Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Д. Ковалёв, О распрямленных шарнирных конструкциях, *Матем. сб.*, 2004, том 195, номер 6, 71–98

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm827>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 04:32:41

УДК 514+531.8

М. Д. Ковалев

О распрямленных шарнирных конструкциях

До настоящего времени свойства наборов, состоящих из некоторых попарных расстояний между точками, брошенными в евклидово пространство, изучены мало. Эти свойства описываются отображением, называемым автором рычажным (в англоязычных работах – “edge function”, “rigidity mapping”), определяющим поведение реальных конструкций из рычагов и шарниров. Наиболее простым из нетривиальных оказывается случай рычажных отображений, отвечающих шарнирным конструкциям (шарнирникам) в плоскости, все закрепленные шарниры которых лежат на одной прямой. В работе исследуются рычажные отображения и построены примеры таких распрямленных шарнирников с необычными свойствами.

Библиография: 13 названий.

§ 1. Введение

Содержание настоящей статьи непосредственно связано с теорией рычажно-шарнирных конструкций. Поэтому автор старался писать ее так, чтобы она была понятна возможно большему числу лиц, интересующихся этой теорией. Последнее привело, в частности, к включению в текст некоторых известных определений и утверждений.

Рассмотрим простейший пример закрепленной шарнирной схемы в плоскости (рис. 1) с одним свободным и двумя закрепленными в точках $(0, 0)$ и $(1, 0)$ шарнирами. Ему отвечает рычажное отображение $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}^2$, $F(x, y) = \{x^2 + y^2, (x - 1)^2 + y^2\}$. Множество $B \subset \mathbb{R}^2$, на котором понижается ранг дифференциала этого отображения (множество вырождения), является прямой $y = 0$. Через каждую ее точку $\mathbf{p} = (x_0, 0)$ можно провести прямую $L(\mathbf{p}) : \mathbf{r} = \mathbf{p} + \text{Ker } dF(\mathbf{p})$, в данном случае ее уравнение $x = x_0$. Образ $F(B)$ множества вырождения представляет собой гладкую кривую в $\mathcal{R}^2$, заданную параметрически уравнениями $d_1 = x^2$, $d_2 = (x - 1)^2$, $-\infty < x < +\infty$. Прямые $L(\mathbf{p})$ при отображении “перегибаются” и переходят в лучи $\mathcal{K}_{\mathbf{p}}$ с вершинами в точках кривой $F(B)$, имеющие направляющий вектор $(1, 1)$. Множество C значений рычажного отображения есть объединение всех лучей $\mathcal{K}_{\mathbf{p}}$. Касательный конус $K_{\mathbf{p}}$ этого отображения в точке $\mathbf{p}$ (он состоит из лучей, касательных к образам всех гладких кривых, проходящих через $\mathbf{p}$) является либо всей плоскостью $\mathcal{R}^2$ в случае, если $\mathbf{p} \notin B$, либо ее полуплоскостью в противном случае. Приведенное описание рычажного отображения во многом переносится и на случай распрямленных шарнирных схем в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 97-01-00266, 00-01-00619).

Рис. 1

$d \geq 2$. Хотя рычажное отображение часто возникало при изучении шарнирных конструкций (см. [1], [2]), его свойства еще мало исследованы.

В §2 приведены необходимые понятия геометрии шарнирных устройств, в частности закрепленной шарнирной схемы (ЗШС) как множества всех шарнирных конструкций данного комбинаторного строения с заданными положениями закрепленных шарниров. Закрепленная в $\mathbb{R}^d$ шарнирная схема с m свободными (незакрепленными) шарнирами определяет пространство-прообраз рычажного отображения $F: \mathbb{R}^{dm} \rightarrow \mathbb{R}^r$, каждая точка которого (отвечающая вполне определенной конструкции) называется шарнирником. Точки же пространства $\mathbb{R}^r$, где координатами являются квадраты длин рычагов шарнирника, называются кинематическими шарнирными схемами (КШС). Обсуждается понятие конуса рычажного отображения и его связь с устойчивостью шарнирника. Шарнирник устойчив, если при любой достаточно малой ошибке в длинах его рычагов можно будет собрать шарнирник, мало отличающийся от исходного. Очевидным необходимым условием устойчивости шарнирника $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{dm}$ является совпадение конуса рычажного отображения в точке $\mathbf{p}$ с пространством $\mathbb{R}^r$. Достаточное условие устойчивости шарнирника получено в §4: КШС устойчива, если она является внутренней точкой множества $C = F(\mathbb{R}^{dm})$. Отметим, что с устойчивостью связан ряд естественных, но пока открытых вопросов. Упомянем два из них. Первый – вопрос существования устойчивой КШС, которой бы отвечал лишь один шарнирник. Второй – вопрос существования устойчивой КШС, которой бы отвечали только лишь неустойчивые шарнирники (см. [3], [4]).

В §3 приводятся некоторые свойства множества C значений рычажного отображения и касательного конуса (контингенции) этого множества, обсуждается связь между контингенцией множества C в точке $\mathbf{d} \in C$ и устойчивостью КШС $\mathbf{d}$. Внимание сосредотачивается на изостатических рычажных отображениях, т.е. отображениях с $dm = \max \text{Rank } dF = r$. В изостатическом случае в точках, где ранг дифференциала отображения уменьшается лишь на единицу, конус отображения либо совпадает с $\mathbb{R}^r$, либо является полупространством этого пространства, либо

$(r - 1)$ -мерной плоскостью [5]. Более сложным конус рычажного отображения может быть лишь в точках большего вырождения дифференциала. Этому условию удовлетворяют распрямленные шарнирники, т.е. такие, все шарниры которых лежат в некотором линейном подмногообразии рассматриваемого пространства.

Распрямленные шарнирники изучаются в § 4. Справедлива простая теорема: на плоскости два распрямленных шарнирника с одной и той же КШС являются различными положениями одного шарнирного механизма. Большая часть § 4 посвящена выводу достаточного условия устойчивости шарнирника, используемого в § 5. Это достаточное условие состоит в неравенстве нулю степени отображения-проектирования некоторого конуса вдоль касательного к рычажному отображению многообразия на дополнительное подпространство.

В § 5 строится пример устойчивой распрямленной фермы (неизгибаемого шарнирника) в плоскости. Для этой фермы имеются изометричные фермы, естественно, не являющиеся распрямленными.

В § 6 описывается пример неустойчивой распрямленной фермы в плоскости, устойчивой по изменению длины каждого рычага в отдельности. Последняя ферма имеет ту же, не содержащую треугольных циклов, ЗШС, что и ферма из предыдущего примера. Построенный пример дает ответ на вопрос работы [3]. Потребовавшиеся для обоснования примеров достаточно сложные выкладки проводились на персональном компьютере с использованием пакета символьных вычислений Maple.

§ 2. Рычажные отображения. Локальные свойства

Определим, следуя [4], основной объект нашего исследования – рычажные отображения. Пусть $G_1(V_1, E_1)$ – абстрактный связный граф без петель и кратных ребер с вершинами $v_1, \dots, v_m \in V_1$ и ребрами $v_i v_j \in E_1$. И пусть связный граф $G(V, E)$ получается добавлением к $G_1(V_1, E_1)$ вершин $v_{m+1}, \dots, v_{m+n}$, составляющих множество V_2 , и некоторых ребер $v_i v_j$, $v_i \in V_2$, $v_j \in V_1$, составляющих множество E_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Граф $G(V, E)$, $V = V_1 \cup V_2$, $E = E_1 \cup E_2$, называется *шарнирной структурной схемой (ШСС)*, ее вершины $v_i \in V_2$ – *закрепленными*, а $v_j \in V_1$ – *свободными вершинами*, причем, множества V_1 , E_1 , V_2 , E_2 считаются непустыми.

Рассмотрим семейство $\mathbf{S}$ отображений ШСС в евклидово пространство $\mathbb{R}^d$, при котором ее закрепленные вершины переходят в фиксированные точки $p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_{m+n}$ плоскости, а ребра – в отрезки, соединяющие образы инцидентных им вершин. Каждое такое отображение определяется заданием образов $p_1, p_2, \dots, p_m$ свободных вершин и определяет *шарнирник* $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Семейство отображений $\mathbf{S}$ называется *закрепленной шарнирной схемой (ЗШС)*.

Следуя механическому смыслу, образы вершин при каждом отображении из $\mathbf{S}$ мы называем *шарнирами*, а образы ребер – *рычагами*. Свободным вершинам отвечают свободные, т.е. незакрепленные в $\mathbb{R}^d$ шарниры. Заметим, что не исключается совпадение любых двух (в том числе и смежных в графе G) шарниров как

точек пространства $\mathbb{R}^d$. Пусть $|E| = r$, тогда ЗШС определяет отображение $F: \mathbb{R}^{dm} \rightarrow \mathcal{R}^r$, заданное формулами $d_{ij} = (p_i - p_j)^2$, $v_i v_j \in E$, где d_{ij} есть квадрат длины рычага $p_i p_j$ шарнирника. Это отображение называется *рычажным*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Точка $\mathbf{d} = \{d_{ij}\} \in \mathcal{R}^r$ называется *кинематической шарнирной схемой (КШС)*, а точка $\mathbf{d} \in F(\mathbb{R}^{dm}) = C$ — *существенной КШС*.

Шарнирник $\mathbf{p}$ в $\mathbb{R}^d$ называют: *жестким*, если $\text{Rank } dF(\mathbf{p}) = dm$; *неизгибаемым* (в инженерной терминологии — фермой), если он представляет собой одноточечную компоненту связности полного прообраза $F^{-1}(F(\mathbf{p}))$ своей КШС. Неизгибаемый шарнирник нельзя непрерывно двигать, не меняя длин его рычагов и положений закрепленных шарниров. Жесткий шарнирник неизгибаем, однако неизгибаемый шарнирник может быть нежестким. Таковым, например, является шарнирник, изображенный на рис. 1, если все три его шарнира лежат на одной прямой. Изгибаемый шарнирник представляет собой определенное положение шарнирного механизма. С геометрической точки зрения шарнирный механизм можно отождествить с его конфигурационным пространством, т.е. с неодноточечной компонентой связности множества $F^{-1}(\mathbf{d})$. Шарнирники $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ называем *изометричными*, если $F(\mathbf{p}) = F(\mathbf{p}')$.

Если размерность множества C существенных КШС равна r , то отображение F и соответствующая ЗШС называются *правильными*. Правильная ЗШС называется *изостатической*, если $dm = r$. Мы называем *изостатическим* и отвечающее ей рычажное отображение. Заметим, что для правильного рычажного отображения множество B точек вырождения задается системой уравнений, выражающих условие $\text{Rank } dF(\mathbf{p}) < r$, и представляет собой $(r-1)$ -мерное алгебраическое множество в $\mathbb{R}^{dm}$. В случае изостатического рычажного отображения эта система превращается в одно полиномиальное уравнение $\det dF(\mathbf{p}) = 0$. Для правильной ЗШС несложно установить неограниченность множества B [5].

Договоримся о некоторых понятиях, относящихся к произвольному дифференцируемому отображению $F = \{f_j\}$, $1 \leq j \leq r$. С точкой $p_0 = \{x_i^0\} \in \mathbb{R}^l$, $1 \leq i \leq l$, связано *касательное к отображению F в этой точке отображение*, т.е. линейное отображение из $\mathbb{R}^l$ в $\mathcal{R}^r$, определенное формулами

$$y_j = y_j^0 + \sum_{i=1}^l \frac{\partial f_j}{\partial x_i} (x_i - x_i^0), \quad 1 \leq j \leq r, \quad \{y_j^0\} = F(p_0) = d_0.$$

Матрицу этого отображения в стандартных (т.е. в тех, в которых задано отображение F) координатах мы обозначаем $dF(p_0)$. *Ядерным многообразием с центром p_0* мы называем линейное многообразие $L(p_0) \subset \mathbb{R}^l$, состоящее из точек p , для которых векторы $p - p_0$ принадлежат ядру дифференциала отображения F в точке p_0 , т.е. $dF(p_0)(p - p_0) = 0 \in \mathcal{R}^r$. *Касательным многообразием $T(p_0) \subset \mathcal{R}^r$ отображения F в точке p_0* мы называем линейное многообразие, состоящее из точек $d_0 + dF(p_0)(p - p_0)$, $p \in \mathbb{R}^l$. Имеет место простое утверждение [5].

ЛЕММА 1. Если ЗШС изостатическая, то каждая точка пространства параметров $\mathbb{R}^{dm}$ принадлежит некоторому ядерному многообразию рычажного отображения F .

Квадратичным мы называем отображение $F: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^r$ евклидовых пространств, заданное в декартовых координатных системах многочленами не выше второй степени, среди которых обязательно есть хотя бы один многочлен второй степени. Квадратичное отображение называем *однородным*, если оно задано по координатно квадратичными формами. Отображение называют *собственным*, если прообраз каждого компактного множества компактен. Справедлива следующая лемма [5].

ЛЕММА 2. *Однородное квадратичное отображение F является собственным тогда и только тогда, когда $F^{-1}(0) = 0$.*

Рычажное отображение квадратично и всегда является собственным [4]. Более того, однородная квадратичная часть рычажного отображения всегда является собственным отображением [5]. Такие отображения мы называем *вполне квадратичными*.

Устойчивость шарнирников и кинематических схем подробно обсуждалась в работе [3]. Шарнирник $\mathbf{p}$ в $\mathbb{R}^d$ *устойчив*, если для любой его шаровой ε -окрестности $U(\mathbf{p}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^{dm}$ найдется δ -окрестность $U(\mathbf{d}, \delta) \subset \mathbb{R}^r$ точки $\mathbf{d} = F(\mathbf{p})$, целиком лежащая в образе $F(U(\mathbf{p}, \varepsilon))$. Если достаточно мало изменить длины рычагов устойчивого шарнирника, то шарнирник с измененными длинами рычагов можно будет собрать таким образом, что все его шарниры окажутся близки к шарнирам исходного шарнирника. Устойчивый шарнирник непременно имеет правильную ЗШС. Назовем шарнирник $\mathbf{p}$ *неособым*, если $\text{Rank } dF(\mathbf{p}) = \max_{\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{dm}} \text{Rank } dF(\mathbf{q}) = \eta$, и *особым*, если $\text{Rank } dF(\mathbf{p}) < \eta$. Неособый шарнирник с правильной ЗШС устойчив. В частности, всегда устойчива жесткая ферма с изостатической ЗШС. Как показывает пример плоского шарнирного четырехзвенника $p_3p_1p_2p_4$ с закрепленными шарнирами p_3, p_4 и прикрепленной к подвижному звену p_1p_2p распрямленной двуповодковой группой $p_1p_5p_2$ (свободный шарнир p_5 лежит на отрезке p_1p_2), существуют шарнирные механизмы, все положения которых суть неустойчивые шарнирники. Шарнирный механизм этого примера является в некотором смысле исключительным, т.е. для всех его положений ранг дифференциала рычажного отображения меньше максимального. Назовем положение $\mathbf{p}_0$ шарнирного механизма с конфигурационным пространством M *исключительным*, если каждый шарнирник $\mathbf{p} \in M$ из некоторой окрестности точки $\mathbf{p}_0$ является особым, и *неисключительным* в противном случае. В работе [3] приведен пример шарнирного механизма с правильной ЗШС и переменным числом степеней свободы, обладающего исключительными положениями, представляющими собой неустойчивые шарнирники.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Любое неисключительное положение шарнирного механизма с конфигурационным пространством M и правильной ЗШС есть устойчивый шарнирник.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\mathbf{p}_0 \in M$ – правильный шарнирник, то он, очевидно, устойчив. Пусть $\mathbf{p}_0 \in M$ – неправильная точка отображения F , тогда в силу неисключительности точки $\mathbf{p}_0$ в произвольной ее шаровой ε -окрестности $U(\mathbf{p}_0, \varepsilon)$ найдется правильная точка $\mathbf{p} \in M$ и ее окрестность $U(\mathbf{p}, \varepsilon') \subset U(\mathbf{p}_0, \varepsilon)$. Но образ

$F(U(\mathbf{p}, \varepsilon'))$ в силу правильности $\mathbf{p}$ покрывает некоторую окрестность

$$W(F(\mathbf{p}), \delta) = W(F(\mathbf{p}_0), \delta)$$

с центром в точке $F(\mathbf{p}_0)$.

В §5 будет приведен пример, дающий отрицательный ответ на следующий вопрос работы [3]: любой ли неустойчивый шарнирник неустойчив по сколь угодно малому изменению длины одного лишь рычага? А именно, указан неустойчивый шарнирник $\mathbf{p}$, для которого $F(\mathbf{p}) = \mathbf{d} = \{d_{ij}\}$ и $\forall \varepsilon > 0$ и любого его рычага $v_\mu v_\nu$ найдется такое $\sigma > 0$, что для любого числа t , $0 < |t| < \sigma$, КШС $\mathbf{d}(t)$, $d_{ij}(t) = d_{ij}$ при $(i, j) \neq (\mu, \nu)$ и $d_{\mu\nu}(t) = d_{\mu\nu} + t$, принадлежит множеству $F(U(\mathbf{p}, \varepsilon))$.

Для изучения устойчивости особых шарнирников и вообще свойств рычажного отображения “в малом” нам понадобится понятие (касательного) конуса отображения. Это понятие можно ввести для произвольного непрерывного отображения $F: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathcal{R}^r$. Пусть при таком отображении $d = F(p)$. Рассмотрим всевозможные последовательности точек $p^i \in \mathbb{R}^l$, $i = 1, 2, \dots$, сходящиеся к точке p , для которых $d_i = F(p^i) \neq d$. Таким последовательностям отвечают последовательности лучей $dd_i \in \mathcal{R}^r$. Множество $K_p \subset \mathcal{R}^r$ всех предельных для последовательностей $\{dd_i\}$ лучей мы называем *касательным конусом* или просто *конусом отображения F в точке $p \in \mathbb{R}^l$* . В случае полиномиального отображения F конус K_p можно построить следующим образом: рассмотреть всевозможные аналитические кривые в $\mathbb{R}^l$, проходящие через точку p . Множество лучей, касательных к образам этих кривых в точке $d = F(p)$, совпадает с конусом K_p . Более того, достаточно рассмотреть только кривые, имеющие полиномиальные параметризации, степени которых ограничены некоторой постоянной, зависящей лишь от отображения F .

Для устойчивости шарнирника $\mathbf{p}$, очевидным образом, необходимо совпадение касательного конуса $K_{\mathbf{p}}$ с пространством $\mathcal{R}^r$. Однако не ясно – является ли это условие достаточным для устойчивости шарнирника $\mathbf{p}$? Ответ на этот вопрос связан со следующим, также пока открытым вопросом относительно общих квадратичных отображений. Собственному однородному квадратичному отображению $f: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathcal{R}^r$ можно сопоставить отображение $f^*(x) = f(x)/|f(x)|$, переводящее проективное пространство $\mathbb{R}P^{r-1}$ в единичную сферу $\mathcal{S}^{r-1} \in \mathcal{R}^r$. Существует ли собственное однородное квадратичное отображение f пространства $\mathbb{R}^r$ на все пространство $\mathcal{R}^r$, для которого бы $\deg f^* = 0$? В случае нечетного r степень $\deg f$ всегда равна 0, а степень $\deg f^*$ определена по модулю два и может не равняться 0. В случае четного r равенства $\deg f^* = 0$ и $\deg f = 0$ равносильны. При $r = 2, 3$ имеются собственные квадратичные отображения f на все пространство $\mathcal{R}^r$, для которых $\deg f^* \neq 0$, а ответ на поставленный вопрос отрицателен [6].

Справедлива следующая теорема [5].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $F: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathcal{R}^r$ – правильное квадратичное отображение, и пусть $\dim \text{Ker } dF(p) = 1$. Тогда конус K_p отображения F в точке p представляет собой либо все пространство $\mathcal{R}^r$, либо его полупространство, либо $(r-1)$ -мерную плоскость. Причем первые два варианта возможны, лишь когда p – изолированная точка множества $F^{-1}F(p)$, а последний имеет место в противном случае.

В случае $\dim \text{Ker } dF(p) > 1$ дело обстоит сложнее. Однако иногда может помочь следующая теорема. Рассмотрим вещественно аналитическое в точке p отображение f , и пусть F есть квадратичная часть $f(p) + df(p) + \frac{1}{2}d^2f(p)$ этого отображения. Допустим, для квадратичного отображения F в точке p ядерное многообразие $L(p)$ не пусто. Конус $\mathcal{K}_p = \mathcal{F}(L(p) - p)$, $\mathcal{F} = \frac{1}{2}d^2f$, назовем *составляющим конусом*, а конус $Q_p = \mathcal{K}_p + T(p)$ – *составным конусом отображения f в точке p* . Здесь знак сложения означает векторную сумму множеств в смысле Минковского. Имеет место очевидное включение $Q_p \subset K_p$. Если $\mathcal{K}_p \cap \text{Im } dF(p)$ состоит из одной лишь вершины $0 \in \mathbb{R}^r$ конуса $\mathcal{K}_p$, то составной конус Q_p представляет собой прямую сумму $\mathcal{K}_p \oplus \text{Im } dF(p)$, перенесенную своей вершиной в точку $d = f(p)$. В этом случае между составным конусом и касательным конусом отображения имеется следующая связь [5].

ТЕОРЕМА 2. *Если квадратичная часть F аналитического в точке p отображения $f: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^r$ вполне квадратична и $\mathcal{K}_p \cap \text{Im } dF(p) = 0$, то касательный конус K_p отображения f совпадает с его составным конусом Q_p .*

§ 3. Некоторые свойства множества существенных КШС

О свойствах множества $C = F(\mathbb{R}^{dm})$ известно немного. Это множество, как уже отмечалось, является полуалгебраическим связным замкнутым неограниченным и имеет в каждой своей точке одинаковую местную размерность, равную максимальному рангу матрицы dF . Установим еще несколько его свойств. Назовем точку $\mathbf{d}^0 \in C$ *разделяющей точкой множества C* , если $C \setminus \mathbf{d}^0$ состоит из нескольких компонент $C_1, C_2, \dots$ линейной связности. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3. *Если $\dim C > 1$, то множество C не имеет разделяющих точек.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полный прообраз $M = F^{-1}(\mathbf{d}^0)$ представляет собой ограниченное множество в силу [4; лемма 1]. Это влечет принадлежность образов всех сфер $S^{dm-1}(r)$ достаточно большого радиуса $r \geq r_0$ с центрами в начале стандартной системы координат в $\mathbb{R}^{dm}$ какому-то одному из множеств C_i . Пусть, для определенности, множеству C_1 . Тогда все остальные множества C_i оказываются ограниченными, и их прообразы лежат внутри $S^{dm-1}(r_0)$. Возьмем точку $\mathbf{p}_0 \in F^{-1}(C_2)$ и выпустим из нее лучи. Каждый такой луч пересечет множество M до его пересечения со сферой $S^{dm-1}(r_0)$, поскольку его образ проходит через точку $\mathbf{d}^0$. Поскольку M – алгебраическое множество, не совпадающее с $\mathbb{R}^{dm}$, а его центральная проекция на сферу имеет размерность $dm - 1$, то оно само с очевидностью имеет размерность $dm - 1$. Это означает, что КШС $\mathbf{d}^0$ отвечает шарнирный механизм с $dm - 1$ степенью свободы. Так как при $d = 1$ не существует шарнирных механизмов, то остается разобрать лишь случай $d > 1$. Покажем невозможность такого механизма, если число свободных шарниров больше одного. В самом деле, из двух различных свободных шарниров p_i и p_j выходят хотя бы два различных рычага $p_i p_l$ и $p_j p_s$. Им отвечает пара уравнений $(p_i - p_l)^2 = d_{il}^0$, $(p_j - p_s)^2 = d_{js}^0$, где возможны случаи $l = j$ либо $s = i$. Пусть эта пара функций задает отображение F^* . Вследствие теоремы о неявной функции, если $\dim M = dm - 1$ и точка $\mathbf{p} \in M$, то $\text{Rank } dF^*(\mathbf{p}) \leq 1$. Однако множество $N \subset \mathbb{R}^{dm}$,

на котором $\text{Rank } dF^*(\mathbf{p}) \leq 1$, лежит в пересечении двух непараллельных плоскостей, а значит, имеет размерность, не превосходящую $dm - 2$. Следовательно, $\dim M \leq dm - 2$. Случай ЗШС с одним свободным шарниром не представляет затруднений. Теорема доказана.

Ответ на вопрос о принадлежности множества C какой-либо $(r - 1)$ -мерной плоскости $P \subset \mathcal{R}^r$ дает следующая теорема. С механической точки зрения она описывает все закрепленные шарнирные схемы, для которых каждый шарнирник допускает одно и то же внутреннее напряжение [7].

ТЕОРЕМА 4. *Включение $C \subset P$ возможно тогда и только тогда, когда ЗШС имеет хотя бы один свободный шарнир, например v_s , смежный не менее чем двум закрепленным шарнирам, например $v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_{m+k}$, радиус-векторы $p_{m+1}, p_{m+2}, \dots, p_{m+k}$ которых таковы, что векторы $p_{m+2} - p_{m+1}, \dots, p_{m+k} - p_{m+1}$ линейно зависимы. При этом в уравнении $\sum a_{ij} d_{ij} = \text{const}$ плоскости P коэффициенты a_{ij} при квадратах длин рычагов, соединяющих свободные шарниры между собой, равны 0.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставив выражения $d_{ij} = (p_i - p_j)^2$ в уравнение плоскости P , получим квадратичный многочлен относительно переменных – координат свободных шарниров. Произведение первых координат $x_i^1 x_j^1$ i -го и j -го свободных шарниров содержится лишь в члене полученного уравнения, отвечающем рычагу $p_i p_j$. Поскольку справедливость уравнения не зависит от координат x_i^1, x_j^1 свободных шарниров, то коэффициент a_{ij} равен 0. Рассмотрим коэффициенты в уравнении плоскости P при квадратах и первых степенях координат свободного шарнира v_s , смежного закрепленным шарнирам $v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_{m+k}$. Первый из них равен $\sum_{i=1}^k a_{s\ m+i}$, второй – $2 \sum_{i=1}^k a_{s\ m+i} x_{m+i}^\nu$, $1 \leq \nu \leq d$. Выражая $a_{s\ m+1}$ из равенства $\sum_{i=1}^k a_{s\ m+i} = 0$ и подставляя в $\sum_{i=1}^k a_{s\ m+i} p_{m+i} = 0$, получаем $\sum_{i=2}^k a_{s\ m+i} (p_{m+i} - p_{m+1}) = 0$. Поскольку не все коэффициенты $a_{s\ m+i}$ равны нулю, последнее означает линейную зависимость векторов $p_{m+i} - p_{m+1}$, $2 \leq i \leq k$. Обратно, предположив такую зависимость с коэффициентами $a_{s\ m+i}$, $2 \leq i \leq k$, получим принадлежность множества C плоскости P . Теорема доказана.

Для каждой ЗШС G рассмотрим *приведенную ЗШС G^** , получаемую из G сведением всех закрепленных шарниров в один шарнир p_{m+1} , совпадающий с началом координат O декартовой координатной системы в $\mathbb{R}^d$. Приведенной схеме G^* отвечает рычажное отображение F^* , являющееся однородной квадратичной частью рычажного отображения F , отвечающего схеме G . Множество C^* существенных КШС, отвечающих G^* , является конусом с вершиной в начале стандартной системы координат в $\mathcal{R}^r$, лежащим в неотрицательном ортанте Q . Мы будем называть C^* *предельным конусом исходного рычажного отображения F* . В случае изостатической ЗШС G размерность этого конуса меньше r . Например, закрепленной схеме рис. 2 отвечает приведенная ЗШС, у которой рычаги $p_1 p_3$ и $p_1 p_4$ совпадают. Соответствующий предельный конус C^* лежит в трехмерном подпространстве $\mathcal{R}^3: d_{13} = d_{14}$ пространства $\mathcal{R}^4$. В этом подпространстве $\mathcal{R}^3$ можно пользоваться координатами d_{12}, d_{13}, d_{25} . В них трехмерный конус C^* задается неравенствами $d_{12} \geq 0, d_{13} \geq 0, d_{25} \geq 0, \sqrt{d_{12}} + \sqrt{d_{13}} \geq \sqrt{d_{25}}, \sqrt{d_{12}} + \sqrt{d_{25}} \geq \sqrt{d_{13}}, \sqrt{d_{13}} + \sqrt{d_{25}} \geq \sqrt{d_{12}}$.

Установим близость в определенном смысле множеств C и C^* для шарнирных схем в $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим евклидово пространство $\mathbf{R}^r$ длин рычагов $r_{ij} = \sqrt{d_{ij}}$. Обозначим через $\mathbf{F}: \mathbb{R}^{dm} \rightarrow \mathbf{R}^r$ запись отображения F в этих координатах, а через $\mathbf{F}^*$ – соответственно запись отображения F^* . Пусть $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}^*$ – шарнирники со схемами G и G^* соответственно, все одноименные свободные шарниры которых совпадают. Выберем координатную систему в $\mathbb{R}^d$ с началом $O = p_{m+1}$. Допустим, все закрепленные шарниры исходной ЗШС G лежат в сфере радиуса R с центром в точке O , и пусть $\rho(a, b)$ – евклидово расстояние между точками a и b .

Рис. 2

ЛЕММА 3. Пусть l – число рычагов, исходящих из всех за исключением p_{m+1} закрепленных шарниров ЗШС G , а D – длина наибольшего из этих рычагов в шарнирнике $\mathbf{p}$. Тогда при отображениях $\mathbf{F}$ и F соответственно имеют место неравенства $\rho(\mathbf{F}(\mathbf{p}), \mathbf{F}^*(\mathbf{p}^*)) \leq R\sqrt{l}$ и $\rho(F(\mathbf{p}), F^*(\mathbf{p}^*)) \leq (2D + R)R\sqrt{l}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя неравенство треугольника, для свободного шарнира p_i и закрепленного шарнира p_j можно записать

$$\rho(p_i^*, p_j^*) = \rho(p_i, O) \leq \rho(p_i, p_j) + \rho(p_j, O) \leq \rho(p_i, p_j) + R.$$

Откуда $|r_{ij} - r_{ij}^*| \leq R$, если один из шарниров закреплен. Учитывая то, что $|r_{ij} - r_{ij}^*| = 0$ для свободных шарниров p_i и p_j , имеем

$$\rho(\mathbf{F}(\mathbf{p}), \mathbf{F}^*(\mathbf{p}^*)) = \left(\sum_{ij} (r_{ij} - r_{ij}^*)^2 \right)^{1/2} \leq R\sqrt{l}.$$

Вторая оценка получается чуть сложнее. Из теоремы косинусов для треугольника $p_i p_j p_j^*$, в котором p_i – свободный, а p_j – закрепленный шарниры, следует $d_{ij} - d_{ij}^* \leq 2Rr_{ij} + R^2$. Откуда

$$\rho(F(\mathbf{p}), F^*(\mathbf{p}^*)) = \left(\sum_{ij} (d_{ij} - d_{ij}^*)^2 \right)^{1/2} \leq (2RD + R^2)\sqrt{l} = (2D + R)R\sqrt{l}.$$

Пусть $\rho(x, A) = \inf_{y \in A} \rho(x, y)$ – расстояние от точки x до множества A , тогда *хаусдорфовым расстоянием* $\rho(A, B)$ между множествами A и B называют

$\sup_{x \in B, y \in A} \{\rho(x, A), \rho(y, B)\}$. Рассмотрим сечения cC и cC^* множеств C и C^* какой-либо плоскостью, отсекающей ограниченный кусок от неотрицательного ортанта стандартной координатной системы. Хаусдорфово расстояние между множествами cC и cC^* в силу оценки $\rho(cC, cC^*) \leq (2D + R)R\sqrt{l}$ может быть не ограничено, поскольку величина D не ограничена на множестве существенных КШС. Однако отношение $\rho(cC, cC^*)$ к $\text{diam } cC$ стремится к 0 при заданном направлении секущей плоскости по мере того, как плоскость неограниченно отодвигается от начала координат.

Из доказанной леммы также следует оценка $\rho(cC, cC^*) \leq R\sqrt{l}$ хаусдорфовых расстояний для аналогично определенных множеств в пространстве $\mathbf{R}^r$ длин рычагов. Таким образом, расстояния между множествами cC и cC^* в пространстве $\mathbf{R}^r$ ограничены числом, не зависящим от секущей плоскости.

Сказанное позволяет сделать некоторые выводы о возможном строении множества C . Так для ЗШС шарнирника, изображенного на рис. 3, множество C^* является пятимерной конической поверхностью, лежащей в $\mathcal{R}^6$. В самом деле, конус C^* представляет собой лежащую в ортанте Q часть поверхности, которую можно задать уравнением $\Delta = 0$, где Δ – определитель Кэли–Менгера [8]:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ 1 & d_{21} & 0 & d_{23} & d_{24} \\ 1 & d_{31} & d_{32} & 0 & d_{34} \\ 1 & d_{41} & d_{42} & d_{43} & 0 \end{vmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что коническая поверхность C^* разбивает пространство $\mathcal{R}^6$ на два связанных куска. Отсюда вытекает наличие “полости” в множестве C и отсутствие такого направления в $\mathcal{R}^6$, вдоль которого граница множества C проецировалась бы взаимно однозначно на какое-либо пятимерное подпространство.

Рис. 3

Кинематическая шарнирная схема устойчива, если ей отвечает внутренняя точка множества C существенных КШС. Если КШС шарнирника $\mathbf{p}$ устойчива, то при любой достаточно малой ошибке в изготовлении рычагов шарнирник может

быть собран, правда, некоторые свободные его шарниры возможно окажутся далеко от соответствующих шарниров шарнирника $\mathbf{p}$. Для анализа устойчивости КШС вместо понятия касательного конуса отображения F нужно рассмотреть понятие касательного конуса или контингенции множества $C = F(\mathbb{R}^{dm})$. Конус $\mathbf{K}_{\mathbf{d}}$ множества C в его предельной точке $\mathbf{d}$ представляет собой множество предельных лучей последовательностей лучей $\mathbf{d}\mathbf{d}_i$, где $\{\mathbf{d}_i\}$ – всевозможные последовательности точек $\mathbf{d}_i \in C$, $\mathbf{d}_i \neq \mathbf{d}$, сходящиеся к точке $\mathbf{d}$. Необходимым условием устойчивости КШС $\mathbf{d}$ является совпадение конуса $\mathbf{K}_{\mathbf{d}}$ с пространством $\mathcal{R}^r$. С другой стороны, автору неизвестны примеры, когда бы контингенция $\mathbf{K}_{\mathbf{d}}$ совпадала с пространством $\mathcal{R}^r$, а схема $\mathbf{d}$ была неустойчива. В случае рычажного отображения имеет место следующая связь контингенции с конусами отображения.

ЛЕММА 4. *Справедливо равенство $\mathbf{K}_{\mathbf{d}} = \bigcup \mathbf{K}_{\mathbf{p}}$, где объединение берется по всем прообразам точки $\mathbf{d}$ при рычажном отображении.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $\mathbf{K}_{\mathbf{d}} \supset \bigcup \mathbf{K}_{\mathbf{p}}$ очевидно. С другой стороны, возьмем луч $\mathbf{d}\mathbf{e} \in \mathbf{K}_{\mathbf{d}}$. Пусть он является предельным для последовательности лучей $\mathbf{d}\mathbf{d}_i$, $\mathbf{d}_i \neq \mathbf{d}$, $\mathbf{d} \in C$. Из сходящейся к точке $\mathbf{d}$ последовательности точек $\mathbf{d}_i$ можно выбрать такую подпоследовательность $\mathbf{d}_{i_j}$, что последовательность точек $\mathbf{p}^j \in F^{-1}(\mathbf{d}_{i_j})$ сходится к точке $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{dm}$. Это можно сделать вследствие ограниченности множества прообразов точек последовательности $\mathbf{d}_i$, вытекающей из собственности рычажного отображения. В силу непрерывности отображения F имеем $\mathbf{p} \in F^{-1}(\mathbf{d})$. Таким образом, луч $\mathbf{d}\mathbf{e} \in \mathbf{K}_{\mathbf{p}}$ и $\mathbf{K}_{\mathbf{d}} \subset \bigcup \mathbf{K}_{\mathbf{p}}$.

Хотя в простейших случаях и контингенция множества C , и конус рычажного отображения выпуклы, однако в более сложных случаях это не так. Уже для ЗШС шарнирника, изображенного на рис. 2, имеется КШС $\mathbf{d}$, в которой контингенция множества C невыпукла. В качестве таковой можно взять КШС $\mathbf{d} = F(\mathbf{p})$, где $\mathbf{p}$ – произвольный шарнирник, у которого $p_1 = p_5$ и $p_2 \neq p_5$. Такой шарнирник является положением шарнирного механизма с неподвижным шарниром p_1 и шарниром p_2 , допускающим свободное вращение вокруг $p_5 = p_1$. Пусть $\rho = |p_2 p_5| > 0$ и $W_\rho \in \mathbb{R}^4$ – конфигурационное пространство этого шарнирного механизма. Тогда в соответствии с теоремой 1 легко установить, что конус нашего рычажного отображения F в точке $\mathbf{p} = (a, b, a + \rho \cos \varphi, b + \rho \sin \varphi) \in W_\rho$ является трехмерной плоскостью $T_\varphi \in \mathcal{R}^4$ с нормальным вектором $n_\varphi = (b, (1 - a) \sin \varphi + b \cos \varphi, a \sin \varphi - b \cos \varphi, -b)$. В случае $\rho < b$ множество $F^{-1}(\mathbf{d})$ состоит только из шарнирников $\mathbf{p} \in W_\rho$. Вследствие леммы 4 контингенция множества C в точке $\mathbf{d}$ в этом случае представляет собой объединение плоскостей семейства T_φ , $0 \leq \varphi < 2\pi$. Рассматривая огибающую этого семейства плоскостей, нетрудно установить, что независимо от величины $\rho < b$ контингенции одинаковы и представляют собой цилиндр, построенный над внешней областью обычного эллиптического конуса, лежащего в некоторой трехмерной плоскости. *Внешней областью конуса* мы называем область пространства, ограниченную конической поверхностью и содержащую прямые, не проходящие через вершину конуса. Итак, даже если конус рычажного отображения для каждого из прообразов точки $\mathbf{d}$ является гиперплоскостью, контингенция множества C в точке $\mathbf{d}$ может быть невыпуклой и иметь достаточно сложное строение.

§ 4. Распрямленные схемы и шарнирники

Распрямленной мы называем закрепленную шарнирную схему в $\mathbb{R}^d$, линейная оболочка закрепленных шарниров которой является плоскостью P размерности $k \geq 1$ меньшей d . Если и все свободные шарниры шарнирника с такой ЗШС лежат в плоскости P , то мы называем этот шарнирник *распрямленным*. Распрямленные шарнирники в плоскости обладают следующим замечательным свойством.

ТЕОРЕМА 5. *Два различных распрямленных изометричных шарнирника $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$ в плоскости являются различными положениями одного шарнирного механизма.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть все шарниры этих распрямленных шарнирников лежат на оси Ox декартовой координатной системы Oxy в плоскости, а $q_i = (x_i, 0)$ и $q'_i = (x'_i, 0)$ – положения i -го свободного шарнира соответственно шарнирников $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}'$. Пусть $o_i = (x_i + x'_i)/2$, $O_i = (o_i, 0)$. Тогда если задать движение каждого свободного шарнира p_i нашего шарнирника как равномерное вращение против часовой стрелки вокруг соответствующего центра O_i из положения q_i в положение q'_i , то длины всех рычагов шарнирника при таком движении его шарниров будут неизменны. Действительно, если хотя бы один из шарниров p_i, p_j неподвижен, то длина рычага $p_i p_j$ при таком движении, очевидно, неизменна. Рассмотрим теперь два подвижных шарнира p_i, p_j . Пусть векторы $q_i q_j$ и $q'_i q'_j$ сонаправлены. Тогда движение шарниров p_i и p_j описывается следующим образом:

$$\begin{aligned} x_i(t) &= o_i + (x_i - o_i) \cos t, & y_i(t) &= (x_i - o_i) \sin t, \\ x_j(t) &= o_j + (x_j - o_j) \cos t, & y_j(t) &= (x_j - o_j) \sin t, \end{aligned}$$

где $x_i - o_i = x_j - o_j$ и $0 \leq t \leq \pi$ независимо от знака разности $x_i - o_i$. В этом случае $d_{ij}(t) = (x_i(t) - x_j(t))^2 + (y_i(t) - y_j(t))^2 = (o_i - o_j)^2 = (x_i - x_j)^2$. Если же векторы $q_i q_j$ и $q'_i q'_j$ противоположны, то имеем $o_i = o_j = o$ и

$$\begin{aligned} x_i(t) &= o + (x_i - o) \cos t, & y_i(t) &= (x_i - o) \sin t, \\ x_j(t) &= o + (x_j - o) \cos t, & y_j(t) &= (x_j - o) \sin t, \end{aligned}$$

где $0 \leq t \leq \pi$. В этом случае также $d_{ij}(t) = (x_i - x_j)^2$. Теорема доказана.

В $\mathbb{R}^3$ аналогичное утверждение не имеет места (нетрудно построить примеры различных изометричных шарнирных ферм, лежащих в одной плоскости). Примеры нераспрямленных ферм в плоскости, изометричных распрямленной ферме, будут приведены в следующем параграфе.

Рассмотрим распрямленную ЗШС в $\mathbb{R}^d$. Будем считать, что в $\mathbb{R}^d$ выбрана декартова система координат $\{x_j\}$ с первыми k осями, лежащими в плоскости P . Тогда множество H распрямленных шарнирников представляет собой km -мерное координатное подпространство $x_j^i = 0, 1 \leq j \leq k, 1 \leq i \leq m$, пространства параметров $\mathbb{R}^{dm}$. Пусть L подпространство пространства $\mathbb{R}^{dm}$ ортогонально-дополнительное к H . Длины рычагов распрямленного шарнирника $\mathbf{p}$, очевидно, стационарны относительно скоростей свободных шарниров, ортогональных плоскости P , поэтому ядерное многообразие $L(\mathbf{p})$ содержит $(d - k)m$ -мерную плоскость,

параллельную подпространству L . Пусть $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, где $\mathbf{x} \in H$, а $\mathbf{y} \in L$, – произвольный шарнирник. Тогда наше рычажное отображение F можно представить в виде $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = F_H(\mathbf{x}) + F_L(\mathbf{y})$, где F_H и F_L – сужения отображения F на подпространства H и L соответственно. Тейлоровское разложение этого отображения в точке $\mathbf{p} = (\mathbf{x}_p, \mathbf{0})$, отвечающей распрямленному шарнирнику, в силу равенств $F_L(\mathbf{0}) = 0$, $dF_L(\mathbf{0})\mathbf{y} = 0$ выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= F_H(\mathbf{x}_p) + dF_H(\mathbf{x}_p)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) + \frac{1}{2}d^2F_H(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) + \frac{1}{2}d^2F_L(\mathbf{y}) \\ &= F_H(\mathbf{x}) + \mathcal{F}_L(\mathbf{y}), \end{aligned} \quad (1)$$

здесь $\mathcal{F}_L$ – сужение однородной квадратичной части $\mathcal{F}$ нашего рычажного отображения на подпространство L . Назовем множество $M = F_H(H) = F(H)$ *направляющим множеством*, а конус $\mathcal{K} = \mathcal{F}_L(L) = \mathcal{F}(L)$ – *образующим конусом* отображения F . Формула (1) означает, что множество C существенных КШС в случае распрямленной ЗШС представляет собой векторную сумму направляющего множества и образующего конуса отображения. Другими словами, C можно представить как объединение конусов, полученных параллельным перенесением конуса $\mathcal{K}$ вершиной в точки множества M .

Если распрямленная ЗШС изостатическая, то размерность плоскости P равняется $d - 1$. Действительно, иначе бы возможно было вращение вокруг плоскости P и не существовало бы нераспрямленных ферм с такой ЗШС, а множество ферм не было бы плотно в $\mathbb{R}^{dm}$, чего для изостатических схем не может быть. В случае изостатической распрямленной ЗШС множество H распрямленных шарнирников представляет собой часть множества B вырождения рычажного отображения. В этом случае ядерные многообразия с центрами на H очевидным образом покрывают все пространство $\mathbb{R}^{dm}$. Заметим еще, что векторная сумма двух образующих конусов рычажного отображения в случае распрямленной ЗШС в плоскости представляет собой предельный конус C^* этого отображения.

Если для распрямленного шарнирника $\mathbf{p}$ в $\mathbb{R}^d$ с изостатической ЗШС $\text{Ker } dF(\mathbf{p}) = L$, то составной конус $Q_p = \mathcal{K}_p + T(\mathbf{p}) = \mathcal{K} + T(\mathbf{p})$. Если, кроме того, $\mathcal{K} \cap \text{Im } dF(\mathbf{p})$ состоит из одной лишь вершины $0 \in \mathbb{R}^r$ конуса $\mathcal{K}$, то в силу теоремы 2 составной конус Q_p совпадает с касательным конусом K_p . Следовательно, необходимым условием устойчивости шарнирника $\mathbf{p}$ в этом случае является равенство $\mathcal{K} + T(\mathbf{p}) = \mathbb{R}^r$. Сейчас мы получим достаточное условие устойчивости такого распрямленного шарнирника $\mathbf{p}$. Рассмотрим какое-либо m -мерное подпространство $W \subset \mathbb{R}^r$, дополнительное к его касательному многообразию $T(\mathbf{p})$. И пусть π_W – отображение проектирования на подпространство W вдоль многообразия $T(\mathbf{p})$, а отображение $\varphi: L \rightarrow W$ – наложение $\pi_W \mathcal{F}_L$. Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6. *Если отображение φ собственное и его степень ненулевая, то шарнирник $\mathbf{p}$ устойчив.*

Прежде чем переходить к доказательству этой теоремы, приведем необходимые понятия и утверждения.

Для собственных отображений корректно определено понятие степени [9]. Более того, для доказательства этой теоремы нам понадобится понятие степени отображения или индекса ростка отображения в точке [10]. Рассмотрим аналитическое (в области своего определения) отображение $f: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ в окрестности точки a , являющейся изолированной точкой полного прообраза $f^{-1}(f(a))$. Пусть $S_\varepsilon = \partial U(a, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^r$ — граничная сфера шаровой ε -окрестности точки a , а $S \in \mathbb{R}^r$ — сфера единичного радиуса с центром в точке $f(a)$.

Степенью $\deg_a f$ отображения f в точке a называется степень отображения

$$\frac{f(x) - f(a)}{|f(x) - f(a)|}: S_\varepsilon \rightarrow S$$

при достаточно малом ε . Если окрестность $U(a, \varepsilon)$ содержит лишь один прообраз точки $f(a)$, то степень последнего отображения не зависит от размера сферы S_ε . Степень отображения в точке a равна с учетом знаков функциональных определителей числу прообразов правильной (это означает неравенство нулю функциональных определителей отображения во всех ее прообразах) точки y , достаточно близкой к $f(a)$, попавших в достаточно малую окрестность $U(a, \varepsilon)$ [10]. Степень отображения в невырожденной точке равна единице, в точке складки — нулю.

Имеет место утверждение.

ЛЕММА 5. *Если полный прообраз $f^{-1}(d)$ собственного непрерывного отображения $f: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ состоит из конечного числа точек $p_1, \dots, p_k$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что как только точка $d' \in U(d, \delta)$, то полный ее прообраз $f^{-1}(d') \subset \bigcup_{i=1}^k U(p_i, \varepsilon)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, допустим противное. Тогда для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется такая сходящаяся при $j \rightarrow \infty$ последовательность $d_j \rightarrow d$, что для каждого j имеются точки $q_j \in f^{-1}(d_j)$, не принадлежащие множеству $M = \bigcup_{i=1}^k U(p_i, \varepsilon)$. В силу собственности отображения f и ограниченности сходящейся последовательности $\{d_j\}$ множество $\{q_j\}$ ограничено. Из ограниченной последовательности $\{q_j\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{q_{j_k}\}$, пусть q — ее предельная точка. Вследствие непрерывности нашего отображения $f(q) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(q_{j_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} d_{j_k} = d$. Итак, точка q должна совпадать с одной из точек $p_1, \dots, p_k$, что противоречит выбору последовательности $\{q_j\}$.

Из леммы 5 очевидным образом вытекают следующие утверждения.

ЛЕММА 6. *Если полный прообраз $f^{-1}(d)$ аналитического собственного отображения f состоит из точек $p_1, \dots, p_k$, то имеет место равенство $\deg f = \sum_{i=1}^k \deg_{p_i} f$.*

СЛЕДСТВИЕ. *Если $\deg_p f \neq \deg f$ для собственного аналитического отображения f , то у точки $f(p)$ имеется кроме p еще хотя бы один прообраз.*

Следующее утверждение очевидно.

ЛЕММА 7. *Пусть f — аналитическое отображение, точка p является изолированной точкой полного прообраза $f^{-1}(f(p))$ и $\deg_p f \neq 0$. Тогда p устой-*

чива¹ при отображении f , т.е. для любой шаровой ε -окрестности $U(p, \varepsilon)$ точки p найдется окрестность ее образа $U(f(p), \delta) \subset f(U(p, \varepsilon))$.

Пусть евклидово пространство $\mathbb{R}^r$ представлено в виде прямой суммы своих подпространств X и Y . И пусть отображение $f': \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ задается в стандартных декартовых системах координат следующим образом:

$$f'(x, y) = Ax + g(y), \quad x \in X, \quad y \in Y, \quad (2)$$

где A – невырожденная квадратная матрица, задающая линейный гомеоморфизм подпространства X на подпространство $T \in \mathbb{R}^r$, а $g(y)$ – однородное квадратичное отображение. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 8. Если отображение $g(y)$ собственное и $g(Y) \cap T = 0$, то имеет место равенство $\deg f' = \deg_0 f'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $f'(x, y)$, очевидно, собственно тогда и только тогда, когда собственно отображение $g(y)$. Условием собственности однородного квадратичного отображения $g(y)$ является равенство $g^{-1}(0) = 0$. Поскольку Ax – линейный гомеоморфизм и $g(Y) \cap T = 0$, то $f'^{-1}(0) = 0$. Лемма доказана.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 6, докажем лемму.

ЛЕММА 9. Если отображение φ собственное, то точка $\mathbf{p}$ изолирована в множестве $F^{-1}(F(\mathbf{p}))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать координатные системы, приспособленные к точке $\mathbf{p}$. Они получаются таким параллельным переносом стандартных декартовых систем в $\mathbb{R}^{dm}$ и в $\mathbb{R}^r$, чтобы их начала оказались соответственно в точках $\mathbf{p}$ и $F(\mathbf{p})$. В таких системах ядерное и касательное многообразия в точке $\mathbf{p}$ являются линейными подпространствами L и T . Пусть $\xi = \mathbf{x} - \mathbf{x}_p$. Нам нужно доказать изолированность нулевого решения уравнения $F(\xi, \mathbf{y}) = 0$, $\xi \in H$, $\mathbf{y} \in L$, в этих координатах. Другими словами, нужно доказать существование окрестности начала координат $O \in \mathbb{R}^{dm}$, в которой эта точка – единственная точка прообраза $F^{-1}(0)$, $0 \in \mathbb{R}^r$. Проекция вектора $F(\xi, \mathbf{y})$ на подпространство W в силу разложения (1) записывается следующим образом:

$$\pi_W(\mathcal{F}_H(\xi) + \mathcal{F}_L(\mathbf{y})),$$

где $\mathcal{F}_L(\mathbf{y}) = \mathcal{F}(0, \mathbf{y})$ – сужение отображения $\mathcal{F}$ на подпространство L и соответственно $\mathcal{F}_H(\xi) = \mathcal{F}(\xi, 0)$. Собственность однородного квадратичного отображения φ вследствие леммы 2 и вполне квадратичности отображения $\mathcal{F}_L(\mathbf{y})$ равносильна условию $\mathcal{K} \cap T = 0$. В силу последнего условия и замкнутости образующего конуса $\mathcal{K}$ произвольный вектор конуса $\mathcal{K}$ образует с подпространством T угол, больший некоторого угла ν , $0 < \nu \leq \pi/2$. В частности, это можно сказать

¹ Устойчивость точки при отображении – понятие, отличное от понятия устойчивости отображения в точке в теории особенностей дифференцируемых отображений. Первое из этих понятий представляет собой обобщение понятия устойчивости шарнирника. В общей топологии точку, устойчивую при отображении, называют точкой открытости этого отображения.

про вектор $\mathcal{F}_L(\mathbf{y}) \in \mathcal{H}$. Поэтому из равенства $\pi_W(\mathcal{F}_H(\boldsymbol{\xi}) + \mathcal{F}_L(\mathbf{y})) = 0$ вытекает неравенство для длин векторов

$$\frac{1}{\sin \nu} |\mathcal{F}_H(\boldsymbol{\xi})| > |\mathcal{F}_L(\mathbf{y})|.$$

Пусть $\mathcal{A}$ – невырожденная квадратная матрица, задающая линейный гомеоморфизм dF_H подпространства H , ортогонально-дополнительного к L , на T . Тогда проекция вектора $F(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{y})$ на подпространство T записывается следующим образом:

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\xi} + \pi_T(\mathcal{F}_H(\boldsymbol{\xi}) + \mathcal{F}_L(\mathbf{y})), \quad (3)$$

где π_T – проекция на подпространство T вдоль подпространства W . Так как $\mathcal{A}$ – линейный гомеоморфизм подпространства H на T , то существует такая постоянная $a > 0$, что

$$|\mathcal{A}\boldsymbol{\xi}| > a|\boldsymbol{\xi}|. \quad (*)$$

С другой стороны, для однородного квадратичного отображения $\mathcal{F}_H$ имеется такая постоянная $b > 0$, что

$$|\mathcal{F}_H(\boldsymbol{\xi})| \leq b|\boldsymbol{\xi}|^2 \quad (**)$$

(в качестве b можно взять умноженную на r наибольшую абсолютную величину собственных значений матриц квадратичных форм, задающих по координатно отображение $\mathcal{F}$). Оценим величину проекции (3) учитывая то, что первый ее член имеет меньший чем остальные порядок малости:

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}\boldsymbol{\xi} + \pi_T(\mathcal{F}_H(\boldsymbol{\xi}) + \mathcal{F}_L(\mathbf{y}))| &\geq |\mathcal{A}\boldsymbol{\xi}| - |\pi_T(\mathcal{F}_H(\boldsymbol{\xi}) + \mathcal{F}_L(\mathbf{y}))| \\ &\geq a|\boldsymbol{\xi}| - \frac{1}{\sin \lambda} |\mathcal{F}_H(\boldsymbol{\xi}) + \mathcal{F}_L(\mathbf{y})| \geq a|\boldsymbol{\xi}| - \frac{1}{\sin \lambda} (|\mathcal{F}_H(\boldsymbol{\xi})| + |\mathcal{F}_L(\mathbf{y})|) \\ &\geq a|\boldsymbol{\xi}| - \frac{1}{\sin \lambda} \left(|\mathcal{F}_H(\boldsymbol{\xi})| + \frac{1}{\sin \nu} |\mathcal{F}_H(\boldsymbol{\xi})| \right) \geq a|\boldsymbol{\xi}| - \frac{1}{\sin \lambda} \left(b|\boldsymbol{\xi}|^2 + \frac{b}{\sin \nu} |\boldsymbol{\xi}|^2 \right) \\ &\geq |\boldsymbol{\xi}| \left(a - \frac{b|\boldsymbol{\xi}|}{\sin \lambda} \left(1 + \frac{1}{\sin \nu} \right) \right), \end{aligned}$$

где $0 < \lambda \leq \pi/2$ – наименьший угол между векторами подпространств W и T . Из этого неравенства вытекает, что при условии

$$|\boldsymbol{\xi}| < \varepsilon = \frac{a \sin \lambda}{b} \left(1 + \frac{1}{\sin \nu} \right)^{-1}$$

имеется лишь одно, а именно нулевое, решение уравнения $F(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{y}) = 0$. Лемма доказана.

Заметим теперь, что справедливость теоремы 6 вытекает с учетом леммы 7 из следующей леммы.

ЛЕММА 10. *В условиях теоремы 6 справедливо равенство*

$$|\deg_{\mathbf{p}} F| = |\deg \varphi|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение F' , приближающее рычажное отображение F в случае распрямленной ЗШС. Геометрически отображение F' получается из F , если заменить в векторной сумме (1) направляющее множество его касательным в точке $\mathbf{p}$ многообразием. Ввиду (1) отображение F' задается в приспособленных к точке $\mathbf{p}$ системах координат следующей формулой:

$$F'(\xi, \mathbf{y}) = \mathcal{A}\xi + \mathcal{F}_L(\mathbf{y}), \quad \xi \in H, \quad \mathbf{y} \in L. \quad (4)$$

Сначала мы установим равенство $|\deg F'| = |\deg \varphi|$, а затем равенство $\deg_O F = \deg F'$ (мы считаем отображение F записанным в приспособленной к точке $\mathbf{p}$ системе координат, где $\mathbf{p}$ совпадает с началом координат O), что и завершит доказательство теоремы. Пусть $\vartheta(\mathbf{y}) = \pi_T(\mathcal{F}_L(\mathbf{y}))$, тогда составляющие отображения F' по подпространствам W и T соответственно имеют вид $\varphi(\mathbf{y})$ и $\mathcal{A}\xi + \vartheta(\mathbf{y})$. Для доказательства равенства $|\deg F'| = |\deg \varphi|$ достаточно установить взаимно однозначное соответствие между множествами решений системы уравнений $\varphi(\mathbf{y}) = w$ и системы

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{y}) = w; \\ \mathcal{A}\xi + \vartheta(\mathbf{y}) = t \end{cases}$$

при одинаковых значениях $w \in W$ и произвольном $t \in T$ и доказать одинаковость либо противоположность знаков функциональных определителей для каждой пары соответствующих друг другу решений. Поскольку ξ однозначно определяется из второй системы как функция $\mathbf{y}$ равенством $\xi = \mathcal{A}^{-1}(t - \vartheta(\mathbf{y}))$, то каждому решению $\mathbf{y}$ первой системы отвечает единственное решение $(\xi, \mathbf{y})$ второй системы, каков бы ни был вектор $t \in T$. И наоборот, поскольку не существует двух различных решений второй системы, отличающихся лишь значениями ξ , то каждому решению $(\xi, \mathbf{y})$ второй системы с фиксированным t отвечает единственное решение $\mathbf{y}$ первой. Функциональная матрица dF' , если в первых m ее строках стоят производные координатных функций из подпространства W , а в первых m столбцах – производные по координатам из L , состоит из четырех блоков. Квадратный блок, расположенный в ее левом верхнем углу, представляет собой матрицу $d\varphi$. Квадратный блок в правом нижнем углу – матрицу $\mathcal{A}$. Прямоугольный блок, расположенный над блоком $\mathcal{A}$, является нулевой матрицей. Раскладывая определитель матрицы $dF'(\xi, \mathbf{y})$ по первым его m строкам, получаем равенство $\det dF'(\xi, \mathbf{y}) = \det d\varphi(\mathbf{y}) \det \mathcal{A}$. Таким образом, $\deg F'$ и $\deg \varphi$ совпадают, если $\det \mathcal{A} > 0$, и различаются знаком, если $\det \mathcal{A} < 0$.

Докажем теперь равенство $\deg_O F = \deg F'$. Пусть однородные квадратичные отображения $\phi(\xi)$ и $\theta(\xi)$ определены формулами $\phi(\xi) = \pi_W \mathcal{F}_H(\xi)$ и $\theta(\xi) = \pi_T \mathcal{F}_H(\xi)$. Тогда отображение F задается формулами

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{y}) + \phi(\xi) &= w, \\ \mathcal{A}\xi + \vartheta(\mathbf{y}) + \theta(\xi) &= t. \end{aligned} \quad (5)$$

В силу леммы 8 для отображения F' справедливо равенство $\deg_O F' = \deg F'$. Поэтому нам остается установить равенство $\deg_O F = \deg_O F'$. Для этого вследствие инвариантности степени отображения при гомотопии [9] достаточно установить для произвольно малого $\varepsilon > 0$ наличие шаровой δ -окрестности $U(O, \delta)$ начала O приспособленной к $\mathbf{p}$ системы координат, в которой будет выполнено неравенство

$$|F(\xi, \mathbf{y}) - F'(\xi, \mathbf{y})| < \varepsilon |F'(\xi, \mathbf{y})|. \quad (6)$$

Действительно, учитывая то, что наименьший угол между векторами из T и $\mathcal{H}$ равен ν , и используя (*), запишем

$$|F'(\xi, \mathbf{y})| = |\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}_L(\mathbf{y})| \geq |\mathcal{A}\xi| \sin \nu > a|\xi| \sin \nu.$$

С другой стороны, с учетом (**) имеем

$$|F(\xi, \mathbf{y}) - F'(\xi, \mathbf{y})| = |\phi(\xi) + \theta(\xi)| = |\mathcal{F}_H(\xi)| \leq b|\xi|^2.$$

Из последних двух неравенств следует достаточность для выполнения неравенства (6) условия $\delta \leq (a \sin \nu / b)\varepsilon$. Итак, лемма 10, а вместе с ней и теорема 6 доказаны.

Распрямленные шарнирники с изостатической ЗШС и не слишком малым числом шарниров сильно вырождены, и поэтому для них можно ожидать существования касательных конусов рычажного отображения с необычными свойствами. Однако в следующем простом случае конус рычажного отображения всегда содержится в полупространстве.

ТЕОРЕМА 7. Пусть ЗШС содержит треугольный цикл $\Delta = p_a p_b p_c$ либо шарниры p_a и p_c закрепленные, а свободный шарнир p_b соединен с ними двумя рычагами. Тогда если в шарнирнике $\mathbf{p}$ шарниры p_a, p_b, p_c лежат на одной прямой, то конус $K_{\mathbf{p}}$ рычажного отображения лежит в полупространстве пространства $\mathcal{R}^r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай цикла, квадраты длин рычагов которого равны d_{ab}, d_{bc}, d_{ca} . Если среди этих трех чисел более одного наибольшего, то одно из них равно нулю, и точка $\mathbf{d} = F(\mathbf{p})$ лежит на границе ортанта Q . В силу выпуклости Q конус $K_{\mathbf{p}}$ заключен в некотором полупространстве. В противном случае пусть d_{ab} единственная наибольшая из этих трех величин. Тогда множество C существенных КШС принадлежит множеству $D \subset Q$, на котором цикл Δ существует. Но точка $\mathbf{d}$ в этом случае является точкой гладкости границы множества D . Действительно, в окрестности точки $\mathbf{d}$ множество D задается неравенством $\sqrt{d_{ab}} \leq \sqrt{d_{bc}} + \sqrt{d_{ca}}$. Так как касательный конус множества D в точке $\mathbf{d}$ есть полупространство, то конус $K_{\mathbf{p}}$ лежит в этом полупространстве. Случай закрепленных шарниров разбирается аналогично.

§ 5. Пример устойчивой распрямленной фермы

Теорема 5 влечет естественный вопрос о существовании в плоскости изометричных друг другу распрямленной и нераспрямленной шарнирных ферм. Здесь приведен пример, дающий положительный ответ на этот вопрос. Одновременно он является примером устойчивой распрямленной шарнирной фермы, отвечающим на вопрос работы [11].

Учитывая теорему 7, нужно искать такой пример среди шарнирников со схемой, не содержащей треугольных циклов. Распрямленная ЗШС нашего примера – одна из простейших плоских изостатических схем такого рода – изображена на рис. 4. На рис. 4а) изображена ферма, доставляющая наш пример. Она представляет собой распрямленный шарнирник $\mathbf{p}$ в плоскости, имеющий четыре закрепленных шарнира: $p_5 = (0, 0), p_6 = (1, 0), p_7 = (v_7, 0), p_8 = (v_8, 0)$. Причем $v_7 = -1, v_8 = 2$,

однако для общности дальнейших подсчетов мы не будем выполнять подстановки сразу. Четыре его свободных шарнира лежат на прямой P : $y = 0$ в точках $x_1 = 3$, $x_3 = 2$, $x_2 = 4$, $x_4 = 6$. Рычаги по порядку таковы: p_5p_1 , p_6p_2 , p_7p_3 , p_8p_4 , p_1p_2 , p_1p_4 , p_2p_3 , p_3p_4 . Напишем матрицу дифференциала соответствующего рычажного отображения, выписывая в первых четырех столбцах ее элементы, отвечающие ненулевым координатам шарниров шарнирника $\mathbf{p}$:

$$2 \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 - v_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - v_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 - x_2 & x_2 - x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 - x_4 & 0 & 0 & x_4 - x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 - x_3 & x_3 - x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 - x_4 & x_4 - x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Касательное многообразие $T(\mathbf{p}) = dF(\mathbf{p}) \cdot H \subset \mathcal{R}^8$ нашего рычажного отображения F в точке $\mathbf{p}$ натянуто на четыре вектора e_1, e_2, e_3, e_4 , координатные столбцы которых в стандартном базисе в $\mathcal{R}^8$ являются первыми четырьмя столбцами матрицы dF , взятыми по порядку и умноженными на $\frac{1}{2}$. Если свободные шарниры не совпадают с закрепленными, как это имеет место для шарнирника $\mathbf{p}$, то эти четыре вектора линейно независимы. Возьмем четыре вектора $e_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $e_6 = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0)$, $e_7 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$, $e_8 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$, дополняющие первую четверку до базиса $\mathcal{E}$ в $\mathcal{R}^8$. Матрица M перехода от координат в стандартном базисе в $\mathcal{R}^8$ к координатам в базисе $\mathcal{E}$ обратна к матрице, столбцами которой являются векторы e_i , $1 \leq i \leq 8$. Вычисления дают

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{x_2 - 1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x_3 - v_7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x_4 - v_8} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{x_1 - x_2}{x_1} & \frac{x_1 - x_2}{x_2 - 1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{x_1 - x_4}{x_1} & 0 & 0 & \frac{x_1 - x_4}{x_4 - v_8} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{x_2 - x_3}{x_2 - 1} & \frac{x_2 - x_3}{x_3 - v_7} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{x_3 - x_4}{x_3 - v_7} & \frac{x_3 - x_4}{x_4 - v_8} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ядерное многообразие касательного отображения в точке $\mathbf{p}$ состоит из векторов, которые имеют нулевые абсциссы в $\mathbb{R}^2$ и ординаты которых могут принимать произвольные вещественные значения: $(y_1, y_2, y_3, y_4) = \mathbf{y} \in L(\mathbf{p}) = L$. Его образ — образующий конус нашего рычажного отображения — задается в стандартном базисе следующим образом:

$$\mathcal{K} = (y_1^2, y_2^2, y_3^2, y_4^2, (y_1 - y_2)^2, (y_1 - y_4)^2, (y_2 - y_3)^2, (y_3 - y_4)^2).$$

Рис. 4

Координаты вектора в базисе $\mathcal{E}$ получаются умножением матрицы M на координатный столбец этого вектора в базисе стандартной системы координат в $\mathcal{R}^8$. Причем последние четыре координаты откладываются по одним и тем же осям в стандартном базисе и в базисе $\mathcal{E}$. Умножая матрицу M на векторы образующего конуса $\mathcal{K}$ и выбирая последние четыре координаты получающихся векторов, мы найдем проекцию этого образующего конуса на четырехмерное координатное подпространство $\mathcal{R}^4$, порожденное четырьмя последними векторами как базиса $\mathcal{E}$, так и стандартного базиса в $\mathcal{R}^8$. Это будет конус $\pi\mathcal{K}$:

$$\pi\mathcal{K} = \left(-\frac{(x_1 - x_2)y_1^2}{x_1} + \frac{(x_1 - x_2)y_2^2}{x_2 - 1} + (y_1 - y_2)^2, \right. \\
-\frac{(x_1 - x_4)y_1^2}{x_1} + \frac{(x_1 - x_4)y_4^2}{x_4 - v_8} + (y_1 - y_4)^2, \\
-\frac{(x_2 - x_3)y_2^2}{x_2 - 1} + \frac{(x_2 - x_3)y_3^2}{x_3 - v_7} + (y_2 - y_3)^2, \\
\left. -\frac{(x_3 - x_4)y_3^2}{x_3 - v_7} + \frac{(x_3 - x_4)y_4^2}{x_4 - v_8} + (y_3 - y_4)^2 \right), \quad (7) \\
(y_1, y_2, y_3, y_4) \in L.$$

Подставляя сюда координаты шарниров шарнирника $\mathbf{p}$, получаем

$$\pi\mathcal{K} = \left(\frac{4}{3}y_1^2 + \frac{2}{3}y_2^2 - 2y_1y_2, 2y_1^2 + \frac{1}{4}y_4^2 - 2y_1y_4, \frac{1}{3}y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2 - 2y_2y_3, \frac{7}{3}y_3^2 - 2y_3y_4 \right). \quad (8)$$

Рассмотрим квадратичное отображение $\varphi: L \rightarrow \mathbb{R}^4$, определенное по координатно формулами (8). Система уравнений с левыми частями из (8) и нулевыми правыми частями имеет тривиальное нулевое решение. Чтобы установить собственность отображения φ , достаточно в силу леммы 2 доказать единственность этого тривиального решения. Допустим существование у нее ненулевого решения, тогда вследствие однородности система имеет решение $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ либо с $y_4 = 1$, либо с $y_4 = 0$. В первом случае получаем следующую систему уравнений для определения y_1, y_2, y_3 :

$$\begin{cases} \frac{4}{3}y_1^2 + \frac{2}{3}y_2^2 - 2y_1y_2 = 0; \\ 2y_1^2 + \frac{1}{4} - 2y_1 = 0; \\ \frac{1}{3}y_2^2 + \frac{5}{3}y_3^2 - 2y_2y_3 = 0; \\ \frac{7}{3}y_3^2 - 2y_3 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Из 4-го и 2-го уравнений системы (9) найдем по два возможных значения y_3 и y_1 :

$$y_3 = 0, \frac{6}{7},$$

$$y_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{2}.$$

Подставляя все возможные пары (y_1, y_3) в 1-е и 3-е уравнения системы (9), получаем четыре системы из двух квадратных уравнений относительно y_2 . Все четыре системы, как легко проверить, не имеют вещественных решений. Следовательно, система (9) несовместна и не существует вещественного решения $\mathbf{y}$ исходной системы с $y_4 \neq 0$.

Из предположения $y_4 = 0$ следуют равенства $y_3 = 0, y_2 = 0$ и $y_1 = 0$. Таким образом, система имеет только тривиальное решение. Чтобы теперь применить теорему 6, необходимо найти степень отображения φ . Для этого с помощью пакета Maple найдены в точном виде (как выражения через корни многочленов от одного переменного) все 16 решений системы уравнений с левыми частями – координатами вектора из (8) и правыми частями – координатами вектора $(0, 0, 1, 0)$. Эти 16 решений естественным образом распадаются на 8 пар, различающихся знаком. Поскольку точные выражения решений весьма громоздки, мы приведем лишь их приближенные значения – по одному для каждой из 8 пар:

y_1	y_2	y_3	y_4
0.8660	1.7320	0	5.9135
0.8660	1.7320	0	1.0146
1.7320	1.7320	0	11.8271
1.7320	1.7320	0	2.0292
0.1689	0.3379	0.9890	1.1539
0.9986 <i>i</i>	1.9972 <i>i</i>	1.0028 <i>i</i>	1.1699 <i>i</i>
13.3196	13.3196	13.3756	15.6049
0.1478	0.1478	0.8655	1.0098

Итак, все решения, кроме двух решений шестой пары, вещественны. Согласно теореме Безу [12] система n однородных полиномиальных уравнений с $(n+1)$ неизвестной, рассматриваемая над полем комплексных чисел, имеет либо бесконечное число решений, либо число решений с учетом их кратности равно произведению степеней уравнений. При этом рассматриваются только ненулевые решения, а пропорциональные считаются за одно. Число вещественных решений системы алгебраических уравнений может быть конечным и большим произведения степеней уравнений. Пример системы такого рода приведен в [13]. Подобные примеры возможны лишь в случае, когда некоторые из вещественных решений лежат на многообразии комплексных решений положительной размерности. Чтобы убедиться, что все решения нами найдены, достаточно вследствие тонкой теоремы Безу [13] установить изолированность всех шестнадцати найденных комплексных решений. Для этого достаточно проверить неравенство нулю в найденных решениях функциональных определителей:

$$|d\varphi| = \begin{vmatrix} \frac{8}{3}y_1 - 2y_2 & \frac{4}{3}y_2 - 2y_1 & 0 & 0 \\ 4y_1 - 2y_4 & 0 & 0 & \frac{1}{2}y_4 - 2y_1 \\ 0 & \frac{2}{3}y_2 - 2y_3 & \frac{10}{3}y_3 - 2y_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{14}{3}y_3 - 2y_4 & -2y_3 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Для двух решений из одной пары эти определители очевидным образом совпадают. Приведем их приближенные величины в порядке выписанных пар решений: 19.3, -3.3, -77.3, 13.3, -0.7, -4.4, -783.9, 0.6. Откуда можно сделать, во-первых, вывод о том, что все решения системы действительно найдены и, во-вторых, что степень отображения φ равна -2. Вследствие теоремы 6 это доказывает устойчивость рассматриваемого распрямленного шарнирника. Так как степень рычажного отображения равна 0, то в силу следствия леммы 6 у точки $F(\mathbf{p})$ имеется хотя бы один прообраз, отличный от $\mathbf{p}$. Поскольку $\mathbf{p}$ – ферма, то вследствие теоремы 5 шарнирники, отвечающие этим прообразам, не являются распрямленными. Подсчеты, выполненные с помощью компьютера, дают пять шарнирников и еще пять зеркально симметричных им относительно оси абсцисс. В следующей таблице приведены приближенные значения координат их свободных шарниров (выписаны четыре знака после запятой без округления):

p_1	p_2	p_3	p_4
(-2.9282; 0.6524)	(-1.9818; 0.3291)	(-3.9818; 0.3291)	(-0.8452; 2.8114)
(-2.9653; 0.4546)	(-1.9912; 0.2283)	(-3.7897; 1.1032)	(-1.4011; -2.1052)
(-2.1255; 2.1170)	(-1.7545; 1.1884)	(-0.9037; 2.9984)	(-1.9031; -0.8746)
(-1.4646; 2.6181)	(-0.4646; 2.6181)	(1.3748; 1.8331)	(-1.9858; -0.3362)
(-2.9968; 0.1370)	(-1.9968; 0.1370)	(-3.9226; 0.6766)	(-1.2641; -2.3119)

На рис. 4b) изображен первый из этих шарнирников. Значения функциональных определителей $|dF|$ в точках, отвечающих этим шарнирникам, равны соответственно 30.4603, 15.4099, -200.0177, 474.2129, -11.1947, что согласуется с равенством $\deg_{\mathbf{p}} F = 2$.

Из наших подсчетов можно сделать вывод о существовании вблизи КШС нашего примера таких кинематических шарнирных схем, которым отвечают $14+10=24$ различных изометричных шарнирника. Это число превосходит очевидную оценку снизу $2^m = 2^4 = 16$ для числа изометричных шарнирных ферм с четырьмя свободными шарнирами в плоскости в случае изостатической ЗШС. Заметим еще, что, как показывают подсчеты, системы уравнений $\varphi(\mathbf{y}) = a$ с различными правыми частями $a \neq 0$ имеют различное число вещественных решений. Отсюда можно сделать вывод о существовании неустойчивых шарнирников, сколь угодно близких к устойчивому шарнирнику $\mathbf{p}$. Таким образом, в отличие от простейших примеров множество устойчивых шарнирников в данном случае не является открытым.

§ 6. Необычный пример неустойчивости шарнирника

Здесь описан пример неустойчивого, но устойчивого по малому изменению длины каждого рычага в отдельности шарнирника, заявленный автором в [11].

Рассмотрим распрямленный шарнирник $\mathbf{q}$ (рис. 4с)) с той же ЗШС, что и в предыдущем примере. Свободные его шарниры лежат на прямой $y = 0$ в точках $x_1 = 3, x_3 = 4, x_2 = 5, x_4 = 6$. Повторяя для него без каких-либо существенных изменений подсчеты, проведенные в предыдущем примере, получаем следующее задание проекции образующего конуса $\mathcal{K}$ на координатное подпространство $\mathbb{R}^4$ вдоль касательного в точке $\mathbf{q}$ многообразия:

$$\pi\mathcal{K} = \left(\frac{5}{3}y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2 - 2y_1y_2, 2y_1^2 + \frac{1}{4}y_4^2 - 2y_1y_4, \frac{3}{4}y_2^2 + \frac{6}{5}y_3^2 - 2y_2y_3, \right. \\ \left. \frac{7}{5}y_3^2 + \frac{1}{2}y_4^2 - 2y_3y_4 \right).$$

Далее рассмотрим семнадцать систем из четырех уравнений, левые части которых представляют собой координаты вектора $\pi\mathcal{K}$, а правые части равны столбцам матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & -1 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Первые 16 столбцов этой матрицы представляют собой проекции на $\mathbb{R}^4$ вдоль касательного в точке $\mathbf{q}$ многообразия векторов единичной длины, лежащих на осях стандартной координатной системы в $\mathbb{R}^8$. С помощью пакета Maple можно разыскать у каждой из первых шестнадцати систем точные вещественные решения. Они

неединственны. Ниже выписаны приближенные значения одного из наборов решений этих первых шестнадцати систем:

y_1	y_2	y_3	y_4	$ d\varphi $
-1.4379	-1.2291	-1.3482	-1.2195	-0.2360
-1.2247	-2.4527	-1.5862	-1.4348	1.1223
0.0576	0.1622	-0.2752	0.3933	-0.0109
-0.6130	-1.7266	-0.9838	-2.3698	-0.5744
-0.8398	-3.2514	-1.8526	-5.7348	-20.8205
1.0702	1.2666	0.7217	0.6528	1.0343
0.5006	1.4101	0.1894	0.5865	-0.7429
-0.4471	-1.2593	-0.7175	-3.0531	-0.8224
1.4246	2.7087	2.9710	9.1968	-32.0897
-0.3012	0.4273	-0.1140	-0.3529	-0.1936
-0.5508	-1.5515	-1.3157	-3.7617	-1.0047
0.3743	0.4430	0.2524	-0.5326	0.1238
1.7322	3.4837	3.8211	11.8282	-88.5699
-0.7525	-2.1194	-1.2077	-3.7383	-2.8960
-21.3649	-25.2854	-27.6717	-25.0305	1352.8869
-1.9719	-2.3337	-1.3298	-2.3102	6.7216

Для всех выписанных решений значение функционального определителя (10), записанное в последнем столбце, не равно нулю. Это влечет существование малых шариков с центрами на прямых, проходящих через точку $\mathbf{d} = F(\mathbf{q})$ параллельно каждой из стандартных координатных осей в $\mathcal{R}^8$, целиком лежащих в касательном конусе $K_{\mathbf{q}}$ рычажного отображения F в точке $\mathbf{q}$. Следовательно, параллельные осям стандартной координатной системы в $\mathcal{R}^8$ и проходящие через точку $\mathbf{d}$ прямые лежат внутри конуса $K_{\mathbf{q}}$, что необходимо для устойчивости шарнирника $\mathbf{q}$ по шевелению длины каждого его рычага в отдельности. Достаточность этого условия будет установлена ниже в теореме 8. С другой стороны, семнадцатая система уравнений, вектор правой части которой подобран с помощью генератора случайных чисел, не имеет вещественных решений. В этом автор убедился так. С помощью пакета Maple были найдены в точном виде все 8 с точностью до знака пар ее решений, оказавшиеся комплексными. Приведем приближенные значения переменной y_3 для каждой из этих 8 пар решений:

$$\begin{aligned} &-1.7527 - 2.7267i, & 10.3444i, \\ &-0.5469 - 5.4382i, & 0.1928 - 3.0414i, \\ &-0.1928 - 3.0414i, & 0.5469 - 5.4382i, \\ &-79.2033i, & 1.7527 - 2.7267i. \end{aligned}$$

Вычисляя функциональные определители $|d\varphi|$ в отвечающих всем этим решениям точках, убеждаемся в их неравенстве нулю. Их значения таковы:

$$\begin{aligned} &-390964.71 + 670393.56i, & -3261.45, \\ &-8.24 + 235.91i, & 113.59 + 565.21i, \\ &113.59 - 565.21i, & -8.24 - 235.91i, \\ &90145.57, & -390964.71 - 670393.56i. \end{aligned}$$

В силу тонкой теоремы Безу других решений семнадцатая система не имеет. Итак, мы нашли луч, не лежащий в касательном конусе $K_{\mathbf{q}}$. Необходимое условие устойчивости шарнирника $\mathbf{q}$ не выполнено.

Докажем наконец теорему 8, необходимую для обоснования этого примера.

ТЕОРЕМА 8. Пусть система уравнений $\varphi(\mathbf{y}) = w$ имеет решение $\mathbf{y}_0$, для которого $\det d\varphi(\mathbf{y}_0) \neq 0$. Тогда система (5)

$$\begin{cases} \varphi(\mathbf{y}) + \phi(\xi) = sw; \\ \mathcal{A}\xi + \vartheta(\mathbf{y}) + \theta(\xi) = st \end{cases}$$

имеет для произвольного фиксированного вектора $t \in T$ и всех достаточно малых вещественных $s > 0$ решение $(\xi, \mathbf{y})$, близкое к нулевому вектору.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проведем методом сжимающих отображений. В качестве начальных приближений возьмем

$$\mathbf{y}^{[0]} = \mathbf{y}^{[0]}(s) = \varphi^{-1}(sw), \quad \xi^{[0]} = \xi^{[0]}(s) = \mathcal{A}^{-1}(st - \vartheta(\mathbf{y}^{[0]}(s))).$$

Заметим, что начальные приближения зависят от параметра s следующим образом:

$$\mathbf{y}^{[0]}(s) = \sqrt{s} \mathbf{y}^{[0]}(1) = \sqrt{s} \mathbf{y}_0, \quad \xi^{[0]}(s) = s \xi^{[0]}(1) = s \mathcal{A}^{-1}(t - \vartheta(\mathbf{y}_0)).$$

Последующие приближения будем находить по формулам

$$\mathbf{y}^{[i]} = \varphi^{-1}(sw - \phi(\xi^{[i-1]})), \quad \xi^{[i]} = \mathcal{A}^{-1}(st - \vartheta(\mathbf{y}^{[i]}) - \theta(\xi^{[i-1]})).$$

Подставляя выражение $\mathbf{y}^{[i]}$ из первой из этих формул во вторую, получаем формулу процесса последовательных приближений, включающую только переменную ξ :

$$\xi^{[i]} = \mathcal{A}^{-1}(st - \vartheta(\varphi^{-1}(sw - \phi(\xi^{[i-1]}))) - \theta(\xi^{[i-1]})).$$

Если мы докажем при произвольном t и всех достаточно малых s существование близкого к нулевому решения ξ системы уравнений

$$\xi = \mathcal{A}^{-1}(st - \vartheta(\varphi^{-1}(sw - \phi(\xi))) - \theta(\xi)), \quad (11)$$

то тем самым будет доказано существование близкого к нулевому решения $(\xi, \mathbf{y})$, $\mathbf{y} = \varphi^{-1}(sw - \phi(\xi))$, и для системы (5) при тех же условиях. Действительно, будем считать все точки, получающиеся в процессе последовательных приближений, удовлетворяющими для некоторых $p > 0$, $q > 0$ условиям $|\xi| < ps$, $|\mathbf{y}| = |\varphi^{-1}(sw - \phi(\xi))| < q\sqrt{s}$. (В дальнейшем мы увидим, что это предположение оправдано при достаточно малых s .) В качестве отображения φ^{-1} мы берем непрерывную ветвь отображения, обратного к φ , для которой $\varphi^{-1}(w) = \mathbf{y}_0$. В самом деле, поскольку $\det d\varphi(\mathbf{y}_0) \neq 0$ и отображение φ гладкое, то по теореме об обратном отображении отображение φ^{-1} определено в шаре некоторого радиуса $r > 0$ с центром в точке w . А вследствие однородности квадратичного отображения φ оно определено и в шаре радиуса sr с центром sw , причем $\varphi^{-1}(sw) = \sqrt{s} \mathbf{y}_0$.

Для однородного квадратичного отображения $\phi(\xi)$ существует такая постоянная l , что $\phi(\xi) \leq l|\xi|^2$. Следовательно, для корректности наших итераций должно выполняться условие $l|\xi|^2 \leq l(ps)^2 \leq rs$. Что имеет место в случае $s \leq r/(lp^2) = B$.

Для доказательства существования решения системы уравнений (11) методом сжимающих отображений требуется установить, что отображение F_s , которое задают правые части этой системы, является сжимающим при всех достаточно малых s , а образ шара B_s : $|\xi - \xi_s^{[0]}| < \rho s$ при некотором $0 < \rho < r$ лежит в этом шаре.

Пусть $f(x, y)$ – симметрическое билинейное отображение, полярное однородному квадратичному отображению $f(x, x) = F(x)$ (его координатные функции суть билинейные формы, полярные квадратичным формам, задающим отображение F). Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} F(y) &= f(y, y) = f(x + (y - x), x + (y - x)) \\ &= f(x, x) + 2f(x, y - x) + f(y - x, y - x), \\ F(y) - F(x) &= 2f(x, y - x) + f(y - x, y - x). \end{aligned}$$

Откуда следует

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &= |2f(x, y - x) + f(y - x, y - x)| \leq |2f(x, y - x)| + |f(y - x, y - x)| \\ &\leq b(2|x||y - x| + |y - x|^2) = b|y - x|(2|x| + |y - x|). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь в качестве b можно взять число $n^2 m M$, где n – размерность пространства прообраза, m – размерность пространства образа, а M – наибольшая из абсолютных величин коэффициентов билинейных форм, осуществляющих отображение $f(x, y)$.

С учетом (12), считая выполненным условие $s \leq B$, имеем

$$\begin{aligned} |F_s(\xi_1) - F_s(\xi_2)| &= |\mathcal{A}^{-1}(st - \vartheta(y_1) - \theta(\xi_1)) - \mathcal{A}^{-1}(st - \vartheta(y_2) - \theta(\xi_2))| \\ &\leq |\mathcal{A}^{-1}(\vartheta(y_2) - \vartheta(y_1))| + |\mathcal{A}^{-1}(\theta(\xi_2) - \theta(\xi_1))| \\ &\leq a(|\vartheta(y_2) - \vartheta(y_1)| + |\theta(\xi_2) - \theta(\xi_1)|) \\ &\leq a(b_\vartheta|y_2 - y_1|(2|y_1| + |y_2 - y_1|) + b_\theta|\xi_2 - \xi_1|(2|\xi_1| + |\xi_2 - \xi_1|)), \end{aligned} \quad (13)$$

причем постоянная a зависит лишь от отображения $\mathcal{A}^{-1}$, а b_ϑ и b_θ связаны с отображениями ϑ и θ так же, как b с F . Далее, можно записать, используя формулу конечных приращений Лагранжа для функции φ_i^{-1} , представляющей собой координатную функцию отображения φ^{-1} ,

$$\begin{aligned} \varphi_i^{-1}(sw - \phi(\xi_2)) - \varphi_i^{-1}(sw - \phi(\xi_1)) \\ = (\text{grad } \varphi_i^{-1}(sw - \theta_i \phi(\xi_1) + (\theta_i - 1)\phi(\xi_2)), \phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)), \end{aligned}$$

где $0 < \theta_i < 1$. Заметим, что поскольку функциональная матрица отображения φ обладает свойством $d\varphi(\sqrt{s}y) = \sqrt{s}d\varphi(y)$, то функциональная матрица обратного отображения, являясь обратной к ней, обладает свойством $d\varphi^{-1}(sw) =$

$(1/\sqrt{s})d\varphi^{-1}(w)$. В силу гладкости отображения φ^{-1} вблизи точки sw , следующей из теоремы об обратном отображении, существуют такие положительные постоянные c и C , что для всех $0 < s < C$ будет выполнено

$$|\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1| = |\varphi^{-1}(sw - \phi(\xi_2)) - \varphi^{-1}(sw - \phi(\xi_1))| \leq \frac{c}{\sqrt{s}} |\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)|. \quad (14)$$

Теперь с учетом (14) и условий $|\xi_i| < ps$, $|\mathbf{y}_i| < q\sqrt{s}$, $i = 1, 2$, получаем из (13)

$$\begin{aligned} |F_s(\xi_1) - F_s(\xi_2)| &\leq a \left(b_\vartheta \frac{c}{\sqrt{s}} |\phi(\xi_1) - \phi(\xi_2)| 4q\sqrt{s} + b_\theta |\xi_2 - \xi_1| (2|\xi_1| + |\xi_2 - \xi_1|) \right) \\ &\leq a(4b_\vartheta cqb_\phi |\xi_2 - \xi_1| (2|\xi_1| + |\xi_2 - \xi_1|) + b_\theta |\xi_2 - \xi_1| (2|\xi_1| + |\xi_2 - \xi_1|)) \\ &\leq a(4b_\vartheta cqb_\phi + b_\theta) |\xi_2 - \xi_1| (2|\xi_1| + |\xi_2 - \xi_1|) \leq (4b_\vartheta cqb_\phi + b_\theta) 4aps |\xi_2 - \xi_1|. \end{aligned}$$

Таким образом, отображение F_s является сжимающим для всех s , меньших

$$\frac{k}{4ap(4b_\vartheta cqb_\phi + b_\theta)} = D(k), \quad 0 < k < 1.$$

Пусть теперь $|\xi - \xi^{[0]}(s)| \leq \rho s$, тогда имеем

$$|F_s(\xi) - \xi^{[0]}(s)| = |F_s(\xi) - F_s(0)| \leq (4b_\vartheta cqb_\phi + b_\theta) 4aps |\xi| \leq (4b_\vartheta cqb_\phi + b_\theta) 4ap^2 s^2.$$

Левая часть этого неравенства не превосходит ρs , если

$$s \leq \frac{\rho}{(4b_\vartheta cqb_\phi + b_\theta) 4ap^2} = E(\rho).$$

Итак, для s , меньших, скажем, $\min\{B, C, D(\frac{1}{2}), E(\frac{r}{2})\}$, условия метода сжимающих отображений выполнены и, следовательно, существует решение $(\xi, \mathbf{y})$ системы уравнений (5) с $|\xi| \leq ps$, $|\mathbf{y}| \leq q\sqrt{s}$. Причем для выбранной ветви отображения φ^{-1} это решение единственно.

Список литературы

1. *Connelly R.* Rigidity // Handbook of convex geometry / ed. P. Gruber et al. V. A. Amsterdam: North-Holland, 1993. P. 223–271.
2. *White N., Whiteley W.* The algebraic geometry of stresses in frameworks // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. 1983. V. 4. № 4. P. 481–511.
3. *Ковалев М. Д.* Устойчивость шарнирников, шарнирных устройств и схем // Итоги науки и техники. Совр. матем. и ее прилож. Т. 68. (Труды международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина. Т. 7. Топология и геометрия.) М.: ВИНТИ, 1999. С. 65–86.
4. *Ковалев М. Д.* Геометрическая теория шарнирных устройств // Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 1. С. 45–70.
5. *Ковалев М. Д.* Квадратичные и рычажные отображения // Труды МИАН. Дискретная геометрия, геометрия чисел и приложения. 2002. Т. 239. С. 195–214.
6. *Азрачев А. А., Гамкрелидзе Р. В.* Квадратичные отображения и гладкие функции: эйлеровы характеристики множеств уровня // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Т. 35. М.: ВИНТИ, 1989. С. 179–239.

7. *Ковалев М. Д.* О восстановимости шарнирников по внутренним напряжениям // Изв. РАН. Сер. матем. 1997. Т. 61. № 4. С. 37–66.
8. *Берже М.* Геометрия. Т. 1. М.: Мир, 1984.
9. *Дубровин В. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1979.
10. *Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М.* Особенности дифференцируемых отображений. М.: Наука, 1982.
11. *Kovalev M.* Local properties of the rigidity mapping // Convex and discrete geometry. Abstracts. Bydgoszcz. Poland: Institut Matematyki i Fizyki ATR, 1998. P. 40.
12. *Шафаревич И. Р.* Основы алгебраической геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1988.
13. *Фултон У.* Теория пересечений. М.: Мир, 1989.

Московский государственный
технический университет
им. Н. Э. Баумана

Поступила в редакцию
08.02.2002 и 24.03.2003