Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, Теория неклассических релаксационных колебаний в сингулярно возмущенных системах с запаздыванием, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 6, 21–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8271>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 13:30:47

УДК 517.926

С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов

Теория неклассических релаксационных колебаний в сингулярно возмущенных системах с запаздыванием

В настоящей работе вводятся в рассмотрение некоторые специальные классы релаксационных систем с одной медленной и одной быстрой переменными. При этом эволюция во времени медленной компоненты $x(t)$ описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, а быстрой компоненты $y(t)$ – дифференциальным уравнением вольтерровского типа с запаздыванием $y(t-h)$, $h = \text{const} > 0$, и малым параметром $\varepsilon > 0$ при производной по времени. Исследуются вопросы о существовании и устойчивости в указанных системах периодических решений импульсного типа, т.е. решений, у которых координата x при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится поточечно к некоторой разрывной функции, а координата y является δ -образной. Полученные результаты иллюстрируются на ряде примеров из экологии и теории лазеров.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: неклассические релаксационные колебания, сингулярно возмущенные системы с запаздыванием, асимптотика, устойчивость.

DOI: 10.4213/sm8271

§ 1. Введение

Имеющуюся к настоящему времени общую теорию релаксационных колебаний в многомерных системах обыкновенных дифференциальных уравнений с некоторой долей условности можно разделить на классическую и неклассическую. Классическая теория, разработанная А. А. Дородницыным, Л. С. Понтрягиным, Е. Ф. Мищенко и Н. Х. Розовым, носит достаточно законченный характер и в суммированном виде содержится в монографиях [1], [2]. Что же касается неклассической теории, то в случае релаксационных систем на плоскости она изложена в статье [3], результаты которой в расширенном варианте вошли в книгу [2]. Следует также отметить статью [4], посвященную исследованию неклассических релаксационных колебаний в математической модели реакции Белоусова.

Суть неклассической теории проиллюстрируем на простейшем содержательном примере. В качестве такового возьмем систему

$$\dot{x} = \alpha - x(y+1), \quad \varepsilon \dot{y} = \left[x - 1 - \frac{\beta}{1 + \gamma y} \right] y, \quad (1.1)$$

возникающую в теории лазеров [5]. Здесь $0 < \varepsilon \ll 1$, положительные параметры α, β, γ имеют порядок единицы и, кроме того, выполняется условие

$$\alpha > \beta + 1. \quad (1.2)$$

Для отыскания циклов системы (1.1) зафиксируем произвольно $x_0 \in [\beta+1, \alpha]$ и обозначим через

$$\Gamma(\varepsilon) = \{(x, y) : x = x(t, x_0, \varepsilon), y = y(t, x_0, \varepsilon), t \geq 0\} \quad (1.3)$$

ее траекторию с начальными условиями $x(0, x_0, \varepsilon) = x_0, y(0, x_0, \varepsilon) = 1$. Далее, рассмотрим второй положительный корень $t = T(x_0, \varepsilon)$ уравнения $y(t, x_0, \varepsilon) = 1$ (если он существует) и определим оператор последования Пуанкаре посредством равенства

$$x_0 \rightarrow \Pi(x_0, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} x(t, x_0, \varepsilon)|_{t=T(x_0, \varepsilon)}. \quad (1.4)$$

Наша ближайшая задача – выяснить асимптотическое поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ оператора (1.4).

Перед формулировкой строгих утверждений изложим ряд соображений эвристического характера. С этой целью обратим внимание, что в силу выбора x_0 и условия (1.2) справедливо неравенство

$$x_0 - 1 - \frac{\beta}{1 + \gamma y} > 0 \quad \forall y \geq 0. \quad (1.5)$$

А отсюда и из (1.1) заключаем, что сначала движение фазовой точки (x, y) происходит в асимптотически малой окрестности луча $\{(x, y) : x = x_0, y \geq 1\}$, причем компонента $y(t, x_0, \varepsilon)$ за асимптотически малое время (порядка $\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$) достигает значения $y = \varepsilon^{-3/4}$. Соответствующий участок траектории $\Gamma(\varepsilon)$ обозначим через $\Gamma_1(\varepsilon)$ (см. рис. 1) и назовем участком взлета.

Следующий участок, лежащий в полуплоскости $y \geq \varepsilon^{-3/4}$, обозначим через $\Gamma_2(\varepsilon)$ и будем называть участком поворота. Для выявления его асимптотического поведения сделаем в (1.1) замену $u = \varepsilon y$ и возьмем x за новое время. В результате после отбрасывания асимптотически малых добавок для отыскания $u = u(x)$ получаем задачу Коши

$$\frac{du}{dx} = -\frac{x-1}{x}, \quad u|_{x=x_0} = 0. \quad (1.6)$$

Нетрудно увидеть, что решение задачи (1.6) задается равенством

$$u(x) = -(x - x_0) + \ln \frac{x}{x_0}, \quad 0 < x \leq x_0. \quad (1.7)$$

Далее, поскольку $u(x_0) = 0, u'(x) < 0$ при $1 < x \leq x_0, u'(x) > 0$ при $0 < x < 1, u(x) \rightarrow -\infty$ при $x \rightarrow +0$, то на интервале $(0, 1)$ уравнение $u(x) = 0$ допускает единственное решение $x = x_1$, причем $u(x) > 0$ при $x_1 < x < x_0$. А это значит, что, двигаясь по кривой $\Gamma_2(\varepsilon)$, фазовая точка системы (1.1) сначала покидает прямую $y = \varepsilon^{-3/4}$, а затем снова возвращается на нее, т.е. совершает поворот

Рис. 1

(см. рис. 1). Более того, после перехода к переменным (x, u) интересующий нас участок $\Gamma_2(\varepsilon) \subset \Gamma(\varepsilon)$ имеет своим пределом при $\varepsilon \rightarrow 0$ кривую

$$\Gamma_2^0 = \{(x, u) : u = u(x), x_1 \leq x \leq x_0\}.$$

Вид этой кривой представлен на рис. 2.

Рис. 2

Добавим еще, что время движения по участку $\Gamma_2(\varepsilon)$ асимптотически мало, а точнее говоря, является величиной порядка $\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$. Любой же кусок кривой $\Gamma_2(\varepsilon)$, отвечающий значениям $x \in [a, b] \subset (x_1, x_0)$, где $a, b = \text{const} > 0$, фазовая точка (x, y) проходит за время порядка ε .

Следующий участок $\Gamma_3(\varepsilon)$ кривой $\Gamma(\varepsilon)$, соответствующий значениям переменной y из отрезка $\exp(-\varepsilon^{-3/4}) \leq y \leq \varepsilon^{-3/4}$, аналогичен уже рассмотренному случаю $\Gamma_1(\varepsilon)$. Действительно, так как $x_1 - 1 - \beta/(1 + \gamma y) < 0$ для всех $y \geq 0$, то кривая $\Gamma_3(\varepsilon)$ асимптотически близка к отрезку

$$\{(x, y) : x = x_1, \exp(-\varepsilon^{-3/4}) \leq y \leq \varepsilon^{-3/4}\}$$

(см. рис. 1). Однако поскольку здесь переменная y убывает, то в отличие от $\Gamma_1(\varepsilon)$ данный фрагмент кривой $\Gamma(\varepsilon)$ уместно назвать участком падения. Что же касается времени “падения”, то оно имеет порядок $\varepsilon^{1/4}$.

Очередной участок $\Gamma_4(\varepsilon)$, лежащий в полуплоскости $y \leq \exp(-\varepsilon^{-3/4})$ (см. рис. 1), назовем участком медленного движения. Для его описания перейдем в системе (1.1) к новой переменной $v = \varepsilon \ln y$ и возьмем x за новое время. В результате для нахождения $v = v(x)$ после отбрасывания асимптотически малых слагаемых приходим к задаче Коши

$$\frac{dv}{dx} = \frac{x - 1 - \beta}{\alpha - x}, \quad v|_{x=x_1} = 0, \quad (1.8)$$

из которой, в свою очередь, выводим

$$v(x) = -(x - x_1) - (\alpha - 1 - \beta) \ln \frac{\alpha - x}{\alpha - x_1}, \quad x_1 \leq x < \alpha. \quad (1.9)$$

Остановимся на некоторых свойствах функции (1.9). Несложная проверка показывает, что

$$\begin{aligned} v'(x) < 0 \quad \text{при} \quad x_1 \leq x < \beta + 1, \quad v'(x) > 0 \quad \text{при} \quad \beta + 1 < x < \alpha, \\ v(x) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad x \rightarrow \alpha - 0. \end{aligned}$$

Следовательно, у уравнения $v(x) = 0$ на интервале $\beta + 1 < x < \alpha$ существует единственное решение $x = x_2$, причем $v(x) < 0$ при $x_1 < x < x_2$.

Перечисленные свойства $v(x)$ позволяют утверждать, что график кривой $\Gamma_4(\varepsilon)$ действительно имеет вид, показанный на рис. 1. Кроме того, как и в случае $\Gamma_2(\varepsilon)$, после перехода к переменным (x, v) эта кривая стремится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к пределу

$$\Gamma_4^0 = \{(x, v) : v = v(x), x_1 \leq x \leq x_2\}$$

(см. рис. 3).

Отдельного упоминания заслуживает вопрос о времени движения по кривой $\Gamma_4(\varepsilon)$. В отличие от всех предыдущих участков здесь оно асимптотически конечно, т.е. допускает при $\varepsilon \rightarrow 0$ конечный предел

$$T_0 = \ln \frac{\alpha - x_1}{\alpha - x_2}. \quad (1.10)$$

Таким образом, прояснилась причина, по которой данный участок был назван участком медленного движения.

Рис. 3

На заключительном этапе обратимся к так называемому участку подъема $\Gamma_5(\varepsilon) \subset \Gamma(\varepsilon)$, расположенному в полосе $\exp(-\varepsilon^{-3/4}) \leq y \leq 1$ (см. рис. 1). Заметим, что поскольку в данном случае справедливо неравенство, получающееся из (1.5) при замене x_0 на x_2 , то кривая $\Gamma_5(\varepsilon)$ асимптотически близка к отрезку $\{(x, y) : x = x_2, \exp(-\varepsilon^{-3/4}) \leq y \leq 1\}$, причем при движении по $\Gamma_5(\varepsilon)$ переменная y возрастает (отсюда и название – участок подъема). Добавим еще, что время “подъема” асимптотически мало (имеет порядок $\varepsilon^{1/4}$).

Строгое обоснование всех перечисленных фактов, касающихся асимптотического поведения траектории (1.3), базируется на общей теории неклассических релаксационных колебаний, развитой в [2]–[4]. Из основных результатов этой теории вытекает, в частности, следующее утверждение.

ЛЕММА 1.1. *При всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ оператор (1.4) определен на отрезке $\beta + 1 \leq x_0 \leq \alpha$ и удовлетворяет предельным равенствам*

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{\beta+1 \leq x_0 \leq \alpha} |\Pi(x_0, \varepsilon) - \Pi(x_0)| &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{\beta+1 \leq x_0 \leq \alpha} |\Pi'(x_0, \varepsilon) - \Pi'(x_0)| &= 0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь штрих – производная по x_0 , а оператор $\Pi(x_0)$ задается соотношениями

$$\Pi = \Pi_2 \circ \Pi_1, \quad \Pi_1: x_0 \rightarrow x_1 = x_1(x_0), \quad \Pi_2: x_1 \rightarrow x_2 = x_2(x_1), \quad (1.12)$$

где x_1 и x_2 – введенные выше корни уравнений $u(x) = 0$ и $v(x) = 0$ соответственно.

Итак, вопрос о существовании и устойчивости циклов системы (1.1) сводится к аналогичному вопросу для неподвижных точек предельного оператора (1.12). В связи с этим становится актуальной следующая

ЛЕММА 1.2. *Отображение (1.12) имеет на отрезке $\beta + 1 \leq x_0 \leq \alpha$ единственную экспоненциально устойчивую неподвижную точку $x_0 = x_0^*$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим прежде всего, что отображение (1.12) преобразует отрезок $\beta + 1 \leq x_0 \leq \alpha$ строго в себя и, следовательно, имеет на интервале $\beta + 1 < x_0 < \alpha$ хотя бы одну неподвижную точку $x_0 = x_0^*$. Кроме того, из включений $x_0 \in [\beta + 1, \alpha]$, $x_1 \in (0, 1)$, $x_2 \in (\beta + 1, \alpha)$ и формул (1.6)–(1.9) вытекает, что

$$\Pi'(x_0) = \frac{x_0 - 1}{x_0} \cdot \frac{x_1}{1 - x_1} \cdot \frac{\alpha - x_2}{\alpha - x_1} \cdot \frac{1 + \beta - x_1}{x_2 - 1 - \beta} > 0 \quad \forall x_0 \in [\beta + 1, \alpha]. \quad (1.13)$$

Таким образом, для обоснования леммы достаточно убедиться, что неподвижная точка x_0^* единственна и удовлетворяет неравенству

$$\Pi'(x_0^*) < 1. \quad (1.14)$$

Отыскание возможных неподвижных точек отображения $\Pi(x_0)$ проводится по следующей схеме. Сначала обратимся к соотношениям $u(x_1) = 0$, $v(x_2) = 0$ для нахождения функций $x_1 = x_1(x_0)$, $x_2 = x_2(x_1)$ и положим во втором из них $x_2 = x_0$. В результате, опираясь на формулы (1.7), (1.9), для определения неизвестных x_0 , x_1 получим систему уравнений

$$x_1 - x_0 = \ln \frac{x_1}{x_0}, \quad x_0 - x_1 = (\alpha - 1 - \beta) \ln \frac{\alpha - x_1}{\alpha - x_0}. \quad (1.15)$$

Как оказывается, систему (1.15) можно свести к одному скалярному уравнению. Действительно, введем в рассмотрение переменную

$$z = \frac{\alpha - x_1}{\alpha - x_0} > 1 \quad (1.16)$$

и попытаемся выразить x_0 , x_1 через z . На этом пути последовательно убеждаемся, что

$$x_0 = \frac{\alpha(z - 1)z^{\alpha - \beta - 1}}{z^{\alpha - \beta} - 1}, \quad x_1 = \frac{\alpha(z - 1)}{z^{\alpha - \beta} - 1}, \quad (1.17)$$

а сама переменная (1.16) удовлетворяет уравнению

$$P(z) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha - \beta - 1)(z^{\alpha - \beta} - 1) \ln z + \alpha(z - 1)(1 - z^{\alpha - \beta - 1}) = 0. \quad (1.18)$$

Итак, мы показали, что если $x_0 = x_0^*$ – неподвижная точка отображения (1.12), то величина z_* , вычисленная по формуле (1.16) при $x_0 = x_0^*$, $x_1 = x_1^*$, где $x_1^* = \Pi_1(x_0^*)$, является корнем уравнения (1.18), лежащим на полуоси $z > 1$. Тем самым, для доказательства единственности неподвижной точки x_0^* остается убедиться в единственности такого корня.

Вопрос о количестве корней уравнения (1.18) изучим сначала на полуоси $z > 0$. Непосредственная проверка показывает, что

$$P(1) = P'(1) = 0, \quad P''(1) = -2\beta(\alpha - \beta - 1) < 0, \quad (1.19)$$

$$\lim_{z \rightarrow +0} P(z) = \lim_{z \rightarrow +\infty} P(z) = +\infty.$$

Из свойств (1.19), в свою очередь, следует, что общее количество нулей функции $P(z)$ четно и помимо двукратного корня $z = 1$ на множествах $0 < z < 1$ и $z > 1$ имеется еще по крайней мере по одному из них.

Заметим далее, что $\Phi(t) = P(\exp t)$, $t \in \mathbb{R}$, является линейной комбинацией функций

$$\exp(\alpha - \beta)t, \quad t \exp(\alpha - \beta)t, \quad 1, \quad t, \quad \exp t, \quad \exp(\alpha - \beta - 1)t.$$

Тем самым, $\Phi(t)$ удовлетворяет некоторому линейному дифференциальному уравнению шестого порядка с постоянными коэффициентами и с вещественными корнями характеристического полинома, а значит, допускает на всей оси $t \in \mathbb{R}$ не более пяти корней. Но поскольку, напомним, общее число всех корней должно быть четным, то на самом деле их ровно четыре. В частности, на интересующей нас полуоси $z > 1$ лежит единственный корень $z = z_*$, причем в силу (1.19) с необходимостью

$$P'(z_*) > 0. \quad (1.20)$$

На завершающем этапе доказательства леммы установим неравенство (1.14). С этой целью подставим соотношение $x_2 = x_0$ вместе с формулами (1.17) при $z = z_*$ в (1.13). В результате после некоторых преобразований и сокращения на $z_*^{\alpha-\beta} - 1 > 0$ приходим к выводу, что интересующее нас свойство (1.14) эквивалентно оценке

$$\alpha(z_* - 1)(z_*^{2(\alpha-\beta)-1} - 1) - \alpha(\alpha - \beta - 1)(z_* - 1)^2 z_*^{\alpha-\beta-1} - (1 + \beta)(z_*^{\alpha-\beta} - 1)^2 > 0. \quad (1.21)$$

Для проверки требования (1.21) обратимся к уже известному соотношению (1.20), подставим в него формулы

$$\begin{aligned} P'(z_*) &= (\alpha - \beta - 1)(\alpha - \beta)z_*^{\alpha-\beta-1} \ln z_* + (\alpha - \beta - 1)(z_*^{\alpha-\beta} - 1) \frac{1}{z_*} \\ &\quad + \alpha(1 - z_*^{\alpha-\beta-1}) - \alpha(z_* - 1)(\alpha - \beta - 1)z_*^{\alpha-\beta-2}, \\ (\alpha - \beta - 1) \ln z_* &= \frac{\alpha(z_* - 1)(z_*^{\alpha-\beta-1} - 1)}{z_*^{\alpha-\beta} - 1} \end{aligned}$$

и умножим получившееся неравенство на $z_*(z_*^{\alpha-\beta} - 1)$. В итоге, как нетрудно убедиться, оно преобразуется к виду (1.21). Лемма 1.2 доказана.

Прделанный анализ позволяет разобраться с интересующим нас вопросом о периодических движениях системы (1.1). Действительно, из предельных равенств (1.11) вытекает, что отображение последования Пуанкаре (1.4) при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ допускает единственную экспоненциально устойчивую неподвижную точку $x_0 = x_0^*(\varepsilon)$, асимптотически близкую к x_0^* . В системе (1.1) указанной неподвижной точке отвечает устойчивый цикл $(x_*(t, \varepsilon), y_*(t, \varepsilon))$, $y_*(0, \varepsilon) \equiv 1$ периода $T_*(\varepsilon)$ со следующими свойствами.

Во-первых, справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*(\varepsilon) = T_*, \quad (1.22)$$

где T_* – величина, получающаяся из (1.10) при $x_0 = x_0^*$, $x_1 = x_1^*$.

Во-вторых, компонента $y_*(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ ведет себя δ -образно. А именно, на промежутке $0 \leq t \leq t_*(\varepsilon)$, где $t_*(\varepsilon) = O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon))$ – первый положительный корень уравнения $y_*(t, \varepsilon) = 1$, происходит асимптотически высокий (порядка ε^{-1}) всплеск, причем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{t_*(\varepsilon)} y_*(t, \varepsilon) dt = \ln \frac{x_0^*}{x_1^*} > 0. \quad (1.23)$$

Все же остальное время функция $y_*(t, \varepsilon)$ экспоненциально мала. Точнее говоря, для любых $\delta_1, \delta_2 \in (0, T_*/2)$ на отрезке $\delta_1 \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \delta_2$ выполняется оценка вида

$$y_*(t, \varepsilon) \leq M_1 \exp\left(-\frac{M_2}{\varepsilon}\right), \quad M_1, M_2 = \text{const} > 0. \quad (1.24)$$

В третьих, компонента $x_*(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ сходится равномерно по $t \in [\delta_1, T_*(\varepsilon) - \delta_2]$, где, как и выше, $\delta_1, \delta_2 = \text{const} \in (0, T_*/2)$, к функции $x_*(t)$, являющейся решением задачи Коши $\dot{x} = \alpha - x$, $x|_{t=0} = x_1^*$. Подчеркнем, что, будучи продолженной на всю ось t по закону периодичности с периодом T_* , функция $x_*(t)$ оказывается разрывной в точках $t = kT_*$, $k \in \mathbb{Z}$.

В дальнейшем релаксационный цикл с перечисленными свойствами будем называть неклассическим или циклом импульсного типа. Наглядное представление о нем дает рис. 4, на котором приведены графики компонент этого цикла при значениях параметров $\alpha = 4$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$, $\varepsilon = 0.01$ (сплошной линией показан график $y_*(t+c, \varepsilon)$, а пунктирной – график $x_*(t+c, \varepsilon)$, где $c \in \mathbb{R}$ – некоторый фазовый сдвиг).

Рис. 4

В настоящей статье теория неклассических релаксационных колебаний распространяется на системы с запаздыванием вида

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \varepsilon \dot{y} = [g(x, y) - y(t-h)]y, \quad (1.25)$$

где $0 < \varepsilon \ll 1$, $h = \text{const} > 0$; $f, g \in C^\infty(K)$, $K = \{(x, y) : x > -\delta_0, y > -\delta_0\}$, $\delta_0 > 0$. Точнее говоря, в дальнейшем будет установлено, что при некоторых дополнительных ограничениях на функции f, g и запаздывание h в системе (1.25) существует устойчивый релаксационный цикл, координаты $x_*(t, \varepsilon)$, $y_*(t, \varepsilon)$ которого и период $T_*(\varepsilon)$ обладают свойствами, аналогичными перечисленным выше (см. (1.22)–(1.24)).

§ 2. Постановка задачи и основной результат

2.1. Описание рассматриваемого класса уравнений. Поскольку нас интересуют релаксационные циклы системы (1.25) с δ -образной компонентой y , то в первую очередь сформулируем серию ограничений, касающихся поведения функций f, g при больших значениях y и при $y = 0$.

УСЛОВИЕ 2.1. При $y \rightarrow +\infty$ равномерно по x из любого замкнутого и ограниченного подмножества полуоси $x \geq 0$ справедливы асимптотические разложения

$$\begin{aligned} f(x, y) &= y \left[a_0(x) + \frac{a_1(x)}{y} + \frac{a_2(x)}{y^2} + \dots \right], \\ g(x, y) &= b_0(x) + \frac{b_1(x)}{y} + \frac{b_2(x)}{y^2} + \dots, \end{aligned} \quad (2.1)$$

сохраняющие силу при дифференцировании по x, y в любом порядке и любое число раз.

УСЛОВИЕ 2.2. Фигурирующие в (2.1) коэффициенты $a_0(x)$, $b_0(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$a_0(x) > 0 \quad \forall x > 0, \quad (2.2)$$

$$b_0(x) > 0 \quad \text{при } x \in (0, q_1), \quad b_0(x) < 0 \quad \text{при } x > q_1, \quad (2.3)$$

где q_1 – некоторая положительная постоянная.

УСЛОВИЕ 2.3. Считаем, что

$$f(x, 0) < 0 \quad \forall x > 0, \quad f(0, 0) = 0, \quad (2.4)$$

$$g(x, 0) > 0 \quad \text{при } 0 \leq x < q_2, \quad g(x, 0) < 0 \quad \text{при } x > q_2, \quad (2.5)$$

где $q_2 = \text{const} > 0$.

Интересно отметить, что приведенные условия допускают наглядную биологическую интерпретацию. Действительно, если предположить, что x, y – плотности численностей популяций хищника и жертвы соответственно, то тогда требованиям (2.2)–(2.5) можно придать следующий смысл.

Первое из них, а именно неравенство (2.2), означает, что при больших y (т.е. когда пищи много) численность хищника x должна расти. Интерпретация ограничений (2.3), (2.5) также не вызывает затруднений. Оба они свидетельствуют о том, что в случае, когда численность хищника x меньше некоторого

порогового значения, скорость изменения численности жертвы положительна, а когда больше – отрицательна. Добавим еще, что при $y \gg 1$ и $y = 0$ соответствующие пороговые значения $x = q_1$ и $x = q_2$, вообще говоря, различны.

Смысл оставшихся требований (2.4) очевиден: в случае $y = 0$ имеем $x(t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow +\infty$, т.е. при отсутствии жертвы хищник вымирает. Биологическими причинами продиктован и характер зависимости второго уравнения системы (1.25) от $y(t-h)$. Такого рода зависимость уместно назвать хатчинсоновской, так как при фиксированном x это уравнение представляет собой некоторую модификацию известного уравнения Хатчинсона (см. [6])

$$\varepsilon \dot{y} = (1 - y(t-h))y, \quad (2.6)$$

описывающего колебания плотности численности млекопитающих.

Для формулировки следующей серии ограничений нам потребуются функции

$$\gamma_0(x, x_0) = \int_{x_0}^x \frac{b_0(s)}{a_0(s)} ds, \quad \gamma_1(x, x_1) = \int_{x_1}^x \frac{g(s, 0)}{f(s, 0)} ds. \quad (2.7)$$

УСЛОВИЕ 2.4. Найдется такое $x_0 = x_0^* \in (0, \min(q_1, q_2))$, что уравнение

$$\gamma_0(x, x_0) = 0 \quad (2.8)$$

при $x_0 = x_0^*$ допускает решение $x = x_1^* > \max(q_1, q_2)$.

Приведенное условие позволяет определить некоторое одномерное отображение, аналогичное рассмотренному в предыдущем параграфе (см. (1.12)). Построение этого отображения проведем в два этапа.

На первом этапе применим к уравнению (2.8) в точке $(x, x_0) = (x_1^*, x_0^*)$ теорему о неявной функции по переменной x . Подчеркнем, что условия этой теоремы здесь заведомо выполняются, поскольку $\gamma_0(x_1^*, x_0^*) = 0$ и в силу вытекающих из (2.2), (2.3), (2.7) свойств

$$\frac{\partial \gamma_0}{\partial x}(x, x_0) > 0 \quad \text{при } x \in (0, q_1), \quad \frac{\partial \gamma_0}{\partial x}(x, x_0) < 0 \quad \text{при } x > q_1 \quad (2.9)$$

справедливо неравенство

$$\left. \frac{\partial \gamma_0}{\partial x} \right|_{(x, x_0) = (x_1^*, x_0^*)} < 0.$$

Таким образом, из (2.8) однозначно определяется функция

$$x = x_1(x_0), \quad x_1(x_0^*) = x_1^*,$$

причем

$$x_1(x_0) > \max(q_1, q_2) \quad \forall x_0 \in [a, b]. \quad (2.10)$$

Здесь $[a, b] \subset (0, \min(q_1, q_2))$ – некоторый отрезок достаточно малой длины, имеющий x_0^* своей внутренней точкой.

На втором этапе обратимся к уравнению

$$\gamma_1(x, x_1) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{a_0(s)}, \quad (2.11)$$

считая, что x_0 пробегает фигурирующий в (2.10) отрезок $[a, b]$, а $x_1 = x_1(x_0)$ – функция из (2.10). Привлекая, далее, соотношения (2.4), (2.5), (2.7), нетрудно увидеть, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}(x, x_1) &> 0 \quad \text{при } x > q_2, & \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}(x, x_1) &< 0 \quad \text{при } x \in (0, q_2), \\ \gamma_1(x, x_1) &\rightarrow +\infty \quad \text{при } x \rightarrow +0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

А отсюда с учетом вытекающего из (2.2) неравенства

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{a_0(s)} > 0 \quad (2.13)$$

и оценки $x_1 > q_2$ (см. (2.10)) заключаем, что уравнение (2.11) имеет на интервале $0 < x < q_2$ единственное решение $x = x_2(x_0)$. Тем самым, на отрезке $a \leq x_0 \leq b$ корректно определено одномерное отображение

$$x_0 \rightarrow \psi(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} x_2(x_0), \quad (2.14)$$

причем, как нетрудно проверить (см. аналогичное место в случае отображения (1.12)), справедливы свойства $\psi'(x_0) > 0$, $x_1'(x_0) < 0$ для всех $x_0 \in [a, b]$.

УСЛОВИЕ 2.5. Предполагаем, что значение $x_0 = x_0^*$ из условия 2.4 является экспоненциально устойчивой неподвижной точкой отображения (2.14), т.е.

$$\psi(x_0^*) = x_0^*, \quad \psi'(x_0^*) < 1. \quad (2.15)$$

Сформулируем теперь ограничение на величину запаздывания h из (1.25). С этой целью обратимся к аналогичному (2.11) уравнению

$$\gamma_1(x, x_1) = 0 \quad (2.16)$$

при $x_1 = x_1(x_0)$, $x_0 \in [a, b]$. Из отмеченных выше свойств (2.12), (2.13) вытекает, что уравнение (2.16) имеет на интервале $0 < x < q_2$ единственное решение $x = x_3(x_0)$ такое, что $x_3(x_0) > x_2(x_0) \forall x_0 \in [a, b]$.

УСЛОВИЕ 2.6. Считаем, что

$$h < h_* \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{x_3^*}^{x_1^*} \frac{ds}{f(s, 0)}, \quad (2.17)$$

где $x_3^* = x_3(x_0^*)$.

Обратим внимание, что все перечисленные ограничения на f , g относятся к случаям $y \gg 1$ и $y = 0$. Что же касается заключительного условия, то оно представляет собой некое связующее звено между большими и малыми значениями y .

УСЛОВИЕ 2.7. В точках $x = x_0^*$ и $x = x_1^*$, о которых говорится в условии 2.4, имеют место неравенства

$$g(x_0^*, y) > 0, \quad g(x_1^*, y) < 0 \quad \forall y \geq 0. \quad (2.18)$$

Подчеркнем, что в силу соотношений (2.1), (2.3), (2.5) оценки (2.18) заведомо справедливы при $y \ll 1$ и $y \gg 1$. При остальных же значениях y их выполнения приходится требовать.

2.2. Основной результат. Перейдем к вопросу о существовании у системы (1.25) экспоненциально орбитально устойчивого (в метрике фазового пространства $\mathbb{R} \times C[-h, 0]$) релаксационного цикла импульсного типа. Перед формулировкой соответствующего строгого утверждения введем в рассмотрение величины

$$T_* = - \int_{x_0^*}^{x_1^*} \frac{ds}{f(s, 0)} > h_*, \quad y_{\text{int}}^* = \int_{x_0^*}^{x_1^*} \frac{ds}{a_0(s)} > 0, \quad y_{\text{max}}^* = \gamma_0(q_1, x_0^*) > 0 \quad (2.19)$$

и функцию $x_*(t)$, являющуюся решением задачи Коши

$$\dot{x} = f(x, 0), \quad x|_{t=0} = x_1^*. \quad (2.20)$$

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть выполнены условия 2.1–2.7. Тогда найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ система (1.25) имеет экспоненциально орбитально устойчивый релаксационный цикл $(x_*(t, \varepsilon), y_*(t, \varepsilon))$ периода $T_*(\varepsilon)$, причем $y_*(t, \varepsilon) > 0$, $y_*(0, \varepsilon) \equiv 1$. Для этого цикла справедливы предельные равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_*(\varepsilon) = T_*, \quad (2.21)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{t_*(\varepsilon)} y_*(t, \varepsilon) dt = y_{\text{int}}^*, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_t (\varepsilon y_*(t, \varepsilon)) = y_{\text{max}}^*, \quad (2.22)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{\delta_1 \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \delta_2} |x_*(t, \varepsilon) - x_*(t)| = 0 \quad (2.23)$$

и оценка вида

$$\max_{\delta_1 \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \delta_2} y_*(t, \varepsilon) \leq M_1 \exp\left(-\frac{M_2}{\varepsilon}\right), \quad M_1, M_2 = \text{const} > 0. \quad (2.24)$$

Здесь момент времени $t_*(\varepsilon) = O(\varepsilon \ln(1/\varepsilon))$ – первый положительный корень уравнения $y_*(t, \varepsilon) = 1$, а постоянные $\delta_1, \delta_2 \in (0, T_*/2)$ произвольно фиксированы.

Доказательство сформулированной теоремы, приводящееся в следующих двух параграфах, опирается на некоторые дополнительные конструкции. Для их описания введем в рассмотрение замкнутое ограниченное выпуклое множество $S \subset \mathbb{R} \times C[-h, 0]$, состоящее из таких пар $(x_0, \varphi(t))$, что

$$m_2 t \leq \varphi(t) \leq m_1 t \quad \forall t \in [-h, 0], \quad a \leq x_0 \leq b. \quad (2.25)$$

Здесь $[a, b]$ – отрезок, фигурирующий в (2.10), а универсальные (не зависящие от $\varphi(t)$) постоянные $m_2 > m_1 > 0$ пока произвольны. Далее, для каждого элемента $(x_0, \varphi) \in S$ рассмотрим решение $(x, y) = (x_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon), y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon))$, $t \geq 0$, системы (1.25) с начальными условиями

$$x|_{t=0} = x_0, \quad y = \exp \frac{\varphi(t)}{\varepsilon} \quad \text{при} \quad -h \leq t \leq 0, \quad (2.26)$$

а через $t_{(x_0, \varphi)}^{(1)}(\varepsilon)$ и $t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon)$ обозначим первый и второй положительные корни уравнения

$$y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon) = 1 \quad (2.27)$$

соответственно (если они существуют). И, наконец, зададим оператор последования Пуанкаре $\Pi_\varepsilon: S \rightarrow \mathbb{R} \times C[-h, 0]$ с помощью равенства

$$\begin{aligned} \Pi_\varepsilon[(x_0, \varphi)] = & (x_{(x_0, \varphi)}(t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon \ln y_{(x_0, \varphi)}(t + t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon), \varepsilon)), \\ & -h \leq t \leq 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Последующий план действий таков. Сначала мы уточним выбор отрезка $[a, b]$ из (2.25) и получим равномерные по $(x_0, \varphi) \in S$ асимптотические формулы для компонент $x_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$, $y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$ решения задачи Коши (1.25), (2.26) на различных промежутках изменения t . Затем покажем, что при подходящем выборе параметров m_1, m_2 оператор (2.28) преобразует множество S в себя. После этого убедимся, что интересующее нас периодическое решение $(x_*(t, \varepsilon), y_*(t, \varepsilon))$ (существование которого вытекает из принципа Шаудера) обладает требуемыми асимптотическими свойствами (2.21)–(2.24), в которых постоянные T_* , y_{int}^* , y_{max}^* и функция $x_*(t)$ заданы равенствами (2.19), (2.20). И, наконец, проводя асимптотическое интегрирование системы в вариациях на рассматриваемом цикле, установим факт его экспоненциальной орбитальной устойчивости.

§ 3. Построение асимптотики задачи Коши

3.1. Основная геометрическая конструкция. Прежде чем приступить к асимптотическому анализу функций $x_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$, $y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$, сформулируем ряд дополнительных условий, которым должен удовлетворять отрезок $[a, b]$ из (2.10), (2.25). Будем предполагать, что, во-первых, в дополнение к (2.15) имеют место соотношения

$$\psi([a, b]) \subset (a, b), \quad \psi'(x_0) < 1 \quad \forall x_0 \in [a, b], \quad (3.1)$$

где ψ – отображение (2.14). Во-вторых, запаздывание h удовлетворяет аналогичному (2.17) неравенству

$$h < h(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_{x_3(x_0)}^{x_1(x_0)} \frac{ds}{f(s, 0)} \quad \forall x_0 \in [a, b], \quad (3.2)$$

где, напомним, $x_1(x_0)$, $x_3(x_0)$ – функции, определяющиеся как неявные из уравнений (2.8) и (2.16) соответственно. В-третьих, выполняются аналогичные (2.18) требования

$$g(x_0, y) > 0, \quad g(x_1(x_0), y) < 0 \quad \forall y \geq 0, \quad \forall x_0 \in [a, b]. \quad (3.3)$$

Подчеркнем, что в силу базовых условий 2.1–2.7 свойства (3.1)–(3.3) заведомо справедливы в точке $x_0 = x_0^*$. Поэтому они сохраняются и на отрезке $x_0 \in [a, b]$, если величины a , b выбраны достаточно близкими к x_0^* .

Основная трудность при построении асимптотики пары функций $x_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$, $y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$ связана с рассмотрением отрезка $0 \leq t \leq h$, на котором они меняются наиболее сложно. Для преодоления этой трудности ниже развивается некоторый специальный геометрический подход, сводящий проблему асимптотического интегрирования задачи Коши (1.25), (2.26) при $0 \leq t \leq h$ к анализу фазовой траектории некоторой вспомогательной автономной системы на плоскости.

Суть упомянутого геометрического подхода состоит в следующем. Обратимся к задаче Коши

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \varepsilon \dot{y} = \left[g(x, y) - \exp \frac{\varphi(t-h)}{\varepsilon} \right] y, \quad x|_{t=0} = x_0, \quad y|_{t=0} = 1 \quad (3.4)$$

для отыскания функций $x_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$, $y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$ при $0 \leq t \leq h$ и заметим, что в силу оценок, наложенных на $\varphi(t)$ (см. (2.25)), при любом фиксированном $\delta \in (0, h)$ справедливы неравенства

$$\max_{0 \leq t \leq h-\delta} \exp \frac{\varphi(t-h)}{\varepsilon} \leq \exp \left(-\frac{m_1 \delta}{\varepsilon} \right), \quad (3.5)$$

$$\int_{h-\delta}^h \exp \frac{\varphi(t-h)}{\varepsilon} dt \leq \frac{\varepsilon}{m_1}. \quad (3.6)$$

Отметим далее, что на эвристическом уровне строгости, опираясь на свойства (3.5), (3.6), мы можем отбросить в (3.4) слагаемое, содержащее $\varphi(t)$, и перейти к рассмотрению более простой задачи

$$\dot{x} = f(x, y), \quad \varepsilon \dot{y} = g(x, y)y, \quad x|_{t=0} = x_0, \quad y|_{t=0} = 1. \quad (3.7)$$

Как оказывается, эти эвристические соображения верны. А именно, ниже будет показано, что кривая

$$\Gamma(\varepsilon) = \{ (t, x, y) : 0 \leq t \leq h, x = x_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon), y = y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon) \} \quad (3.8)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотически близка к кривой

$$\Lambda(\varepsilon) = \{ (t, x, y) : 0 \leq t \leq h, x = x(t, x_0, \varepsilon), y = y(t, x_0, \varepsilon) \}, \quad (3.9)$$

где $x(t, x_0, \varepsilon)$, $y(t, x_0, \varepsilon)$ – компоненты решения задачи Коши (3.7).

Сравнительный асимптотический анализ кривых (3.8), (3.9) начнем с их участков $\Gamma_1(\varepsilon)$ и $\Lambda_1(\varepsilon)$, отвечающих значениям времени $0 \leq t \leq \tau_{(x_0, \varphi)}^{(1)}(\varepsilon)$ и

Рис. 5

$0 \leq t \leq \tau_1(x_0, \varepsilon)$, где $t = \tau_{(x_0, \varphi)}^{(1)}(\varepsilon)$, $t = \tau_1(x_0, \varepsilon)$ – первые положительные корни уравнений

$$y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon) = \varepsilon^{-3/4}, \quad y(t, x_0, \varepsilon) = \varepsilon^{-3/4}. \quad (3.10)$$

Поскольку, как будет показано ниже, моменты времени $\tau_{(x_0, \varphi)}^{(1)}(\varepsilon)$, $\tau_1(x_0, \varepsilon)$ асимптотически малы и на рассматриваемых промежутках изменения t компоненты $y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$, $y(t, x_0, \varepsilon)$ монотонно растут от 1 до $\varepsilon^{-3/4}$, то участки $\Gamma_1(\varepsilon)$, $\Lambda_1(\varepsilon)$ будем называть участками взлета. Примерный вид $\Gamma_1(\varepsilon)$ показан на рис. 5, где представлена проекция кривой $\Gamma(\varepsilon)$ на плоскость (x, y) .

В формулируемом ниже утверждении в качестве параметра на $\Lambda_1(\varepsilon)$ вместо времени t взята переменная $y \in [1, \varepsilon^{-3/4}]$.

ЛЕММА 3.1. Участок взлета $\Lambda_1(\varepsilon)$ задается равенством

$$\Lambda_1(\varepsilon) = \left\{ (t, x, y) : t = \theta_1(y, x_0, \varepsilon), x = \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon), 1 \leq y \leq \varepsilon^{-3/4} \right\}, \quad (3.11)$$

где функции $\theta_1(y, x_0, \varepsilon)$, $\tilde{x}(y, x_0, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ допускают равномерные по $x_0 \in [a, b]$, $y \in [1, \varepsilon^{-3/4}]$ асимптотические представления

$$\theta_1(y, x_0, \varepsilon) = \varepsilon \int_1^y \frac{ds}{sg(x_0, s)} + O\left(\varepsilon^{5/4} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial x_0}(y, x_0, \varepsilon) = \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial x_0} \int_1^y \frac{ds}{sg(x_0, s)} \right) + O\left(\varepsilon^{5/4} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial y}(y, x_0, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{y} \left(\frac{1}{g(x_0, y)} + O(\varepsilon^{1/4}) \right), \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x_0 \partial y}(y, x_0, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{y} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{1}{g(x_0, y)} \right) + O(\varepsilon^{1/4}) \right), \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}\tilde{x}(y, x_0, \varepsilon) &= x_0 + O(\varepsilon^{1/4}), & \frac{\partial}{\partial x_0} \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon) &= 1 + O(\varepsilon^{1/4}), \\ \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon) &= O(\varepsilon).\end{aligned}\tag{3.16}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.7) очевидным образом следует, что на кривой $\Lambda_1(\varepsilon)$ переменная x как функция от y должна удовлетворять задаче Коши

$$\frac{dx}{dy} = \varepsilon F(x, y), \quad x|_{y=1} = x_0\tag{3.17}$$

с правой частью

$$F(x, y) = \frac{f(x, y)}{y g(x, y)}.\tag{3.18}$$

Для выявления асимптотических свойств решения этой задачи проделаем некоторые предварительные построения.

Фиксируем постоянные $a' < a$, $b' > b$, достаточно близкие к a , b и такие, что на отрезке $a' \leq x \leq b'$ сохраняется первое неравенство (3.3), т.е.

$$g(x, y) > 0 \quad \forall y \geq 0, \quad \forall x \in [a', b'].\tag{3.19}$$

Рассмотрим, далее, множество

$$\Sigma = \{(x, y) : a' \leq x \leq b', 1 \leq y \leq \varepsilon^{-3/4}\}.\tag{3.20}$$

Из явного вида (3.18) функции F и свойств (2.1)–(2.3), (3.19) вытекает, что

$$|F(x, y)| \leq M_1, \quad |F'_x(x, y)| \leq M_2, \quad |F''_{xx}(x, y)| \leq M_3 \quad \forall (x, y) \in \Sigma.\tag{3.21}$$

Здесь и ниже через M , M_1 , M_2 и т.д. обозначаются различные универсальные положительные постоянные, точные значения которых несущественны. В частности, фигурирующие в (3.21) константы M_1 , M_2 , M_3 не зависят от x , y , ε , но зависят от a' , b' из (3.19).

Кроме множества (3.20) нам потребуется еще банахово пространство X . Его элементами являются функции $x(y, x_0)$, непрерывные по совокупности переменных $(y, x_0) \in [1, \varepsilon^{-3/4}] \times [a, b]$ вместе с частной производной $\partial x / \partial x_0$. Норму в X зададим равенством

$$\|x\| = \max_{(y, x_0) \in [1, \varepsilon^{-3/4}] \times [a, b]} \left(|x(y, x_0)| + \left| \frac{\partial x}{\partial x_0}(y, x_0) \right| \right).$$

Обратимся теперь непосредственно к задаче Коши (3.17) и будем искать ее решение $x = \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon)$ как неподвижную точку оператора

$$\mathcal{L}_0(x)(y, x_0) = x_0 + \varepsilon \int_1^y F(x(s, x_0), s) ds,\tag{3.22}$$

определенного на множестве функций

$$\left\{ x(y, x_0) : a' \leq x(y, x_0) \leq b', \left| \frac{\partial x}{\partial x_0}(y, x_0) \right| \leq 2 \right\} \subset X\tag{3.23}$$

и принимающего значения в X . Несложная проверка показывает, что для любых элементов $x(y, x_0)$, $x_1(y, x_0)$, $x_2(y, x_0)$ из области определения (3.23) оператора (3.22) справедливы оценки

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}_0(x)(y, x_0) - x_0| &\leq \varepsilon M_1(y - 1), & \left| \frac{\partial}{\partial x_0} \mathcal{L}_0(x)(y, x_0) - 1 \right| &\leq 2\varepsilon M_2(y - 1), \\ |\mathcal{L}_0(x_1)(y, x_0) - \mathcal{L}_0(x_2)(y, x_0)| &\leq \varepsilon M_2 \int_1^y |x_1(s, x_0) - x_2(s, x_0)| ds, \\ \left| \frac{\partial}{\partial x_0} \mathcal{L}_0(x_1)(y, x_0) - \frac{\partial}{\partial x_0} \mathcal{L}_0(x_2)(y, x_0) \right| &\leq \varepsilon M_2 \int_1^y \left| \frac{\partial x_1}{\partial x_0}(s, x_0) - \frac{\partial x_2}{\partial x_0}(s, x_0) \right| ds \\ &+ 2\varepsilon M_3 \int_1^y |x_1(s, x_0) - x_2(s, x_0)| ds \quad \forall y \in [1, \varepsilon^{-3/4}], \quad \forall x_0 \in [a, b], \end{aligned}$$

где M_1 , M_2 , M_3 – постоянные из (3.21). А отсюда очевидным образом вытекают следующие факты, имеющие место при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Во-первых, оператор $\mathcal{L}_0$ преобразует множество (3.23) в себя и является сжимающим (с константой сжатия порядка $\varepsilon^{1/4}$). Во-вторых, для его неподвижной точки $\tilde{x}(y, x_0, \varepsilon)$ (существование и единственность которой гарантирует принцип сжимающих отображений) равномерно по $y \in [1, \varepsilon^{-3/4}]$, $x_0 \in [a, b]$ справедливы требуемые асимптотические представления (3.16). Что же касается функции $\theta_1(y, x_0, \varepsilon)$, то она задается явным выражением

$$\theta_1(y, x_0, \varepsilon) = \varepsilon \int_1^y \frac{ds}{s g(\tilde{x}(s, x_0, \varepsilon), s)}, \quad (3.24)$$

из которого с учетом равенств (3.16) и свойств (2.1), (2.3) функции $g(x, y)$ асимптотические формулы (3.12)–(3.15) выводятся автоматически. Лемма 3.1 доказана.

Перейдем теперь от кривой $\Lambda_1(\varepsilon)$ к участку $\Gamma_1(\varepsilon)$ кривой (3.8). Как оказывается, он экспоненциально близок к $\Lambda_1(\varepsilon)$. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3.2. *Участок $\Gamma_1(\varepsilon)$ задается аналогичным (3.11) равенством*

$$\Gamma_1(\varepsilon) = \{(t, x, y) : t = \theta_{x_0, \varphi}^{(1)}(y, \varepsilon), x = \tilde{x}_{x_0, \varphi}(y, \varepsilon), 1 \leq y \leq \varepsilon^{-3/4}\}, \quad (3.25)$$

где функции $\theta_{x_0, \varphi}^{(1)}(y, \varepsilon)$, $\tilde{x}_{x_0, \varphi}(y, \varepsilon)$ таковы, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по начальным условиям $(x_0, \varphi) \in S$ и по $y \in [1, \varepsilon^{-3/4}]$

$$\begin{aligned} \left(\theta_{x_0, \varphi}^{(1)}(y, \varepsilon), \frac{\partial}{\partial y} \theta_{x_0, \varphi}^{(1)}(y, \varepsilon) \right) &= \left(\theta_1(y, x_0, \varepsilon), \frac{\partial}{\partial y} \theta_1(y, x_0, \varepsilon) \right) + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right), \\ \left(\tilde{x}_{x_0, \varphi}(y, \varepsilon), \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}_{x_0, \varphi}(y, \varepsilon) \right) &= \left(\tilde{x}(y, x_0, \varepsilon), \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon) \right) + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right), \\ M &= \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что на кривой $\Gamma_1(\varepsilon)$ переменная t связана с y соотношением

$$t = \theta(y), \quad (3.27)$$

где $\theta(y)$ – пока произвольная (подлежащая определению) функция из множества

$$\Omega = \left\{ \theta(y) \in C[1, \varepsilon^{-3/4}] : 0 \leq \theta(y) \leq M\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}, \theta(1) = 0 \right\}, \quad (3.28)$$

а $M > 0$ – некоторая универсальная константа. Тогда для определения x как функции от y приходим к аналогичной (3.17) задаче Коши

$$\frac{dx}{dy} = \varepsilon F(x, y, \theta(y), \varepsilon), \quad x|_{y=1} = x_0, \quad (3.29)$$

где

$$F(x, y, \theta, \varepsilon) = \frac{f(x, y)}{y [g(x, y) - \exp(\varphi(\theta - h)/\varepsilon)]}. \quad (3.30)$$

Как и выше, остановимся сначала на некоторых необходимых для анализа задачи (3.29) свойствах функции (3.30). Из ее явного вида и соотношений (2.1)–(2.3), (3.5), (3.19) вытекает, что $\forall (x, y) \in \Sigma, \forall \theta \in \Omega$, где Σ, Ω – множества (3.20), (3.28), и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ выполняются оценки вида

$$\begin{aligned} |F(x, y, \theta(y), \varepsilon)| &\leq M_1, & |F'_x(x, y, \theta(y), \varepsilon)| &\leq M_2, \\ |F(x, y, \theta(y), \varepsilon) - F(x, y)| &\leq M_3 \exp\left(-\frac{M_4}{\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Здесь $M_j = \text{const} > 0, j = 1, \dots, 4$, а $F(x, y)$ – функция (3.18).

Перейдем затем непосредственно к рассмотрению задачи Коши (3.29). В данном случае ее решение $x = x_{x_0, \varphi, \theta}(y, \varepsilon)$ будем искать как неподвижную точку аналогичного (3.22) оператора

$$\mathcal{L}_0(x)(y) = x_0 + \varepsilon \int_1^y F(x(s), s, \theta(s), \varepsilon) ds, \quad (3.32)$$

действующего в пространстве $C[1, \varepsilon^{-3/4}]$ функций $x(y)$ одной переменной y (x_0 здесь рассматривается как параметр). Из неравенств (3.31) очевидным образом следует, что, во-первых, оператор (3.32) преобразует в себя замкнутое множество

$$\{x(y) : a' \leq x(y) \leq b'\} \subset C[1, \varepsilon^{-3/4}] \quad (3.33)$$

и является сжимающим; во-вторых, для его неподвижной точки $x_{x_0, \varphi, \theta}(y, \varepsilon)$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial}{\partial y} x_{x_0, \varphi, \theta}(y, \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon) \right| \\ &\leq \varepsilon M_2 |x_{x_0, \varphi, \theta}(y, \varepsilon) - \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon)| + \varepsilon M_3 \exp\left(-\frac{M_4}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} &|x_{x_0, \varphi, \theta}(y, \varepsilon) - \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon)| \\ &\leq \varepsilon M_2 \int_1^y |x_{x_0, \varphi, \theta}(s, \varepsilon) - \tilde{x}(s, x_0, \varepsilon)| ds + \varepsilon(y-1) M_3 \exp\left(-\frac{M_4}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (3.35)$$

где $\tilde{x}(y, x_0, \varepsilon)$ – функция из (3.11), M_2, M_3 – константы из (3.31). Опираясь, далее, на лемму Гронуолла–Беллмана, окончательно получаем

$$|x_{x_0, \varphi, \theta}(y, \varepsilon) - \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon)| + \left| \frac{\partial}{\partial y} x_{x_0, \varphi, \theta}(y, \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon) \right| \leq \exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right),$$

$$M = \text{const} > 0, \quad y \in [1, \varepsilon^{-3/4}]. \quad (3.36)$$

Разберемся теперь с вопросом об отыскании фигурирующей в (3.27) функции $\theta(y)$. Из уравнения для компоненты y (см. (3.4)) следует, что она должна удовлетворять интегральному уравнению

$$\theta(y) = \mathcal{L}_1(\theta)(y) \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon \int_1^y \frac{1}{s} G(x_{x_0, \varphi, \theta}(s, \varepsilon), s, \theta(s), \varepsilon) ds, \quad (3.37)$$

где функция $G(x, y, \theta, \varepsilon)$ задается аналогичной (3.30) формулой

$$G(x, y, \theta, \varepsilon) = \frac{1}{g(x, y) - \exp(\varphi(\theta - h)/\varepsilon)} \quad (3.38)$$

и удовлетворяет аналогичным (3.31) неравенствам

$$|G(x, y, \theta(y), \varepsilon)| \leq M_1, \quad |G'_x(x, y, \theta(y), \varepsilon)| \leq M_2,$$

$$\left| G(x, y, \theta(y), \varepsilon) - \frac{1}{g(x, y)} \right| \leq M_3 \exp\left(-\frac{M_4}{\varepsilon}\right) \quad \forall (x, y) \in \Sigma, \quad \forall \theta(y) \in \Omega. \quad (3.39)$$

Опираясь на свойства (3.39) функции (3.38), нетрудно убедиться, что

$$\left| G(x_{x_0, \varphi, \theta}(y, \varepsilon), y, \theta(y), \varepsilon) - \frac{1}{g(\tilde{x}(y, x_0, \varepsilon), y)} \right|$$

$$\leq M_2 |x_{x_0, \varphi, \theta}(y, \varepsilon) - \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon)| + M_3 \exp\left(-\frac{M_4}{\varepsilon}\right) \quad \forall y \in [1, \varepsilon^{-3/4}], \quad (3.40)$$

где постоянные M_2, M_3 те же, что и в (3.39). Объединяя, далее, оценки (3.40), (3.36), приходим к выводу, что равномерно по $y \in [1, \varepsilon^{-3/4}]$, $\theta(y) \in \Omega$, $(x_0, \varphi) \in S$

$$\mathcal{L}_1(\theta)(y) = \theta_1(y, x_0, \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathcal{L}_1(\theta)(y) = \frac{\partial \theta_1}{\partial y}(y, x_0, \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad M = \text{const} > 0, \quad (3.41)$$

где, напомним, $\theta_1(y, x_0, \varepsilon)$ – функция (3.24).

Для завершения обоснования леммы 3.2 заметим, что в силу (3.41) и уже установленных асимптотических представлений (3.12)–(3.15) оператор $\mathcal{L}_1$ из (3.37), очевидным образом являющийся компактным, при подходящем выборе постоянной M в (3.28), а именно, при

$$M > \frac{3}{4b_0(x_0)},$$

преобразует в себя замкнутое ограниченное выпуклое множество функций $\Omega \subset C[1, \varepsilon^{-3/4}]$. Тем самым, согласно принципу Шаудера он допускает в Ω хотя бы одну неподвижную точку $\theta_{x_0, \varphi}^{(1)}(y, \varepsilon)$, для которой заведомо справедлива нужная асимптотическая формула из (3.26). Что же касается фигурирующей в (3.25) функции $\tilde{x}_{x_0, \varphi}(y, \varepsilon)$, то она задается равенством

$$\tilde{x}_{x_0, \varphi}(y, \varepsilon) = x_{x_0, \varphi, \theta}(y, \varepsilon)|_{\theta=\theta_{x_0, \varphi}^{(1)}}$$

и в силу (3.36) также обладает требуемым свойством из (3.26). Лемма 3.2 доказана.

Уместно отметить, что на самом деле оператор $\mathcal{L}_1$ имеет в Ω единственную неподвижную точку, поскольку единственна функция $y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$, определяющаяся как неявная из уравнения $t = \theta_{x_0, \varphi}^{(1)}(y, \varepsilon)$.

Завершая рассмотрение участков взлета $\Gamma_1(\varepsilon)$, $\Lambda_1(\varepsilon)$, напомним, что им соответствуют значения $t \in [0, \tau_{(x_0, \varphi)}^{(1)}(\varepsilon)]$ и $t \in [0, \tau_1(x_0, \varepsilon)]$, где $\tau_{(x_0, \varphi)}^{(1)}(\varepsilon)$, $\tau_1(x_0, \varepsilon)$ – первые положительные корни уравнений (3.10). Из формул (3.12), (3.13), (3.26) следует, что для этих корней справедливы равномерные по $(x_0, \varphi) \in S$ асимптотические представления

$$\tau_1(x_0, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \theta_1(y, x_0, \varepsilon)|_{y=\varepsilon^{-3/4}} = \frac{3}{4b_0(x_0)}\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon), \quad (3.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \tau_1(x_0, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{3}{4b_0(x_0)}\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \right) + O(\varepsilon), \quad (3.43)$$

$$\tau_{(x_0, \varphi)}^{(1)}(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{x_0, \varphi}^{(1)}(y, \varepsilon)|_{y=\varepsilon^{-3/4}} = \tau_1(x_0, \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right), \quad (3.44)$$

$$M = \text{const} > 0.$$

Обратимся далее к очередным участкам $\Gamma_2(\varepsilon)$, $\Lambda_2(\varepsilon)$ кривых (3.8), (3.9), отвечающим значениям $t \in [\tau_{(x_0, \varphi)}^{(1)}(\varepsilon), \tau_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon)]$ и $t \in [\tau_1(x_0, \varepsilon), \tau_2(x_0, \varepsilon)]$, где $\tau_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon)$, $\tau_2(x_0, \varepsilon)$ – вторые положительные корни уравнений (3.10). Данные участки характерны тем, что они целиком лежат в полупространстве $\{(t, x, y) : y \geq \varepsilon^{-3/4}\}$ и при движении по ним, которое длится время порядка $\varepsilon \ln(1/\varepsilon)$, точка (t, x, y) сначала покидает плоскость $y = \varepsilon^{-3/4}$, а затем снова возвращается на нее (см. рис. 5). По аналогии со случаем системы (1.1) эти участки будем называть участками поворота, а в качестве параметра на них возьмем переменную x .

ЛЕММА 3.3. *Для участка поворота $\Lambda_2(\varepsilon)$ имеет место равенство*

$$\Lambda_2(\varepsilon) = \left\{ (t, x, y) : t = \theta_2(x, x_0, \varepsilon), y = \frac{u(x, x_0, \varepsilon)}{\varepsilon}, \bar{x}(x_0, \varepsilon) \leq x \leq \bar{\bar{x}}(x_0, \varepsilon) \right\}, \quad (3.45)$$

где

$$\begin{aligned} u(x, x_0, \varepsilon)|_{x=\bar{x}(x_0, \varepsilon), \bar{\bar{x}}(x_0, \varepsilon)} &= \varepsilon^{1/4}, & u(x, x_0, \varepsilon) &> \varepsilon^{1/4} \\ \text{при } x \in (\bar{x}(x_0, \varepsilon), \bar{\bar{x}}(x_0, \varepsilon)), & \theta_2(x, x_0, \varepsilon)|_{x=\bar{x}(x_0, \varepsilon)} &= \tau_1(x_0, \varepsilon). \end{aligned} \quad (3.46)$$

Кроме того, при $\varepsilon \rightarrow 0$ для функций $\bar{x}(x_0, \varepsilon)$, $\bar{\bar{x}}(x_0, \varepsilon)$ справедливы равномерные по $x_0 \in [a, b]$ асимптотические представления

$$\bar{x}(x_0, \varepsilon) = \left(x + \frac{a_0(x)}{b_0(x)} \varepsilon^{1/4} \right) \Big|_{x=x_0} + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \bar{x}(x_0, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_0} \left[\left(x + \frac{a_0(x)}{b_0(x)} \varepsilon^{1/4} \right) \Big|_{x=x_0} \right] + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (3.48)$$

$$\bar{\bar{x}}(x_0, \varepsilon) = \left(x + \frac{a_0(x)}{b_0(x)} \varepsilon^{1/4} \right) \Big|_{x=x_1(x_0)} + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \bar{\bar{x}}(x_0, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_0} \left[\left(x + \frac{a_0(x)}{b_0(x)} \varepsilon^{1/4} \right) \Big|_{x=x_1(x_0)} \right] + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (3.50)$$

а для функций $u(x, x_0, \varepsilon)$, $\theta_2(x, x_0, \varepsilon)$ – равномерные по переменным $x_0 \in [a, b]$, $x \in [\bar{x}(x_0, \varepsilon), \bar{\bar{x}}(x_0, \varepsilon)]$ представления

$$u(x, x_0, \varepsilon) = \gamma_0(x, x_0) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \frac{\partial}{\partial x} u(x, x_0, \varepsilon) = \frac{b_0(x)}{a_0(x)} + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} u(x, x_0, \varepsilon) = -\frac{b_0(x_0)}{a_0(x_0)} + O(\sqrt{\varepsilon});$$

$$\theta_2(x, x_0, \varepsilon) = \tau_1(x_0, \varepsilon) + \varepsilon \int_{\bar{x}(x_0, \varepsilon)}^x \frac{ds}{a_0(s)\gamma_0(s, x_0)} + O(\varepsilon^{5/4}), \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \theta_2(x, x_0, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\tau_1(x_0, \varepsilon) + \varepsilon \int_{\bar{x}(x_0, \varepsilon)}^x \frac{ds}{a_0(s)\gamma_0(s, x_0)} \right) + O(\varepsilon), \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \theta_2(x, x_0, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{a_0(x)\gamma_0(x, x_0)} + O\left(\frac{\varepsilon^{3/2}}{\gamma_0^2(x, x_0)}\right) > 0 \quad (3.54)$$

$$\forall x \in [\bar{x}(x_0, \varepsilon), \bar{\bar{x}}(x_0, \varepsilon)],$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial x_0} \theta_2(x, x_0, \varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{1}{a_0(x)\gamma_0(x, x_0)} \right) + O\left(\frac{\varepsilon^{3/2}}{\gamma_0^3(x, x_0)}\right), \quad (3.55)$$

где $\gamma_0(x, x_0)$ – функция из (2.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим прежде всего, что фигурирующее в (3.45) значение $x = \bar{x}(x_0, \varepsilon)$ определяется посредством равенства

$$\bar{x}(x_0, \varepsilon) = \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon) \Big|_{y=\varepsilon^{-3/4}}, \quad (3.56)$$

где $\tilde{x}(y, x_0, \varepsilon)$ – функция из (3.11). Однако для обоснования асимптотических формул (3.47), (3.48) полученной ранее информации (3.16) о данной функции очевидным образом недостаточно. В связи с этим обратимся к интегральному уравнению

$$\tilde{x}(y, x_0, \varepsilon) = x_0 + \varepsilon \int_1^y F(\tilde{x}(s, x_0, \varepsilon), s) ds,$$

где $F(x, y)$ – функция (3.18), и учтем в его правой части соотношения (3.16). В результате после несложных преобразований получаем уточненные версии

асимптотических формул для $\tilde{x}(y, x_0, \varepsilon)$, имеющие вид

$$\begin{aligned}\tilde{x}(y, x_0, \varepsilon) &= x_0 + \varepsilon \int_1^y \frac{f(x_0, s)}{s g(x_0, s)} ds + O(\varepsilon^{5/4} y), \\ \frac{\partial}{\partial x_0} \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon) &= 1 + \varepsilon \int_1^y \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{f(x_0, s)}{s g(x_0, s)} \right) ds + O(\varepsilon^{5/4} y), \\ 1 &\leq y \leq \varepsilon^{-3/4}.\end{aligned}\quad (3.57)$$

Полагая затем в (3.57) $y = \varepsilon^{-3/4}$ и опираясь на свойства (2.1)–(2.3), для функции (3.56) приходим к нужным асимптотическим представлениям (3.47), (3.48). Добавим еще, что так как $a_0(x_0)/b_0(x_0) > 0$, то автоматически $\bar{x}(x_0, \varepsilon) > x_0$.

Для отыскания оставшихся функций $u(x, x_0, \varepsilon)$, $\bar{x}(x_0, \varepsilon)$, $\theta_2(x, x_0, \varepsilon)$ обратимся к системе из (3.7), выполним в ней замену $y = u/\varepsilon$ и переразложим ее правые части по ε с учетом свойств (2.1). В результате убедимся, что $u = u(x, x_0, \varepsilon)$ удовлетворяет задаче Коши вида

$$\frac{du}{dx} = \frac{b_0(x)}{a_0(x)} + \Phi(u, x, \varepsilon), \quad u|_{x=\bar{x}(x_0, \varepsilon)} = \varepsilon^{1/4}. \quad (3.58)$$

При этом явное выражение для функции $\Phi(u, x, \varepsilon)$ опустим, так как в дальнейшем оно не потребуется. Отметим только, что $\forall (x, u) \in \Sigma$, где

$$\Sigma = \{(x, u) : x \in J, u \geq d\varepsilon^{1/4}\}, \quad d = \text{const} \in (0, 1), \quad (3.59)$$

$$J = [x_0 + c_1\varepsilon^{1/4}, x_1(x_0) - c_2\varepsilon^{1/4}], \quad c_1, c_2 = \text{const} > 0, \quad (3.60)$$

$$0 < c_1 < \min_{a \leq x_0 \leq b} \frac{a_0(x_0)}{b_0(x_0)}, \quad 0 < c_2 < \min_{a \leq x_0 \leq b} \left(-\frac{a_0(x)}{b_0(x)} \Big|_{x=x_1(x_0)} \right), \quad (3.61)$$

имеют место оценки вида

$$|\Phi(u, x, \varepsilon)| \leq M_1 \frac{\varepsilon}{u}, \quad |\Phi'_u(u, x, \varepsilon)| \leq M_2 \frac{\varepsilon}{u^2}. \quad (3.62)$$

Свойства (3.62) свидетельствуют о том, что задача (3.58) представляет собой регулярное возмущение системы

$$\frac{du}{dx} = \frac{b_0(x)}{a_0(x)}, \quad u|_{x=\bar{x}(x_0, \varepsilon)} = \varepsilon^{1/4}.$$

Тем самым, решение $u(x, x_0, \varepsilon)$ этой задачи при тех значениях $x \in J$, для которых

$$(x, u(x, x_0, \varepsilon)) \in \Sigma, \quad (3.63)$$

допускает асимптотические представления

$$u(x, x_0, \varepsilon) = \varepsilon^{1/4} + \int_{\bar{x}(x_0, \varepsilon)}^x \frac{b_0(s)}{a_0(s)} ds + O(\varepsilon^{3/4}), \quad (3.64)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x, x_0, \varepsilon) = \frac{b_0(x)}{a_0(x)} + O(\varepsilon^{3/4}), \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} u(x, x_0, \varepsilon) = - \left(\frac{b_0(x)}{a_0(x)} \Big|_{x=\bar{x}(x_0, \varepsilon)} \right) \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_0}(x_0, \varepsilon) + O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (3.66)$$

Следует отметить, что соотношения (3.64)–(3.66) преобразуются к требуемому виду (3.51). Для того чтобы убедиться в этом, достаточно подставить в (3.64), (3.66) уже установленные асимптотические формулы (3.47), (3.48) и переразложить результат по ε .

Зададимся теперь вопросом о том, при каких же именно значениях x выполняется априорное условие (3.63). В связи с этим обратим внимание, что в силу (2.9)

$$\begin{aligned} \gamma_0(x, x_0) > 0 \quad \text{при} \quad x_0 < x < x_1(x_0), \quad \gamma_0(x_0, x_0) = \gamma_0(x_1(x_0), x_0) = 0, \\ \frac{\partial \gamma_0}{\partial x}(x_0, x_0) > 0, \quad \frac{\partial \gamma_0}{\partial x}(x_1(x_0), x_0) < 0. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Объединяя, далее, свойства (3.51), (3.67), приходим к выводу о существовании у уравнения $u(x, x_0, \varepsilon) = \varepsilon^{1/4}$ такого корня $x = \bar{x}(x_0, \varepsilon)$, что, во-первых, при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $x_0 \in [a, b]$ для него справедливы асимптотические равенства (3.49), (3.50); во-вторых, на интервале $\bar{x}(x_0, \varepsilon) < x < \bar{\bar{x}}(x_0, \varepsilon)$ имеет место требуемая в (3.46) оценка

$$u(x, x_0, \varepsilon) > \varepsilon^{1/4}. \quad (3.68)$$

Следует также добавить, что в силу неравенств

$$\frac{a_0(x_0)}{b_0(x_0)} > 0, \quad \frac{a_0(x_1)}{b_0(x_1)} < 0$$

и способа выбора постоянных c_1, c_2 (см. (3.61)) точки $x = \bar{x}(x_0, \varepsilon)$, $x = \bar{\bar{x}}(x_0, \varepsilon)$ принадлежат отрезку (3.60).

Неравенство (3.68) и оценка $d < 1$ (см. (3.59)) гарантируют выполнение условия (3.63) на множестве

$$[\bar{x}(x_0, \varepsilon), \bar{\bar{x}}(x_0, \varepsilon)] \subset J.$$

Более того, уменьшая, если это необходимо, константу d в (3.59), можно добиться справедливости данного условия на всем отрезке J . Таким образом, при $x \in J$ обретают законную силу как сами равенства (3.51), так и вытекающие из них соотношения (3.49), (3.50), (3.68).

Завершая обоснование леммы 3.3, найдем оставшуюся функцию $\theta_2(x, x_0, \varepsilon)$. Как и в случае (3.24), она задается явным выражением

$$\theta_2(x, x_0, \varepsilon) = \tau_1(x_0, \varepsilon) + \int_{\bar{x}(x_0, \varepsilon)}^x \frac{ds}{f(s, u(s, x_0, \varepsilon)/\varepsilon)}. \quad (3.69)$$

Заметим далее, что в силу уже установленных формул (3.51) и свойств (2.1) функции $f(x, y)$ имеют место равномерные по $x_0 \in [a, b]$, $x \in J$ асимптотические представления

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(x, u(x, x_0, \varepsilon)/\varepsilon)} &= \frac{\varepsilon}{a_0(x)\gamma_0(x, x_0)} + O\left(\frac{\varepsilon^{3/2}}{\gamma_0^2(x, x_0)}\right), \\ \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{1}{f(x, u(x, x_0, \varepsilon)/\varepsilon)} \right) &= \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{1}{a_0(x)\gamma_0(x, x_0)} \right) + O\left(\frac{\varepsilon^{3/2}}{\gamma_0^3(x, x_0)}\right). \end{aligned}$$

Интегрируя затем указанные соотношения по x и учитывая, что

$$\varepsilon^{3/2} \int_{\bar{x}(x_0, \varepsilon)}^x \frac{ds}{\gamma_0^2(s, x_0)} = O\left(\frac{\varepsilon^{3/2}}{\gamma_0(x, x_0)}\right) = O(\varepsilon^{5/4}),$$

$$\varepsilon^{3/2} \int_{\bar{x}(x_0, \varepsilon)}^x \frac{ds}{\gamma_0^3(s, x_0)} = O\left(\frac{\varepsilon^{3/2}}{\gamma_0^2(x, x_0)}\right), \quad \varepsilon^{3/2} \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\int_{\bar{x}(x_0, \varepsilon)}^x \frac{ds}{\gamma_0^2(s, x_0)} \right) = O(\varepsilon),$$

получаем нужные равенства (3.52)–(3.55). Лемма 3.3 доказана.

Переход от кривой $\Lambda_2(\varepsilon)$ к $\Gamma_2(\varepsilon)$ осуществляется по той же схеме, что и в случае участков взлета. Как будет показано ниже, эти кривые экспоненциально близки.

ЛЕММА 3.4. *Участок поворота $\Gamma_2(\varepsilon)$ имеет аналогичный (3.45) вид*

$$\Gamma_2(\varepsilon) = \left\{ (t, x, y) : t = \theta_{x_0, \varphi}^{(2)}(x, \varepsilon), y = \frac{u_{x_0, \varphi}(x, \varepsilon)}{\varepsilon}, \bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon) \leq x \leq \bar{\bar{x}}_{x_0, \varphi}(\varepsilon) \right\}, \quad (3.70)$$

где функции $u_{x_0, \varphi}(x, \varepsilon)$, $\theta_{x_0, \varphi}^{(2)}(x, \varepsilon)$ обладают аналогичными (3.46) свойствами

$$u_{x_0, \varphi}(x, \varepsilon)|_{x=\bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon), \bar{\bar{x}}_{x_0, \varphi}(\varepsilon)} = \varepsilon^{1/4}, \quad u_{x_0, \varphi}(x, \varepsilon) > \varepsilon^{1/4} \quad (3.71)$$

при $x \in (\bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon), \bar{\bar{x}}_{x_0, \varphi}(\varepsilon))$, $\theta_{x_0, \varphi}^{(2)}(x, \varepsilon)|_{x=\bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon)} = \tau_{(x_0, \varphi)}^{(1)}(\varepsilon)$.

Более того, при $\varepsilon \rightarrow 0$ для этих функций справедливы равномерные по начальным данным $(x_0, \varphi) \in S$ и по $\bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon) \leq x \leq \bar{\bar{x}}_{x_0, \varphi}(\varepsilon)$ асимптотические представления

$$\left(u_{x_0, \varphi}(x, \varepsilon), \frac{\partial}{\partial x} u_{x_0, \varphi}(x, \varepsilon) \right) = \left(u(x, x_0, \varepsilon), \frac{\partial}{\partial x} u(x, x_0, \varepsilon) \right) + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right),$$

$$\left(\theta_{x_0, \varphi}^{(2)}(x, \varepsilon), \frac{\partial}{\partial x} \theta_{x_0, \varphi}^{(2)}(x, \varepsilon) \right) = \left(\theta_2(x, x_0, \varepsilon), \frac{\partial}{\partial x} \theta_2(x, x_0, \varepsilon) \right) + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right),$$

$$M = \text{const} > 0, \quad (3.72)$$

а для значений $x = \bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon), \bar{\bar{x}}_{x_0, \varphi}(\varepsilon)$ – равномерные по $(x_0, \varphi) \in S$ представления

$$\bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon) = \bar{x}(x_0, \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right), \quad (3.73)$$

$$\bar{\bar{x}}_{x_0, \varphi}(\varepsilon) = \bar{\bar{x}}(x_0, \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right), \quad M = \text{const} > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при обосновании леммы 3.3, заметим сначала, что значение $x = \bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon)$ задается аналогичным (3.56) равенством

$$\bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon) = \tilde{x}_{x_0, \varphi}(y, \varepsilon)|_{y=\varepsilon^{-3/4}}. \quad (3.74)$$

А отсюда и из (3.26), (3.56) первое соотношение (3.73) вытекает автоматически.

Перейдем теперь к отысканию фигурирующих в выражениях (3.70), (3.71) функций $u_{x_0, \varphi}(x, \varepsilon)$, $\theta_{x_0, \varphi}^{(2)}(x, \varepsilon)$. С этой целью предположим, что на кривой $\Gamma_2(\varepsilon)$ переменные t , x связаны формулой

$$t = \theta(x), \quad (3.75)$$

где $\theta(x)$ – пока произвольная функция, определенная на отрезке J (см. (3.60), (3.61)) и принадлежащая множеству

$$\Omega = \left\{ \theta(x) \in C(J) : 0 \leq \theta(x) \leq M\varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon}, \theta|_{x=\bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon)} = \tau_{(x_0, \varphi)}^{(1)}(\varepsilon) \right\}. \quad (3.76)$$

Здесь, как и в (3.28), $M > 0$ – универсальная константа, выбором которой распорядимся в дальнейшем.

Подставим соотношение (3.75) в правые части системы из (3.4) и выполним в ней замену $y = u/\varepsilon$. В результате для отыскания переменной u как функции от x получим аналогичную (3.58) задачу Коши

$$\frac{du}{dx} = \frac{b_0(x)}{a_0(x)} + \Phi(u, x, \theta(x), \varepsilon), \quad u|_{x=\bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon)} = \varepsilon^{1/4}. \quad (3.77)$$

Как и выше, явная формула для функции $\Phi(u, x, \theta, \varepsilon)$ нам не понадобится. Заметим лишь, что $\forall (x, u) \in \Sigma$, $\forall \theta \in \Omega$, где Σ , Ω – множества (3.59), (3.76), справедливы аналогичные (3.62) оценки

$$\begin{aligned} |\Phi(u, x, \theta(x), \varepsilon)| &\leq M_1 \varepsilon^{3/4}, & |\Phi'_u(u, x, \theta(x), \varepsilon)| &\leq M_2 \sqrt{\varepsilon}, \\ |\Phi(u, x, \theta(x), \varepsilon) - \Phi(u, x, \varepsilon)| &\leq M_3 \exp\left(-\frac{M_4}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (3.78)$$

где $\Phi(u, x, \varepsilon)$ – функция из (3.58).

Неравенства (3.78) и уже известная асимптотическая формула для $\bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon)$ (см. (3.73)) позволяют применить при исследовании задачи Коши (3.77) ту же методику, что и в случае задачи (3.58). Таким образом, повторяя практически дословно соответствующий фрагмент доказательства леммы 3.3, получаем следующие факты.

Во-первых, решение $u_{x_0, \varphi, \theta}(x, \varepsilon)$ задачи Коши (3.77) при $\varepsilon \rightarrow 0$ допускает равномерную по $(x_0, \varphi) \in S$, $\theta \in \Omega$, $x \in J$ асимптотику

$$\left(u_{x_0, \varphi, \theta}(x, \varepsilon), \frac{\partial}{\partial x} u_{x_0, \varphi, \theta}(x, \varepsilon) \right) = \left(u(x, x_0, \varepsilon), \frac{\partial}{\partial x} u(x, x_0, \varepsilon) \right) + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right) \right), \quad (3.79)$$

где $M = \text{const} > 0$; во-вторых, уравнение $u_{x_0, \varphi, \theta}(x, \varepsilon) = \varepsilon^{1/4}$ имеет такой корень $x = \bar{x}_{x_0, \varphi, \theta}(\varepsilon)$, что равномерно по $(x_0, \varphi) \in S$, $\theta \in \Omega$

$$\bar{x}_{x_0, \varphi, \theta}(\varepsilon) = \bar{x}(x_0, \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right) \right), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad M = \text{const} > 0 \quad (3.80)$$

и $u_{x_0, \varphi, \theta}(x, \varepsilon) > \varepsilon^{1/4}$ при $x \in (\bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon), \bar{x}_{x_0, \varphi, \theta}(\varepsilon))$.

Заключительный этап доказательства леммы 3.4 связан с нахождением функции $\theta(x)$ из (3.75). Обращаясь в очередной раз к системе (3.4), убеждаемся, что $\theta(x)$ с необходимостью удовлетворяет интегральному уравнению

$$\theta(x) = \mathcal{L}_2(\theta)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{(x_0, \varphi)}^{(1)}(\varepsilon) + \int_{\bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon)}^x \frac{ds}{f(s, u_{x_0, \varphi, \theta}(s, \varepsilon)/\varepsilon)}. \quad (3.81)$$

Свойства (2.1) функции $f(x, y)$, формула (3.69) и уже известные асимптотические равенства (3.44), (3.73) (для $\bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon)$), (3.79) позволяют заключить, что равномерно по $x \in J$, $\theta(x) \in \Omega$, $(x_0, \varphi) \in S$

$$\left(\mathcal{L}_2(\theta)(x), \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}_2(\theta)(x) \right) = \left(\theta_2(x, x_0, \varepsilon), \frac{\partial}{\partial x} \theta_2(x, x_0, \varepsilon) \right) + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right),$$

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.82)$$

где $M = \text{const} > 0$. А отсюда и из (3.42)–(3.44), (3.52) вытекает, что

$$\max_{x \in J} |\mathcal{L}_2(\theta)(x)| = \left(\frac{1}{b_0(x_0)} - \frac{1}{4b_0(x_1(x_0))} \right) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon) \quad (3.83)$$

(при выводе этой формулы использовалась процедура регуляризации по Адамару интеграла

$$\int \frac{dx}{a_0(x)\gamma_0(x, x_0)}$$

в точках $x = x_0$ и $x = x_1(x_0)$).

Из установленных соотношений (3.82), (3.83) следует, что фигурирующий в (3.81) компактный оператор $\mathcal{L}_2$ при подходящем выборе постоянной M в (3.76), а точнее говоря, при

$$M > \frac{1}{b_0(x_0)} - \frac{1}{4b_0(x_1(x_0))},$$

переводит замкнутое ограниченное выпуклое множество $\Omega \subset C(J)$ в себя. Тем самым, он имеет в Ω хотя бы одну неподвижную точку

$$\theta = \theta_{x_0, \varphi}^{(2)}(x, \varepsilon),$$

$$\left(\theta_{x_0, \varphi}^{(2)}(x, \varepsilon), \frac{\partial}{\partial x} \theta_{x_0, \varphi}^{(2)}(x, \varepsilon) \right) = \left(\theta_2(x, x_0, \varepsilon), \frac{\partial}{\partial x} \theta_2(x, x_0, \varepsilon) \right) + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right),$$

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad M = \text{const} > 0. \quad (3.84)$$

Добавим еще, что на самом деле эта неподвижная точка единственна, так как единственна функция $x_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$, определяющаяся как неявная из уравнения $t = \theta_{x_0, \varphi}^{(2)}(x, \varepsilon)$.

На завершающем этапе положим

$$u_{x_0, \varphi}(x, \varepsilon) = u_{x_0, \varphi, \theta}(x, \varepsilon)|_{\theta = \theta_{x_0, \varphi}^{(2)}}, \quad \bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon) = \bar{x}_{x_0, \varphi, \theta}(\varepsilon)|_{\theta = \theta_{x_0, \varphi}^{(2)}} \quad (3.85)$$

и заметим, что получившийся в итоге набор функций (3.74), (3.84), (3.85) удовлетворяет всем требованиям (3.71)–(3.73). Лемма 3.4 доказана.

Заканчивая исследование участков поворота $\Gamma_2(\varepsilon)$, $\Lambda_2(\varepsilon)$, отметим, что вторые положительные корни $\tau_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon)$, $\tau_2(x_0, \varepsilon)$ уравнений (3.10), о которых говорилось выше, в силу равенств (3.42)–(3.44), (3.47)–(3.50), (3.52), (3.53), (3.72), (3.73) допускают равномерные по $(x_0, \varphi) \in S$ асимптотические представления

$$\tau_2(x_0, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \theta_2(x, x_0, \varepsilon)|_{x=\bar{x}(x_0, \varepsilon)} = \left(\frac{1}{b_0(x_0)} - \frac{1}{4b_0(x_1(x_0))} \right) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon), \quad (3.86)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \tau_2(x_0, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_0} \left[\left(\frac{1}{b_0(x_0)} - \frac{1}{4b_0(x_1(x_0))} \right) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} \right] + O(\varepsilon), \quad (3.87)$$

$$\tau_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{x_0, \varphi}^{(2)}(x, \varepsilon)|_{x=\bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon)} = \tau_2(x_0, \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right), \quad (3.88)$$

$$M = \text{const} > 0.$$

Отметим еще, что проекция участка $\Gamma_2(\varepsilon)$ на плоскость (x, u) , где $u = \varepsilon y$, при $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к кривой

$$\Gamma_2^0 = \{(x, u) : u = \gamma_0(x, x_0), x_0 \leq x \leq x_1(x_0)\}.$$

График этой кривой аналогичен показанному на рис. 2 (необходимо поменять местами точки x_0 , x_1 и сменить направление движения).

Следующие участки $\Gamma_3(\varepsilon)$, $\Lambda_3(\varepsilon)$ кривых (3.8), (3.9) соответствуют значениям t из отрезков

$$[\tau_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon), \tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon)], \quad [\tau_2(x_0, \varepsilon), \tau_3(x_0, \varepsilon)],$$

где $\tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon)$, $\tau_3(x_0, \varepsilon)$ – первые положительные корни уравнений

$$y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon) = \exp(-\varepsilon^{-3/4}), \quad y(t, x_0, \varepsilon) = \exp(-\varepsilon^{-3/4}). \quad (3.89)$$

В дальнейшем будет показано, что длины данных отрезков асимптотически малы, причем за это время компоненты $y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$, $y(t, x_0, \varepsilon)$ монотонно убывают от $\varepsilon^{-3/4}$ до асимптотически малого значения $\exp(-\varepsilon^{-3/4})$ (см. рис. 5). Тем самым, участки $\Gamma_3(\varepsilon)$, $\Lambda_3(\varepsilon)$ уместно назвать участками падения. Как и в случае $\Gamma_1(\varepsilon)$, $\Lambda_1(\varepsilon)$, в качестве параметра на них возьмем переменную y .

ЛЕММА 3.5. *Для участка падения $\Lambda_3(\varepsilon)$ справедливо аналогичное (3.11) представление*

$$\Lambda_3(\varepsilon) = \{(t, x, y) : t = \theta_3(y, x_0, \varepsilon), x = \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon), \exp(-\varepsilon^{-3/4}) \leq y \leq \varepsilon^{-3/4}\}. \quad (3.90)$$

Здесь функции $\theta_3(y, x_0, \varepsilon)$, $\tilde{x}(y, x_0, \varepsilon)$ таковы, что, во-первых,

$$\theta_3(y, x_0, \varepsilon)|_{y=\varepsilon^{-3/4}} = \tau_2(x_0, \varepsilon), \quad \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon)|_{y=\varepsilon^{-3/4}} = \bar{x}(x_0, \varepsilon); \quad (3.91)$$

во-вторых, при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $x_0 \in [a, b]$, $y \in [\exp(-\varepsilon^{-3/4}), \varepsilon^{-3/4}]$ выполняются асимптотические равенства

$$\theta_3(y, x_0, \varepsilon) = \tau_2(x_0, \varepsilon) + \varepsilon \int_{\varepsilon^{-3/4}}^y \frac{ds}{s g(x_1(x_0), s)} + O\left(\varepsilon^{5/4} \ln \frac{\varepsilon^{-3/4}}{y}\right), \quad (3.92)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \theta_3(y, x_0, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\tau_2(x_0, \varepsilon) + \varepsilon \int_{\varepsilon^{-3/4}}^y \frac{ds}{s g(x_1(x_0), s)} \right) + O\left(\varepsilon^{5/4} \ln \frac{\varepsilon^{-3/4}}{y}\right), \quad (3.93)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \theta_3(y, x_0, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{y} \left(\frac{1}{g(x_1(x_0), y)} + O(\varepsilon^{1/4}) \right), \quad (3.94)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial y} \theta_3(y, x_0, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{y} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{1}{g(x_1(x_0), y)} \right) + O(\varepsilon^{1/4}) \right), \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon) &= x_1(x_0) + O(\varepsilon^{1/4}), & \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon) &= O\left(\varepsilon \frac{y+1}{y}\right), \\ \frac{\partial}{\partial x_0} \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon) &= x'_1(x_0) + O(\varepsilon^{1/4}). \end{aligned} \quad (3.96)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку обоснование леммы 3.5 во многом аналогично изложенному выше доказательству леммы 3.1, то здесь опустим ряд технических деталей.

В данном случае для определения фигурирующей в (3.90), (3.91) функции $x = \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon)$ имеем дело с аналогичной (3.17) задачей Коши

$$\frac{dx}{dy} = \varepsilon F(x, y), \quad x|_{y=\varepsilon^{-3/4}} = \bar{x}(x_0, \varepsilon), \quad (3.97)$$

где $F(x, y)$ – функция (3.18). При ее исследовании нам потребуется аналогичное (3.20) множество

$$\Sigma = \{(x, y) : x_1(b') \leq x \leq x_1(a'), \exp(-\varepsilon^{-3/4}) \leq y \leq \varepsilon^{-3/4}\}, \quad (3.98)$$

где постоянные $a' < a$, $b' > b$ выбраны настолько близкими к a , b , что при $x_1(b') \leq x \leq x_1(a')$ сохраняется второе неравенство (3.3), т.е.

$$g(x, y) < 0 \quad \forall y \geq 0, \quad \forall x \in [x_1(b'), x_1(a')]. \quad (3.99)$$

Объединяя, далее, свойство (3.99) с (2.1)–(2.3), здесь вместо (3.21) получаем оценки вида

$$\begin{aligned} |F(x, y)| &\leq M_1 \frac{y+1}{y}, & |F'_x(x, y)| &\leq M_2 \frac{y+1}{y}, & |F''_{xx}(x, y)| &\leq M_3 \frac{y+1}{y} \\ &\forall (x, y) \in \Sigma. \end{aligned} \quad (3.100)$$

Последующие рассуждения повторяют соответствующий фрагмент доказательства леммы 3.1. А именно, в данном случае через X обозначаем банахово пространство функций $x(y, x_0)$, непрерывных по совокупности переменных

$(y, x_0) \in [\exp(-\varepsilon^{-3/4}), \varepsilon^{-3/4}] \times [a, b]$ вместе с частной производной $\partial x / \partial x_0$, а вместо (3.22) рассматриваем оператор

$$\mathcal{L}_0(x)(y, x_0) = \bar{x}(x_0, \varepsilon) + \varepsilon \int_{\varepsilon^{-3/4}}^y F(x(s, x_0), s) ds.$$

Опираясь, далее, на оценки (3.100) и формулы (3.49), (3.50), убеждаемся, что, во-первых, этот оператор переводит аналогичное (3.23) множество функций

$$\left\{ x(y, x_0) : x_1(b') \leq x(y, x_0) \leq x_1(a'), \left| \frac{\partial x}{\partial x_0}(y, x_0) \right| \leq 2 \max_{a \leq x_0 \leq b} |x'_1(x_0)| \right\} \subset X$$

в себя и является сжимающим; во-вторых, для его неподвижной точки $x = \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon)$ имеют место равномерные по $x_0 \in [a, b]$, $y \in [\exp(-\varepsilon^{-3/4}), \varepsilon^{-3/4}]$ асимптотические равенства

$$\tilde{x}(y, x_0, \varepsilon) = \bar{x}(x_0, \varepsilon) + \varepsilon \int_{\varepsilon^{-3/4}}^y \frac{f(x_1(x_0), s)}{s g(x_1(x_0), s)} ds + O\left(\varepsilon^{5/4} \int_y^{\varepsilon^{-3/4}} \frac{s+1}{s} ds\right), \quad (3.101)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_0} \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon) &= \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\bar{x}(x_0, \varepsilon) + \varepsilon \int_{\varepsilon^{-3/4}}^y \frac{f(x_1(x_0), s)}{s g(x_1(x_0), s)} ds \right) \\ &\quad + O\left(\varepsilon^{5/4} \int_y^{\varepsilon^{-3/4}} \frac{s+1}{s} ds\right), \end{aligned} \quad (3.102)$$

из которых в силу (2.1), (3.49), (3.50) вытекают требуемые формулы (3.96). Что же касается оставшихся равенств (3.92)–(3.95), то они получаются из соответствующего явного выражения

$$\theta_3(y, x_0, \varepsilon) = \tau_2(x_0, \varepsilon) + \varepsilon \int_{\varepsilon^{-3/4}}^y \frac{ds}{s g(\tilde{x}(s, x_0, \varepsilon), s)} \quad (3.103)$$

с учетом уже известных фактов (3.86), (3.87), (3.96). Лемма 3.5 доказана.

Покажем теперь, что, как и в предыдущих случаях, участки $\Lambda_3(\varepsilon)$ и $\Gamma_3(\varepsilon)$ экспоненциально близки.

ЛЕММА 3.6. *Участок $\Gamma_3(\varepsilon)$ имеет вид*

$$\Gamma_3(\varepsilon) = \left\{ (t, x, y) : t = \theta_{x_0, \varphi}^{(3)}(y, \varepsilon), x = \tilde{x}_{x_0, \varphi}(y, \varepsilon), \exp(-\varepsilon^{-3/4}) \leq y \leq \varepsilon^{-3/4} \right\}, \quad (3.104)$$

где

$$\theta_{x_0, \varphi}^{(3)}(y, \varepsilon)|_{y=\varepsilon^{-3/4}} = \tau_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon), \quad \tilde{x}_{x_0, \varphi}(y, \varepsilon)|_{y=\varepsilon^{-3/4}} = \bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon) \quad (3.105)$$

и равномерно по $(x_0, \varphi) \in S$, $y \in [\exp(-\varepsilon^{-3/4}), \varepsilon^{-3/4}]$

$$\begin{aligned} \left(\tilde{x}_{x_0, \varphi}(y, \varepsilon), \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}_{x_0, \varphi}(y, \varepsilon) \right) &= \left(\tilde{x}(y, x_0, \varepsilon), \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon) \right) + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right), \\ \left(\theta_{x_0, \varphi}^{(3)}(y, \varepsilon), \frac{\partial}{\partial y} \theta_{x_0, \varphi}^{(3)}(y, \varepsilon) \right) &= \left(\theta_3(y, x_0, \varepsilon), \frac{\partial}{\partial y} \theta_3(y, x_0, \varepsilon) \right) + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right), \\ M &= \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (3.106)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обоснование сформулированной леммы проводится по той же схеме, что и доказательство леммы 3.2. Поэтому имеет смысл опустить некоторые детали технического характера.

Как и в случае участка $\Gamma_1(\varepsilon)$, будем считать, что переменные t, y на $\Gamma_3(\varepsilon)$ связаны соотношением (3.27), где функция $\theta(y)$ принадлежит аналогичному (3.28) множеству

$$\Omega = \{\theta(y) \in C[\exp(-\varepsilon^{-3/4}), \varepsilon^{-3/4}] : 0 \leq \theta(y) \leq M\varepsilon^{1/4}, \theta|_{y=\varepsilon^{-3/4}} = \tau_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon)\}. \quad (3.107)$$

В этом случае переменная x , рассматриваемая как функция от y , удовлетворяет аналогичной (3.29) задаче Коши

$$\frac{dx}{dy} = \varepsilon F(x, y, \theta(y), \varepsilon), \quad x|_{y=\varepsilon^{-3/4}} = \bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon), \quad (3.108)$$

где $F(x, y, \theta, \varepsilon)$ – функция (3.30). Сохраняются здесь и аналогичные (3.31), (3.100) оценки

$$\begin{aligned} |F(x, y, \theta(y), \varepsilon)| &\leq M_1 \frac{y+1}{y}, & |F'_x(x, y, \theta(y), \varepsilon)| &\leq M_2 \frac{y+1}{y}, \\ |F(x, y, \theta(y), \varepsilon) - F(x, y)| &\leq M_3 \frac{y+1}{y} \exp\left(-\frac{M_4}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (3.109)$$

справедливые $\forall (x, y) \in \Sigma, \forall \theta(y) \in \Omega$, где Σ, Ω – множества (3.98), (3.107).

Последующий ход рассуждений стандартен: вводим в рассмотрение аналогичный (3.32) оператор

$$\mathcal{L}_0(x)(y) = \bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon) + \varepsilon \int_{\varepsilon^{-3/4}}^y F(x(s), s, \theta(s), \varepsilon) ds$$

и, опираясь на неравенства (3.109), убеждаемся, что на аналогичном (3.33) множестве функций

$$\{x(y) : x_1(b') \leq x(y) \leq x_1(a')\} \subset C[\exp(-\varepsilon^{-3/4}), \varepsilon^{-3/4}]$$

он удовлетворяет условиям принципа сжимающих отображений. Кроме того, нетрудно показать, что для его неподвижной точки $x = x_{x_0, \varphi, \theta}(y, \varepsilon)$ выполняются аналогичные (3.34), (3.35) оценки

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\partial}{\partial y} x_{x_0, \varphi, \theta}(y, \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon) \right| \\ &\leq \varepsilon M_2 \frac{y+1}{y} |x_{x_0, \varphi, \theta}(y, \varepsilon) - \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon)| + \varepsilon M_3 \frac{y+1}{y} \exp\left(-\frac{M_4}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (3.110)$$

$$\begin{aligned} &|x_{x_0, \varphi, \theta}(y, \varepsilon) - \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon)| \\ &\leq |\bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon) - \bar{x}(x_0, \varepsilon)| + \varepsilon M_2 \int_y^{\varepsilon^{-3/4}} \frac{s+1}{s} |x_{x_0, \varphi, \theta}(s, \varepsilon) - \tilde{x}(s, x_0, \varepsilon)| ds \\ &\quad + \varepsilon M_3 \int_y^{\varepsilon^{-3/4}} \frac{s+1}{s} ds \exp\left(-\frac{M_4}{\varepsilon}\right), \end{aligned} \quad (3.111)$$

где $\tilde{x}(y, x_0, \varepsilon)$ – функция из (3.90). Учитывая, далее, в (3.110), (3.111) второе соотношение (3.73), приходим к аналогичному (3.36) неравенству

$$|x_{x_0, \varphi, \theta}(y, \varepsilon) - \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon)| + \left| \frac{\partial}{\partial y} x_{x_0, \varphi, \theta}(y, \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial y} \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon) \right| \leq \exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right),$$

$$M = \text{const} > 0, \quad y \in [\exp(-\varepsilon^{-3/4}), \varepsilon^{-3/4}]. \quad (3.112)$$

Вопрос об отыскании функции $\theta(y)$ связан с рассмотрением аналогичного (3.37) интегрального уравнения

$$\theta(y) = \mathcal{L}_1(\theta)(y) \stackrel{\text{def}}{=} \tau_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon) + \varepsilon \int_{\varepsilon^{-3/4}}^y \frac{1}{s} G(x_{x_0, \varphi, \theta}(s, \varepsilon), s, \theta(s), \varepsilon) ds,$$

где $G(x, y, \theta, \varepsilon)$ – функция (3.38), обладающая прежними свойствами (3.39) (в которых теперь Σ, Ω – множества (3.98), (3.107)). Сохраняется здесь и аналогичная (3.40) оценка

$$\left| G(x_{x_0, \varphi, \theta}(y, \varepsilon), y, \theta(y), \varepsilon) - \frac{1}{g(\tilde{x}(y, x_0, \varepsilon), y)} \right| \leq M_2 |x_{x_0, \varphi, \theta}(y, \varepsilon) - \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon)|$$

$$+ M_3 \exp\left(-\frac{M_4}{\varepsilon}\right) \quad \forall y \in [\exp(-\varepsilon^{-3/4}), \varepsilon^{-3/4}],$$

из которой с учетом соотношений (3.88), (3.103), (3.112) получаем аналогичные (3.41) равномерные по $y \in [\exp(-\varepsilon^{-3/4}), \varepsilon^{-3/4}]$, $\theta(y) \in \Omega$, $(x_0, \varphi) \in S$ асимптотические представления

$$\mathcal{L}_1(\theta)(y) = \theta_3(y, x_0, \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathcal{L}_1(\theta)(y) = \frac{\partial}{\partial y} \theta_3(y, x_0, \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad M = \text{const} > 0. \quad (3.113)$$

Заключительный блок рассуждений повторяет соответствующее место из доказательства леммы 3.2. А именно, отталкиваясь от формул (3.113), нетрудно проверить, что оператор $\mathcal{L}_1$ при подходящем выборе константы M в (3.107) преобразует множество Ω в себя, а его неподвижная точка $\theta_{x_0, \varphi}^{(3)}(y, \varepsilon)$, существующая в силу принципа Шаудера, на самом деле единственна и обладает требуемым свойством из (3.106). Добавим еще, что функция $\tilde{x}_{x_0, \varphi}(y, \varepsilon)$ из формул (3.104), (3.105), как и в лемме 3.2, задается соотношением

$$\tilde{x}_{x_0, \varphi}(y, \varepsilon) = x_{x_0, \varphi, \theta}(y, \varepsilon)|_{\theta=\theta_{x_0, \varphi}^{(3)}}$$

и в силу (3.112) также удовлетворяет соответствующему асимптотическому равенству из (3.106). Лемма 3.6 доказана.

Как и в двух предыдущих случаях, отдельного рассмотрения требует вопрос об асимптотике очередных моментов времени $\tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon)$, $\tau_3(x_0, \varepsilon)$, которые, напомним, являются первыми положительными корнями уравнений (3.89). Из

соотношений (3.86), (3.87), (3.92), (3.93), (3.106) следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $(x_0, \varphi) \in S$

$$\tau_3(x_0, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \theta_3(y, x_0, \varepsilon)|_{y=\exp(-\varepsilon^{-3/4})} = -\frac{\varepsilon^{1/4}}{g(x_1(x_0), 0)} + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (3.114)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \tau_3(x_0, \varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\varepsilon^{1/4}}{g(x_1(x_0), 0)} \right) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (3.115)$$

$$\tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \theta_{x_0, \varphi}^{(3)}(y, \varepsilon)|_{y=\exp(-\varepsilon^{-3/4})} = \tau_3(x_0, \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right), \quad (3.116)$$

$$M = \text{const} > 0.$$

Кроме того, теперь мы можем найти и первый положительный корень $t_{(x_0, \varphi)}^{(1)}(\varepsilon)$ уравнения (2.27). Этот корень задается равенством

$$t_{(x_0, \varphi)}^{(1)}(\varepsilon) = \theta_{x_0, \varphi}^{(3)}(y, \varepsilon)|_{y=1}$$

и в силу (3.86), (3.92), (3.106) допускает при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерное по $(x_0, \varphi) \in S$ асимптотическое представление

$$t_{(x_0, \varphi)}^{(1)}(\varepsilon) = \left(\frac{1}{b_0(x_0)} - \frac{1}{b_0(x_1(x_0))} \right) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon). \quad (3.117)$$

Оставшиеся участки $\Gamma_4(\varepsilon)$, $\Lambda_4(\varepsilon)$ кривых (3.8), (3.9), отвечающие значениям t из отрезков $[\tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon), h]$, $[\tau_3(x_0, \varepsilon), h]$, по аналогии с фрагментом $\Gamma_4(\varepsilon)$ траектории (1.3) назовем участками медленного движения. Данные участки характерны тем, что на них переменная y экспоненциально мала (точнее говоря, $y \leq \exp(-\varepsilon^{-3/4})$), а переменная x монотонно убывает (см. рис. 5). В отличие от трех предыдущих участков в качестве параметра на $\Gamma_4(\varepsilon)$, $\Lambda_4(\varepsilon)$ оставим t , а вместо переменной y будем рассматривать $v = \varepsilon \ln y$. В этом случае справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3.7. *Для участка медленного движения $\Lambda_4(\varepsilon)$ имеет место равенство*

$$\Lambda_4(\varepsilon) = \left\{ (t, x, y) : t \in [\tau_3(x_0, \varepsilon), h], x = x(t, x_0, \varepsilon), y = \exp \frac{v(t, x_0, \varepsilon)}{\varepsilon} \right\}, \quad (3.118)$$

где функции $x(t, x_0, \varepsilon)$, $v(t, x_0, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ допускают равномерные по начальному условию $x_0 \in [a, b]$ и по $t \in [\tau_3(x_0, \varepsilon), h]$ асимптотические представления

$$\begin{aligned} x(t, x_0, \varepsilon) &= x(t, s)|_{s=x_1(x_0)} + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ \frac{\partial x}{\partial x_0}(t, x_0, \varepsilon) &= \frac{f(x(t, s), 0)}{f(s, 0)} \Big|_{s=x_1(x_0)} \cdot x'_1(x_0) + O(\sqrt{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (3.119)$$

$$\begin{aligned} v(t, x_0, \varepsilon) &= v(t, x_0) + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ \frac{\partial v}{\partial x_0}(t, x_0, \varepsilon) &= \frac{g(x(t, s), 0) - g(s, 0)}{f(s, 0)} \Big|_{s=x_1(x_0)} \cdot x'_1(x_0) + O(\sqrt{\varepsilon}). \end{aligned} \quad (3.120)$$

Здесь

$$v(t, x_0) = \int_0^t g(x(\tau, s), 0) d\tau \Big|_{s=x_1(x_0)} = \gamma_1(x(t, s), x_1)|_{s=x_1(x_0), x_1=x_1(x_0)}, \quad (3.121)$$

$\gamma_1(x, x_1)$, $x_1(x_0)$ – функции из (2.7), (2.10), а $x(t, s)$ – решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(x, 0), \quad x|_{t=0} = s, \quad s > 0. \quad (3.122)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (3.7) следует, что фигурирующие в (3.118) функции $x(t, x_0, \varepsilon)$, $v(t, x_0, \varepsilon)$ удовлетворяют задаче Коши

$$\dot{x} = f\left(x, \exp \frac{v}{\varepsilon}\right), \quad \dot{v} = g\left(x, \exp \frac{v}{\varepsilon}\right), \quad (3.123)$$

$$x|_{t=\tau_3(x_0, \varepsilon)} = \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon)|_{y=\exp(-\varepsilon^{-3/4})}, \quad v|_{t=\tau_3(x_0, \varepsilon)} = -\varepsilon^{1/4}. \quad (3.124)$$

Асимптотический анализ этой задачи проведем при априорном условии

$$v(t, x_0, \varepsilon) \leq -\varepsilon^{1/4} \quad \forall t \in [\tau_3(x_0, \varepsilon), h]. \quad (3.125)$$

Опираясь на оценку (3.125) и отбрасывая в правых частях системы (3.123) слагаемые порядка $\exp(-\varepsilon^{-3/4})$, получаем более простую систему

$$\dot{x} = f(x, 0), \quad \dot{v} = g(x, 0). \quad (3.126)$$

Далее, из (3.126) очевидным образом следует, что с точностью до экспоненциально малых добавок компонента $x(t, x_0, \varepsilon)$ определяется из задачи Коши

$$\dot{x} = f(x, 0), \quad x|_{t=\tau_3(x_0, \varepsilon)} = \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon)|_{y=\exp(-\varepsilon^{-3/4})}, \quad (3.127)$$

а компонента $v(t, x_0, \varepsilon)$ задается равенством

$$v(t, x_0, \varepsilon) = -\varepsilon^{1/4} + \int_{\tau_3(x_0, \varepsilon)}^t g(x(\tau, x_0, \varepsilon), 0) d\tau. \quad (3.128)$$

Для анализа задачи (3.127) привлечем известные формулы (3.114), (3.115) и вытекающие из (3.101), (3.102), (3.49), (3.50) асимптотические представления

$$\begin{aligned} \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon)|_{y=\exp(-\varepsilon^{-3/4})} &= \left(x - \frac{f(x, 0)}{g(x, 0)} \varepsilon^{1/4}\right) \Big|_{x=x_1(x_0)} + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ \frac{\partial}{\partial x_0} \tilde{x}(y, x_0, \varepsilon) \Big|_{y=\exp(-\varepsilon^{-3/4})} &= \frac{\partial}{\partial x_0} \left[\left(x - \frac{f(x, 0)}{g(x, 0)} \varepsilon^{1/4}\right) \Big|_{x=x_1(x_0)} \right] + O(\sqrt{\varepsilon}). \end{aligned} \quad (3.129)$$

В результате убеждаемся, что функция $x(t, x_0, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $x_0 \in [a, b]$ и по $t \in [\tau_3(x_0, \varepsilon), h]$ обладает требуемой асимптотикой (3.119). Учитывая затем уже установленные равенства (3.119) вместе со свойствами (3.114), (3.115) в правой части из (3.128), для компоненты $v(t, x_0, \varepsilon)$ получаем нужные асимптотические формулы (3.120).

Итак, мы показали, что при условии (3.125) асимптотические представления (3.119), (3.120) действительно выполняются. Покажем теперь, что справедливо и само условие (3.125). В связи с этим остановимся на некоторых свойствах функции (3.121).

В первую очередь обратим внимание, что в силу (2.10), (2.12) имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \gamma_1(x, x_1(x_0)) &< 0 \quad \text{при } x_3(x_0) < x < x_1(x_0), \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}(x_1(x_0), x_1(x_0)) &> 0, \quad \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}(x_3(x_0), x_1(x_0)) < 0, \end{aligned}$$

где, напомним, $x_3(x_0) \in (0, q_2)$ – корень уравнения (2.16) при $x_1 = x_1(x_0)$. Кроме того, согласно условию (2.4) решение $x(t, s)|_{s=x_1(x_0)}$ задачи Коши (3.122) монотонно убывает и при $t = h(x_0)$ (см. (3.2)) достигает значения $x_3(x_0)$.

Суммируя перечисленные факты, приходим к выводу, что $v(t, x_0) < 0$ при

$$0 < t < h(x_0), \quad v(0, x_0) = v(h(x_0), x_0) = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial t} \right|_{t=0} = g(x_1(x_0), 0) < 0.$$

А так как $h < h(x_0)$ (см. (3.2)), то на интересующем нас отрезке $0 \leq t \leq h$ функция (3.121) обладает свойствами

$$v(0, x_0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(0, x_0) < 0, \quad v(t, x_0) < 0 \quad \forall t \in (0, h]. \quad (3.130)$$

Остается добавить, что из (3.120), (3.124), (3.130) требуемое неравенство (3.125) вытекает очевидным образом. Лемма 3.7 доказана.

Переход от участка $\Lambda_4(\varepsilon)$ к $\Gamma_4(\varepsilon)$ в отличие от предыдущих случаев не требует каких-либо дополнительных усилий. Действительно, функции $x_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$, $v_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \ln y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$ на отрезке $t \in [\tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon), h]$ определяются из задачи Коши

$$\dot{x} = f\left(x, \exp \frac{v}{\varepsilon}\right), \quad \dot{v} = g\left(x, \exp \frac{v}{\varepsilon}\right) - \exp \frac{\varphi(t-h)}{\varepsilon}, \quad (3.131)$$

$$x|_{t=\tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon)} = \tilde{x}_{x_0, \varphi}(y, \varepsilon)|_{y=\exp(-\varepsilon^{-3/4})}, \quad v|_{t=\tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon)} = -\varepsilon^{1/4}, \quad (3.132)$$

которая асимптотически близка к (3.123), (3.124). Точнее говоря, согласно (3.106), (3.116) начальные условия (3.124) и (3.132) близки с точностью до величин порядка $\exp(-M/\varepsilon)$, $M = \text{const} > 0$, а фигурирующее в (3.131) дополнительное слагаемое $\exp(\varphi(t-h)/\varepsilon)$ интегрально мало (см. (3.5), (3.6)). Тем самым, для задачи (3.131), (3.132) остаются в силе все построения, проделанные при доказательстве леммы 3.7, а значит, справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3.8. *Участок медленного движения $\Gamma_4(\varepsilon)$ задается аналогичным (3.118) равенством*

$$\Gamma_4(\varepsilon) = \left\{ (t, x, y) : \tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon) \leq t \leq h, x = x_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon), y = \exp \frac{v_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)}{\varepsilon} \right\}, \quad (3.133)$$

причем для любого фиксированного $\delta \in (0, h)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ выполняются равномерные по начальным условиям $(x_0, \varphi) \in S$ и по $t \in [\tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon), h]$ асимптотические представления

$$x_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon) = x(t, x_0, \varepsilon) + \begin{cases} O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right) & \text{при } \tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon) \leq t \leq h - \delta, \\ O(\varepsilon) & \text{при } h - \delta \leq t \leq h, \end{cases} \quad (3.134)$$

$$v_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon) = v(t, x_0, \varepsilon) + \begin{cases} O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right) & \text{при } \tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon) \leq t \leq h - \delta, \\ O(\varepsilon) & \text{при } h - \delta \leq t \leq h. \end{cases} \quad (3.135)$$

Суммируя результаты лемм 3.1–3.8, мы можем утверждать, что на отрезке $t \in [0, h - \delta]$ для компонент $x_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$, $y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$ решения задачи Коши (1.25), (2.26) справедливы равномерные по $(x_0, \varphi) \in S$ и t асимптотические равенства

$$\begin{aligned} x_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon) &= x(t, x_0, \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right), \\ y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon) &= y(t, x_0, \varepsilon) \left(1 + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right)\right), \quad M = \text{const} > 0, \end{aligned} \quad (3.136)$$

где $x(t, x_0, \varepsilon)$, $y(t, x_0, \varepsilon)$ – компоненты решения задачи Коши (3.7). В случае же, когда t принадлежит отрезку $[h - \delta, h]$, остатки в (3.136) становятся величинами порядка ε .

3.2. Завершение асимптотического анализа задачи Коши. Заключительный этап построения асимптотики функций $x_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$, $y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$ связан с рассмотрением промежутка времени $h \leq t \leq t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon)$, где, напомним, $t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon)$ – второй положительный корень уравнения (2.27) (существование которого еще предстоит доказать). Для удобства последующего анализа разобьем упомянутый промежуток на несколько частей.

Обратимся сначала к отрезку $h \leq t \leq h + \delta$, где постоянная $\delta > 0$ подходящим образом мала. А именно, будем считать, что

$$\delta < \frac{1}{2} \min\left\{h, \min_{a \leq x_0 \leq b} T(x_0) - h\right\}. \quad (3.137)$$

Здесь

$$T(x_0) = - \int_{x_2(x_0)}^{x_1(x_0)} \frac{ds}{f(s, 0)} > h(x_0), \quad T(x_0^*) = T_*, \quad (3.138)$$

где, напомним, $x_2 = x_2(x_0)$ – корень уравнения (2.11) при $x_1 = x_1(x_0)$, а T_* – величина из (2.19). Кроме того, предполагаем, что

$$x(t, s)|_{s=x_1(x_0)} \in (a, b) \quad \forall t \in [T(x_0) - \delta, T(x_0) + \delta], \quad \forall x_0 \in [a, b], \quad (3.139)$$

где $x(t, s)|_{s=x_1(x_0)}$ – функция из (3.119). Подчеркнем, что при $\delta = 0$ требование (3.139) заведомо выполняется, так как в силу (3.1), (3.138) имеем

$$x(t, s)|_{t=T(x_0), s=x_1(x_0)} = x_2(x_0) = \psi(x_0) \in (a, b).$$

При $t \in [h, h + \delta]$ функции $x_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$, $v_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \ln y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$ определяются из аналогичной (3.131), (3.132) задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f\left(x, \exp \frac{v}{\varepsilon}\right), & \dot{v} &= g\left(x, \exp \frac{v}{\varepsilon}\right) - y_{(x_0, \varphi)}(t - h, \varepsilon), \\ x|_{t=h} &= x_{(x_0, \varphi)}(h, \varepsilon), & v|_{t=h} &= v_{(x_0, \varphi)}(h, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.140)$$

начальные условия в которой и функция $y_{(x_0, \varphi)}(t - h, \varepsilon)$ уже известны. Анализ этой задачи будем проводить при аналогичном (3.125) априорном предположении

$$v_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon) \leq -M, \quad M = \text{const} > 0. \quad (3.141)$$

Из оценки (3.141) очевидным образом следует, что фигурирующие в системе (3.140) функции $f(x, \exp(v/\varepsilon))$, $g(x, \exp(v/\varepsilon))$ с точностью до величин порядка $\exp(-M/\varepsilon)$, $M = \text{const} > 0$ близки к $f(x, 0)$, $g(x, 0)$. А отсюда и из асимптотических равенств для $x_{(x_0, \varphi)}(h, \varepsilon)$, $v_{(x_0, \varphi)}(h, \varepsilon)$ (см. (3.119), (3.120), (3.133)–(3.135)) заключаем, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $(x_0, \varphi) \in S$, $t \in [h, h + \delta]$ имеют место представления

$$\begin{aligned} x_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon) &= x(t, s)|_{s=x_1(x_0)} + O(\sqrt{\varepsilon}), \\ v_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon) &= v(t, x_0) - \int_0^{t-h} y_{(x_0, \varphi)}(\tau, \varepsilon) d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}). \end{aligned} \quad (3.142)$$

Отдельного рассмотрения требует вопрос об асимптотическом поведении интегрального слагаемого из (3.142). Справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА 3.9. *При $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $(x_0, \varphi) \in S$, $t \in [\tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon) + h, h + \delta]$ выполняется асимптотическое равенство*

$$\int_0^{t-h} y_{(x_0, \varphi)}(\tau, \varepsilon) d\tau = \int_{x_0}^{x_1(x_0)} \frac{ds}{a_0(s)} + O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (3.143)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $I_{(x_0, \varphi)}^{(k)}(\varepsilon)$, $k = 1, 2, 3$, интегралы от функции $y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$ по отрезкам

$$0 \leq t \leq \tau_{(x_0, \varphi)}^{(1)}(\varepsilon), \quad \tau_{(x_0, \varphi)}^{(1)}(\varepsilon) \leq t \leq \tau_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon), \quad \tau_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon) \leq t \leq \tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon)$$

соответственно. Для первого из них согласно формулам (3.11)–(3.16), (3.25), (3.26) имеем

$$\begin{aligned} I_{(x_0, \varphi)}^{(1)}(\varepsilon) &= \int_1^{\varepsilon^{-3/4}} y \frac{\partial}{\partial y} \theta_{x_0, \varphi}^{(1)}(y, \varepsilon) dy = \varepsilon \int_1^{\varepsilon^{-3/4}} \left(\frac{1}{g(x_0, y)} + O(\varepsilon^{1/4}) \right) dy \\ &= \frac{\varepsilon^{1/4}}{b_0(x_0)} + O(\sqrt{\varepsilon}). \end{aligned} \quad (3.144)$$

Далее, соотношения (3.45)–(3.55), (3.70)–(3.73) приводят к равенствам

$$\begin{aligned} I_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon)}^{\bar{\bar{x}}_{x_0, \varphi}(\varepsilon)} u_{x_0, \varphi}(x, \varepsilon) \frac{dx}{f(x, u_{x_0, \varphi}(x, \varepsilon)/\varepsilon)} \\ &= \int_{\bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon)}^{\bar{\bar{x}}_{x_0, \varphi}(\varepsilon)} \frac{1}{a_0(x)} \left(1 + O\left(\frac{\varepsilon}{\gamma_0(x, x_0)}\right) \right) dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1(x_0)} \frac{ds}{a_0(s)} + \left(\frac{1}{b_0(x_1(x_0))} - \frac{1}{b_0(x_0)} \right) \varepsilon^{1/4} + O(\sqrt{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (3.145)$$

а из формул (3.90)–(3.96), (3.104)–(3.106) вытекает, что

$$\begin{aligned} I_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon) &= \int_{\varepsilon^{-3/4}}^{\exp(-\varepsilon^{-3/4})} y \frac{\partial}{\partial y} \theta_{x_0, \varphi}^{(3)}(y, \varepsilon) dy \\ &= \varepsilon \int_{\varepsilon^{-3/4}}^{\exp(-\varepsilon^{-3/4})} \left(\frac{1}{g(x_1(x_0), y)} + O(\varepsilon^{1/4}) \right) dy = -\frac{\varepsilon^{1/4}}{b_0(x_1(x_0))} + O(\sqrt{\varepsilon}). \end{aligned} \quad (3.146)$$

Проделанные подсчеты показывают, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по начальным условиям $(x_0, \varphi) \in S$ и по $t \in [\tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon) + h, h + \delta]$ справедливо асимптотическое представление

$$\int_0^{t-h} y_{(x_0, \varphi)}(\tau, \varepsilon) d\tau = \int_{x_0}^{x_1(x_0)} \frac{ds}{a_0(s)} + \int_{\tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon)}^{t-h} y_{(x_0, \varphi)}(\tau, \varepsilon) d\tau + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (3.147)$$

отличающееся от (3.143) лишь одним интегральным слагаемым. Последнее же, как нетрудно увидеть, экспоненциально мало. Действительно, поскольку в силу условия $\delta < h$ (см. (3.137)) имеют место включения

$$[\tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon), t - h] \subset [\tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon), \delta] \subset [\tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon), h],$$

то для $y_{(x_0, \varphi)}(\tau, \varepsilon)$ мы вправе воспользоваться соотношением

$$y_{(x_0, \varphi)}(\tau, \varepsilon) = \exp \frac{v_{(x_0, \varphi)}(\tau, \varepsilon)}{\varepsilon},$$

где $v_{(x_0, \varphi)}(\tau, \varepsilon)$ – компонента решения задачи Коши (3.131), (3.132). А отсюда и из (3.120), (3.135) выводим оценки

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon)}^{t-h} y_{(x_0, \varphi)}(\tau, \varepsilon) d\tau &\leq \int_{\tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon)}^h y_{(x_0, \varphi)}(\tau, \varepsilon) d\tau \leq M \exp(-\varepsilon^{-3/4}), \\ M &= \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (3.148)$$

Лемма 3.9 доказана.

Установленная лемма свидетельствует о том, что на отрезке $0 \leq t \leq h$ поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ функции $y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$ носит δ -образный характер: согласно (3.144)–(3.147) интеграл от нее по асимптотически малому промежутку $[0, \tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon)]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет конечный предел, а интеграл по оставшейся части $[\tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon), h]$ экспоненциально мал (см. (3.148)). Указанное поведение $y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$ отражается на компоненте $v_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$ следующим образом: из

(3.142), (3.143) вытекает, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ для нее выполняется равномерное по $(x_0, \varphi) \in S$ и по $t \in [\tau_{(x_0, \varphi)}^{(3)}(\varepsilon) + h, h + \delta]$ асимптотическое равенство

$$v_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon) = w(t, x_0) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (3.149)$$

где

$$w(t, x_0) = v(t, x_0) - \int_{x_0}^{x_1(x_0)} \frac{ds}{a_0(s)}. \quad (3.150)$$

Завершая рассмотрение отрезка времени $h \leq t \leq h + \delta$, напомним, что асимптотические представления (3.142), (3.149) были выведены при априорном предположении (3.141). Для его проверки обратим внимание, что функция (3.150) обладает свойствами

$$\begin{aligned} w(t, x_0) < 0 \quad \text{при} \quad h \leq t < T(x_0), \quad w(t, x_0)|_{t=T(x_0)} = 0, \\ \left. \frac{\partial w}{\partial t}(t, x_0) \right|_{t=T(x_0)} = g(x_2(x_0), 0) > 0, \end{aligned} \quad (3.151)$$

где $T(x_0)$ – момент времени (3.138). А так как $h + \delta < \min_{a \leq x_0 \leq b} T(x_0)$ (см. (3.137)), то имеем $w(t, x_0) < 0$ для всех $t \in [h, h + \delta]$.

Объединяя факт отрицательности $w(t, x_0)$ с оценкой $v(h, x_0) < 0$ (см. (3.130)), приходим к выводу, что требуемое неравенство (3.141) действительно выполняется при фиксированном M , удовлетворяющем условию

$$0 < M < \min_{a \leq x_0 \leq b} \left[\min \left\{ -v(h, x_0), -\max_{h \leq t \leq h + \delta} w(t, x_0) \right\} \right],$$

и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Перейдем теперь к отрезку $h + \delta \leq t \leq \min(T(x_0) - \delta, 2h + \delta)$, длина которого в силу (3.137) положительна. При данных значениях t интересующие нас функции $x_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$, $v_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$ удовлетворяют аналогичной (3.140) задаче Коши

$$\dot{x} = f\left(x, \exp \frac{v}{\varepsilon}\right), \quad \dot{v} = g\left(x, \exp \frac{v}{\varepsilon}\right) - \exp \frac{v_{(x_0, \varphi)}(t - h, \varepsilon)}{\varepsilon}, \quad (3.152)$$

$$x|_{t=h+\delta} = x_{(x_0, \varphi)}(h + \delta, \varepsilon), \quad v|_{t=h+\delta} = v_{(x_0, \varphi)}(h + \delta, \varepsilon), \quad (3.153)$$

где функция $v_{(x_0, \varphi)}(t - h, \varepsilon)$ и начальные условия уже известны. Анализ этой задачи проведем в предположениях

$$v_{(x_0, \varphi)}(t - h, \varepsilon) \leq -M_1, \quad v_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon) \leq -M_2, \quad M_1, M_2 = \text{const} > 0. \quad (3.154)$$

Впрочем, первое из этих условий на рассматриваемом отрезке изменения t заведомо выполняется, что следует из формул (3.120), (3.135), (3.142), (3.149) и отмеченных выше свойств (3.130), (3.151) функций $v(t, x_0)$, $w(t, x_0)$. Справедливости же второго приходится требовать а priori.

Оценки (3.154) позволяют отбросить в правых частях системы (3.152) слагаемые порядка $\exp(-M/\varepsilon)$, $M = \text{const} > 0$, и перейти к системе (3.126). Далее,

согласно равенствам (3.153) и (3.142), (3.149) эту систему следует дополнить начальными условиями

$$x|_{t=h+\delta} = x(h+\delta, s)|_{s=x_1(x_0)} + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad v|_{t=h+\delta} = w(h+\delta, x_0) + O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (3.155)$$

Несложный анализ получившейся задачи Коши (3.126), (3.155) приводит к равномерным по $(x_0, \varphi) \in S$, $t \in [h+\delta, \min(T(x_0) - \delta, 2h+\delta)]$ асимптотическим представлениям

$$x_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon) = x(t, s)|_{s=x_1(x_0)} + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad v_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon) = w(t, x_0) + O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (3.156)$$

Для придания формулам (3.156) законной силы осталось убедиться в справедливости второго условия (3.154). Из второго равенства (3.156) и свойств (3.151) следует, что оно будет выполняться при

$$0 < M_2 < \min_{a \leq x_0 \leq b} \left(- \max_{h+\delta \leq t \leq T(x_0) - \delta} w(t, x_0) \right).$$

Интересно отметить, что область применимости асимптотических представлений (3.156) можно расширить с помощью метода шагов. А именно, рассматривая последовательно отрезки времени длины не более h и рассуждая на каждом из них подобно описанному выше, нетрудно показать, что формулы (3.156) остаются в силе до тех пор, пока справедлива оценка $v_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon) \leq -\varepsilon^{1/4}$, т.е. при $h+\delta \leq t \leq \tau_{(x_0, \varphi)}^{(4)}(\varepsilon)$. Здесь $\tau_{(x_0, \varphi)}^{(4)}(\varepsilon)$ – второй положительный корень первого уравнения (3.89), для которого из (3.156) вытекает равномерное по $(x_0, \varphi) \in S$ асимптотическое равенство

$$\tau_{(x_0, \varphi)}^{(4)}(\varepsilon) = T(x_0) - \frac{\varepsilon^{1/4}}{g(x_2(x_0), 0)} + O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (3.157)$$

На оставшемся промежутке $\tau_{(x_0, \varphi)}^{(4)}(\varepsilon) \leq t \leq t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon)$ снова работают развитые в предыдущем пункте геометрические методы. А именно, построение асимптотики кривой

$$\{(t, x, y) : \tau_{(x_0, \varphi)}^{(4)}(\varepsilon) \leq t \leq t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon), x = x_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon), y = y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)\} \quad (3.158)$$

проводится по той же схеме, что и в случае участков $\Gamma_3(\varepsilon)$, $\Lambda_3(\varepsilon)$ кривых (3.8), (3.9) (см. леммы 3.5, 3.6). Выбирая в качестве параметра на кривой (3.158) переменную $y \in [\exp(-\varepsilon^{-3/4}), 1]$, нетрудно показать, что в данном случае переменные t, x как функции от y обладают при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерной по $(x_0, \varphi) \in S$, $y \in [\exp(-\varepsilon^{-3/4}), 1]$ асимптотикой

$$x = x_{(x_0, \varphi)}(\tau_{(x_0, \varphi)}^{(4)}(\varepsilon), \varepsilon) + \varepsilon \int_{\exp(-\varepsilon^{-3/4})}^y \frac{f(x_2(x_0), s)}{s g(x_2(x_0), s)} ds + O\left(\varepsilon^{5/4} \int_{\exp(-\varepsilon^{-3/4})}^y \frac{s+1}{s} ds\right), \quad (3.159)$$

$$t = \tau_{(x_0, \varphi)}^{(4)}(\varepsilon) + \varepsilon \int_{\exp(-\varepsilon^{-3/4})}^y \frac{ds}{s g(x_2(x_0), s)} + O\left(\varepsilon^{5/4} \ln \frac{y}{\exp(-\varepsilon^{-3/4})}\right), \quad (3.160)$$

$$\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\varepsilon}{y} \left(\frac{1}{g(x_2(x_0), y)} + O(\varepsilon^{1/4}) \right) > 0, \quad (3.161)$$

где в силу (3.156), (3.157)

$$x_{(x_0, \varphi)}(t_{(x_0, \varphi)}^{(4)}(\varepsilon), \varepsilon) = \left(x - \frac{f(x, 0)}{g(x, 0)} \varepsilon^{1/4} \right) \Big|_{x=x_2(x_0)} + O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (3.162)$$

Что же касается момента времени $t = t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon)$, то он получается из (3.160) при $y = 1$ и вследствие этого допускает при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерную по $(x_0, \varphi) \in S$ асимптотику

$$t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon) = T(x_0) + O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (3.163)$$

Завершая построение асимптотики решения задачи Коши (1.25), (2.26), отметим, что в силу формул (3.142), (3.149), (3.156) равномерно по $(x_0, \varphi) \in S$, $t \in [t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon) - \delta, t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon)]$ выполняется асимптотическое равенство

$$y_{(x_0, \varphi)}(t - h, \varepsilon) = O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right), \quad M = \text{const} > 0.$$

А это значит, что кривая

$$\{(t, x, y) : t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon) - \delta \leq t \leq t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon), x = x_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon), y = y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)\} \quad (3.164)$$

аппроксимируется с экспоненциальной точностью соответствующей фазовой кривой системы из (3.7). Точнее говоря, при $t \in [t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon) - \delta, t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon)]$ справедливы аналоги формул (3.136), в которых функции $x(t, x_0, \varepsilon)$, $y(t, x_0, \varepsilon)$ заменяются компонентами решения задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y), & \varepsilon \dot{y} &= g(x, y)y, \\ x|_{t=t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon)} &= x_{(x_0, \varphi)}(t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon), \varepsilon), & y|_{t=t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon)} &= 1. \end{aligned} \quad (3.165)$$

§ 4. Существование и устойчивость релаксационного цикла

4.1. Доказательство существования цикла. Проведенный асимптотический анализ свидетельствует о том, что оператор (2.28) корректно определен на множестве (2.25). Убедимся теперь, что при подходящем выборе констант m_1, m_2 в (2.25) имеет место нужное свойство $\Pi_\varepsilon(S) \subset S$.

Заметим в первую очередь, что в силу формул (3.159), (3.162), (3.163) справедливо равномерное по $(x_0, \varphi) \in S$ асимптотическое представление

$$x_{(x_0, \varphi)}(t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon), \varepsilon) = \psi(x_0) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (4.1)$$

где $\psi(x_0)$ – отображение (2.14). А отсюда и из (3.1) заключаем, что

$$x_{(x_0, \varphi)}(t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon), \varepsilon) \in (a, b) \quad \forall (x_0, \varphi) \in S. \quad (4.2)$$

На следующем этапе покажем, что при соответствующем выборе постоянных $m_1, m_2 > 0$ и $\forall (x_0, \varphi) \in S$ на промежутке $t \in [-h, 0)$ для функции $v_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \ln y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$ выполняются оценки

$$m_2 t < v_{(x_0, \varphi)}(t + t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon), \varepsilon) < m_1 t. \quad (4.3)$$

Попробуем сначала оценить сверху и снизу функцию

$$\begin{aligned} \dot{v}_{(x_0, \varphi)}(t + t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon), \varepsilon) &= g(x_{(x_0, \varphi)}(t + t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon), \varepsilon), y_{(x_0, \varphi)}(t + t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon), \varepsilon)) \\ &\quad - y_{(x_0, \varphi)}(t + t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon) - h, \varepsilon) \end{aligned} \quad (4.4)$$

на промежутке времени $t \in [T(x_0) - \delta - t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon), 0]$. Поскольку в этом случае справедливо включение $t + t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon) \in [T(x_0) - \delta, T(x_0) + \delta]$, то в силу (3.139), (3.156), (3.159), (3.162) при рассматриваемых t имеем

$$a \leq x_{(x_0, \varphi)}(t + t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon), \varepsilon) \leq b. \quad (4.5)$$

Что же касается функции $y_{(x_0, \varphi)}(t + t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon) - h, \varepsilon)$, то она при указанных значениях t является величиной порядка $\exp(-M/\varepsilon)$, $M = \text{const} > 0$. Действительно, так как в силу (3.137)

$$t + t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon) - h \in [T(x_0) - \delta - h, T(x_0) + \delta - h] \subset [\delta, T(x_0) - \delta],$$

то согласно формулам (3.135), (3.142), (3.149), (3.156) здесь справедливы оценки

$$\begin{aligned} v_{(x_0, \varphi)}(t + t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon) - h, \varepsilon) &\leq -M, \\ y_{(x_0, \varphi)}(t + t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon) - h, \varepsilon) &= \exp \frac{v_{(x_0, \varphi)}(t + t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon) - h, \varepsilon)}{\varepsilon} \leq \exp \left(-\frac{M}{\varepsilon} \right), \\ M &= \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Объединяя соотношения (4.4)–(4.6), приходим к выводу, что на промежутке времени $T(x_0) - \delta - t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon) \leq t < 0$ имеют место неравенства

$$m_1 < \dot{v}_{(x_0, \varphi)}(t + t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon), \varepsilon) < m_2 \quad (4.7)$$

с постоянными m_1, m_2 :

$$m_2 > \max_{\substack{a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq 1}} g(x, y), \quad 0 < m_1 < \min_{\substack{a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq 1}} g(x, y) \quad (4.8)$$

(подчеркнем, что в силу первого свойства (3.3) фигурирующие в (4.8) максимум и минимум положительны). Интегрируя, далее, получившиеся неравенства (4.7) по отрезку $[t, 0]$, убеждаемся в справедливости оценок (4.3) на промежутке $t \in [T(x_0) - \delta - t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon), 0]$.

Для распространения оценок (4.3) на оставшийся отрезок

$$-h \leq t \leq T(x_0) - \delta - t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon)$$

уточним выбор постоянных m_1, m_2 . С этой целью введем в рассмотрение функции

$$\bar{v}(t, x_0) = \begin{cases} v(t + T(x_0), x_0) & \text{при } t \in [-T(x_0), -T(x_0) + h], \\ w(t + T(x_0), x_0) & \text{при } t \in (-T(x_0) + h, 0], \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\underline{v}(t, x_0) = \begin{cases} v(t + T(x_0), x_0) & \text{при } t \in [-T(x_0), -T(x_0) + h), \\ w(t + T(x_0), x_0) & \text{при } t \in [-T(x_0) + h, 0], \end{cases} \quad (4.10)$$

где, напомним, $v(t, x_0)$, $w(t, x_0)$ – функции (3.121), (3.150), и предположим, что

$$m_2 t < \underline{v}(t, x_0) \leq \bar{v}(t, x_0) < m_1 t \quad \forall t \in [-h, -\delta], \quad \forall x_0 \in [a, b]. \quad (4.11)$$

Отметим, что поскольку в силу (3.130), (3.151) функции (4.9), (4.10) строго отрицательны при $-h \leq t \leq -\delta$, то требование (4.11) будет заведомо выполняться при подходящем увеличении m_2 и уменьшении m_1 .

Указанный выбор m_1 , m_2 приводит к желаемой цели. Действительно, из (4.11) и асимптотических представлений (3.135), (3.142), (3.149), (3.156) интересующие нас оценки (4.3) при $t \in [-h, T(x_0) - \delta - t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon)]$ вытекают автоматически.

Подведем итог. Полученные выше соотношения (4.2), (4.3), собственно говоря, и означают, что справедливо требуемое свойство $\Pi_\varepsilon(S) \subset S$. Учитывая это обстоятельство и опираясь на принцип Шаудера, заключаем, что оператор Π_ε , очевидным образом являющийся компактным, имеет в множестве S по крайней мере одну неподвижную точку

$$(x_0^*(\varepsilon), \varphi_*(t, \varepsilon)), \quad -h \leq t \leq 0. \quad (4.12)$$

Ясно также, что решение

$$(x_*(t, \varepsilon), y_*(t, \varepsilon)) \quad (4.13)$$

системы (1.25) с начальными условиями $x|_{t=0} = x_0^*(\varepsilon)$, $y = \exp(\varphi_*(t, \varepsilon)/\varepsilon)$, $-h \leq t \leq 0$, оказывается периодическим с периодом

$$T_*(\varepsilon) = t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon)|_{x_0=x_0^*(\varepsilon), \varphi=\varphi_*}. \quad (4.14)$$

Убедимся теперь, что периодическое решение (4.13) обладает требуемыми в теореме 2.1 асимптотическими свойствами (2.21)–(2.24). В связи с этим обратим внимание, что в силу (4.1) компонента $x_0^*(\varepsilon)$ неподвижной точки (4.12) удовлетворяет уравнению

$$x_0 = \psi(x_0) + O(\sqrt{\varepsilon})$$

и, следовательно, допускает асимптотику

$$x_0^*(\varepsilon) = x_0^* + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (4.15)$$

где, напомним, x_0^* – неподвижная точка отображения (2.14). А отсюда и из (3.163), (4.14) очевидным образом имеем

$$T_*(\varepsilon) = T_* + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (4.16)$$

т.е. выполняется предельное равенство (2.21).

Проверка справедливости второго равенства (2.22) и соотношений (2.23), (2.24) не вызывает затруднений, поскольку они непосредственно следуют из уже установленных формул (4.15), (4.16) и соответствующих асимптотических представлений для $x_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$, $y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)$ (см. (3.70)–(3.73), (3.133)–(3.135),

(3.142), (3.149), (3.156)). В некоторых пояснениях нуждается лишь первое равенство (2.22).

Для его обоснования заметим, что в силу равенств (3.117), (4.15) справедливо асимптотическое представление

$$t_*(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} t_{(x_0, \varphi)}^{(1)}(\varepsilon)|_{x_0=x_0^*(\varepsilon), \varphi=\varphi_*} = \left(\frac{1}{b_0(x_0^*)} - \frac{1}{b_0(x_1^*)} \right) \varepsilon \ln \frac{1}{\varepsilon} + O(\varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (4.17)$$

где, напомним, x_1^* – решение уравнения (2.8) при $x_0 = x_0^*$. Далее, из формул (3.144)–(3.146) вытекает, что равномерно по $(x_0, \varphi) \in S$

$$\int_0^{t_{(x_0, \varphi)}^{(1)}(\varepsilon)} y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon) dt = \int_{x_0}^{x_1(x_0)} \frac{ds}{a_0(s)} + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (4.18)$$

Тем самым, для получения первого предельного соотношения (2.22) остается положить в (4.18) $x_0 = x_0^*(\varepsilon)$, $\varphi = \varphi_*$ и учесть формулы (4.15), (4.17).

Итак, мы установили факт существования у системы (1.25) неклассического релаксационного цикла (4.13), обладающего нужными свойствами (2.21)–(2.24). Вопрос же об устойчивости этого цикла требует отдельного рассмотрения. Соответствующий анализ приводится ниже.

4.2. Исследование устойчивости. Как известно, проблема устойчивости цикла (4.13) сводится к анализу расположения мультипликаторов отвечающей ему системы в вариациях. Для ее вывода подставим в систему (1.25) соотношения $x = x_*(t, \varepsilon) + z_1$, $y = y_*(t, \varepsilon) + z_2$ и отбросим нелинейные по z_1 , z_2 слагаемые. В результате для z_1 , z_2 получается некоторая линейная система с $T_*(\varepsilon)$ -периодическими коэффициентами, которая после замены

$$\frac{\varepsilon z_2}{y_*(t, \varepsilon)} \rightarrow z_2 \quad (4.19)$$

преобразуется к виду

$$\dot{z} = A(t, \varepsilon)z + B(t, \varepsilon)z(t - h), \quad (4.20)$$

где $z = \text{colon}(z_1, z_2)$,

$$A(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} a_{11}(t, \varepsilon) & a_{12}(t, \varepsilon) \\ a_{21}(t, \varepsilon) & a_{22}(t, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad B(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{y_*(t - h, \varepsilon)}{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} a_{11}(t, \varepsilon) &= f'_x(x_*(t, \varepsilon), y_*(t, \varepsilon)), & a_{12}(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} y_*(t, \varepsilon) f'_y(x_*(t, \varepsilon), y_*(t, \varepsilon)), \\ a_{21}(t, \varepsilon) &= g'_x(x_*(t, \varepsilon), y_*(t, \varepsilon)), & a_{22}(t, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} y_*(t, \varepsilon) g'_y(x_*(t, \varepsilon), y_*(t, \varepsilon)). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Во избежание недоразумений поясним смысл термина “мультипликатор” применительно к системе (4.20). В связи с этим рассмотрим банахово пространство $E = \mathbb{C} \times C[-h - \delta, -\delta]$ (над полем комплексных чисел), где $\delta > 0$, фиксировано

и удовлетворяет требованиям (3.137), (3.139). Точнее говоря, будем считать, что элементами пространства E являются вектор-функции

$$z_0(t) = \text{colon}(z_1^0(t), z_2^0(t)), \quad z_1^0(t) \equiv z_1^0, \quad z_1^0 \in \mathbb{C}, \quad z_2^0(t) \in C[-h - \delta, -\delta],$$

а норму в E зададим равенством

$$\|z_0\|_E = |z_1^0| + \max_{-h-\delta \leq t \leq -\delta} |z_2^0(t)|. \quad (4.23)$$

Далее, оператором монодромии системы (4.20) назовем ограниченный линейный оператор $U(\varepsilon): E \rightarrow E$, действующий на произвольную функцию $z_0(t) \in E$ по правилу

$$U(\varepsilon)z_0 = \text{colon}(z_1(T_*(\varepsilon) - \delta, \varepsilon), z_2(t + T_*(\varepsilon), \varepsilon)), \quad -h - \delta \leq t \leq -\delta, \quad (4.24)$$

где $z(t, \varepsilon) = \text{colon}(z_1(t, \varepsilon), z_2(t, \varepsilon))$ – решение системы (4.20) на отрезке времени $-\delta \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \delta$ с начальной функцией $z_0(t)$, $-h - \delta \leq t \leq -\delta$. Отметим, что спектр этого оператора дискретен, поскольку в силу неравенства $T_*(\varepsilon) > h$ (см. (4.16), (2.17), (2.19)) он является компактным. Что же касается мультипликаторов системы (4.20), то таковыми по аналогии со случаем обыкновенных дифференциальных уравнений будем называть собственные значения $\nu_k(\varepsilon)$, $k \in \mathbb{N}$, оператора (4.24), занумерованные в порядке убывания модулей.

Наша ближайшая задача заключается в асимптотическом вычислении мультипликаторов $\nu_k(\varepsilon)$, $k \geq 1$. Соответствующий анализ разобьем на два этапа. На первом этапе мы покажем, что оператор (4.24) экспоненциально близок к некоторому двумерному линейному оператору, а на втором – проанализируем спектр упомянутого оператора. В результате будет установлено, что

$$\nu_1(\varepsilon) \equiv 1, \quad \nu_2(\varepsilon) = \psi'(x_0^*) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (4.25)$$

а остальные мультипликаторы при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ удовлетворяют оценке

$$\sup_{k \geq 3} |\nu_k(\varepsilon)| \leq M_1 \exp\left(-\frac{M_2}{\varepsilon}\right) \quad (4.26)$$

с некоторыми универсальными постоянными $M_1, M_2 > 0$.

Первый этап описанного плана действий оформим в виде соответствующей леммы. Для этого нам потребуется подпространство $E_0 \subset E$, задающееся равенством

$$E_0 = \{z_0(t) \in E : z_0(t) = \text{colon}(0, z_2^0(t)), \quad z_2^0(-\delta) = 0\}. \quad (4.27)$$

Договоримся также одним и тем же символом $\|\cdot\|$ обозначать евклидову векторную норму и индуцированную ею матричную норму (из контекста всегда будет ясно какая именно норма используется).

ЛЕММА 4.1. *Найдутся такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$ и такие универсальные константы $M_1, M_2 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ и $\forall z_0(t) \in E_0$*

решение $z(t, \varepsilon)$ системы (4.20) с начальной функцией $z_0(t)$, $-h - \delta \leq t \leq -\delta$ удовлетворяет оценке

$$\max_{-\delta \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \delta} \|z(t, \varepsilon)\| \leq M_1 \exp\left(-\frac{M_2}{\varepsilon}\right) \|z_0\|_E. \quad (4.28)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала отрезок $-\delta \leq t \leq 0$, на котором интересующее нас решение $z(t, \varepsilon)$ в силу (4.20), (4.27) определяется из задачи Коши

$$\dot{z} = A(t, \varepsilon)z + B(t, \varepsilon)z_0(t - h), \quad z|_{t=-\delta} = 0. \quad (4.29)$$

Для анализа этой задачи нам потребуются некоторые свойства матриц (4.21), а также матрицы Коши $K(t, \tau, \varepsilon)$, $K(\tau, \tau, \varepsilon) = I$ системы

$$\dot{z} = A(t, \varepsilon)z \quad (4.30)$$

(здесь и ниже через I обозначается единичная матрица или единичный оператор).

В случае матрицы $B(t, \varepsilon)$ ситуация достаточно проста: из неравенства (2.24) очевидным образом имеем

$$\max_{-\delta \leq t \leq h - \delta} \|B(t, \varepsilon)\| \leq M_1 \exp\left(-\frac{M_2}{\varepsilon}\right), \quad M_1, M_2 = \text{const} > 0. \quad (4.31)$$

В случае же матриц $A(t, \varepsilon)$, $K(t, \tau, \varepsilon)$ необходима некоторая дополнительная информация о функции $y_*(t, \varepsilon)$, а именно вытекающая из (3.156), (3.159)–(3.162) оценка

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^0 y_*(t, \varepsilon) dt &= \int_{T_*(\varepsilon) - \delta}^{T_*(\varepsilon)} y_*(t, \varepsilon) dt = \int_{t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon) - \delta}^{t_{(x_0, \varphi)}^{(2)}(\varepsilon)} y_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon) dt \Big|_{x_0=x_0^*(\varepsilon), \varphi=\varphi_*} \\ &= \varepsilon \int_0^1 \frac{dy}{g(x_0^*, y)} + O(\varepsilon^{5/4}) \leq M\varepsilon, \quad M = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Учитывая свойство (4.32) в (4.22), последовательно выводим

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^0 \|A(t, \varepsilon)\| dt &\leq M_1, \quad \max_{-\delta \leq \tau \leq t \leq 0} \|K(t, \tau, \varepsilon)\| \leq M_2, \\ M_1, M_2 &= \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Неравенства (4.31), (4.33) позволяют без труда получить интересующую нас оценку на функцию $z(t, \varepsilon)$ при $-\delta \leq t \leq 0$. Действительно, учитывая их в явной формуле

$$z(t, \varepsilon) = \int_{-\delta}^t K(t, \tau, \varepsilon) B(\tau, \varepsilon) z_0(\tau - h) d\tau, \quad (4.34)$$

приходим к выводу, что на отрезке $t \in [-\delta, 0]$

$$\max_t \|z(t, \varepsilon)\| \leq M_1 \exp\left(-\frac{M_2}{\varepsilon}\right) \|z_0\|_E. \quad (4.35)$$

Дальнейший способ действий состоит в последовательном рассмотрении различных промежутков изменения t , на которых сначала устанавливаются некоторые свойства матрицы Коши $K(t, \tau, \varepsilon)$ системы (4.30), а затем посредством аналогичных (4.34) формул обосновывается требуемое неравенство (4.35).

Очередной шаг связан с отрезком $t \in [0, \tau_*^{(1)}(\varepsilon)]$, где $\tau_*^{(1)}(\varepsilon)$ – момент времени (3.44), вычисленный на компонентах $x_0 = x_0^*(\varepsilon)$, $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$ неподвижной точки (4.12). При указанных t выполним в системе (4.30) замену времени

$$t = \theta_{x_0, \varphi}^{(1)}(y, \varepsilon)|_{x_0=x_0^*(\varepsilon), \varphi=\varphi_*}, \quad y \in [1, \varepsilon^{-3/4}]$$

и учтем в ее коэффициентах (4.22) соотношения (3.25), (3.26) (при $x_0 = x_0^*(\varepsilon)$, $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$), (3.12), (3.14), (3.16). В результате интересующая нас система примет вид

$$\frac{dz}{dy} = A(y, \varepsilon)z, \quad A(y, \varepsilon) = \begin{pmatrix} a_{11}(y, \varepsilon) & a_{12}(y, \varepsilon) \\ a_{21}(y, \varepsilon) & a_{22}(y, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

где равномерно по $y \in [1, \varepsilon^{-3/4}]$

$$\begin{aligned} a_{11}(y, \varepsilon) &= O(\varepsilon), & |a_{12}(y, \varepsilon)| &\leq M_1, & |a_{21}(y, \varepsilon)| &\leq M_2 \frac{\varepsilon}{y}, \\ |a_{22}(y, \varepsilon)| &\leq \frac{M_3}{y^2}, & M_j &= \text{const} > 0, & j &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Положим в (4.36) $A(y, \varepsilon) = A_0(y, \varepsilon) + A_1(y, \varepsilon)$, где

$$A_0(y, \varepsilon) = \begin{pmatrix} a_{11}(y, \varepsilon) & a_{12}(y, \varepsilon) \\ 0 & a_{22}(y, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad A_1(y, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21}(y, \varepsilon) & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим далее, что матрица Коши $K_0(y, s, \varepsilon)$, $K_0(s, s, \varepsilon) = I$ системы уравнений $dz/dy = A_0(y, \varepsilon)z$ выписывается в явном виде и в силу свойств (4.37) допускает оценку

$$\max_{1 \leq s \leq y \leq \varepsilon^{-3/4}} \|K_0(y, s, \varepsilon)\| \leq M\varepsilon^{-3/4}, \quad M = \text{const} > 0. \quad (4.38)$$

Что же касается матрицы Коши $K(y, s, \varepsilon)$ системы (4.36), то она удовлетворяет интегральному уравнению

$$K(y, s, \varepsilon) = K_0(y, s, \varepsilon) + \int_s^y K_0(y, \sigma, \varepsilon) A_1(\sigma, \varepsilon) K(\sigma, s, \varepsilon) d\sigma, \quad (4.39)$$

из которого в силу (4.37), (4.38) имеем

$$\|K(y, s, \varepsilon)\| \leq M_1 \varepsilon^{-3/4} + \varepsilon^{1/4} M_2 \int_s^y \frac{1}{\sigma} \|K(\sigma, s, \varepsilon)\| d\sigma, \quad M_1, M_2 = \text{const} > 0.$$

А отсюда и из леммы Гронуолла–Беллмана заключаем, что

$$\max_{1 \leq s \leq y \leq \varepsilon^{-3/4}} \|K(y, s, \varepsilon)\| \leq M\varepsilon^{-3/4}, \quad M = \text{const} > 0. \quad (4.40)$$

Установленная оценка на $K(y, s, \varepsilon)$ (а значит, и на матрицу $K(t, \tau, \varepsilon)$ при $0 \leq \tau \leq t \leq \tau_*^{(1)}(\varepsilon)$) позволяет распространить неравенство (4.35) на отрезок $0 \leq t \leq \tau_*^{(1)}(\varepsilon)$. Действительно, упомянутое неравенство очевидным образом вытекает из (4.31), (4.40) и из формулы

$$z(t, \varepsilon) = K(t, 0, \varepsilon)z(0, \varepsilon) + \int_0^t K(t, \tau, \varepsilon)B(\tau, \varepsilon)z_0(\tau - h) d\tau. \quad (4.41)$$

Следующий шаг связан с отрезком $\tau_*^{(1)}(\varepsilon) \leq t \leq \tau_*^{(2)}(\varepsilon)$, где $\tau_*^{(2)}(\varepsilon)$ – момент времени (3.88) при $x_0 = x_0^*(\varepsilon)$, $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$. В этом случае сделаем в (4.30) замены

$$t = \theta_{x_0, \varphi}^{(2)}(x, \varepsilon)|_{x=x_0^*(\varepsilon), \varphi=\varphi_*}, \quad \bar{x}_*(\varepsilon) \leq x \leq \bar{\bar{x}}_*(\varepsilon), \quad \varepsilon z_1 \rightarrow z_1, \quad (4.42)$$

где (см. (3.73), (3.47), (3.49), (4.15))

$$\begin{aligned} \bar{x}_*(\varepsilon) &= \bar{x}_{x_0, \varphi}(\varepsilon)|_{x_0=x_0^*(\varepsilon), \varphi=\varphi_*} = x_0^* + \frac{a_0(x_0^*)}{b_0(x_0^*)} \varepsilon^{1/4} + O(\sqrt{\varepsilon}) > x_0^*, \\ \bar{\bar{x}}_*(\varepsilon) &= \bar{\bar{x}}_{x_0, \varphi}(\varepsilon)|_{x_0=x_0^*(\varepsilon), \varphi=\varphi_*} = x_1^* + \frac{a_0(x_1^*)}{b_0(x_1^*)} \varepsilon^{1/4} + O(\sqrt{\varepsilon}) < x_1^*, \end{aligned} \quad (4.43)$$

и учтем формулы (3.72) (при $x_0 = x_0^*(\varepsilon)$, $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$), (3.51), (3.52), (3.54). Указанная последовательность действий приводит систему (4.30) к виду

$$\frac{dz}{dx} = A(x, \varepsilon)z, \quad A(x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} a_{11}(x, \varepsilon) & a_{12}(x, \varepsilon) \\ a_{21}(x, \varepsilon) & a_{22}(x, \varepsilon) \end{pmatrix}, \quad (4.44)$$

где для коэффициентов $a_{jk}(x, \varepsilon)$, $j, k = 1, 2$, при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливы равномерные по $x \in [\bar{x}_*(\varepsilon), \bar{\bar{x}}_*(\varepsilon)]$ асимптотические представления

$$\begin{aligned} a_{11}(x, \varepsilon) &= \frac{a'_0(x)}{a_0(x)} + O(\varepsilon^{1/4}), & a_{12}(x, \varepsilon) &= 1 + O(\varepsilon^{1/4}), \\ a_{21}(x, \varepsilon) &= \frac{b'_0(x)}{a_0(x)\gamma_0(x, x_0^*)} + O\left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\gamma_0^2(x, x_0^*)}\right), & a_{22}(x, \varepsilon) &= O(\sqrt{\varepsilon}). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Обозначим через $K(x, s)$ матрицу Коши системы уравнений $dz/dx = A_0(x)z$, где $A_0(x) = A(x, 0)$. Заметим далее, что $K(x, s)$ задается посредством равенств

$$K(x, s) = K(x)K^{-1}(s), \quad K(x) = \begin{pmatrix} \mathbb{k}_{11}(x) & \mathbb{k}_{12}(x) \\ \mathbb{k}_{21}(x) & \mathbb{k}_{22}(x) \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbb{k}_{11}(x) &= a_0(x)\gamma_0(x, x_0^*), & \mathbb{k}_{21}(x) &= b_0(x), \\ \mathbb{k}_{12}(x) &= a_0(x)\gamma_0(x, x_0^*) \int_{\tilde{x}}^x \frac{d\sigma}{a_0(\sigma)\gamma_0^2(\sigma, x_0^*)}, \\ \mathbb{k}_{22}(x) &= \frac{1}{\gamma_0(x, x_0^*)} + b_0(x) \int_{\tilde{x}}^x \frac{d\sigma}{a_0(\sigma)\gamma_0^2(\sigma, x_0^*)}, & \tilde{x} &= \text{const} \in (x_0^*, x_1^*), \end{aligned}$$

и в силу этого допускает оценку

$$\|K(x, s)\| \leq \frac{M_1}{\gamma_0(x, x_0^*)} + \frac{M_2}{\gamma_0(s, x_0^*)} \leq M_3 \varepsilon^{-1/4}, \quad \bar{x}_*(\varepsilon) \leq s \leq x \leq \bar{\bar{x}}_*(\varepsilon), \quad (4.46)$$

$$M_j = \text{const} > 0, \quad j = 1, 2, 3.$$

В случае матрицы Коши $K(x, s, \varepsilon)$ системы (4.44) имеем дело с аналогичным (4.39) интегральным уравнением

$$K(x, s, \varepsilon) = K(x, s) + \int_s^x K(x, \sigma) [A(\sigma, \varepsilon) - A_0(\sigma)] K(\sigma, s, \varepsilon) d\sigma,$$

из которого, опираясь на свойства (4.45), (4.46), последовательно выводим

$$\|K(x, s, \varepsilon)\| \leq M_1 \varepsilon^{-1/4} + \int_s^x \left(\frac{M_2 \varepsilon^{1/4}}{\gamma_0^2(\sigma, x_0^*)} + M_3 \right) \|K(\sigma, s, \varepsilon)\| d\sigma, \quad (4.47)$$

$$\|K(x, s, \varepsilon)\| \leq M_1 \varepsilon^{-1/4} \exp \left[\int_s^x \left(\frac{M_2 \varepsilon^{1/4}}{\gamma_0^2(\sigma, x_0^*)} + M_3 \right) d\sigma \right].$$

Затем, учитывая в (4.47) вытекающее из (2.7), (4.43) неравенство

$$\max_{\bar{x}_*(\varepsilon) \leq s \leq x \leq \bar{\bar{x}}_*(\varepsilon)} \int_s^x \left(\frac{M_2 \varepsilon^{1/4}}{\gamma_0^2(\sigma, x_0^*)} + M_3 \right) d\sigma \leq M, \quad M = \text{const} > 0,$$

приходим к выводу, что

$$\max_{\bar{x}_*(\varepsilon) \leq s \leq x \leq \bar{\bar{x}}_*(\varepsilon)} \|K(x, s, \varepsilon)\| \leq M \varepsilon^{-1/4}, \quad M = \text{const} > 0. \quad (4.48)$$

И, наконец, вспоминая о сделанных ранее заменах (4.42), для матрицы Коши $K(t, \tau, \varepsilon)$ исходной системы (4.30) из (4.48) получаем оценку

$$\max_{\tau_*^{(1)}(\varepsilon) \leq \tau \leq t \leq \tau_*^{(2)}(\varepsilon)} \|K(t, \tau, \varepsilon)\| \leq M \varepsilon^{-5/4}, \quad M = \text{const} > 0. \quad (4.49)$$

Завершая анализ отрезка $\tau_*^{(1)}(\varepsilon) \leq t \leq \tau_*^{(2)}(\varepsilon)$, отметим, что на нем для $z(t, \varepsilon)$ справедлива формула вида (4.41), в которой начальный момент времени $t = 0$ заменен на $t = \tau_*^{(1)}(\varepsilon)$. А отсюда и из (4.31), (4.49) вытекает справедливость требуемой оценки (4.35) на данном промежутке времени.

Случай $t \in [\tau_*^{(2)}(\varepsilon), t_*(\varepsilon)]$, где $t_*(\varepsilon)$ – момент времени (4.17), не нуждается в отдельном рассмотрении, так как по существу сводится к уже разобранным ситуации $0 \leq t \leq \tau_*^{(1)}(\varepsilon)$. Действительно, при указанных t после замены времени

$$t = \theta_{x_0, \varphi}^{(3)}(y, \varepsilon)|_{x_0=x_0^*(\varepsilon), \varphi=\varphi_*}, \quad y \in [1, \varepsilon^{-3/4}],$$

где $\theta_{x_0, \varphi}^{(3)}(y, \varepsilon)$ – функция из (3.104), система (4.30) преобразуется к виду (4.36), (4.37). Таким образом, оценка (4.35) при $\tau_*^{(2)}(\varepsilon) \leq t \leq t_*(\varepsilon)$ заведомо сохраняется.

На оставшемся отрезке времени $t_*(\varepsilon) \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \delta$ в силу аналогичного (4.32) неравенства (см. (2.24), (3.106), (3.92), (3.94))

$$\int_{t_*(\varepsilon)}^{T_*(\varepsilon)-\delta} y_*(t, \varepsilon) dt = -\varepsilon \int_0^1 \frac{dy}{g(x_1^*, y)} + O(\varepsilon^{5/4}) \leq M\varepsilon, \quad M = \text{const} > 0,$$

и формулы (4.18) имеем

$$\max_{t_*(\varepsilon) \leq \tau \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \delta} \|K(t, \tau, \varepsilon)\| \leq M_1, \quad \int_{h-\delta}^{T_*(\varepsilon)-\delta} \|B(t, \varepsilon)\| dt \leq \frac{M_2}{\varepsilon}, \quad (4.50)$$

$$M_1, M_2 = \text{const} > 0.$$

В свою очередь, свойства (4.50) позволяют для распространения оценки (4.35) на данный промежуток изменения t воспользоваться следующим индуктивным процессом.

Разобьем отрезок $[t_*(\varepsilon), T_*(\varepsilon) - \delta]$ на фрагменты

$$[t_*(\varepsilon) + kh, t_*(\varepsilon) + (k+1)h], \quad k = 0, 1, \dots, k_0,$$

$$[t_*(\varepsilon) + (k_0+1)h, T_*(\varepsilon) - \delta], \quad k_0 = \left\lfloor \frac{T_*(\varepsilon) - t_*(\varepsilon) - h - \delta}{h} \right\rfloor,$$

$[*]$ – целая часть. Опираясь, далее, на соотношения (4.31), (4.50), замечаем, что из неравенства

$$\|z(t, \varepsilon)\| \leq \|K(t, t_*(\varepsilon) + kh, \varepsilon)\| \cdot \|z(t_*(\varepsilon) + kh, \varepsilon)\|$$

$$+ \int_{t_*(\varepsilon)+kh}^t \|K(t, \tau, \varepsilon)\| \cdot \|B(\tau, \varepsilon)\| \cdot \|z(\tau - h, \varepsilon)\| d\tau, \quad t \geq t_*(\varepsilon) + kh,$$

и из уже полученной оценки вида (4.35) на $(k-1)$ -м отрезке вытекает требуемая оценка на k -м отрезке изменения t . Лемма 4.1 доказана.

Приступим теперь ко второму этапу исследования мультипликаторов системы (4.20). На нем мы изучим спектральные свойства двумерного оператора $V(\varepsilon): E \rightarrow E$, результат действия которого на любую функцию $z_0(t) \in E$ задается равенством

$$V(\varepsilon)z_0 = z_1^{(0)} \text{colon}(z_1^{(1)}(T_*(\varepsilon) - \delta, \varepsilon), z_2^{(1)}(t + T_*(\varepsilon), \varepsilon))$$

$$+ z_2^{(0)}(-\delta) \text{colon}(z_1^{(2)}(T_*(\varepsilon) - \delta, \varepsilon), z_2^{(2)}(t + T_*(\varepsilon), \varepsilon)), \quad -h - \delta \leq t \leq -\delta. \quad (4.51)$$

Здесь через

$$z^{(j)}(t, \varepsilon) = \text{colon}(z_1^{(j)}(t, \varepsilon), z_2^{(j)}(t, \varepsilon)), \quad -\delta \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \delta, \quad j = 1, 2, \quad (4.52)$$

обозначены решения системы (4.20) с начальными условиями, заданными при $-h - \delta \leq t \leq -\delta$ равенствами $z_0(t) \equiv \text{colon}(1, 0)$ и $z_0(t) \equiv \text{colon}(0, 1)$ соответственно.

Остановимся на вопросе о связи между операторами (4.24) и (4.51). С этой целью обратим внимание, что фигурирующее в (4.24) решение $z(t, \varepsilon)$ может быть представлено в виде

$$z(t, \varepsilon) = z_1^0 z^{(1)}(t, \varepsilon) + z_2^0(-\delta) z^{(2)}(t, \varepsilon) + \omega(t, \varepsilon), \quad -\delta \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \delta, \quad (4.53)$$

где $\omega(t, \varepsilon)$ – решение системы (4.20) с начальным условием

$$\omega_0(t) = \text{colon}(0, z_2^0(t) - z_2^0(-\delta)) \in E_0, \quad -h - \delta \leq t \leq -\delta.$$

Таким образом, третье слагаемое в (4.53) в силу леммы 4.1 удовлетворяет оценке вида (4.28). А отсюда очевидным образом следует, что для оператора $W(\varepsilon) = U(\varepsilon) - V(\varepsilon)$ справедливо неравенство

$$\|W(\varepsilon)\|_{E \rightarrow E} \leq M_1 \exp\left(-\frac{M_2}{\varepsilon}\right), \quad M_1, M_2 = \text{const} > 0. \quad (4.54)$$

Нетрудно увидеть, что спектр оператора (4.51) состоит из собственных значений двумерной матрицы

$$\mathcal{D}(\varepsilon) = [z^{(1)}(t, \varepsilon), z^{(2)}(t, \varepsilon)]|_{t=T_*(\varepsilon)-\delta} \quad (4.55)$$

и из нулевого собственного значения бесконечной кратности. Тем самым, проблема спектрального анализа данного оператора сводится к асимптотическому вычислению матрицы (4.55).

ЛЕММА 4.2. *Найдется такое достаточно малое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ справедливы следующие факты. Во-первых, для оператора (4.51) имеет место оценка*

$$\|V(\varepsilon)\|_{E \rightarrow E} \leq \frac{M}{\varepsilon}, \quad M = \text{const} > 0; \quad (4.56)$$

во-вторых, собственные значения $\lambda_1(\varepsilon)$, $\lambda_2(\varepsilon)$ матрицы (4.55) при $\varepsilon \rightarrow 0$ допускают асимптотику

$$\lambda_1(\varepsilon) = 1 + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \lambda_2(\varepsilon) = \psi'(x_0^*) + O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (4.57)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проблема обоснования соотношений (4.56), (4.57) очевидным образом связана с построением асимптотики введенных выше решений (4.52). Однако соответствующий асимптотический анализ мы проведем сначала для двух других решений

$$\varkappa^{(j)}(t, \varepsilon) = \text{colon}(\varkappa_1^{(j)}(t, \varepsilon), \varkappa_2^{(j)}(t, \varepsilon)), \quad -\delta \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \delta, \quad j = 1, 2, \quad (4.58)$$

системы (4.20), а потом представим нужные нам решения (4.52) в виде линейных комбинаций вектор-функций (4.58). Что же касается начальных условий для решений (4.58), то их при $-h - \delta \leq t \leq -\delta$ зададим равенствами

$$\begin{aligned} \varkappa^{(1)}(t, \varepsilon) &\equiv \text{colon}\left(\dot{x}_*(t, \varepsilon), \frac{\varepsilon \dot{y}_*(t, \varepsilon)}{y_*(t, \varepsilon)}\right)\bigg|_{t=-\delta} \\ &= \text{colon}(f(x(-\delta, s), 0), g(x(-\delta, s), 0))\big|_{s=x_0^*} + O(\sqrt{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\varkappa^{(2)}(t, \varepsilon) \equiv \text{colon}\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, x_0, \varepsilon), \varepsilon \frac{\partial y}{\partial x_0}(t, x_0, \varepsilon) / y(t, x_0, \varepsilon)\right)\bigg|_{t=-\delta, x_0=x_0^*(\varepsilon)}, \quad (4.60)$$

где, напомним, $x(t, s)$ – решение задачи (3.122), $x(t, x_0, \varepsilon)$, $y(t, x_0, \varepsilon)$ – функции из (3.9).

Вопрос об асимптотике решения $\varkappa^{(1)}(t, \varepsilon)$ не вызывает затруднений. Действительно, учитывая способ получения системы (4.20) и, в частности, замену (4.19), нетрудно увидеть, что ее решением является вектор-функция

$$\text{colon} \left(\dot{x}_*(t, \varepsilon), \frac{\varepsilon \dot{y}_*(t, \varepsilon)}{y_*(t, \varepsilon)} \right), \quad -\delta \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \delta. \quad (4.61)$$

Заметим далее, что решение (4.61) порождается начальным условием

$$\text{colon} \left(\dot{x}_*(-\delta, \varepsilon), \frac{\varepsilon \dot{y}_*(-\delta, \varepsilon)}{y_*(-\delta, \varepsilon)} \right), \quad -h - \delta \leq t \leq -\delta, \quad (4.62)$$

причем, что самое главное, разность между (4.59) и (4.62) принадлежит пространству E_0 и ограничена по норме (4.23) равномерно относительно ε . А отсюда и из леммы 4.1 следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место равномерное по $-\delta \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \delta$ асимптотическое представление

$$\varkappa^{(1)}(t, \varepsilon) = \text{colon} \left(\dot{x}_*(t, \varepsilon), \frac{\varepsilon \dot{y}_*(t, \varepsilon)}{y_*(t, \varepsilon)} \right) + O \left(\exp \left(-\frac{M}{\varepsilon} \right) \right), \quad (4.63)$$

$M = \text{const} > 0.$

Для выявления асимптотических свойств решения $\varkappa^{(2)}(t, \varepsilon)$ необходимо знать асимптотику функций $x(t, x_0, \varepsilon)$, $y(t, x_0, \varepsilon)$ из (3.9) на отрезке $-\delta \leq t \leq 0$. Соответствующий анализ проводится с помощью развитых в предыдущем параграфе геометрических методов. Поэтому здесь ограничимся лишь сводкой итоговых результатов.

Обратимся сначала к отрезку $\tau_0(x_0, \varepsilon) \leq t \leq 0$, где $\tau_0(x_0, \varepsilon)$ – наибольший отрицательный корень уравнения $y(t, x_0, \varepsilon) = \exp(-\varepsilon^{-3/4})$, и на кривой

$$\Lambda_0(\varepsilon) = \{ (t, x, y) : \tau_0(x_0, \varepsilon) \leq t \leq 0, x = x(t, x_0, \varepsilon), y = y(t, x_0, \varepsilon) \} \quad (4.64)$$

в качестве параметра возьмем переменную $y \in [\exp(-\varepsilon^{-3/4}), 1]$. В итоге убеждаемся (см. обоснование лемм 3.1, 3.5), что для $\Lambda_0(\varepsilon)$ справедливо аналогичное (3.11), (3.90) равенство

$$\Lambda_0(\varepsilon) = \{ (t, x, y) : t = \theta_0(y, x_0, \varepsilon), x = x(y, x_0, \varepsilon), \exp(-\varepsilon^{-3/4}) \leq y \leq 1 \}, \quad (4.65)$$

где функции $\theta_0(y, x_0, \varepsilon)$, $x(y, x_0, \varepsilon)$ допускают при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерные по начальному условию $x_0 \in [a, b]$ и по $y \in [\exp(-\varepsilon^{-3/4}), 1]$ асимптотические представления

$$\theta_0(y, x_0, \varepsilon) = \varepsilon \int_1^y \frac{ds}{s g(x_0, s)} + O \left(\varepsilon^{5/4} \ln \frac{1}{y} \right), \quad (4.66)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \theta_0(y, x_0, \varepsilon) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\int_1^y \frac{ds}{s g(x_0, s)} \right) + O \left(\varepsilon^{5/4} \ln \frac{1}{y} \right), \quad (4.67)$$

$$\frac{\partial \theta_0}{\partial y}(y, x_0, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{y} \left(\frac{1}{g(x_0, y)} + O(\varepsilon^{1/4}) \right), \quad (4.68)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_0 \partial y} \theta_0(y, x_0, \varepsilon) = \frac{\varepsilon}{y} \left(\frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{1}{g(x_0, y)} \right) + O(\varepsilon^{1/4}) \right), \quad (4.69)$$

$$x(y, x_0, \varepsilon) = x_0 + \varepsilon \int_1^y \frac{f(x_0, s)}{s g(x_0, s)} ds + O\left(\varepsilon^{5/4} \ln \frac{1}{y}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} x(y, x_0, \varepsilon) = O(\varepsilon/y), \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} x(y, x_0, \varepsilon) = 1 + \varepsilon \int_1^y \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{f(x_0, s)}{s g(x_0, s)} \right) ds + O\left(\varepsilon^{5/4} \ln \frac{1}{y}\right).$$

Что же касается фигурирующего в (4.64) момента времени $\tau_0(x_0, \varepsilon)$, то для него из (4.66), (4.67) выводим

$$\tau_0(x_0, \varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} \theta_0(y, x_0, \varepsilon)|_{y=\exp(-\varepsilon^{-3/4})} = -\frac{\varepsilon^{1/4}}{g(x_0, 0)} + O(\sqrt{\varepsilon}),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \tau_0(x_0, \varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\varepsilon^{1/4}}{g(x_0, 0)} \right) + O(\sqrt{\varepsilon}). \quad (4.71)$$

В случае $-\delta \leq t \leq \tau_0(x_0, \varepsilon)$, рассуждая как и при доказательстве леммы 3.7, для $x(t, x_0, \varepsilon)$, $v(t, x_0, \varepsilon) = \varepsilon \ln y(t, x_0, \varepsilon)$ приходим к аналогичным (3.119), (3.120) асимптотическим равенствам

$$x(t, x_0, \varepsilon) = x(t, s)|_{s=x_0} + O(\sqrt{\varepsilon}),$$

$$\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, x_0, \varepsilon) = \frac{f(x(t, s), 0)}{f(s, 0)} \Big|_{s=x_0} + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (4.72)$$

$$v(t, x_0, \varepsilon) = \int_0^t g(x(\tau, s), 0) d\tau \Big|_{s=x_0} + O(\sqrt{\varepsilon}),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x_0}(t, x_0, \varepsilon) = \frac{g(x(t, s), 0) - g(s, 0)}{f(s, 0)} \Big|_{s=x_0} + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (4.73)$$

которые имеют место равномерно по $x_0 \in [a, b]$ и t .

Помимо формул (4.65)–(4.73) при анализе решения $\varkappa^{(2)}(t, \varepsilon)$ нам потребуется следующая дополнительная информация. А именно, ниже будут использованы равномерные по $t \in [-\delta, h - \delta]$ асимптотические представления

$$x_*(t, \varepsilon) = x(t, x_0, \varepsilon)|_{x_0=x_0^*(\varepsilon)} + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right),$$

$$y_*(t, \varepsilon) = \left(1 + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right)\right) y(t, x_0, \varepsilon) \Big|_{x_0=x_0^*(\varepsilon)}, \quad (4.74)$$

где $M = \text{const} > 0$. Заметим, что при $t \in [0, h - \delta]$ формулы (4.74) вытекают из (3.136). В случае же $t \in [-\delta, 0]$ учтем тот факт, что кривая (3.164) аппроксимируется с экспоненциальной точностью фазовой кривой, порожденной задачей Коши (3.165). Полагая в (3.164), (3.165) $x_0 = x_0^*(\varepsilon)$, $\varphi = \varphi_*(t, \varepsilon)$ (см. (4.12)) и обыгрывая свойство периодичности функций $x_*(t, \varepsilon)$, $y_*(t, \varepsilon)$, приходим к требуемым соотношениям (4.74) при $t \in [-\delta, 0]$.

Обозначим через $\tilde{A}(t, \varepsilon)$ матрицу, получающуюся из $A(t, \varepsilon)$ при замене в (4.22) компонент $x_*(t, \varepsilon)$, $y_*(t, \varepsilon)$ на $(x(t, x_0, \varepsilon), y(t, x_0, \varepsilon))|_{x_0=x_0^*(\varepsilon)}$. Заметим далее, что вектор-функция

$$\tilde{z}(t, \varepsilon) = \text{colon} \left(\frac{\partial x}{\partial x_0}(t, x_0, \varepsilon), \varepsilon \frac{\partial y}{\partial x_0}(t, x_0, \varepsilon) / y(t, x_0, \varepsilon) \right) \Big|_{x_0=x_0^*(\varepsilon)} \quad (4.75)$$

удовлетворяет системе $\dot{z} = \tilde{A}(t, \varepsilon)z$. А отсюда и из формулы (4.60) следует, что разность $\Delta(t, \varepsilon) = \varkappa^{(2)}(t, \varepsilon) - \tilde{z}(t, \varepsilon)$ при $t \in [-\delta, h - \delta]$ определяется из задачи Коши

$$\dot{\Delta} - A(t, \varepsilon)\Delta = B(t, \varepsilon)\varkappa^{(2)}(t - h, \varepsilon) + [A(t, \varepsilon) - \tilde{A}(t, \varepsilon)]\tilde{z}(t, \varepsilon), \quad \Delta|_{t=-\delta} = 0 \quad (4.76)$$

и в силу этого задается равенством

$$\Delta(t, \varepsilon) = \int_{-\delta}^t K(t, \tau, \varepsilon) [B(\tau, \varepsilon)\varkappa^{(2)}(\tau - h, \varepsilon) + [A(\tau, \varepsilon) - \tilde{A}(\tau, \varepsilon)]\tilde{z}(\tau, \varepsilon)] d\tau. \quad (4.77)$$

Покажем теперь, что неоднородность из (4.76), которая, подчеркнем, при $t \in [-\delta, h - \delta]$ нам известна, является экспоненциально малой. В связи с этим обратим внимание, что из соотношений (4.31), (4.60), (4.72)–(4.74) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \max_{-\delta \leq t \leq h-\delta} \|B(t, \varepsilon)\varkappa^{(2)}(t - h, \varepsilon)\| + \max_{-\delta \leq t \leq h-\delta} \|A(t, \varepsilon) - \tilde{A}(t, \varepsilon)\| &\leq M_1 \exp\left(-\frac{M_2}{\varepsilon}\right), \\ M_1, M_2 &= \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Что же касается функции (4.75), то для ее оценки привлечем уже известную информацию об асимптотическом поведении $x(t, x_0, \varepsilon)$, $y(t, x_0, \varepsilon)$, $\partial x(t, x_0, \varepsilon)/\partial x_0$, $\partial y(t, x_0, \varepsilon)/\partial x_0$ (см. леммы 3.1, 3.3, 3.5, 3.7 и формулы (4.65)–(4.73)). В результате убеждаемся, что

$$\max_{-\delta \leq t \leq h-\delta} \|\tilde{z}(t, \varepsilon)\| \leq M\varepsilon^{-1/4}, \quad M = \text{const} > 0; \quad (4.79)$$

самый худший вариант реализуется на участке поворота, где в силу (3.53), (3.54) имеем

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = -\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x}\right)^{-1} \frac{\partial \theta_2}{\partial x_0} = O(\varepsilon^{-1/4}).$$

Подведем промежуточный итог. Из соотношений (4.77)–(4.79) и из известных оценок на матрицу Коши $K(t, \tau, \varepsilon)$, $-\delta \leq \tau \leq t \leq h - \delta$ (см. (4.33), (4.40), (4.49), (4.50)), следует, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $t \in [-\delta, h - \delta]$

$$\varkappa^{(2)}(t, \varepsilon) = \tilde{z}(t, \varepsilon) + O\left(\exp\left(-\frac{M}{\varepsilon}\right)\right), \quad M = \text{const} > 0, \quad (4.80)$$

где $\tilde{z}(t, \varepsilon)$ – функция (4.75).

При построении асимптотики решения $\varkappa^{(2)}(t, \varepsilon)$ на оставшемся отрезке времени $h - \delta \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \delta$ система (4.20) интегрируется методом шагов, т.е. последовательно рассматривается на промежутках длины не более h . В процессе ее анализа существенно используются вытекающие из (2.24) оценки

$$\max_{h-\delta \leq t \leq T_*(\varepsilon)-\delta} (|a_{11}(t, \varepsilon) - f'_x(x_*(t, \varepsilon), 0)| + |a_{21}(t, \varepsilon) - g'_x(x_*(t, \varepsilon), 0)| + |a_{12}(t, \varepsilon)| + |a_{22}(t, \varepsilon)|) \leq M_1 \exp\left(-\frac{M_2}{\varepsilon}\right), \quad (4.81)$$

$$\max_{h+\delta \leq t \leq T_*(\varepsilon)-\delta} \|B(t, \varepsilon)\| \leq M_3 \exp\left(-\frac{M_4}{\varepsilon}\right), \quad (4.82)$$

где $M_j = \text{const} > 0$, $j = 1, \dots, 4$.

На отрезке $h - \delta \leq t \leq h + \delta$ в силу (4.80), (4.81) для отыскания компонент $z_1 = \varkappa_1^{(2)}(t, \varepsilon)$, $z_2 = \varkappa_2^{(2)}(t, \varepsilon)$ решения $\varkappa^{(2)}(t, \varepsilon)$ с точностью до экспоненциально малых добавок получаем задачу Коши

$$\dot{z}_1 = f'_x(x_*(t, \varepsilon), 0)z_1, \quad \dot{z}_2 = g'_x(x_*(t, \varepsilon), 0)z_1 - \frac{\partial y}{\partial x_0}(t - h, x_0, \varepsilon) \Big|_{x_0=x_0^*(\varepsilon)}, \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned} z_1|_{t=h-\delta} &= \frac{\partial x}{\partial x_0}(h - \delta, x_0, \varepsilon) \Big|_{x_0=x_0^*(\varepsilon)}, \\ z_2|_{t=h-\delta} &= \varepsilon \frac{\partial y}{\partial x_0}(h - \delta, x_0, \varepsilon) / y(h - \delta, x_0, \varepsilon) \Big|_{x_0=x_0^*(\varepsilon)}. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Учитывая, далее, в (4.83), (4.84) уже известные асимптотические представления для функций $x_*(t, \varepsilon) = x_{(x_0, \varphi)}(t, \varepsilon)|_{x_0=x_0^*(\varepsilon), \varphi=\varphi_*}$, $x(t, x_0, \varepsilon)$, $y(t, x_0, \varepsilon)$, $x_0^*(\varepsilon)$ (см. леммы 3.7, 3.8 и последующие формулы (3.142), (4.15)), приходим к выводу, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ равномерно по $t \in [h - \delta, h + \delta]$

$$\varkappa_1^{(2)}(t, \varepsilon) = \frac{f(x(t, s), 0)}{f(s, 0)} \Big|_{s=x_1^*} \cdot x'_1(x_0^*) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (4.85)$$

$$\begin{aligned} \varkappa_2^{(2)}(t, \varepsilon) &= \frac{g(x(t, s), 0) - g(s, 0)}{f(s, 0)} \Big|_{s=x_1^*} \cdot x'_1(x_0^*) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\int_{-\delta}^{t-h} y(\tau, x_0, \varepsilon) d\tau \right) \Big|_{x_0=x_0^*(\varepsilon)} + O(\sqrt{\varepsilon}), \end{aligned} \quad (4.86)$$

где, напомним, $x_1^* = x_1(x_0)|_{x_0=x_0^*}$.

Отдельного рассмотрения требует интегральное слагаемое из (4.86), анализ которого аналогичен исследованию соответствующего интегрального слагаемого из (3.142). В данном случае обозначим через $I_k(x, \varepsilon)$, $J_k(x, \varepsilon)$, $k = 1, \dots, 6$, интегралы от функций $y(t, x_0, \varepsilon)$, $|\partial y(t, x_0, \varepsilon)/\partial x_0|$ по отрезкам

$$\begin{aligned} [-\delta, \tau_0(x_0, \varepsilon)], \quad [\tau_0(x_0, \varepsilon), 0], \quad [0, \tau_1(x_0, \varepsilon)], \quad [\tau_1(x_0, \varepsilon), \tau_2(x_0, \varepsilon)], \\ [\tau_2(x_0, \varepsilon), \tau_3(x_0, \varepsilon)], \quad [\tau_3(x_0, \varepsilon), \delta] \end{aligned} \quad (4.87)$$

и проведем их асимптотическое вычисление.

Рассмотрим сначала наиболее простые варианты $k = 1, 6$ из (4.87) и заметим, что при

$$t \in [-\delta, \tau_0(x_0, \varepsilon)] \cup [\tau_3(x_0, \varepsilon), \delta]$$

в силу (3.118)–(3.120), (4.72), (4.73) имеют место оценки

$$y(t, x_0, \varepsilon) \leq M_1 \exp(-\varepsilon^{-3/4}), \quad \left| \frac{\partial y}{\partial x_0}(t, x_0, \varepsilon) \right| \leq \frac{M_2}{\varepsilon} \exp(-\varepsilon^{-3/4}),$$

$$M_1, M_2 = \text{const} > 0.$$

А отсюда и из (3.114), (3.115), (4.71) очевидным образом следует, что

$$I_1(x_0, \varepsilon) + I_6(x_0, \varepsilon) + \left| \frac{\partial I_1}{\partial x_0}(x_0, \varepsilon) \right| + \left| \frac{\partial I_6}{\partial x_0}(x_0, \varepsilon) \right| + J_1(x_0, \varepsilon) + J_6(x_0, \varepsilon)$$

$$\leq \frac{M}{\varepsilon} \exp(-\varepsilon^{-3/4}), \quad M = \text{const} > 0. \quad (4.88)$$

В случаях $k = 2, 3, 5$ справедливы аналогичные (3.144), (3.146) формулы

$$I_2(x_0, \varepsilon) = \int_{\exp(-\varepsilon^{-3/4})}^1 y \frac{\partial}{\partial y} \theta_0(y, x_0, \varepsilon) dy = O(\varepsilon), \quad \frac{\partial I_2}{\partial x_0}(x_0, \varepsilon) = O(\varepsilon), \quad (4.89)$$

$$J_2(x_0, \varepsilon) = \int_{\exp(-\varepsilon^{-3/4})}^1 \left| \frac{\partial \theta_0}{\partial x_0}(y, x_0, \varepsilon) \right| dy = O(\varepsilon), \quad (4.90)$$

$$I_3(x_0, \varepsilon) = \int_1^{\varepsilon^{-3/4}} y \frac{\partial}{\partial y} \theta_1(y, x_0, \varepsilon) dy = \frac{\varepsilon^{1/4}}{b_0(x_0)} + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (4.91)$$

$$\frac{\partial I_3}{\partial x_0}(x_0, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\varepsilon^{1/4}}{b_0(x_0)} \right) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (4.92)$$

$$J_3(x_0, \varepsilon) = \int_1^{\varepsilon^{-3/4}} \left| \frac{\partial \theta_1}{\partial x_0}(y, x_0, \varepsilon) \right| dy = O\left(\varepsilon^{1/4} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (4.93)$$

$$I_5(x_0, \varepsilon) = \int_{\varepsilon^{-3/4}}^{\exp(-\varepsilon^{-3/4})} y \frac{\partial}{\partial y} \theta_3(y, x_0, \varepsilon) dy = -\frac{\varepsilon^{1/4}}{b_0(x_1(x_0))} + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (4.94)$$

$$\frac{\partial I_5}{\partial x_0}(x_0, \varepsilon) = -\frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\varepsilon^{1/4}}{b_0(x_1(x_0))} \right) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (4.95)$$

$$J_5(x_0, \varepsilon) = \int_{\exp(-\varepsilon^{-3/4})}^{\varepsilon^{-3/4}} \left| \frac{\partial \theta_3}{\partial x_0}(y, x_0, \varepsilon) \right| dy = O\left(\varepsilon^{1/4} \ln \frac{1}{\varepsilon}\right), \quad (4.96)$$

при выводе которых использовались известные свойства функций $\theta_j(y, x_0, \varepsilon)$, $j = 0, 1, 3$ (см. (3.12)–(3.15), (3.92)–(3.95), (4.66)–(4.69)). И, наконец, при $k = 4$, опираясь на соотношения (3.47)–(3.55), приходим к выводу, что

$$I_4(x_0, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\bar{x}(x_0, \varepsilon)}^{\bar{\bar{x}}(x_0, \varepsilon)} u(x, x_0, \varepsilon) \frac{dx}{f(x, u(x, x_0, \varepsilon)/\varepsilon)}$$

$$= \int_{x_0}^{x_1(x_0)} \frac{ds}{a_0(s)} + \left(\frac{1}{b_0(x_1(x_0))} - \frac{1}{b_0(x_0)} \right) \varepsilon^{1/4} + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (4.97)$$

$$\frac{\partial I_4}{\partial x_0}(x_0, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\int_{x_0}^{x_1(x_0)} \frac{ds}{a_0(s)} + \left(\frac{1}{b_0(x_1(x_0))} - \frac{1}{b_0(x_0)} \right) \varepsilon^{1/4} \right) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (4.98)$$

$$\begin{aligned} J_4(x_0, \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{\bar{x}(x_0, \varepsilon)}^{\bar{\bar{x}}(x_0, \varepsilon)} \left| \frac{\partial u}{\partial x_0}(x, x_0, \varepsilon) \frac{\partial \theta_2}{\partial x}(x, x_0, \varepsilon) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, x_0, \varepsilon) \frac{\partial \theta_2}{\partial x_0}(x, x_0, \varepsilon) \right| dx \\ &\leq M \varepsilon^{-1/4}, \quad M = \text{const} > 0. \end{aligned} \quad (4.99)$$

Просуммируем полученную информацию. Из соотношений (4.88)–(4.99) вытекает, что

$$\begin{aligned} \max_{h-\delta \leq t \leq h+\delta} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x_0} \int_{-\delta}^{t-h} y(\tau, x_0, \varepsilon) d\tau \right) \right|_{x_0=x_0^*(\varepsilon)} &\leq M \varepsilon^{-1/4}, \quad M = \text{const} > 0, \\ \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\int_{-\delta}^{\delta} y(\tau, x_0, \varepsilon) d\tau \right) \Big|_{x_0=x_0^*(\varepsilon)} &= \frac{d}{dx_0} \left(\int_{x_0}^{x_1(x_0)} \frac{ds}{a_0(s)} \right) \Big|_{x_0=x_0^*} + O(\sqrt{\varepsilon}), \end{aligned}$$

а значит, в силу (4.85), (4.86) имеем

$$\max_{h-\delta \leq t \leq h+\delta} \|\kappa^{(2)}(t, \varepsilon)\| \leq M \varepsilon^{-1/4}, \quad M = \text{const} > 0, \quad (4.100)$$

$$\kappa_1^{(2)}(h+\delta, \varepsilon) = \frac{f(x(h+\delta, s), 0)}{f(s, 0)} \Big|_{s=x_1^*} \cdot x_1'(x_0^*) + O(\sqrt{\varepsilon}), \quad (4.101)$$

$$\begin{aligned} \kappa_2^{(2)}(h+\delta, \varepsilon) &= \frac{g(x(h+\delta, s), 0) - g(s, 0)}{f(s, 0)} \Big|_{s=x_1^*} \cdot x_1'(x_0^*) \\ &\quad - \frac{d}{dx_0} \left(\int_{x_0}^{x_1(x_0)} \frac{ds}{a_0(s)} \right) \Big|_{x_0=x_0^*} + O(\sqrt{\varepsilon}). \end{aligned} \quad (4.102)$$

Заканчивая построение асимптотики решения $\kappa^{(2)}(t, \varepsilon)$, рассмотрим отрезок времени $h+\delta \leq t \leq T_*(\varepsilon) - \delta$, на котором согласно (4.81), (4.82) система (4.20) с экспоненциальной точностью аппроксимируется системой

$$\dot{z}_1 = f'_x(x_*(t, \varepsilon), 0)z_1, \quad \dot{z}_2 = g'_x(x_*(t, \varepsilon), 0)z_1.$$

Дополняя последнюю начальными условиями (4.101), (4.102), приходим к выводу, что для $\kappa_1^{(2)}(t, \varepsilon)$ сохраняется равномерное по $t \in [h+\delta, T_*(\varepsilon) - \delta]$ асимптотическое равенство (4.85), а для $\kappa_2^{(2)}(t, \varepsilon)$ равномерно по t имеем

$$\begin{aligned} \kappa_2^{(2)}(t, \varepsilon) &= \frac{g(x(t, s), 0) - g(s, 0)}{f(s, 0)} \Big|_{s=x_1^*} \cdot x_1'(x_0^*) \\ &\quad - \frac{d}{dx_0} \left(\int_{x_0}^{x_1(x_0)} \frac{ds}{a_0(s)} \right) \Big|_{x_0=x_0^*} + O(\sqrt{\varepsilon}). \end{aligned} \quad (4.103)$$

Итак, теперь у нас есть все необходимое для того, чтобы завершить доказательство леммы 4.2. Действительно, решения (4.52) выражаются через (4.58)

посредством равенства

$$[z^{(1)}(t, \varepsilon), z^{(2)}(t, \varepsilon)] = C^{-1}[\mathfrak{z}^{(1)}(t, \varepsilon), \mathfrak{z}^{(2)}(t, \varepsilon)], \quad (4.104)$$

где (см. (4.59), (4.60))

$$C = [\mathfrak{z}^{(1)}(t, \varepsilon), \mathfrak{z}^{(2)}(t, \varepsilon)]|_{t=-\delta},$$

$$\det C = -\frac{f(x(t, s), 0)}{f(s, 0)} g(x(t, s), 0) \Big|_{t=-\delta, s=x_0^*} + O(\sqrt{\varepsilon}) \neq 0. \quad (4.105)$$

Подчеркнем, что определитель в (4.105) отличен от нуля в силу условия (3.139) на параметр δ , неравенств (2.4), (3.3) и того факта, что

$$x(t + T_*, s)|_{s=x_1^*} = x(t, s)|_{s=x_0^*} \quad \forall t \in [-\delta, \delta].$$

Из установленных выше свойств решений (4.58) (см. (4.63), (4.80), (4.85), (4.86), (4.100), (4.103)) вытекают оценки

$$\max_{-h-\delta \leq t \leq -\delta} \|\mathfrak{z}^{(1)}(t + T_*(\varepsilon), \varepsilon)\| \leq \frac{M_1}{\varepsilon},$$

$$\max_{-h-\delta \leq t \leq -\delta} \|\mathfrak{z}^{(2)}(t + T_*(\varepsilon), \varepsilon)\| \leq M_2 \varepsilon^{-1/4}, \quad M_1, M_2 = \text{const} > 0. \quad (4.106)$$

Объединяя их с соотношениями (4.104), (4.105), для оператора (4.51) получаем требуемое неравенство (4.56).

Обратимся далее к матрице (4.55). Привлекая формулы (4.85), (4.103), (4.104) при $t = T_*(\varepsilon) - \delta$, нетрудно увидеть, что

$$C^{-1} \mathscr{D}(\varepsilon) C = \begin{pmatrix} 1 & r_1 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} + O(\sqrt{\varepsilon}),$$

где

$$r_1 = \frac{x_1'(x_0^*)}{f(x_1^*, 0)} - \frac{r_2}{f(x_0^*, 0)},$$

$$r_2 = \frac{f(x_0^*, 0)}{g(x_0^*, 0)} \left[\frac{g(x_1^*, 0)}{f(x_1^*, 0)} x_1'(x_0^*) + \frac{d}{dx_0} \left(\int_{x_0}^{x_1(x_0)} \frac{ds}{a_0(s)} \right) \Big|_{x_0=x_0^*} \right] = \psi'(x_0^*).$$

А отсюда очевидным образом следует, что собственные значения $\lambda_1(\varepsilon)$, $\lambda_2(\varepsilon)$ матрицы $\mathscr{D}(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ допускают асимптотику (4.57). Лемма 4.2 доказана.

Возвращаясь к исходному оператору $U(\varepsilon)$, заметим, что в силу равенств

$$U(\varepsilon) = V(\varepsilon) + W(\varepsilon), \quad (\lambda I - U(\varepsilon))^{-1} = (I - (\lambda I - V(\varepsilon))^{-1} W(\varepsilon))^{-1} (\lambda I - V(\varepsilon))^{-1}$$

любое значение $\lambda \in \mathbb{C}$, для которого

$$\|(\lambda I - V(\varepsilon))^{-1} W(\varepsilon)\|_{E \rightarrow E} < 1, \quad (4.107)$$

принадлежит резольвентному множеству этого оператора. Напомним далее, что оператор $W(\varepsilon)$ допускает оценку (4.54). В случае же $(\lambda I - V(\varepsilon))^{-1}$, опираясь на соотношения

$$\begin{aligned} (\lambda I - V(\varepsilon))^{-1} z_0(t) &= \frac{1}{\lambda} z_0(t) + c_1 \operatorname{colon}(z_1^{(1)}(T_*(\varepsilon) - \delta, \varepsilon), z_2^{(1)}(t + T_*(\varepsilon), \varepsilon)) \\ &\quad + c_2 \operatorname{colon}(z_1^{(2)}(T_*(\varepsilon) - \delta, \varepsilon), z_2^{(2)}(t + T_*(\varepsilon), \varepsilon)), \quad -h - \delta \leq t \leq -\delta, \\ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\lambda} (\lambda I - \mathcal{D}(\varepsilon))^{-1} z_0(-\delta) \end{aligned}$$

и оценки (4.106), получаем неравенство

$$\|(\lambda I - V(\varepsilon))^{-1}\|_{E \rightarrow E} \leq \frac{M(1 + |\lambda|^2)}{\varepsilon |\lambda| \cdot |\lambda - \lambda_1| \cdot |\lambda - \lambda_2|} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \lambda \neq 0, \lambda_1, \lambda_2, \quad (4.108)$$

где $M = \text{const} > 0$, λ_1, λ_2 – собственные значения матрицы (4.55).

На завершающем этапе исследования устойчивости цикла (4.13) объединим оценки (4.107), (4.108), (4.54) с асимптотическими представлениями (4.57). В результате убеждаемся, что любая точка $\lambda \in \mathbb{C}$ из множества

$$\mathbb{C} \setminus \{O_1 \cup O_2 \cup O_3\},$$

где

$$\begin{aligned} O_1 &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < \exp\left(-\frac{M_1}{\varepsilon}\right) \right\}, \quad O_2 = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_1| < \exp\left(-\frac{M_2}{\varepsilon}\right) \right\}, \\ O_3 &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_2| < \exp\left(-\frac{M_3}{\varepsilon}\right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.109)$$

а постоянные $M_j > 0$, $j = 1, 2, 3$, подходящим образом малы, удовлетворяет условию (4.107) и, следовательно, является регулярной для оператора $U(\varepsilon)$. Что же касается спектра этого оператора, то он заведомо принадлежит шарам (4.109). А отсюда и из (4.57) требуемые соотношения (4.25), (4.26) вытекают очевидным образом, причем с необходимостью $\nu_1(\varepsilon) \equiv 1$ (поскольку система (4.20) – линеаризация на цикле).

Подведем итог. Второе асимптотическое представление (4.25) и соотношения (2.15), (4.26) приводят к выводу, что $|\nu_k(\varepsilon)| < 1$ для всех $k \geq 2$. Тем самым, установлен факт экспоненциальной орбитальной устойчивости цикла (4.13) в метрике фазового пространства $\mathbb{R} \times C[-h - \delta, -\delta]$. Теорема 2.1 полностью доказана.

§ 5. Некоторые приложения к экологии

5.1. Математическая модель управляемого биоценоза. В настоящем пункте проиллюстрируем наши теоретические результаты на двух примерах из экологии. Первый из них представляет собой математическую модель биоценоза, находящегося под действием косвенного управления с обратной связью.

В случае уравнения Хатчинсона (2.6) идея косвенного управления с обратной связью (indirect feedback control) реализована в статье [7] и монографии [8]. Суть этой идеи заключается в рассмотрении вместо уравнения (2.6) двухкомпонентной системы

$$\dot{x} = -x + ay, \quad \varepsilon \dot{y} = (1 - x - y(t - h))y. \quad (5.1)$$

Здесь ε , a , h – положительные параметры, $x = x(t) > 0$ – управляющий сигнал, который воздействует на популяцию с плотностью численности $y = y(t)$ и сам зависит от $y(t)$. Характер этой зависимости позволяет интерпретировать систему (5.1) как некий вариант задачи хищник–жертва.

В работах [7], [8] были найдены достаточные условия на параметры ε , a , h , при которых глобально устойчиво положение равновесия $x = a/(a + 1)$, $y = 1/(a + 1)$ системы (5.1). Мы же будем интересоваться ее автоколебательными процессами и покажем, что при $0 < \varepsilon \ll 1$ и при соответствующем выборе запаздывания h данная система удовлетворяет условиям 2.1–2.7.

В случае (5.1) имеем

$$\begin{aligned} f(x, y) &= -x + ay, & g(x, y) &= 1 - x, \\ a_0(x) &= a, & b_0(x) &= 1 - x, & q_1 &= q_2 = 1, \end{aligned} \quad (5.2)$$

а значит, условия 2.1–2.3 здесь выполняются автоматически. Далее обратим внимание, что в силу равенств (5.2) $\forall x_0 \in (0, 1)$ аналогичное (2.8) уравнение $x - x^2/2 = x_0 - x_0^2/2$ допускает решение

$$x_1 = x_1(x_0) = 2 - x_0 > 1, \quad (5.3)$$

а аналогичное (2.11) уравнение

$$x - \ln x = 2 - x_0 - \ln(2 - x_0) + \frac{2}{a}(1 - x_0) \quad (5.4)$$

имеет на интервале $0 < x < 1$ единственное решение $x_2 = x_2(x_0)$. Таким образом, корректно определено аналогичное (2.14) отображение

$$x_0 \in (0, 1) \rightarrow \psi(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} x_2(x_0) \in (0, 1). \quad (5.5)$$

Покажем теперь, что отображение (5.5) допускает на множестве $0 < x_0 < 1$ единственную неподвижную точку x_0^* . Для ее отыскания подставим в равенство (5.4) $x = x_0$. В результате убеждаемся, что x_0^* является корнем уравнения

$$P(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \ln(2 - x_0) - \ln x_0 - 2\left(1 + \frac{1}{a}\right)(1 - x_0) = 0. \quad (5.6)$$

Остановимся на некоторых свойствах функции $P(x_0)$. Нетрудно увидеть, что

$$P(1) = 0, \quad P'(1) = \frac{2}{a} > 0, \quad P(x_0) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad x_0 \rightarrow +0, \quad (5.7)$$

$$x_0(2 - x_0)P'(x_0) = 2\left(1 + \frac{1}{a}\right)x_0(2 - x_0) - 2. \quad (5.8)$$

Отметим еще, что поскольку фигурирующий в правой части (5.8) квадратичный многочлен принимает разные знаки на концах отрезка $[0, 1]$, то уравнение $P'(x_0) = 0$ имеет на интервале $0 < x_0 < 1$ единственный корень $x_0 = \tilde{x}_0$, причем

$$P'(x_0) < 0 \quad \text{при} \quad 0 < x_0 < \tilde{x}_0, \quad P'(x_0) > 0 \quad \text{при} \quad \tilde{x}_0 < x_0 \leq 1. \quad (5.9)$$

Установленные свойства (5.7), (5.9) свидетельствуют о том, что уравнение (5.6) на интересующем нас множестве $0 < x_0 < 1$ допускает единственный корень $x_0 = x_0^*$ такой, что

$$P'(x_0^*) < 0. \quad (5.10)$$

Остается добавить, что этот корень является одновременно экспоненциально устойчивой неподвижной точкой отображения (5.5) (как показывает несложная проверка, неравенство $\psi'(x_0^*) < 1$ эквивалентно (5.10)).

Рис. 6

Из проделанного анализа следует, что для системы (5.1) справедливы условия 2.4, 2.5. Сформулируем теперь ограничение на запаздывание h . Согласно (2.17) будем считать, что

$$h < h_* = \ln \frac{x_1^*}{x_3^*}, \quad (5.11)$$

где $x_1^* = x_1(x_0^*)$ (см. (5.3)), $x_3^* = x_3(x_0^*)$, а $x_3 = x_3(x_0)$, $x_0 \in (0, 1)$ – единственный корень аналогичного (5.4) уравнения

$$x - \ln x = 2 - x_0 - \ln(2 - x_0)$$

из интервала $0 < x < 1$. Что же касается оставшегося условия 2.7, то в силу (5.2) и свойств $x_0^* \in (0, 1)$, $x_1^* > 1$ оно выполняется очевидным образом.

Итак, мы убедились, что при ограничении (5.11) на запаздывание h система (5.1) подпадает под действие теоремы 2.1, а значит, допускает экспоненциально орбитально устойчивый неклассический релаксационный цикл. При $\varepsilon = 0.01$, $a = 2.1$, $h = 1$ зависимость от времени его компонент x , y представлена на рис. 6 (сплошной линией изображен график y , а пунктирной – график x).

5.2. Модель динамики плотоядных–травоядных. Одна из первых математических моделей динамики взаимодействия плотоядных–травоядных, учитывающая эффекты запаздывания, была предложена в монографии [9]. Точнее говоря, в [9] рассматривалась система

$$\dot{x} = (-1 + ay)x, \quad \varepsilon \dot{y} = (1 - x - y(t - h))y, \quad \varepsilon, a, h > 0, \quad (5.12)$$

представляющая собой гибрид классической системы Лотки–Вольтерры с уравнением Хатчинсона. Более радикальную переработку модели Лотки–Вольтерры несколько позднее осуществил Ю.С. Колесов в статье [10]. Основная его идея состояла в том, что оба вида – и хищник, и жертва – должны меняться по хатчинсоновскому закону, а значит, их эволюция во времени должна описываться системой с двумя запаздываниями

$$\dot{x} = (ay - x(t - h_1))x, \quad \varepsilon \dot{y} = (1 - x - y(t - h_2))y, \quad (5.13)$$

где ε, a, h_1, h_2 – положительные параметры.

Необходимо отметить, что система (5.12) не подходит для иллюстрации нашего основного результата (теоремы 2.1), так как соответствующее ей отображение $\psi: (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ удовлетворяет неравенству $\psi(x_0) < x_0$ и, следовательно, не имеет неподвижных точек на интервале $0 < x_0 < 1$. В связи с этим обратимся к системе

$$\dot{x} = (ay - x)x, \quad \varepsilon \dot{y} = (1 - x - y(t - h))y, \quad (5.14)$$

где $a, h = \text{const} > 0, 0 < \varepsilon \ll 1$, являющейся частным случаем (5.13).

Как и в предыдущем примере, условия 2.1–2.3 для системы (5.14) выполняются автоматически. Что же касается функций $x_1(x_0), x_2(x_0)$, то теперь первая из них – корень уравнения

$$x - \ln x = x_0 - \ln x_0, \quad x_0 \in (0, 1), \quad (5.15)$$

лежащий на полуоси $x > 1$, а вторая является корнем уравнения

$$\frac{1}{x} + \ln x = \left(\frac{1}{x_1} + \ln x_1 + \frac{1}{a} \ln \frac{x_1}{x_0} \right) \Big|_{x_1=x_1(x_0)}, \quad x_0 \in (0, 1), \quad (5.16)$$

из интервала $0 < x < 1$. Таким образом, снова имеем дело с аналогичным (5.5) отображением, переводящим интервал $0 < x_0 < 1$ в себя.

Для нахождения неподвижной точки упомянутого отображения положим в (5.16) $x = x_0$ и учтем вытекающее из (5.15) равенство

$$x_1 - x_0 = \ln \frac{x_1}{x_0}. \quad (5.17)$$

В результате убеждаемся, что на неподвижной точке отображения (5.5) должно выполняться соотношение

$$x_1 = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{a}{a + 1}. \quad (5.18)$$

Подставляя, далее, (5.18) в (5.17), для нахождения возможных значений x_0 получаем уравнение

$$P(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x_0} \cdot \frac{a}{a+1} - x_0 + 2 \ln x_0 - \ln \frac{a}{a+1} = 0. \quad (5.19)$$

Добавим еще, что в силу требования (5.18) и неравенства $x_1(x_0) > 1$ уравнение (5.19) следует рассматривать только на интервале $0 < x_0 < a/(a+1)$.

Как и в предыдущем случае, выявим некоторые свойства функции $P(x_0)$ из (5.19). Непосредственная проверка показывает, что

$$P\left(\frac{a}{a+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{a+1}\right) + \frac{1}{a+1} < 0, \quad P'\left(\frac{a}{a+1}\right) = \frac{1}{a} > 0, \quad (5.20)$$

$$P(x_0) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad x_0 \rightarrow +0,$$

$$x_0^2 P'(x_0) = -x_0^2 + 2x_0 - \frac{a}{a+1}. \quad (5.21)$$

Несложный анализ формул (5.20), (5.21) (см. аналогичное место выше) приводит к выводу о существовании у уравнения (5.19) на интервале $(0, a/(a+1))$ единственного корня $x_0 = x_0^*$, удовлетворяющего неравенству $P'(x_0^*) < 0$, которое, в свою очередь, эквивалентно условию устойчивости $\psi'(x_0^*) < 1$ неподвижной точки $x_0 = x_0^*$ отображения (5.5). Таким образом, убеждаемся, что для системы (5.14) выполняются условия 2.4, 2.5.

Для формулировки ограничения на запаздывание h обратимся к уравнению

$$\frac{1}{x} + \ln x = \left(\frac{1}{x_1} + \ln x_1 \right) \Big|_{x_1=x_1(x_0)}, \quad x_0 \in (0, 1),$$

и обозначим через $x = x_3(x_0)$ его корень из интервала $0 < x < 1$. Тогда требование (2.17) на запаздывание h запишется в виде

$$h < h_* = \frac{1}{x_3^*} - \frac{1}{x_1^*}, \quad (5.22)$$

где $x_1^* = x_1(x_0^*)$, $x_3^* = x_3(x_0^*)$. Последнее же условие 2.7 здесь, как и для предыдущего примера, справедливо автоматически.

Из проделанных построений следует, что при ограничении (5.22) на запаздывание h и при всех $0 < \varepsilon \ll 1$ мы находимся в рамках применимости теоремы 2.1, гарантирующей существование у системы (5.14) экспоненциально орбитально устойчивого неклассического релаксационного цикла. Графики его компонент x , y не приводим, так как они аналогичны показанным на рис. 6.

§ 6. Заключение

Подводя итог, отметим, что нами построена теория неклассических релаксационных колебаний для систем с запаздыванием вида (1.25), которые можно рассматривать как модели задачи хищник–жертва. Однако аналог теоремы 2.1 сохраняется (вместе с доказательством) и для другого класса систем

(1.25), в определенном смысле двойственного к рассмотренному выше. Системы из этого класса в биологической интерпретации соответствуют задаче жертва–хищник и удовлетворяют следующей серии ограничений.

УСЛОВИЕ 6.1. Считаем, что имеют место равенства (2.1), сохраняющие силу при дифференцировании по x , y в любом порядке и любое число раз.

УСЛОВИЕ 6.2. Предполагаем, что

$$a_0(x) < 0 \quad \forall x > 0; \quad (6.1)$$

$$b_0(x) < 0 \quad \text{при } x \in (0, q_1), \quad b_0(x) > 0 \quad \text{при } x > q_1, \quad (6.2)$$

где $q_1 = \text{const} > 0$.

УСЛОВИЕ 6.3. Выполняются неравенства

$$g(x, 0) < 0 \quad \text{при } 0 \leq x < q_2, \quad g(x, 0) > 0 \quad \text{при } x > q_2; \quad (6.3)$$

$$f(x, 0) > 0 \quad \text{при } 0 < x < q_3, \quad f(x, 0) < 0 \quad \text{при } x > q_3, \quad (6.4)$$

где постоянные $q_2, q_3 > 0$ таковы, что $q_3 > \max(q_1, q_2)$.

Для формулировки очередного блока ограничений, как и ранее, рассмотрим функции (2.7).

УСЛОВИЕ 6.4. Существует такое $x_0 = x_0^* \in (\max(q_1, q_2), q_3)$, что уравнение (2.8) при $x_0 = x_0^*$ имеет решение $x = x_1^* \in (0, \min(q_1, q_2))$.

Опираясь на это условие и неравенства (6.1), (6.2), нетрудно увидеть, что к уравнению (2.8) в точке $(x, x_0) = (x_1^*, x_0^*)$ применима теорема о неявной функции по переменной x . Таким образом, из (2.8) определяется функция $x = x_1(x_0)$, $x_1(x_0^*) = x_1^*$, для которой имеет место аналогичное (2.10) свойство

$$x_1(x_0) \in (0, \min(q_1, q_2)) \quad \forall x_0 \in [a, b], \quad (6.5)$$

где $[a, b] \subset (\max(q_1, q_2), q_3)$ – отрезок достаточно малой длины, содержащий внутри себя точку x_0^* .

Далее рассмотрим уравнение (2.11), где переменная x_0 пробегает отрезок $[a, b]$ из (6.5), а $x_1 = x_1(x_0)$. При анализе этого уравнения полезно иметь в виду, что здесь вместо (2.12) в силу (6.3), (6.4) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}(x, x_1) < 0 \quad \text{при } x \in (0, q_2), \quad \frac{\partial \gamma_1}{\partial x}(x, x_1) > 0 \quad \text{при } x > q_2, \\ \gamma_1(x, x_1) \rightarrow +\infty \quad \text{при } x \rightarrow q_3 - 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Объединяя свойства (6.6) с оценкой $x_1 < q_2$ и неравенством (2.13) (которое в данном случае сохраняется, так как $a_0(x) < 0$, $x_1 < x_0$), приходим к выводу, что уравнение (2.11) имеет на интервале $q_2 < x < q_3$ единственное решение $x = x_2(x_0)$. А это значит, что на отрезке $a \leq x_0 \leq b$ определено отображение вида (2.14), причем, как нетрудно проверить, $\psi'(x_0) > 0 \quad \forall x_0 \in [a, b]$.

УСЛОВИЕ 6.5. Предполагаем, что точка $x_0 = x_0^*$ из условия 6.4 удовлетворяет соотношениям (2.15).

УСЛОВИЕ 6.6. Считаем, что

$$h < h_* \stackrel{\text{def}}{=} \int_{x_1^*}^{x_3^*} \frac{ds}{f(s, 0)}, \quad (6.7)$$

где $x_3^* = x_3(x_0^*)$, а функция $x = x_3(x_0) \in (q_2, q_3)$, $x_3(x_0) < x_2(x_0)$ – корень уравнения (2.16) при $x_1 = x_1(x_0)$.

УСЛОВИЕ 6.7. В точках $x = x_0^*$ и $x = x_1^*$, о которых идет речь в условии 6.4, имеют место неравенства (2.18).

Перечисленные ограничения позволяют применить к системе (1.25) разработанные выше методы исследования неклассических релаксационных колебаний и получить следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6.1. При выполнении условий 6.1–6.7 и при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (1.25) допускает экспоненциально орбитально устойчивый цикл $(x_*(t, \varepsilon), y_*(t, \varepsilon))$, $y_*(t, \varepsilon) > 0$, $y_*(0, \varepsilon) \equiv 1$ периода $T_*(\varepsilon)$, обладающий аналогичными (2.21)–(2.24) свойствами.

В качестве примера на применение теоремы 6.1 приведем аналогичную (1.1) систему

$$\dot{x} = \alpha - x(y + 1), \quad \varepsilon \dot{y} = (x - \beta - y(t - h))y, \quad \alpha, \beta, h = \text{const} > 0, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (6.8)$$

из теории лазеров [11]. Покажем, что при $\alpha > \beta$ и при подходящем уменьшении запаздывания h она удовлетворяет условиям 6.1–6.7.

В случае системы (6.8) в силу равенств

$$f(x, y) = \alpha - x(y + 1), \quad g(x, y) = b_0(x) = x - \beta, \quad a_0(x) = -x, \\ q_1 = q_2 = \beta, \quad q_3 = \alpha$$

условия 6.1–6.3 выполняются автоматически. В проверке нуждаются лишь требуемые в условиях 6.4, 6.5 свойства отображения $\psi(x_0)$, которое задается следующим образом.

Фиксируем произвольно $x_0 \in (\beta, \alpha)$ и обозначим через $x_1 = x_1(x_0)$ единственный корень уравнения

$$x - \beta \ln x = x_0 - \beta \ln x_0 \quad (6.9)$$

из интервала $0 < x < \beta$. Далее, рассмотрим уравнение

$$x - x_1 + (\alpha - \beta) \ln \frac{\alpha - x}{\alpha - x_1} = \ln \frac{x_1}{x_0} \quad (6.10)$$

при $x_1 = x_1(x_0)$, а через $x_2 = x_2(x_0)$ обозначим единственный его корень, лежащий на интервале $\beta < x < \alpha$. И, наконец, положим

$$x_0 \in (\beta, \alpha) \rightarrow \psi(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} x_2(x_0) \in (\beta, \alpha). \quad (6.11)$$

Отыскание возможных неподвижных точек отображения (6.11) проводится по схеме, описанной при доказательстве леммы 1.2. Поэтому здесь лишь вкратце остановимся на ее основных моментах. Сначала, полагая в (6.9), (6.10) $x = x_1$ и $x = x_0$ соответственно, для определения x_0, x_1 приходим к аналогичной (1.15) системе

$$x_1 - x_0 = \beta \ln \frac{x_1}{x_0}, \quad x_0 - x_1 = (\alpha - \beta) \ln \frac{\alpha - x_1}{\alpha - x_0} + \ln \frac{x_1}{x_0}. \quad (6.12)$$

Далее, введем в рассмотрение величину z , задающуюся формулой (1.16), и, опираясь на соотношения (6.12), выразим компоненты x_0, x_1 через z . В итоге убеждаемся, что имеют место аналогичные (1.17) равенства

$$x_0 = \frac{\alpha(z-1)z^{(\alpha-\beta)/(\beta+1)}}{z^{(\alpha+1)/(\beta+1)} - 1}, \quad x_1 = \frac{\alpha(z-1)}{z^{(\alpha+1)/(\beta+1)} - 1}, \quad (6.13)$$

а переменная z является корнем аналогичного (1.18) уравнения

$$P(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(\alpha - \beta)\beta}{\beta + 1} (z^{(\alpha+1)/(\beta+1)} - 1) \ln z + \alpha(z-1)(1 - z^{(\alpha-\beta)/(\beta+1)}) = 0. \quad (6.14)$$

Последующий анализ, связанный с уравнением (6.14), идентичен соответствующему фрагменту обоснования леммы 1.2. Поэтому приведем сразу окончательный результат: на полуоси $z > 1$ данное уравнение имеет единственный корень $z = z_*$, удовлетворяющий неравенству (1.20), а найденные по $z = z_*$ с помощью соотношений (6.13) точки x_0^* и x_1^* удовлетворяют условиям 6.4, 6.5, 6.7. В частности, требование $\psi'(x_0^*) < 1$ заведомо выполняется, так как совпадает с (1.20).

Суммируя проделанные построения и опираясь на теорему 6.1, приходим к выводу, что при $\alpha > \beta$ и при условии вида (6.7) на запаздывание h у системы (6.8) существует экспоненциально орбитально устойчивый неклассический релаксационный цикл. Графики компонент x, y этого цикла имеют вид, аналогичный показанному на рис. 4.

Список литературы

- [1] Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, *Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания*, Наука, М., 1975, 247 с.; англ. пер.: E. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov, *Differential equations with small parameters and relaxation oscillations*, Math. Concepts Methods Sci. Engrg., **13**, Plenum Press, New York, 1980, x+228 pp.
- [2] Е. Ф. Мищенко, Ю. С. Колесов, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах*, Физматлит, М., 1995, 336 с.; англ. пер.: E. F. Mishchenko, Yu. S. Kolesov, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, *Asymptotic methods in singularly perturbed systems*, Monogr. Contemp. Math., Consultants Bureau, New York, 1994, xii+281 pp.
- [3] А. Ю. Колесов, "Специфические релаксационные циклы систем типа Лотки–Вольтерра", *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **55**:3 (1991), 515–536; англ. пер.: A. Yu. Kolesov, "Specific relaxation cycles of systems of Lotka–Volterra type", *Math. USSR-Izv.*, **38**:3 (1992), 503–523.

- [4] С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, “Релаксационные колебания и диффузионный хаос в реакции Белоусова”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:8 (2011), 1400–1418; англ. пер.: S.D. Glyzin, A.Yu. Kolesov, N.Kh. Rozov, “Relaxation oscillations and diffusion chaos in the Belousov reaction”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **51**:8 (2011), 1307–1324.
- [5] Я. И. Ханин, *Основы динамики лазеров*, Физматлит, М., 1999, 368 с.
- [6] G. E. Hutchinson, “Circular causal systems in ecology”, *Ann. New York Acad. Sci.*, **50** (1948), 221–246.
- [7] K. Gopalsamy, Pei-Xuan Weng, “Feedback regulation of logistic growth”, *Internat. J. Math. Math. Sci.*, **16**:1 (1993), 177–192.
- [8] K. Gopalsamy, *Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics*, Math. Appl., **74**, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1992, xii+501 pp.
- [9] R. M. May, *Stability and complexity in model ecosystems*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1973, 235 pp.
- [10] Ю. С. Колесов, “Резонансы в экологии”, *Исследования по устойчивости и теории колебаний*, ЯрГУ, Ярославль, 1978, 26–42.
- [11] С. А. Кащенко, Е. В. Григорьева, *Релаксационные колебания в лазерах*, Синергетика: от прошлого к будущему, **64**, URSS, М., 2013, 266 с.

Сергей Дмитриевич Глызин

(Sergey D. Glyzin)

Ярославский государственный университет

им. П. Г. Демидова

E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

Поступила в редакцию

17.07.2013

Андрей Юрьевич Колесов

(Andrei Yu. Kolesov)

Ярославский государственный университет

им. П. Г. Демидова

E-mail: kolesov@uniyar.ac.ru

Николай Христович Розов

(Nikolai Kh. Rozov)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: fpo.mgu@mail.ru