Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. С. Запутряева, Изгибания четырехугольников на плоскости с сохранением индекса,
Матем. сб., 2014, том 205, номер 5, 55–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8270>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 07:11:05

УДК 514.772.35

Е. С. Запутряева

Изгибания четырехугольников на плоскости с сохранением индекса

В работе рассматривается задача плотника (задача об изгибаниях многоугольников с сохранением длин сторон) в случае многоугольников с самопересечениями при дополнительном требовании сохранения индекса многоугольника в ходе его изгибания. Приводятся общие сведения об изгибаниях плоских многоугольников и дается полное решение задачи плотника для четырехугольников.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: плоские многоугольники, шарнирные механизмы, задача плотника.

DOI: 10.4213/sm8270

§ 1. Введение

Работа относится к области геометрии, возникшей в 70-х годах прошлого века и изучающей изометрические деформации многоугольников. Из наиболее известных вопросов в этой области можно упомянуть задачу о распрямлении простой ломаной с сохранением длин сторон и без появления самопересечений и задачу о приведении жорданова многоугольника к выпуклому положению с сохранением длин сторон (обе эти задачи в литературе образно называют задачей плотника – *carpenter's rule problem*, имея в виду манипуляции плотника при работе с плотницким метром – специальной складной металлической или деревянной линейкой), которые были решены относительно недавно; см. [1] и [2]. Мы занимаемся обобщением задачи плотника на случай многоугольников с самопересечениями. Вообще говоря, эта задача решена в [3], где доказано, что любой многоугольник можно изгибанием привести к изометричному ему выпуклому многоугольнику, при этом никаких дополнительных условий на деформации, кроме требования сохранения длин сторон, не ставится. Мы же хотим рассматривать деформации с дополнительным требованием инвариантности такой топологической характеристики многоугольника, как индекс. Ниже мы увидим, что это требование имеет и физическое содержание, если на многоугольники смотреть как на шарнирные механизмы.

В § 2 мы приведем необходимые определения, общие сведения и уравнения для изгибаний многоугольников с произвольным числом сторон, а затем в § 3 подробно рассмотрим случай четырехугольников.

Несмотря на кажущуюся элементарность вопроса об изометрических деформациях четырехугольника (изгибаниях и сгибаниях, т.е. дискретных преобразованиях, сводящихся к отражениям двух соседних сторон четырехугольника

относительно соответствующей диагонали) эта тема была и остается предметом исследования многих геометров; см., например, [4]–[10], а общую историю вопроса можно посмотреть в [11].

Автор благодарит И. Х. Сабитова за постановку задачи, постоянное внимание и ценные советы, а также И. В. Измestьева, указавшего несколько не известных автору работ об изгибаниях плоских многоугольников.

§ 2. Определения и вспомогательные факты

Под *многоугольником на плоскости* мы, следуя работе [12], понимаем отображение в плоскость окружности с конечным числом отмеченных на ней точек, пронумерованных в циклическом порядке, которое переводит каждую дугу окружности между двумя соседними точками в отрезок, соединяющий образы этих точек. При этом для исключения вырожденных случаев предполагается, что две соседние отмеченные на окружности точки не могут перейти в одну точку плоскости.

Геометрически многоугольник понимается как образ этого отображения, причем точки на плоскости, имеющие более одного прообраза на окружности, считаются разными точками многоугольника. Образы отмеченных на окружности точек называются *вершинами* многоугольника, а соединяющие вершины отрезки – *сторонами* многоугольника. Каждая сторона многоугольника имеет отличную от нуля длину.

На многоугольнике вводится *ориентация*, т.е. направление циклического обхода его сторон, например, в соответствии с порядком нумерации вершин.

Два многоугольника называются *изометричными*, если их соответственные стороны имеют одинаковые длины.

Изгибанием многоугольника называется такая его непрерывная деформация, при которой сохраняются длины сторон.

Два соединимых изгибанием многоугольника мы будем называть *наложимыми*.

В ходе рассуждений нам много раз потребуется исследовать поведение углов многоугольника при различных его деформациях, поэтому для определенности введем следующее соглашение: за величину угла при некоторой вершине A ориентированного многоугольника принимаем геометрическое значение α угла, ограниченного сторонами с общей вершиной A и остающегося слева при соответствующем данной рассматриваемой ориентации обходе сторон, тем самым, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Это соглашение, однако, не позволяет геометрически отличить угол величиной в 2π от нулевого угла, а такие углы могут встречаться в ходе изгибания многоугольника. В этом случае величина угла, равная 0 или 2π , определяется как односторонний предел близких его значений при изгибании многоугольника. В исходном положении мы предполагаем отсутствие у многоугольника таких углов, а далее, если они появляются, определяем их значения по непрерывности. Так как для рассматриваемых изгибаний мы будем запрещать, чтобы сторона многоугольника в ходе изгибания пересекала предшествующую ей (по обходу) сторону, переходя с одной определяемой ею полуплоскости в другую, то указанное определение значения угла как предела является корректным. Например, на рис. 1, а ребро BC вращается вокруг вершины B против часовой стрелки, угол B уменьшается, и в итоге считаем его

равным 0. На рис. 1, b ребро BC вращается по часовой стрелке, в результате угол при вершине B равен 2π .

Рис. 1. Правило определения величины угла

Определим важное понятие индекса многоугольника. Выберем любую сторону многоугольника. Ей можно сопоставить вектор, направленный в соответствии с ориентацией. На единичной окружности изобразим сонаправленный ему единичный вектор $\vec{e}$. Далее будем совершать обход многоугольника по ориентации и соответственно поворачивать вектор $\vec{e}$, при этом ориентированный угол θ между ним и некоторым фиксированным направлением будет изменяться, принимая, возможно, как положительные, так и отрицательные значения. В окрестностях вершины многоугольника мы заменим его вписанной в угол при вершине дугой окружности достаточно малого радиуса так, чтобы касательная к полученной таким образом гладкой кривой изменялась непрерывно. Легко показать, что полученное при этом приращение угла θ не зависит от выбора вписанных в углы малых круговых дуг. *Индексом* многоугольника называется целое число, равное отношению к 2π полного приращения угла θ . Если поворот вектора $\vec{e}$ шел всегда против часовой стрелки, то индекс равен итоговому числу полных оборотов, совершенных вектором $\vec{e}$ против часовой стрелки. Если в результате обхода вектор совершал повороты по часовой стрелке, то индекс многоугольника отрицательный. В случае, когда при обходе многоугольника вектор $\vec{e}$ совершил p оборотов против часовой стрелки и q оборотов по часовой стрелке, индексом будет разность $p - q$. Более подробно об индексе многоугольника и его вычислении можно прочесть, например, в работе [12].

ЛЕММА 2.1. *Если в ходе изгибания углы многоугольника не изменяют свои величины дискретно с 0 на 2π или обратно, то индекс многоугольника сохраняется.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Известно (см. [12]), что сумма углов многоугольника вычисляется по формуле

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \pi(n - 2\text{Ind}),$$

где Ind – индекс многоугольника.

Левая часть данного равенства является непрерывной функцией, потому что изгибание – непрерывная деформация, и углы изменяются непрерывно. Если

же рассматривать меры углов, то точки разрыва возможны лишь в случае изменения величины угла с 0 на 2π или обратно, но этот случай исключен условием леммы. Отсюда следует, что и правая часть равенства меняется непрерывно, но переменным в ней является только индекс, который как целое число принимает дискретное множество значений, значит, он сохраняется.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Геометрически условие леммы означает, что никакая сторона не может вращаться вокруг своей вершины, пересекая соседнюю сторону в процессе вращения. Это же условие имеет механический смысл, заключающийся в запрещении скольжения одного стержня поверх соседнего, что представляется разумным с инженерной точки зрения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Обратное к лемме 2.1 утверждение неверно, так как при одной вершине угол может измениться с 0 на 2π , а при другой – с 2π на 0.

В силу замечания 2.2 требование сохранения индекса мы понимаем не в буквальном смысле, а более строго – как запрет на переход любого ребра через соседнее.

Мы собираемся изучать изгибания многоугольников при условии, что в ходе изгибания их индекс остается инвариантным. Если данный многоугольник не имел внутренних углов, равных 0 или 2π , то очевидно, что при малой изометрической деформации индекс останется постоянным в силу леммы 2.1. Поэтому интерес представляет следующая постановка задачи: даны два изометричных многоугольника с одинаковыми индексами и спрашивается, можно ли их перевести друг в друга сохраняющим индекс изгибанием. Рассмотрим пример на рис. 2.

Рис. 2. Два изометричных пятиугольника индекса 1, не соединимые изгибанием

Нетрудно показать, что при достаточно больших длинах сторон CD и DE изображенный слева многоугольник нельзя перевести в изображенный справа с помощью изгибания с сохранением индекса. Следовательно, нужно искать условия, при которых изометричные многоугольники переводятся друг в друга сохраняющим индекс изгибанием. Положительный ответ известен для класса выпуклых многоугольников с одной и той же ориентацией; см., например, [13].

Для дальнейшего описания вопроса о наложимости изометричных многоугольников одного индекса нам понадобится понятие конфигурационного пространства (далее – КП) многоугольника.

В самых общих словах конфигурационное пространство есть множество положений (геометрических форм) многоугольника с данными длинами сторон. Многоугольники, получаемые друг из друга собственными движениями в плоскости, мы не считаем разными, поэтому при изучении допустимых положений фиксируем одну из сторон многоугольника (без ограничения общности можно считать, что первую сторону).

Дадим более четкое определение КП. Введем множество, элементами которого являются всевозможные n -угольники с данными фиксированными длинами сторон. Различные многоугольники из этого множества определяются различными наборами величин их углов (так как длины сторон не изменяются). Поэтому это множество можно параметризовать значениями n внутренних углов многоугольника, которые введут на нем соответствующую топологию. Это топологическое пространство мы будем называть *конфигурационным пространством* (КП) многоугольника. Дадим следующую его наглядную интерпретацию. Рассмотрим $(n - 1)$ -звенную ломаную, получаемую из n -угольника отбрасыванием одной из сторон. Ее КП будет $(n - 2)$ -мерным тором, так как положение такой ломаной определяется величинами ее $n - 2$ внутренних углов, каждый из них свободен и независимо от других изменяется в пределах от 0 до 2π . Следовательно, КП $(n - 1)$ -звенной ломаной с одним фиксированным звеном представляет собой произведение $n - 2$ окружностей, т.е. топологически оно является $(n - 2)$ -мерным тором T^{n-2} .

Чтобы получить КП n -угольника из КП $(n - 1)$ -звенной ломаной, надо взять только те точки тора, для которых расстояние между концами соответствующей ломаной (каждая точка КП соответствует некоторому положению ломаной) равно длине отброшенной стороны многоугольника. Иными словами, на $(n - 2)$ -мерном торе T^{n-2} (конфигурационном пространстве $(n - 1)$ -звенной ломаной) определена некоторая функция, задающая расстояние между концами ломаной. КП n -угольника есть поверхность уровня этой функции, соответствующая значению, равному длине последней стороны n -угольника. Аналитическая запись уравнения тора и КП будет приведена ниже.

Насколько нам известно из литературы, впервые представление КП многоугольника как поверхности уровня функции расстояния на торе T^{n-2} было использовано в работе [14]. На самом деле такой же подход к интерпретации КП изложил И. Х. Сабитов в докладе на конференции по геометрии “в целом” в г. Симферополе в сентябре 1980 г. и на основании этого подхода привел некоторые свои результаты в обзоре [15].

Не вдаваясь в детали, приведем некоторые утверждения о конфигурационных пространствах многоугольников, приведенные, например, в работах [3], [14], [16], [17].

1) КП многоугольника имеет не более двух компонент связности (см. теоремы 3.1, 4.1 в [3], теорему 7 в препринте [14]).

2) КП многоугольника является многообразием, если многоугольник общий в следующем смысле: для него не существует положения, в котором все его стороны лежат на одном отрезке (см. теорему 1 в [16], теоремы 1, 2 в [17], теорему 6 в препринте [14]). Иными словами это условие можно сформулировать так: для набора длин сторон $l_1, l_2, \dots, l_n$ n -угольника не существует набора

Рис. 3. Углы наклона и угол поворота при вершине A_{i-1}

угла наклона стороны $A_{i-1}A_i$ по отношению к оси Ox . Углы наклона (на рис. 3 они обозначены буквами φ с соответствующими индексами) будем измерять так, чтобы они менялись в пределах от 0 до 2π . Чтобы получить формулы для координат вершины A_i , остается вычислить угол наклона стороны $A_{i-1}A_i$. Для первой стороны он равен 0, так как она направлена по оси Ox , для второй – углу поворота при вершине A_2 . На рис. 3 углы поворота обозначены буквами θ . Угол поворота θ_i при вершине A_i легко выражается через внутренний: $\theta_i = \pi - \alpha_i$. Из этой формулы мы видим, что углы поворота ориентированы и меняются в пределах от $-\pi$ до π . Далее, нетрудно заметить (см. рис. 3), что угол наклона φ_i при некоторой стороне с точностью до $2\pi k$ (где k целое) равен сумме угла наклона предыдущей стороны и угла поворота при их общей вершине: $\varphi_i = \varphi_{i-1} + \theta_{i-1}$. Используя индукцию, мы приходим к выводу, что угол наклона при стороне по модулю 2π равен суммарному углу поворота при всех предшествующих сторонах, причем суммирование начинается со второго угла. Таким образом, итоговое выражение будет иметь вид

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + l_{i-1} \cos(\pi - \alpha_2 + \pi - \alpha_3 + \cdots + \pi - \alpha_{i-1}), \\ y_i &= y_{i-1} + l_{i-1} \sin(\pi - \alpha_2 + \pi - \alpha_3 + \cdots + \pi - \alpha_{i-1}). \end{aligned}$$

Упрощение дает следующие формулы:

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + (-1)^{i-2} l_{i-1} \cos(\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{i-1}) \\ &= l_1 + \sum_{k=2}^{i-1} (-1)^{k-1} l_k \cos(\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_k), \\ y_i &= y_{i-1} + (-1)^{i-1} l_{i-1} \sin(\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_{i-1}) \\ &= \sum_{k=2}^{i-1} (-1)^k l_k \sin(\alpha_2 + \alpha_3 + \cdots + \alpha_k). \end{aligned}$$

Условие, что ломаную $A_1A_2A_3 \dots A_n$ можно дополнить до заданного многоугольника (мы говорим о множестве изометричных многоугольников, т.е.

о многоугольниках с фиксированными длинами сторон), заключается в том, что расстояние от A_n до A_1 должно быть равно l_n :

$$x_n^2 + y_n^2 = l_n^2,$$

или

$$\begin{aligned} & \left(l_1 + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^{i-1} l_i \cos(\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_i) \right)^2 \\ & + \left(\sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i l_i \sin(\alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_i) \right)^2 = l_n^2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Это уравнение аналитически описывает конфигурационное пространство n -угольника.

§ 3. Решение задачи для случая четырехугольника

В этом параграфе мы рассмотрим вопросы, связанные с изометрическими деформациями четырехугольников друг в друга.

Как и раньше, мы будем пользоваться старыми обозначениями: вершины четырехугольника A_1, A_2, A_3, A_4 ; углы при вершинах $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$; длины сторон четырехугольника l_1, l_2, l_3, l_4 ; сторона l_1 идет за вершиной A_1 . Прочие обозначения будут введены по ходу изложения.

Конфигурационные пространства четырехугольников хорошо известны (см., например, работы [14]–[16]) и полностью классифицированы. Топологические типы конфигурационных пространств (рис. 4) четырехугольников зависят только от набора длин сторон многоугольника (но не от их порядка, что изложено в [16]) и ограничиваются следующими возможностями (в данной классификации нумерация сторон отвечает не за их порядок, а за их длины, т.е. мы считаем, что $l_1 \geq l_2 \geq l_3 \geq l_4$):

- 1) одна точка ($l_1 = l_2 + l_3 + l_4$);
- 2) окружность ($l_2 + l_3 < l_1 + l_4$);
- 3) две окружности ($l_2 + l_3 > l_1 + l_4$);
- 4) “восьмерка” ($l_2 + l_3 = l_1 + l_4, l_1 \neq l_2$);
- 5) две точки, соединенные четырьмя отрезками ($l_2 + l_3 = l_1 + l_4, l_1 = l_2, l_1 \neq l_3$, или, в другой записи, $l_1 = l_2 > l_3 = l_4$);
- 6) три попарно касающиеся окружности ($l_1 = l_2 = l_3 = l_4$).

Далее, ссылаясь на этот список, мы будем называть его *списком типов КП*.

Все эти типы можно получить “вручную”, следя за изгибанием четырехугольника, при этом можно распределять данный набор длин сторон в произвольном порядке и для устранения влияния тривиальных изгибаний (движений многоугольника как твердого тела) положение одной из сторон считать зафиксированным на плоскости.

Исходя из типа конфигурационного пространства, легко видеть, что любые два изометричных четырехугольника соединимы изгибанием, так как конфигурационные пространства связны, за исключением случая двух окружностей

Рис. 4. Топологические типы конфигурационных пространств четырехугольников

$(l_2 + l_3 > l_1 + l_4)$. Напомним, что в работе [3] доказано, что если конфигурационное пространство многоугольника топологически имеет две связные компоненты, то они симметричны в следующем смысле: если многоугольник P находится в одной компоненте, то его зеркальный образ – в другой.

Однако соединимость изгибанием в работе [3] происходит без учета сохранения индекса, а для нашей задачи важно именно это.

Итак, пусть даны два изометричных четырехугольника P_1 и P_2 одного индекса, все углы которых больше 0, но меньше 2π . Нужно проверить, соединимы они сохраняющим индекс изгибанием или нет.

С учетом уравнения (2.2) выпишем уравнение КП четырехугольника.

Рис. 5. Углы и вершины четырехугольника

Выше был указан способ получения координат вершин многоугольника. Для случая четырехугольника имеем (рис. 5)

$$\begin{aligned} A_1(0; 0), \\ A_2(l_1; 0), \\ A_3(l_1 - l_2 \cos \alpha_2; l_2 \sin \alpha_2), \\ A_4(l_1 - l_2 \cos \alpha_2 + l_3 \cos(\alpha_2 + \alpha_3); l_2 \sin \alpha_2 - l_3 \sin(\alpha_2 + \alpha_3)). \end{aligned}$$

В соответствии с (2.2) для четырехугольника уравнение КП принимает вид

$$(l_1 - l_2 \cos(\alpha_2) + l_3 \cos(\alpha_2 + \alpha_3))^2 + (l_2 \sin(\alpha_2) - l_3 \sin(\alpha_2 + \alpha_3))^2 = l_4^2. \quad (3.1)$$

После элементарных преобразований формулы (3.1) мы приходим к более простой форме уравнения КП

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 - 2l_1l_2 \cos(\alpha_2) + 2l_1l_3 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) - 2l_2l_3 \cos(\alpha_3) = l_4^2. \quad (3.2)$$

Аналитическое описание КП дополняют уравнения связи между α_2 и α_3 с не вошедшими в (3.2) углами α_1 и α_4 . Их проще всего получить, применяя теорему косинусов для треугольников $A_4A_1A_2$ и $A_2A_3A_4$. Общая диагональ A_4A_2 четырехугольника может быть выражена двумя способами: из треугольника $A_4A_1A_2$ с использованием косинуса либо самого угла α_1 , либо угла, дополняющего его до 2π (значения косинусов будут для двух этих возможностей одинаковыми), и вторым способом – через треугольник $A_4A_3A_2$ с использованием косинуса угла α_3 . Приравнявая эти выражения и исключая диагональ A_4A_2 , получаем

$$2l_1l_4 \cos(\alpha_1) = l_1^2 + l_4^2 - l_2^2 - l_3^2 + 2l_2l_3 \cos(\alpha_3). \quad (3.3)$$

Аналогично, применяя теорему косинусов в треугольниках $A_1A_2A_3$ и $A_1A_4A_3$ для диагонали A_1A_3 четырехугольника, получим связь между α_2 и α_4

$$2l_3l_4 \cos(\alpha_4) = l_3^2 + l_4^2 - l_2^2 - l_1^2 + 2l_1l_2 \cos(\alpha_2). \quad (3.4)$$

Визуально КП четырехугольника можно представить в квадрате (далее мы будем называть его квадратом K) $0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi$, $0 \leq \alpha_3 \leq 2\pi$ как линию с уравнением (3.2). Это изображение КП мы будем называть *графиком КП*.

ЛЕММА 3.1. *График КП четырехугольника симметричен относительно центра квадрата K .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно показать, что если некоторая точка P лежит на графике КП, то точка P' , симметричная P относительно центра квадрата (π, π) , также на нем лежит. Пусть точка P имеет координаты $(\pi - x, \pi - y)$. Тогда P' имеет координаты $(\pi + x, \pi + y)$. Так как P – точка конфигурационного пространства, то имеет место равенство

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 - 2l_1l_2 \cos(\pi - x) + 2l_1l_3 \cos(\pi - x + \pi - y) - 2l_2l_3 \cos(\pi - y) = l_4^2.$$

Отсюда следует, что уравнению КП также удовлетворяют координаты точки P' :

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 - 2l_1l_2 \cos(\pi + x) + 2l_1l_3 \cos(\pi + x + \pi + y) - 2l_2l_3 \cos(\pi + y) = l_4^2.$$

Лемма доказана.

Изгибания многоугольника соответствуют движению исходной точки (соответствующей положению исходного многоугольника) по конфигурационному пространству. Напомним, что изгибание с сохранением индекса мы интерпретируем как запрет на непрерывный переход углов через 0 и 2π .

Это условие порождает четыре “запретные” линии в квадрате K : изгибание четырехугольника как траектория точки в КП не должна пересекать эти линии. Первая линия отвечает за условие $\cos \alpha_2 = 1$; это левая граница квадрата (отождествленная с правой границей). Второе условие аналогично: $\cos \alpha_3 = 1$; это верхняя (отождествленная с нижней) граница квадрата. Третье условие $\cos \alpha_1 = 1$ с помощью уравнения (3.3) преобразуется в запретную линию с уравнением

$$2l_1l_4 = l_1^2 + l_4^2 - l_2^2 - l_3^2 + 2l_2l_3 \cos(\alpha_3). \quad (3.5)$$

Это условие задает две горизонтальные прямые в квадрате.

Аналогично выпишем последнее условие, задающее запретные линии, определяемое равенством $\cos \alpha_4 = 1$:

$$2l_3l_4 = l_3^2 + l_4^2 - l_2^2 - l_1^2 + 2l_1l_2 \cos(\alpha_2). \quad (3.6)$$

Этим уравнением задаются две вертикальные прямые в квадрате.

Таким образом, мы имеем уравнение КП и четыре уравнения запретных линий (каждое из которых формально задает две прямые в квадрате, а фактически, как мы покажем ниже, всего будет четыре запретные прямые, а не восемь).

Мы рассмотрим отдельно случаи вырожденных четырехугольников (с КП, не являющимся многообразием, или, другими словами, имеющим реализации, лежащие на одном отрезке) и общих, КП которых является многообразием.

Начнем с вырожденных случаев. Так как четырехугольник, КП которого не является многообразием, допускает реализацию в виде отрезка (все стороны лежат на одном отрезке), то некоторая сумма длин его сторон, взятых каждая со своим знаком, равна нулю. Чтобы перечислить возможные варианты, нужно понять, какие комбинации знаков в этой сумме допустимы. Учитывая, что число сторон четыре и по крайней мере одна сторона должна идти со знаком плюс, а также что комбинация эквивалентна противоположной (т.е. может быть представлена в виде исходной умножением на -1), мы делаем вывод, что возможных различных комбинаций всего три:

$$(-, -, +, +), \quad (-, +, -, +), \quad (-, +, +, +).$$

Начнем с последней, т.е. с таких многоугольников, для которых $l_1 = l_2 + l_3 + l_4$. Согласно списку типов конфигурационных пространств КП такого четырехугольника есть одна точка, т.е. четырехугольник допускает всего одну реализацию, а значит, двух изометричных неконгруэнтных многоугольников с таким набором длин сторон просто не существует. Поэтому далее мы будем заниматься только остальными двумя случаями. Для них КП четырехугольника, как уже было сказано, имеет вид либо “восьмерки”, либо четырех дуг, которые имеют пару общих концов (для дельтоидов и параллелограммов), либо трех окружностей, попарно касающихся друг друга (в случае ромба).

Точки КП, в которых оно не является многообразием даже локально, соответствуют вырожденным положениям многоугольника (он лежит на одном

отрезке), а так как в них хотя бы два угла равны 0, то эти точки КП являются запретными при изгибании с сохранением индекса. На “восьмерке” это точка соединения двух окружностей, на четырех дугах – их общие вершины, на трех попарно касающихся окружностях – их точки касания.

Вначале мы рассмотрим случай ромба, когда КП представляет собой три попарно касающиеся окружности. Некоторое представление об этом КП можно получить, если следить за возможными изгибаниями ромба. Пусть исходно он имеет вид квадрата (верхнее положение на рис. 6), сторона AB зафиксирована. Из этого положения возможно вести изгибание двумя способами – вращая вершину C по часовой стрелке либо против. При вращении по часовой стрелке квадрат придет к позиции на одном отрезке – справа на рис. 6; положение после вращения против часовой – слева на рис. 6. От каждой из этих точек можно продолжать изгибание так, чтобы четырехугольник снова имел вид ромба (эти две ветки приведут к нижнему положению на рис. 6, что образует одну из окружностей КП), либо так, чтобы четырехугольник имел вид угла, одна сторона которого вращается вокруг вершины. Эти изгибания дадут нам вторую и третью окружности КП, причем они также будут иметь общую точку, соответствующую центральному положению четырехугольника на рис. 6.

Мы видим, что две из трех окружностей КП отвечают за такие положения ромба, в которых он сложен в один угол (т.е. стороны l_1, l_2 и l_3, l_4 попарно совпадают либо совпадают в другом порядке: l_1 с l_4 и l_3 с l_2). Такие положения также запрещены в ходе наших изгибаний. Из этого следует, что для случая квадрата сохраняющим индекс изгибаниям на КП соответствуют движения только по одной (оставшейся) из окружностей, причем двумя точками касания с первой и второй окружностями она разбивается на две дуги, на каждой из них точки КП соответствуют четырехугольникам в положении ромба, причем индекса 1 на одной дуге и индекса -1 – на второй. Это значит, что в случае, когда $l_1 = l_2 = l_3 = l_4$, допустимые положения многоугольников составляют две дуги КП, в общих вершинах которых – запретные точки, и точки одной дуги отвечают за четырехугольники (ромбы) индекса 1, а точки второй дуги (с симметричными четырехугольниками) – индекса -1 . Других запретных точек на этих дугах нет (т.е. они не разбиваются на объединение меньших дуг), так как в произвольной запретной точке четырехугольник обязательно имеет вид угла¹, следовательно, соответствующие ему точки КП лежат на одной из двух окружностей, отвечающих за такие многоугольники. Такое положение дуг КП свидетельствует о том, что для случая квадрата (точнее, ромба), когда $l_1 = l_2 = l_3 = l_4$, разрешенные дуги КП идентифицируются индексом 1 или -1 , и мы можем определить, соединимы ли два данных ромба сохраняющим индекс изгибанием только на основе их индексов: если у обоих индекс равен либо 1, либо -1 , то соединимы, если у одного индекс равен 1, а у второго -1 , то соединимости нет.

Следующим рассмотрим случай КП, состоящего из четырех дуг с общими концами, в которых находятся точки запрета. Такие КП были представлены в п. 5) списка типов КП четырехугольников, и из приведенного в списке условия на длины сторон можно видеть, что такое КП бывает у параллелограммов

¹Это следует из равенства 0 или 2π одного из углов четырехугольника и равенства между собой длин сторон при нем.

Рис. 6. Конфигурационное пространство ромба

и дельтоидов. Для нас эти случаи различны. Невырожденный дельтоид не может иметь индекс 0, и в положении “угла” допускает изгибания (когда одна сторона этого угла фиксирована, а вторая вращается вокруг вершины). Эти изгибания дают нам целые дуги в КП – две из четырех. Оставшиеся две дуги соответствуют выпуклым положениям дельтоида, на них индекс постоянен и равен 1 либо -1 . Мы видим, что, как и в случае равностороннего четырехугольника, дуги КП одного индекса однозначно идентифицируются значением их индекса, поэтому вопрос о наложимости двух данных дельтоидов сводится к проверке их индексов: в случае равенства они наложимы, иначе – нет. Пример графика КП дельтоида можно видеть на рис. 7.

Для параллелограмма ситуация уже иная – параллелограмм может иметь нулевой индекс. В силу симметрии (см. лемму 3.1) представления КП в квадрате K четыре дуги имеют индексы 1, 0, 0 и -1 . Тот факт, что на КП параллелограмма нет других запретных точек, кроме общих вершин его четырех дуг, является очевидным: если косинус какого-либо из углов параллелограмма равен 1, то косинус противоположного угла тоже равен 1, и тогда весь четырехугольник оказывается лежащим на отрезке. Таких положений

Рис. 7. Конфигурационное пространство дельтоида со сторонами 1, 1, 2, 2. Обозначения: $---$ $\cos(\alpha_2) = 1$; $- \cdot - \cdot -$ $\cos(\alpha_3) = 1$; $—$ $2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) - \cos(\alpha_2) - 2 \cos(\alpha_3) + 1 = 0$

в параллелограмме всего два, и это общие концы четырех дуг КП. Как мы видим, дуги КП для невыпуклых параллелограммов уже не идентифицируются их индексом (равным 0). В случае дуг, на которых индекс четырехугольников равен 1 или -1 , дуги индексом идентифицируются, и поэтому вопрос о соединимости параллелограммов ненулевого индекса решается автоматически.

Если же два данных параллелограмма имеют индекс 0, мы не можем заведомо утверждать, что они соединимы сохраняющим индекс изгибанием, потому что представляющие их точки могут лежать на разных дугах КП. Чтобы разрешить эту неопределенность, вернемся к графику КП в квадрате K : $0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi$, $0 \leq \alpha_3 \leq 2\pi$. По доказанному выше четыре дуги симметрично лежат внутри квадрата, в частности, дуги нулевого индекса симметричны друг другу.

На рис. 8 можно видеть пример КП параллелограмма.

Мы покажем, что дуги нулевого индекса лежат по разные стороны от прямой $\alpha_2 = \pi$. Для этого рассмотрим возможные пересечения КП с этой прямой. Пусть в параллелограмме угол $\alpha_2 = \pi$. Тогда противоположный угол α_4 тоже равен π . Это значит, что многоугольник лежит на одном отрезке, и в таком положении косинусы оставшихся углов α_1 и α_3 равны 1, т.е. данные положения соответствуют запрещенным точкам, которые лежат на границе квадрата. Но открытые дуги лежат полностью внутри квадрата, симметрично относительно его середины, поэтому с прямой $\alpha_2 = \pi$ они не пересекаются. Эта информация позволяет нам аналитически различать дуги нулевого индекса для КП параллелограммов: на одной из них представлены параллелограммы, у которых угол $\alpha_2 > \pi$, на другой угол $\alpha_2 < \pi$. Это значит, что если нам даны два параллелограмма нулевого индекса, то чтобы выяснить, лежат они на одной дуге КП в квадрате K или на разных (что эквивалентно наложимости или неналожимости соответственно), нужно проверить значения угла α_2 у обоих

Рис. 8. Конфигурационное пространство параллелограмма со сторонами 1, 2, 1, 2. Обозначения: $---$ $\cos(\alpha_2) = 1$; $-\cdot-\cdot-$ $\cos(\alpha_3) = 1$; $—$ $\cos(\alpha_2 + \alpha_3) - 2 \cos(\alpha_2) - 2 \cos(\alpha_3) + 1 = 0$

параллелограммов. В случае, если второй угол превосходит (или не превосходит) развернутый у обоих четырехугольников, параллелограммы можно соединить сохраняющим индекс изгибанием. Если же у одного из параллелограммов угол $\alpha_2 > \pi$, а у второго $\alpha_2 < \pi$, то их нельзя соединить изгибанием, сохраняющим индекс, потому что они лежат на разных дугах в КП.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Аналогично, дуги нулевого индекса лежат по разные стороны от прямой $\alpha_3 = \pi$, и можно судить о соединимости двух изометричных параллелограммов нулевого индекса также по величине угла α_3 .

Нам осталось рассмотреть случай, когда КП четырехугольника имеет вид «восьмерки». Это верно для четырехугольников, которые укладываются на отрезок единственным способом, например, для четырехугольников со сторонами 2, 3, 2, 1 или 3, 2, 2, 1 (порядок сторон важен, поэтому эти четырехугольники разные для нашей задачи).

Точка самопересечения у «восьмерки» соответствует запретному положению четырехугольника в ходе его изгибания, когда он лежит на отрезке, и косинусы двух его противоположных углов равны 1. Помимо этой на КП есть другие запретные точки. Выясним их количество. Пусть в положении на одном отрезке обращаются в 1 косинусы углов α_1 и α_3 . При этом длина диагонали A_2A_4 достигает своего минимального значения. Другого положения на отрезке при данной длине диагонали нет (по условию рассматриваемого случая). При больших же значениях длины A_2A_4 оба угла α_1 и α_3 уже будут лежать строго между 0 и 2π . Поэтому ни в каких других положениях многоугольника косинусы углов α_1 и α_3 не обращаются в 1 ни вместе ни по отдельности, т.е. условия на эти углы не дадут новых запретных точек. Другие запретные точки на КП соответствуют положениям многоугольника, в которых обращаются в 1 косинусы углов α_2 или α_4 , при этом $\cos \alpha_2$ обращается в 1, если $A_1A_3 = |l_1 - l_2|$, и соответственно $\cos \alpha_4$ обращается в 1, если $A_1A_3 = |l_3 - l_4|$.

Длина диагонали A_1A_3 ограничена снизу максимальным из этих двух чисел (из неравенств треугольников для $A_1A_2A_3$ и $A_1A_4A_3$).

Здесь возможны два случая: в первом случае эти числа равны между собой, во втором – не равны. Начнем с первого случая. Если $|l_1 - l_2| = |l_3 - l_4|$, то эта величина реализуется в виде длины диагонали A_1A_3 , и при этом $\cos \alpha_2 = \cos \alpha_4 = 1$. Очевидно, в таком положении (косинусы двух противоположных углов равны 1) четырехугольник лежит на одном отрезке. Но так как такое положение единственное, то оно совпадает с положением многоугольника, соответствующим точке самопересечения у “восьмерки”, и в нем же $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_3 = 1$. Поэтому дополнительных запретных точек ограничения на углы α_2 и α_4 не дают, и на КП оказывается единственная запретная точка. Она разбивает КП на две дуги, на одной из них точки соответствуют многоугольникам индекса -1 , на другой – индекса 1. Таким образом, обе дуги идентифицируются своими индексами, что решает нашу задачу: если индексы многоугольников совпали, то они соединимы сохраняющим индекс изгибанием, иначе – не соединимы. Пример такого КП представлен на рис. 9.

Рис. 9. Конфигурационное пространство четырехугольника со сторонами 2, 3, 2, 1. Обозначения: $--- \cos(\alpha_2) = 1$; $- \cdot - \cdot - \cos(\alpha_3) = 1$; $— 2 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) - 3 \cos(\alpha_2) - 3 \cos(\alpha_3) + 4 = 0$

Отметим, что в данном варианте четырехугольник не может иметь индекс 0.

Теперь рассмотрим второй случай: $|l_1 - l_2| \neq |l_3 - l_4|$. Так как длина A_1A_3 больше максимума из этих двух чисел, одно из них не реализуется в виде длины диагонали A_1A_3 , т.е. один из углов α_2, α_4 не может принимать запрещенное значение. Будем считать, что угол, косинус которого не может обращаться в 1, это угол α_4 . Он не даст новых запретных точек на КП четырехугольника. Второй же угол α_2 даст пару запретных точек (вершины A_4 двух соответствующих четырехугольников будут симметричны относительно диагонали A_1A_3), каждая – на своей окружности “восьмерки”. Эти точки вместе с третьей запретной (точкой соединения окружностей) разобьют КП на четыре дуги. На графике КП в квадрате K каждая из открытых дуг лежит строго внутри квадрата

$0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi$, $0 \leq \alpha_3 \leq 2\pi$ и соответствует многоугольникам одного индекса. В силу симметрии дуги имеют индексы 1, 0, 0, -1 . Так как дуги индексов 1 и -1 единственные, то, как и раньше, равенство индексов двух данных четырехугольников 1 (или -1) говорит об их соединимости сохраняющим индекс изгибанием. Для случая индекса 0 это неверно, потому что точки, отвечающие данным многоугольникам, могут оказаться на разных дугах индекса 0.

Чтобы различать эти дуги аналитически, мы снова докажем, что в рассматриваемом случае они лежат в разных половинах квадрата. Сейчас мы будем использовать половины, на которые квадрат делится прямой $\alpha_2 = \pi$. Мы хотим доказать, что дуги индекса 0 не пересекают ее внутри квадрата. В положении $\alpha_2 = \pi$ четырехугольник лежит на одном отрезке, и $\cos \alpha_1 = \cos \alpha_3 = 1$. Эти точки КП запрещенные и лежат на границах квадрата. Других решений (т.е. положений четырехугольника) нет, поэтому дуги индекса 0 не пересекают указанную прямую и в силу центральной симметрии лежат по разные стороны от нее. Это означает, что дугу КП индекса 0 можно идентифицировать величиной угла α_2 четырехугольника, точнее, знаком разности π и этой величины. Иначе говоря, если у обоих данных четырехугольников $0 < \alpha_2 < \pi$ либо у обоих $\pi < \alpha_2 < 2\pi$, то представляющие их точки лежат на одной дуге КП, и, следовательно, четырехугольники соединимы сохраняющим индекс изгибанием. Если же у одного из четырехугольников $\alpha_2 < \pi$, а у второго $\alpha_2 > \pi$, то они не соединимы.

На рис. 10 можно видеть пример КП четырехугольника последнего типа.

Рис. 10. Конфигурационное пространство и запретные прямые четырехугольника со сторонами 3, 2, 2, 1. Обозначения: $---$ $\cos(\alpha_2) = 1$; $-\cdot-\cdot-$ $\cos(\alpha_3) = 1$; $\cdots\cdots$ $\cos(\alpha_1) = 1$; $---$ $3\cos(\alpha_2 + \alpha_3) - 3\cos(\alpha_2) - 2\cos(\alpha_3) + 4 = 0$

Это завершает рассмотрение случая, когда КП четырехугольника не является многообразием. Теперь решим вопрос для общих четырехугольников.

ЛЕММА 3.2. *КП общего четырехугольника имеет не более четырех точек пересечения с запретными линиями.*

Напомним, что под общим мы понимаем четырехугольник, КП которого является многообразием, т.е. такой, который нельзя “положить” на один отрезок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.2. Пересечение КП с запретной линией есть такое положение четырехугольника, в котором косинус одного из его углов равен 1. Сначала мы покажем, что если косинус некоторого из углов общего четырехугольника может обратиться в 1, то косинус противоположного угла не может. Без ограничения общности можно считать, что в 1 обращается $\cos \alpha_1$. Также будем предполагать, что l_1 – наибольшая сторона четырехугольника (это понадобится нам исключительно для раскрытия модулей: в отсутствие этого предположения дальнейшие выкладки также верны, но требуют рассмотрения большего числа случаев). Так как четырехугольник общий, то когда мы приходим к положению с $\cos \alpha_1 = 1$, предельное значение угла α_3 больше 0 и меньше 2π . Величины углов α_1 и α_3 зависят от длины диагонали A_2A_4 . Ее максимум есть наименьшее из чисел $l_4 + l_1$ и $l_2 + l_3$, а минимум – наибольшее из чисел $|l_4 - l_1|$ и $|l_2 - l_3|$. В положении $\cos \alpha_1 = 1$ длина диагонали A_2A_4 равна $l_1 - l_4$ (по предположению $l_1 > l_4$). При этом $0 < \alpha_3 < 2\pi$. Из неравенства треугольника в треугольнике со сторонами $l_2, l_3, l_1 - l_4$ следует, что $l_1 - l_4 > |l_2 - l_3|$ (сторона треугольника меньше суммы двух других и больше их разности). Это значит, что минимальная длина диагонали A_2A_4 есть $l_1 - l_4$. Поэтому длина диагонали не может принимать меньшее значение, что необходимо для равенства 1 косинуса α_3 . Таким образом, косинус угла α_3 не может обращаться в 1 в ходе изгибания многоугольника.

Мы показали, что в каждой паре противоположных углов четырехугольника найдется не более одного угла, который может обращаться в 0 (или 2π) при изгибаниях четырехугольника, второй же не может равняться 0 или 2π ни при каких положениях четырехугольника. Это значит, что если пересечение КП с запретной линией одного угла не пусто, то пересечения с запретной линией противоположного угла не будет (отметим, что из пары одна запретная линия – сторона квадрата, вторая – параллельная ей пара прямых; например, если переменными в квадрате K выбраны углы α_2 и α_3 , то их запретные линии есть стороны квадрата, а запретные линии противоположных им углов α_4 и α_1 – пары прямых, параллельных соответствующим сторонам квадрата).

Чтобы делать утверждение о количестве точек пересечения КП с запретными линиями, вспомним, что КП симметрично относительно центра квадрата K . Из этого следует, что число точек пересечения четно, так как точка, симметричная запретной точке КП, также является запретной (что легко проверяется аналитически), а центр квадрата как единственная точка, образ которой при центральной симметрии совпадает с исходной, на КП лежать не может (элементарную проверку данного факта мы также вынесем за рамки настоящей работы).

Кроме того, в любом четырехугольнике (общем либо не общем) косинусы хотя бы двух углов могут обращаться в 1. Только что мы показали, что в общем четырехугольнике их не более двух, а значит, ровно два.

Обращение в 1 косинуса одного угла дает две симметричные относительно центра точки пересечения КП с запретными линиями, таким образом, на КП существуют ровно четыре запретные точки.

Лемма 3.2 доказана.

Из доказательства леммы 3.2 следует, что у общего четырехугольника косинусы двух соседних углов могут обращаться в 1, а двух других – нет. Это значит, что в качестве углов-переменных (которые откладываются на осях на графике КП в квадрате K) можно выбрать такие, косинусы которых не могут обращаться в 1. Иными словами, среди четырех углов, про которые известно, что противоположные попарно не обладают этим свойством, можно выбрать два соседних, не обладающих этим свойством. Этот выбор даже будет единственным. Мы будем откладывать на осях именно эти углы четырехугольника. То, что их косинусы не могут быть равными 1, означает, что график КП не будет иметь пересечений с запретными линиями – сторонами квадрата K , т.е. КП будет лежать полностью внутри K . Далее для определенности мы будем считать, что указанный выбор нумерации вершин дал нам квадрат, на осях которого откладываются величины углов α_2, α_3 .

Таким образом, КП общего четырехугольника может быть графически представлено в “каноническом виде” – как линия в открытом квадрате с запретами на переход через некоторые ее точки.

Отметим, что четыре точки разбивают КП независимо от того, сколько у него компонент (как было сказано ранее, их не более двух – одна или две), на четыре дуги, и на каждой из них индекс многоугольника постоянен, а на соседних – отличается на единицу (так как при переходе через запретную точку четырехугольник приобретает либо теряет самопересечение).

Если КП двухкомпонентно (аналитически это условие выражается как $l_2 + l_3 > l_1 + l_4$, где индекс стороны – это не ее номер в четырехугольнике, а порядковый номер при упорядочении сторон по убыванию длин), то “канонический вид” КП и запретных линий имеет вид, как на рис. 11.

Рис. 11. Конфигурационное пространство и запретные прямые для четырехугольника со сторонами 4, 2, 4, 1. Обозначения: $---$ $\cos(\alpha_2) = 1$; $-\cdot-\cdot-\cdot-$ $\cos(\alpha_3) = 1$; $-\cdot-\cdot-\cdot-$ $\cos(\alpha_4) = 1$; $\cdots\cdots\cdots$ $\cos(\alpha_1) = 1$; $—$ $32 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) - 16 \cos(\alpha_2) - 16 \cos(\alpha_3) + 35 = 0$

Обе компоненты КП содержат по две запретные точки, которые разбивают свои компоненты на две дуги. Четыре дуги, на которые разбивается все КП

запретными точками, соответствуют многоугольникам с индексами $1, 0, 0, -1$. На одной компоненте КП представлены многоугольники с индексами 0 и 1 , на другой – с индексами 0 и -1 .

В случае однокомпонентного КП (в аналитической записи $l_2 + l_3 < l_1 + l_4$) положение КП и запретных прямых имеет вид, как на рис. 12. В этом случае топологически эквивалентное окружности КП делится четырьмя запретными точками на четыре дуги, как и раньше соответствующие четырехугольникам индексов $-1, 0, 1, 0$.

Рис. 12. Конфигурационное пространство и запретные прямые четырехугольника со сторонами $1, 2, 4, 6$. Обозначения: $---$ $\cos(\alpha_2) = 1$; $- \cdot - \cdot - \cdot -$ $\cos(\alpha_3) = 1$; $- \cdot \cdot - \cdot \cdot -$ $\cos(\alpha_4) = 1$; $\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$ $\cos(\alpha_1) = 1$; $—$ $8 \cos(\alpha_2 + \alpha_3) - 4 \cos(\alpha_2) - 16 \cos(\alpha_3) - 15 = 0$

Как мы знаем из леммы 3.1 и уравнений запретных линий, КП и запретные точки расположены симметрично относительно осей $\alpha_2 = \pi$, $\alpha_3 = \pi$.

Вернемся к нашей задаче. Нам даны два изометричных четырехугольника, и требуется выяснить, соединимы ли они сохраняющим индекс изгибанием. Каждый из многоугольников представляется точкой на КП в открытом квадрате. Если оба четырехугольника имеют индекс 1 , то они принадлежат одной дуге (дуга, отвечающая за многоугольники индекса 1 единственная) и, значит, соединимы сохраняющим индексом изгибанием. Аналогично, если оба многоугольника имеют индекс -1 , то они соединимы изгибанием с сохранением индекса. Если два данных многоугольника имеют разные индексы, то речи о соединимости их изгибанием вести нет смысла.

Остается рассмотреть случай, когда оба четырехугольника имеют индекс 0 . Так как дуга КП постоянного индекса 0 не единственна (их две), то нам придется использовать дополнительные аргументы, чтобы определить, на какой из них лежат данные четырехугольники. Для этого воспользуемся следующей леммой.

ЛЕММА 3.3. *Каждая из дуг, точки которых задают многоугольники индекса 0 , находится в отдельной четверти квадрата K : $0 \leq \alpha_2 \leq 2\pi$, $0 \leq$*

$\alpha_3 \leq 2\pi$ (имеются в виду четверти, на которые квадрат разбивается прямыми $\alpha_2 = \pi$ и $\alpha_3 = \pi$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нам достаточно показать, что указанные линии не пересекаются с прямыми $\alpha_2 = \pi$ и $\alpha_3 = \pi$. Предположим обратное – пусть пересечение есть. Тогда должен существовать четырехугольник индекса 0, у которого по крайней мере один из углов равен π . Но если некоторый угол невырожденного четырехугольника равен π , то четырехугольник геометрически имеет форму треугольника, и, следовательно, его индекс равен ± 1 . Полученное противоречие подтверждает тот факт, что дуги нулевого индекса расположены в отдельных четвертях квадрата (из соображений симметрии – в противоположных четвертях).

Из леммы следует, что дугу индекса 0 однозначно идентифицирует в квадрате K величина любого из углов α_2 или α_3 : на одной из дуг точки соответствуют многоугольникам, у которых $\alpha_2 > \pi$, а на второй $\alpha_2 < \pi$; то же самое верно и для угла α_3 – на одной дуге индекса 0 он больше развернутого, на второй меньше.

Таким образом, если у двух данных четырехугольников нулевого индекса углы α_2 превосходят развернутый, то четырехугольники наложимы (соответствующие им точки лежат на одной дуге); если у обоих α_2 меньше развернутого то тоже наложимы; если у одного из четырехугольников больше π , а у другого меньше π , то соответствующие им точки лежат на разных дугах, и поэтому четырехугольники не могут быть соединены сохраняющим индекс изгибанием.

Теперь мы, наконец, можем сформулировать *алгоритм проверки соединимости* двух общих четырехугольников сохраняющим индекс изгибанием.

1) Вычислить индексы данных многоугольников через сумму их углов. Если индексы не совпадают, многоугольники не наложимы. Иначе перейти к п. 2).

2) Если индексы многоугольников по модулю равны 1, то они соединимы сохраняющим индекс изгибанием. Иначе перейти к п. 3).

3) Найти один из углов, косинус которого не может обращаться в 1 (в интерпретации с квадратом этот угол откладывается на одной из осей): вычислить максимум из чисел $|l_1 - l_2|, |l_3 - l_4|$. Если первое максимально, то в 1 может обращаться $\cos \alpha_2$, если второе, то $\cos \alpha_4$. Нам нужен противоположный угол, т.е. тот, косинус которого не может обращаться в 1. Перейти к п. 4).

4) Проверить величины выбранного в п. 3) угла у обоих четырехугольников. Если у обоих он превосходит π , то они соединимы, если у обоих меньше – тоже; если у одного больше π , у другого меньше π , тогда они не соединимы².

Список литературы

- [1] R. Connelly, E. D. Demaine, G. Rote, “Straightening polygonal arcs and convexifying polygonal cycles”, *Discrete Comput. Geom.*, **30**:2 (2003), 205–239.
- [2] I. Streinu, “A combinatorial approach to planar non-colliding robot arm motion planning”, *41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science* (Redondo Beach, CA, 2000), IEEE Comput. Soc. Press, Los Alamitos, CA, 2000, 443–453.
- [3] W. J. Lenhart, S. H. Whitesides, “Reconfiguring closed polygonal chains in Euclidian d -space”, *Discrete Comput. Geom.*, **13**:1 (1995), 123–140.

²Равенство выбранного угла π невозможно в силу леммы 3.3.

- [4] Y. Benoist, D. Hulin, “Itération de pliages de quadrilatères”, *Invent. Math.*, **157**:1 (2004), 147–194.
- [5] K. Charter, T. Rogers, “The dynamics of quadrilateral folding”, *Experiment. Math.*, **2**:3 (1993), 209–222.
- [6] G. Darboux, “De l’emploi des fonctions elliptiques dans la théorie du quadrilatère plan”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **88** (1879), 1183–1185, 1252–1255.
- [7] G. Darboux, “De l’emploi des fonctions elliptiques dans la théorie du quadrilatère plan”, *Bull. Sci. Math. Astron.*, **3** (1879), 109–128.
- [8] F. Pécaut, *Quadrilatères articulés*, Journées nationales APM, 1997, 24 pp., http://www.math.unm.edu/~vageli/papers/FLEX/quadri_article.pdf.
- [9] G. Toussaint, *Simple proofs of a geometric property of four-bar linkages*, Technical Report No. SOCS-01.4, School of Computer Science, McGill University, 2001, 15 pp., <http://cgm.cs.mcgill.ca/~godfried/publications/four-bar.pdf>.
- [10] H. Maehara, “Distance graphs in euclidean space”, *Ryukyu Math. J.*, **5** (1992), 33–51.
- [11] D. Leborgne, “Systèmes articulés et Géométrie au 19ème siècle”, *Gazette des mathématiciens, Soc. Math. France*, **14** (1980), 55–72.
- [12] И. Х. Сабитов, “Чему равна сумма углов многоугольника?”, *Квант*, **3** (2001), 7–12.
- [13] И. Х. Сабитов, “Вокруг доказательства леммы Лежандра–Коши о выпуклых многоугольниках”, *Сиб. матем. журн.*, **45**:4 (2004), 892–919; англ. пер.: I. Kh. Sabitov, “Around the proof of the Legendre–Cauchy lemma on convex polygons”, *Siberian Math. J.*, **45**:4 (2004), 740–762.
- [14] B. Jaggi, *Configuration spaces of point sets with distance constraints*, Ph. D. thesis, Univ. of Bern, 1992.
- [15] И. Х. Сабитов, “Локальная теория изгибаний поверхностей”, *Геометрия – 3, Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направления*, **48**, ВИНТИ, М., 1989, 196–270; англ. пер.: I. Kh. Sabitov, “Local theory of the bendings of surfaces”, *Encyclopaedia Math. Sci.*, **48** (1992), 179–250.
- [16] D. Zvonkine, “Configuration spaces of hinge constructions”, *Russian J. Math. Phys.*, **5**:2 (1997), 247–266.
- [17] M. Kapovich, J. Millson, “On the moduli spaces of polygons in the Euclidean plane”, *J. Differential Geom.*, **42**:1 (1995), 133–164.

Екатерина Сергеевна Запутряева
(Ekaterina S. Zaputryaeva)

Московский педагогический государственный
университет

E-mail: katezap@yandex.ru

Поступила в редакцию
13.07.2013 и 27.11.2013