнутой нормальной подгруппы R и компактной нормальной подгруппы N . Факторгруппа $G/(RN)$ является факторгруппой связной группы Ли G/N ($G/(RN) = (G/N)/(RN/N)$) и потому тоже является связной группой Ли. Так как

$$(RN)/N = R/(R \cap N),$$

а любая факторгруппа группы R связна, то и группа $(RN)/N$ связна. Так как центр группы RN содержит N , то группа RN удовлетворяет всем условиям, налагаемым на нормальную подгруппу в теореме 1. Группа Ли $G/(RN)$ порождена любой окрестностью единицы, и существует бесконечно делимая окрестность единицы (например, гомеоморфная звездной окрестности единицы с помощью экспоненциального отображения). Согласно лемме 2 отсюда следует, что все операторы представления π_H скалярны (кратны единичному оператору в пространстве E). При этом по условию данное представление π неприводимо; в частности, ограничение π на Z скалярно. По теореме 1 существует базис в пространстве E представления π , в котором ограничение представления π на H записывается верхними треугольными матрицами. Следовательно, существует общий собственный вектор $\xi \in E$, $\xi \neq 0$, всех операторов $\pi(h)$, $h \in H$. Поэтому $\pi(h)\xi = \lambda(h)\xi$ для любого $h \in H$, где $\lambda(h) \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ для любого $h \in H$. Таким образом, существует одномерное подпространство $L \subset E$, инвариантное относительно ограничения представления π на H . При $z \in Z$, $r \in R$ оператор $\pi(rz)$ действует как оператор $\lambda(rz)1_F$ на неприводимом G -инвариантном подпространстве F , порожденном вектором ξ , а также F совпадает с E , поскольку представление π_H неприводимо по предположению. Итак, $\pi(rz) = \lambda(rz)1_E$ для любых $r \in R$ и $z \in Z$. В частности, так как $G = SRZ$ (см. теорему 10.25, теорему 12.65 и следствие 12.66 в [21]), где S – некоторая максимальная полупростая аналитическая подгруппа³ в G , то ограничение π на S является неприводимым представлением подгруппы S , а характер λ централен, т.е. соотношение $\lambda(r) = \lambda(g^{-1}rg)$ выполняется для всех $g \in G$ и $r \in R$. Таким образом, функция λ тождественно равна единице на коммутанте $[G, R] \supset R' = [R, R]$.

С другой стороны, радикальная часть любого коммутатора в G (компонента полупрямого разложения, лежащая в радикале) принадлежит ядру центрального характера λ . Действительно, если S – максимальная полупростая подгруппа в G и если

$$g = srz, \quad g_1 = s_1 r_1 z_1,$$

³Напомним здесь же, что коммутант связной локально компактной группы, факторгруппа которой по центру является группой Ли, целиком содержится в явно описываемой аналитической подгруппе согласно [21; следствие 12.66].

где $s, s_1 \in S$, $r, r_1 \in R$ и $z, z_1 \in Z$, то

$$\begin{aligned} gg_1g^{-1}g_1^{-1} &= srs_1r_1r^{-1}s^{-1}r_1^{-1}s_1^{-1} \\ &= ss_1s^{-1}s_1^{-1}(rr_1r^{-1}r_1^{-1})(r_1rr_1^{-1}r^{-1}s_1ss_1^{-1}rr_1r^{-1}r_1^{-1}s_1s^{-1}s_1^{-1}) \\ &\quad \times (s_1ss_1^{-1}r_1rr_1^{-1}s_1s^{-1}s_1^{-1}r_1r^{-1}r_1^{-1})(r_1rr_1^{-1}(s_1s)r_1r^{-1}r_1^{-1}(s_1s)^{-1}) \\ &\quad \times (s_1sr_1(s_1s)^{-1}r_1^{-1})(r_1s_1r_1^{-1}s_1^{-1}). \end{aligned}$$

Следовательно, $gg_1g^{-1}g_1^{-1} = s_0r_0$, где $\lambda(r_0) = 1$, и ограничение представления π на коммутант G' группы G , которое можно рассматривать как ограничение на коммутант G' представления максимальной аналитической подгруппы группы G , совпадает с ограничением соответствующего представления на максимальную полупростую аналитическую подгруппу S в G . Так как это представление тривиально на $[G, R] \supset R' = [R, R]$, можно считать его представлением факторгруппы $G'/[G, R]$. Поэтому ограничение неприводимого представления π на коммутант G' группы G можно считать представлением полупростой факторгруппы Ли группы G/N , которое определяется неприводимым локально ограниченным представлением факторгруппы группы Ли $G/(RN)$ (причем RN – замкнутая нормальная подгруппа в G), т.е. как неприводимое локально ограниченное представление связной полупростой группы Ли, которое непрерывно во внутренней топологии по теореме 5 в [15] (см. теорему В выше).

§ 5. Следствие об автоматической непрерывности для конечномерных представлений связных локально компактных групп

Отметим усиление одной из теорем Ивасава [19; теорема 2].

ТЕОРЕМА 3. 1) Пусть G – топологическая группа, факторгруппа которой по центру связна, а Q – компактная связная нормальная подгруппа в G . Тогда $G = HQ$, где H – замкнутая нормальная подгруппа в G , образованная всеми элементами в G , перестановочными с каждым элементом группы Q . Пересечение $H \cap Q$ совпадает с центром группы Q .

2) Связная компактная коммутативная нормальная подгруппа в топологической группе, факторгруппа которой по центру связна, лежит в центре группы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем 1). Группа внутренних автоморфизмов компактной связной группы совпадает со связной компонентой группы автоморфизмов группы G [19; теорема 1']). Образ группы G в группе автоморфизмов является непрерывным образом группы G/Z , поскольку автоморфизмы группы Q , определяемые сопряжениями с элементами группы G , тривиальны, если сопрягающий элемент лежит в центре Z группы G . Поэтому этот образ является связным, и тем самым содержится в компоненте единицы в группе автоморфизмов. Следовательно, для любого $g \in G$ существует такой $q = q(g) \in Q$, что $gsg^{-1} = qsq^{-1}$ для всех $s \in Q$, и $q^{-1}g$ поэлементно коммутирует с Q . Замкнутость H следует из непрерывности операции умножения в G . Так как

каждый элемент H перестановочен с любым элементом Q , то $H \cap Q$ перестановочен и с H , и с Q , а также перестановочен с их произведением, что доказывает последнее утверждение в 1).

Утверждение 2) сразу следует из 1), если в качестве Q взять нормальную подгруппу в группе G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. В случае, когда справедливо условие 1) теоремы 3, мы будем называть подгруппу H почти дополнительной к Q в G в смысле Ивасава.

Сформулируем теперь основной результат работы.

ТЕОРЕМА 4. Пусть G – связная локально компактная группа, M – такая компактная нормальная подгруппа в G , что факторгруппа $J = G/M$ – (связная) группа Ли, $N = M_0$ – компонента единицы в группе M , H – замкнутая подгруппа в G , почти дополнительная к N в G в смысле Ивасава, $L = G/N$ – связная локально компактная группа, факторгруппа которой по вполне несвязной (и потому центральной) нормальной подгруппе M/N в L является группой Ли, изоморфной группе Ли M .

1) Факторгруппа группы $(HN)/N = H/(H \cap N)$ по ее центральной подгруппе M/N является замкнутой подгруппой группы Ли $L/(M/N)$ и потому является группой Ли.

2) Любое конечномерное представление группы G в пространстве E , записанное в блочной верхней треугольной форме с неприводимыми подфакторами, непрерывно тогда и только тогда, когда все неприводимые представления, реализованные в подфакторах, непрерывны. Любое непрерывное неприводимое представление группы G является тензорным произведением над $H \cap N$ непрерывных неприводимых представлений групп N и H , ограничения которых на $H \cap N$ совпадают.

3) Любое локально ограниченное неприводимое представление группы G в пространстве E непрерывно на коммутанте группы G во внутренней топологии аналитической подгруппы группы G , содержащей этот коммутант.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перед доказательством утверждений 1)–3) напомним, что группа M/N вполне несвязна, так как N – компонента единицы в M .

Для доказательства 1) достаточно проверить замкнутость факторгруппы группы $(HN)/N = H/(H \cap N)$ по ее центральной подгруппе M/N в группе Ли $L/(M/N)$. Это следует из [22; теорема 5.18].

Справедливость первой части утверждения 2) теоремы 4 (критерий непрерывности в терминах подфакторов) следует из [15; следствие 4]. Вторая часть утверждения является следствием некоторого естественного усиления основного результата статьи [23], но может быть легко получена и непосредственно. Пусть ρ – неприводимое непрерывное конечномерное представление группы G в пространстве E . Ограничение ρ на N может быть реализовано как прямая сумма неприводимых представлений. Если среди них есть неэквивалентные подпредставления, то соответствующие клетки блочной матрицы для элементов группы H – нулевые по лемме Шура, что исключено условием неприводимости представления ρ . Поэтому $\sigma = \rho|_N$ кратно неприводимому представлению группы N . Коммутант семейства операторов этого ограничения состоит

из матриц со скалярными матрицами в соответствующих блоках, и поэтому представление $\tau = \rho|_H$ реализуют матрицы, образованные такими скалярами. Ограничения обоих ограничений на $H \cap N$ совпадают. Следовательно, при правильном выборе базисов имеем $\rho(hn) = \tau(h) \otimes \sigma(n)$, причем неоднозначность в выборе h и n несущественна, поскольку $hn = h_1n_1$, $h, h_1 \in H$, $n, n_1 \in N$, а значит, $h_1^{-1}h = n_1n^{-1} = p \in H \cap N$, $h = h_1p$, $p^{-1}n_1 = n$. Поскольку $\rho(p) = \lambda(p)1_E$ по лемме Шура, мы видим, что $\tau(h) \otimes \sigma(n) = \lambda(p)\tau(h_1) \otimes \sigma(n) = \tau(h_1) \otimes \sigma(n_1)$ для любого $hn \in HN = G$. Неприводимость представления τ тоже следует теперь из леммы Шура.

Конечно, любое тензорное произведение такого типа, в свою очередь, определяет непрерывное неприводимое представление группы G .

Утверждение 3) непосредственно следует из следствия 5.

Конечно, ограничение локально ограниченного представления группы G на N может быть разрывным для сколь угодно малой связной нормальной подгруппы N с конечномерной факторгруппой G/N (достаточно рассмотреть счетное произведение групп $\mathbb{S}\mathbb{U}(2)$ и применить к каждому элементу группы некоторый фиксированный свободный ультрафильтр). Важная гипотеза Комфорта–Ремуса утверждает, что любое унитарное представление компактной группы автоматически непрерывно тогда и только тогда, когда для любого натурального n множество попарно неэквивалентных непрерывных неприводимых унитарных представлений данной группы, размерности которых не превосходят n , конечно.

Автор глубоко признателен рецензентам за полезные замечания и ценные советы, которые помогли улучшить изложение.

Список литературы

- [1] E. Cartan, “Sur les représentations linéaires des groupes clos”, *Comment. Math. Helv.*, **2**:1 (1930), 269–283.
- [2] B. L. van der Waerden, “Stetigkeitssätze für halbeinfache Liesche Gruppen”, *Math. Z.*, **36**:1 (1933), 780–786.
- [3] O. Schreier, B. L. van der Waerden, “Die Automorphismen der projektiven Gruppen”, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **6**:1 (1928), 303–322.
- [4] H. Freudenthal, “Die Topologie der Lieschen Gruppen als algebraisches Phänomen. I”, *Ann. of Math. (2)*, **42**:5 (1941), 1051–1074.
- [5] W. T. van Est, “Dense imbeddings of Lie groups”, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **54**=*Indagationes Math.* **13** (1951), 321–328.
- [6] W. T. van Est, “Dense imbeddings of Lie groups. II (I, II)”, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, **55**=*Indagationes Math.* **14** (1952), 255–266, 267–274.
- [7] M. Goto, “Dense imbedding of topological groups”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4**:4 (1953), 653–655.
- [8] M. Goto, “Dense imbeddings of locally compact connected groups”, *Ann. of Math. (2)*, **61**:1 (1955), 154–169.
- [9] A. Borel, J. Tits, “Homomorphismes “abstraites” de groupes algébriques simples”, *Ann. of Math. (2)*, **97**:3 (1973), 499–571.
- [10] J. Tits, “Homomorphismes “abstraites” de groupes de Lie”, *Symposia Mathematica*, v. XIII (Convegno di Gruppi e loro Rappresentazioni, INDAM, Rome, 1972), Academic Press, London, 1974, 479–499.

- [11] D. James, W. Waterhouse, B. Weisfeiler, “Abstract homomorphisms of algebraic groups: problems and bibliography”, *Comm. Algebra*, **9**:1 (1981), 95–114.
- [12] Yu Chen, “Homomorphisms from linear groups over division rings to algebraic groups”, *Group theory* (Beijing, 1984), Lecture Notes in Math., **1185**, Springer-Verlag, Berlin, 1986, 231–265.
- [13] G.M. Seitz, “Abstract homomorphisms of algebraic groups”, *J. London Math. Soc.* (2), **56**:1 (1997), 104–124.
- [14] А. И. Штерн, “Структура гомоморфизмов связных локально компактных групп в компактные группы”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **75**:6 (2011), 195–222; англ. пер.: A. I. Shtern, “The structure of homomorphisms of connected locally compact groups into compact groups”, *Izv. Math.*, **75**:6 (2011), 1279–1304.
- [15] А. И. Штерн, “Вариант теоремы Ван дер Вардена и доказательство гипотезы Мищенко для гомоморфизмов локально компактных групп”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **72**:1 (2008), 183–224; англ. пер.: A. I. Shtern, “A version of van der Waerden’s theorem and a proof of Mishchenko’s conjecture for homomorphisms of locally compact groups”, *Izv. Math.*, **72**:1 (2008), 169–205.
- [16] A. I. Shtern, “A generalization of Lie’s theorem for solvable locally compact groups whose quotient by the center is a Lie group”, *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyung-shang)*, **23**:4 (2013), 695–700.
- [17] K. H. Hofmann, S. A. Morris, *The structure of compact groups. A primer for the student – a handbook for the expert*, de Gruyter Stud. Math., **25**, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1998, xviii+835 pp.
- [18] А. Вейль, *Интегрирование в топологических группах и его приложения*, ИЛ, М., 1950, 224 с.; пер. с фр.: A. Weil, *L’intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Actual. Sci. Ind., **869**, Hermann et Cie., Paris, 1940, 158 pp.
- [19] K. Iwasawa, “On some types of topological groups”, *Ann. of Math.* (2), **50**:3 (1949), 507–558.
- [20] A. L. T. Paterson, *Amenability*, Math. Surveys Monogr., **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1988, xx+452 pp.
- [21] K. H. Hofmann, S. A. Morris, *The Lie theory of connected pro-Lie groups. A structure theory for pro-Lie algebras, pro-Lie groups, and connected locally compact groups*, EMS Tracts Math., **2**, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007, xvi+678 pp.
- [22] Э. Хьюитт, К. А. Росс, *Абстрактный гармонический анализ*, т. I, Наука, М., 1975, 654 с.; пер. с англ.: E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis*, v. I: *Structure of topological groups. Integration theory, group representations*, Grundlehren Math. Wiss., **115**, Academic Press, Inc., Publishers, New York; Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1963, viii+519 pp.
- [23] А. И. Штерн, “Факторизация и неприводимые представления прямого произведения групп”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1 Матем. Мех.*, 1981, № 6, 25–27; англ. пер.: A. I. Shtern, “Factorization and irreducible representations of a direct product of groups”, *Moscow Univ. Math. Bull.*, **36**:6 (1981), 31–32.

Александр Исаакович Штерн
(Alexander I. Shtern)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова;

Научно-исследовательский институт системных
исследований РАН, г. Москва

E-mail: ashtern@member.ams.org

Поступила в редакцию
03.07.2013 и 24.11.2013