Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Шарапудинов, Приближение функций из пространств Лебега и Соболева с переменным показателем суммами Фурье–Хаара, *Матем. сб.*, 2014, том 205, номер 2, 145–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8274>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 15:03:01

УДК 517.538

И. И. Шарапудинов

Приближение функций из пространств Лебега и Соболева с переменным показателем суммами Фурье–Хаара

Рассматривается пространство $L^{p(x)}$, состоящее из действительных измеримых функций $f(x)$, определенных на $[0, 1]$, для которых существует конечный интеграл $\int_0^1 |f(x)|^{p(x)} dx$. Если $1 \leq p(x) \leq \bar{p} < \infty$, то пространство $L^{p(x)}$ можно превратить в банахово пространство с нормой $\|f\|_{p(\cdot)} = \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_0^1 |f(x)/\alpha|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}$. Доказано, что если переменный показатель $p(x)$ удовлетворяет условию $|p(x) - p(y)| \ln(1/|x - y|) \leq c$, то для сумм Фурье–Хаара $Q_n(f)$ имеет место аналог первой теоремы Джексона следующего вида: $\|f - Q_n(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p)\Omega(f, 1/n)_{p(\cdot)}$, где $\Omega(f, \delta)_{p(\cdot)}$ – модуль непрерывности в $L^{p(x)}$, определенный с помощью функций В. А. Стеклова. Если же функция $f(x) \in W_{p(\cdot)}^1$, где $W_{p(\cdot)}^1$ – пространство Соболева с переменным показателем $p(x)$, то доказано, что $\|f - Q_n(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p)/n \|f'\|_{p(\cdot)}$. Исследована также задача об оценке отклонения $|f(x) - Q_n(f, x)|$ для $f(x) \in W_{p(\cdot)}^1$ в заданной точке $x \in [0, 1]$. В случае, когда $p(x) \equiv p = \text{const}$, получено точное значение величины $\sup_{f \in W_p^1(1)} |f(x) - Q_n(f, x)|$, где $W_p^1(1) = \{f \in W_p^1 : \|f'\|_{p(\cdot)} \leq 1\}$.

Библиография: 17 названий.

Ключевые слова: пространства Лебега и Соболева с переменным показателем, приближение функций суммами Фурье–Хаара.

DOI: 10.4213/sm8274

§ 1. Введение

В настоящей работе рассмотрена задача о приближении функций суммами Фурье–Хаара в пространствах Лебега и Соболева с переменным показателем. Впервые такая задача была рассмотрена в работе автора [1], в которой были найдены необходимые и достаточные условия на переменный показатель $p(x)$, при соблюдении которых классическая система Хаара $\{\chi_n\}_{n=1}^\infty$ является базисом пространства Лебега $L^{p(x)}$. Однако вопрос о скорости сходимости сумм Фурье–Хаара $Q_n(f) = Q_n(f, x)$ к исходной функции $f = f(x)$ в метрике пространства $L^{p(x)}$ оставался открытым. В настоящей статье предпринята попытка восполнить этот пробел.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 10-01-00191).

Следует отметить, что в последнее время теория пространств Лебега и Соболева с переменным показателем интенсивно развивается и находит многочисленные важные приложения. По этому поводу мы отсылаем к монографиям [2] и [3] и цитированной там литературе.

В дальнейшем нам понадобится ряд вспомогательных понятий и утверждений, которые мы соберем в следующем параграфе.

§ 2. Некоторые вспомогательные результаты

Пусть E – измеримое множество, $0 \leq p(x)$ – измеримая функция, заданная на E . Через $L^{p(x)}(E)$ обозначим множество действительных измеримых функций $f(x)$, для которых конечен интеграл $\int_E |f(x)|^{p(x)} dx$. Если $p(x)$ существенно ограничена на E и $p(x) \geq 1$, $x \in E$, то $L^{p(x)}(E)$ представляет собой [3], [4] нормированное пространство с нормой

$$\|f\|_{p(\cdot)}(E) = \inf \left\{ \alpha > 0 : \int_E \left| \frac{f(x)}{\alpha} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}. \quad (2.1)$$

Ниже нам понадобится ряд свойств нормы (2.1), доказательства которых можно найти, например, в [3] (см. также [5]).

1. Пусть $p(x)$ и $q(x)$ – функции, заданные на E такие, что $1 \leq p(x) \leq q(x) \leq \bar{q}(E) < \infty$. Тогда для любой функции $f \in L^{q(x)}(E)$ имеет место неравенство

$$\|f\|_{p(\cdot)}(E) \leq c(p, q) \|f\|_{q(\cdot)}(E), \quad (2.2)$$

где здесь и далее $c, c(p), c(p, q), \dots$ – положительные величины, зависящие лишь от указанных параметров, вообще говоря, различные в разных местах. Если мера $\mu(E)$ множества E удовлетворяет неравенству $\mu(E) \leq 1$, то в неравенстве (2.2) $c(p, q) \leq 2$.

2. Пусть E_1 и E_2 – два измеримых множества с соответствующими мерами Лебега $\mu_1(E_1)$, $\mu_2(E_2)$, причем $\mu_i(E_i) < \infty$, $i = 1, 2$. Пусть $f(t, x)$ – измеримая функция, заданная на декартовом произведении $E_1 \times E_2$. Тогда имеет место неравенство

$$\left\| \int_{E_2} |f(*, x)| dx \right\|_{p(\cdot)}(E_1) \leq c(p) \int_{E_2} \|f(*, x)\|_{p(\cdot)}(E_1) dx, \quad (2.3)$$

где $c(p) \leq 2$.

3. Пусть $p(x)$ – измеримая функция, заданная на E . Обозначим через $\underline{p}(E)$ и $\bar{p}(E)$ существенную нижнюю и существенную верхнюю грани функции $p(x)$ на множестве E . Для дальнейшего положим $\underline{p} = \underline{p}([0, 1])$ и $\bar{p} = \bar{p}([0, 1])$. Если $1 < \underline{p}(E) \leq p(x) \leq \bar{p}(E) < \infty$, $1/p(x) + 1/q(x) = 1$, то для $f(x) \in L^{p(x)}(E)$ можно определить норму

$$\|f\|_{p(\cdot)}^*(E) = \sup_{g \in L^{q(x)}(E), \|g\|_{q(\cdot)}(E) \leq 1} \int_E f(x)g(x) dx. \quad (2.4)$$

Можно показать [3], что нормы $\|f\|_{p(\cdot)}(E)$ и $\|f\|_{p(\cdot)}^*(E)$ эквивалентны и имеют место неравенства

$$\|f\|_{p(\cdot)}(E) \leq \|f\|_{p(\cdot)}^*(E) \leq r_p \|f\|_{p(\cdot)}(E), \quad (2.5)$$

где $1 \leq r_p \leq 2$, причем если $p(x) \equiv p = \text{const}$, то

$$\|f\|_{p(\cdot)}(E) = \|f\|_p(E) = \|f\|_p^*(E) = \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (2.6)$$

§ 3. Модуль непрерывности в $L^{p(x)}$

Пусть $p(x)$ – непрерывная функция, заданная на $[0, 1]$. Продолжим ее на всю числовую ось, полагая

$$p(x) = \begin{cases} p(0), & x \leq 0, \\ p(1), & x \geq 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Мы будем также считать, что функция $f(x)$, заданная на $[0, 1]$, продолжена на полуось $[0, \infty)$ посредством равенства $f(x) = 0$ при $x > 1$. Если теперь $f(x) \in L^{p(x)}$, то введем оператор В. А. Стеклова

$$s_h(f) = s_h(f)(x) = \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt. \quad (3.2)$$

Заметим, что отображение вида $f \rightarrow s_h(f)$ может быть истолковано также как линейный оператор, действующий в пространстве $L_{2\pi}^{p(x)}$, состоящем из 2π -периодических функций $f(x)$, для которых $\int_0^{2\pi} |f(x)|^{p(x)} dx < \infty$, где $p(x)$ также 2π -периодическая функция. В работах автора [6], [7] было доказано, что семейство операторов $s_h(f)$, $0 < h \leq 1$, равномерно ограничено в $L_{2\pi}^{p(x)}$, если $p(x)$ удовлетворяет условию $|p(x) - p(y)| \ln 2\pi/|x - y| \leq c$. Ниже нам понадобится аналогичный результат для семейства операторов $s_h(f)$, $0 < h \leq 1$, действующих в пространстве $L^{p(x)}$ (см. (3.2)).

Обозначим через $\mathcal{P}$ класс переменных показателей $p = p(x) \geq 1$, удовлетворяющих условию

$$|p(x) - p(y)| \ln \frac{1}{|x - y|} \leq c, \quad x, y \in [0, 1], \quad (3.3)$$

и продолженных на всю числовую ось посредством равенства (3.1).

ЛЕММА 1. Если $p(x) \in \mathcal{P}$, то семейство операторов $s_h(f)$, $0 < h \leq 1$, определенных равенством (3.2), равномерно ограничено в $L^{p(x)}$. Другими словами, найдется положительное число $c(p)$, зависящее только от переменного показателя $p = p(x)$, для которого

$$\|s_h(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \|f\|_{p(\cdot)}, \quad f \in L^{p(x)}. \quad (3.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Справедливость оценки (3.4) для $h \geq h_0 > 0$ легко вытекает, например, из (2.2) или (2.3), поэтому достаточно считать, что $0 < h \leq 1/4$. Для таких h положим

$$t_k = kh, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.5)$$

Через k_x обозначим такое число из $\mathbb{Z}$, для которого

$$t_{k_x} \leq x < t_{k_x+1}. \quad (3.6)$$

Определим ступенчатую функцию $q(x) = q(x, h)$ следующим образом:

$$q(x, h) = \min\{p(t) \mid t_{k_x-1} \leq t \leq t_{k_x+2}\}. \quad (3.7)$$

Из (3.1), (3.6) и (3.7) следует, что если $|t| \leq h$, то

$$q(x, h) \leq p(x + t). \quad (3.8)$$

В частности, если $t_k \leq x < t_{k+1}$, то

$$q_k = q(x, h) \leq p(x + t), \quad 0 \leq t \leq h. \quad (3.9)$$

Для доказательства леммы достаточно рассмотреть случай $\|f\|_{p(\cdot)} \leq 1$. Пусть $h > 0$, N – такое натуральное число, что $(N - 1)h \leq 1 < Nh$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^1 |s_h(f)(x)|^{p(x)} dx &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |s_h(f)(x)|^{p(x)} dx \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt \right|^{p(x)-q_k+q_k} dx. \end{aligned} \quad (3.10)$$

С другой стороны, в силу условия (3.3) при $t_k \leq x \leq t_{k+1}$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt \right|^{p(x)-q_k} &\leq \left(\frac{1}{h} \right)^{p(x)-q_k} \left(\int_0^{Nh} |f(x+t)| dt \right)^{p(x)-q_k} \\ &\leq \left(\frac{1}{h} \right)^{c/|\ln 1/(2h)|} \left(\int_x^{Nh+x} |f(t)| dt \right)^{p(x)-q_k} \leq c(p) \left(\int_0^1 |f(t)| dt \right)^{p(x)-q_k} \\ &\leq c(p) (2\|f\|_{p(\cdot)})^{p(x)-q_k} \leq c(p). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Далее, пользуясь неравенством Иенсена и неравенствами (3.8) и (3.9), мы можем записать

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt \right|^{q_k} dx &\leq \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t)|^{q_k} dt dx \\ &= \int_{t_0}^{t_N} \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t)|^{q(x,h)} dt dx = \frac{1}{h} \int_0^h dt \int_{t_0}^{t_N} |f(x+t)|^{q(x,h)} dx \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h dt \int_t^{t_N+t} |f(x)|^{q(x-t,h)} dx \leq \frac{1}{h} \int_0^h dt \int_0^1 |f(x)|^{q(x-t,h)} dx \\ &= \frac{1}{h} \int_0^h dt \int_0^1 \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{q(*-t,h)}} \right|^{q(x-t,h)} \|f\|_{q(*-t,h)}^{q(x-t,h)} dx \\ &\leq \frac{1}{h} \int_0^h dt \int_0^1 \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{q(*-t,h)}} \right|^{q(x-t,h)} (2\|f\|_{p(\cdot)})^{q(x-t,h)} dx \\ &\leq 2^{\bar{p}} \frac{1}{h} \int_0^h dt \int_0^1 \left| \frac{f(x)}{\|f\|_{q(*-t,h)}} \right|^{q(x-t,h)} dx \leq 2^{\bar{p}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Сопоставляя (3.11) и (3.12) с (3.10), убеждаемся в справедливости утверждения леммы 1.

Перейдем к конструированию модуля непрерывности для функций $f(x) \in L^{p(x)}$. Пусть $p(x) \in \mathcal{P}$ и $f(x) \in L^{p(x)}$. Тогда мы можем рассмотреть следующую величину:

$$\Omega(f, 0)_{p(\cdot)} = 0, \quad \Omega(f, \delta)_{p(\cdot)} = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|f - s_h(f)\|_{p(\cdot)}, \quad (3.13)$$

где $s_h(f) = s_h(f)(x)$ – функция В. А. Стеклова, определенная равенством (3.2). Нам понадобится ряд свойств величины $\Omega(f, \delta)_{p(\cdot)}$. Прежде всего отметим, что функция $\varphi(\delta) = \Omega(f, \delta)_{p(\cdot)}$ не убывает на $[0, \infty)$ и $\varphi(0) = 0$. Покажем, что функция $\varphi(\delta)$ непрерывна в точке $\delta = 0$, т.е. $\lim_{\delta \rightarrow 0} \varphi(\delta) = 0$.

ЛЕММА 2. Если $p(x) \in \mathcal{P}$, $f \in L^{p(x)}$, то $\lim_{\delta \rightarrow 0} \Omega(f, \delta) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $f(x)$ непрерывна на $[0, \infty)$ и $f(x) = 0$ при $x \geq 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$, для которого $|f(x) - f(x+t)| < \varepsilon$ при $0 \leq t \leq \delta_0$. Поэтому если $0 \leq h \leq \delta_0$, то

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \frac{1}{\varepsilon} (f(x) - s_h(f)(x)) \right|^{p(x)} dx &= \int_0^1 \left| \frac{1}{h\varepsilon} \int_0^h (f(x) - f(x+t)) dt \right|^{p(x)} dx \\ &\leq \int_0^1 \left(\frac{1}{h\varepsilon} \int_0^h |f(x) - f(x+t)| dt \right)^{p(x)} dx < 1. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если $0 \leq h < \delta_0$, то $\|f - s_h(f)\|_{p(\cdot)} < \varepsilon$, откуда, в свою очередь, в силу (3.13) выводим $\Omega(f, \delta)_{p(\cdot)} < \varepsilon$, если $\delta \leq \delta_0$. Тем самым утверждение леммы для непрерывных функций $f(x)$ справедливо.

С другой стороны, хорошо известно (см., например, [3]), что непрерывные функции $g(x)$, заданные на $[a, b]$, образуют всюду плотное подмножество в $L^{p(x)}([a, b])$. Отсюда, в свою очередь, легко показать, что непрерывные на $[a, b]$ функции $g(x)$, обращающиеся в нуль на $[0, \infty)$, образуют всюду плотное в $L^{p(x)}$ подмножество. Итак, пусть $g = g(x)$ – непрерывная функция, заданная на $[0, \infty)$ и такая, что $g(x) = 0$ при $x \geq 1$. Тогда мы имеем

$$\|f - s_h(f)\|_{p(\cdot)} \leq \|f - g\|_{p(\cdot)} + \|g - s_h(g)\|_{p(\cdot)} + \|s_h(g) - s_h(f)\|_{p(\cdot)}. \quad (3.14)$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ подберем функцию $g(x)$ так, чтобы было

$$\|f - g\|_{p(\cdot)} < \varepsilon. \quad (3.15)$$

Как уже было показано выше, для непрерывной функции $g(x)$ можно найти такое $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$, что при $0 \leq h \leq \delta_0$ будет

$$\|g - s_h(g)\|_{p(\cdot)} < \varepsilon. \quad (3.16)$$

Наконец, в силу леммы 1 имеем

$$\|s_h(g) - s_h(f)\|_{p(\cdot)} = \|s_h(g - f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \|g - f\|_{p(\cdot)}. \quad (3.17)$$

Отсюда и из (3.15) находим

$$\|s_h(g) - s_h(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p)\varepsilon. \quad (3.18)$$

Из (3.14)–(3.18) получаем

$$\|f - s_h(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p)\varepsilon, \quad 0 \leq h \leq \delta_0(\varepsilon).$$

Сопоставляя эту оценку с равенством (3.13), выводим

$$\Omega(f, \delta)_{p(\cdot)} \leq c(p)\varepsilon, \quad \delta \leq \delta_0(\varepsilon).$$

Тем самым утверждение леммы полностью доказано.

Заметим, что в работах автора [5], [7]–[9] величина (3.13) была рассмотрена в пространствах периодических функций $L_{2\pi}^{p(x)}$, отмеченных нами выше. Используя $\Omega(f, \delta)_{p(\cdot)}$ в качестве модуля непрерывности, в [5], [8], [9] были установлены прямые и обратные теоремы теории приближений тригонометрическими полиномами в $L_{2\pi}^{p(x)}$. В случае, когда переменный показатель $p(x) > 1$, аналогичные задачи были также исследованы в работах [10]–[14]. В настоящей работе получен аналог первой теоремы Джексона в $L^{p(x)}$ для сумм Фурье–Хаара. Исследованы также аппроксимативные свойства сумм Фурье–Хаара на классах типа Соболева $W_{p(\cdot)}^1$ с переменным показателем $p(x)$.

§ 4. Приближение функций из классов Соболева с переменным показателем суммами Фурье–Хаара

Через $W_{p(x)}^r(M)$ обозначим класс Соболева с переменным показателем $p(x)$, состоящий из функций $f(x)$, $r - 1$ раз непрерывно дифференцируемых на $[0, 1]$, для которых $f^{(r-1)}(x)$ абсолютно непрерывна, $f^{(r)}(x) \in L^{p(x)}$ и $\|f^{(r)}\|_{p(\cdot)} \leq M$. Положим $W_{p(\cdot)}^r = \bigcup_{M>0} W_{p(\cdot)}^r(M)$, $W_{p(\cdot)} = W_{p(\cdot)}^1$. В настоящем параграфе рассмотрена задача о приближении функций $f \in W_{p(\cdot)}$ суммами Фурье–Хаара $Q_n(f) = Q_n(f, x)$. Мы напомним [15], [16] что система Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ состоит из функций Хаара $\chi_n(x)$, определенных на $[0, 1]$ следующим образом:

$$\chi_1(x) \equiv 1, \quad \chi_n(x) = \chi_{kj}(x) = \begin{cases} 2^{k/2}, & x \in I_{kj}^+, \\ -2^{k/2}, & x \in I_{kj}^-, \\ 0, & x \notin I_{kj}, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $n = 2^k + j$,

$$I_{kj} = \left[\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k} \right), \quad j = 1, 2, \dots, 2^k - 1, \quad I_{k2^k} = \left[\frac{2^k - 1}{2^k}, 1 \right],$$

$$I_{kj}^+ = I_{k+1, 2j-1}, \quad I_{kj}^- = I_{k+1, 2j}.$$

Заметим, что I_{kj}^+ и I_{kj}^- представляют собой левую и правую половины полуинтервала I_{kj} . Через $\lambda_{n1}, \lambda_{n2}, \dots, \lambda_{nn}$ будем обозначать интервалы постоянства системы функций $\chi_1(x), \dots, \chi_n(x)$. Если $n = 2^k + j$, то они имеют вид $\lambda_{nm} = I_{k+1, m}$ при $m = 1, 2, \dots, 2j$ и $\lambda_{nm} = I_{km}$ при $m = 2j + 1, \dots, n$, а их длины

$$|\lambda_{nm}| = \begin{cases} \frac{1}{2^{k+1}}, & m = 1, 2, \dots, 2j, \\ \frac{1}{2^k}, & m = 2j + 1, \dots, n. \end{cases} \quad (4.2)$$

Пусть $f(x)$ — произвольная интегрируемая функция на $[0, 1]$. Обозначим через $Q_n(x) = Q_n(f, x)$ частичную сумму ряда Фурье-Хаара этой функции. Известно [16], что

$$Q_n(x) = Q_n(f, x) = \frac{1}{|\lambda_{nm}|} \int_{\lambda_{nm}} f(y) dy, \quad x \in \lambda_{nm}. \quad (4.3)$$

Будем рассматривать $Q_n = Q_n(f) = Q_n(f, x)$ как линейный оператор, действующий в пространстве $L^{p(x)}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $p(x) \in \mathcal{P}$, $f \in W_{p(x)}$. Тогда имеет место оценка

$$\|f - Q_n(f)\|_{p(\cdot)} \leq \frac{c(p)}{n} \|f'\|_{p(\cdot)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общность, мы можем считать, что функция $f \in W_{p(x)}^1(1)$. Для $p(x) \in \mathcal{P}$ положим $p_m = \min\{p(x) : x \in \lambda_{nm}\}$. Тогда, учитывая (4.3), имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 |n(Q_n(f, x) - f(x))|^{p(x)} dx &= \sum_{m=1}^n \int_{\lambda_{nm}} \left| \frac{n}{|\lambda_{nm}|} \int_{\lambda_{nm}} (f(y) - f(x)) dy \right|^{p(x)} dx \\ &= \sum_{m=1}^n \int_{\lambda_{nm}} \left| \frac{n}{|\lambda_{nm}|} \int_{\lambda_{nm}} dy \int_x^y f'(t) dt \right|^{p(x)} dx \\ &\leq \sum_{m=1}^n \int_{\lambda_{nm}} \left[\frac{n}{|\lambda_{nm}|} \int_{\lambda_{nm}} dy \int_{\lambda_{nm}} |f'(t)| dt \right]^{p(x)} dx \\ &= \sum_{m=1}^n \int_{\lambda_{nm}} \left[n \int_{\lambda_{nm}} |f'(t)| dt \right]^{p(x)} dx \\ &= \sum_{m=1}^n \int_{\lambda_{nm}} \left[n \int_{\lambda_{nm}} |f'(t)| dt \right]^{p(x)-p_m+p_m} dx. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Далее, в силу (3.3) и (2.2) ($f \in W_{p(x)}^1(1)$ и, следовательно, $\|f'\|_{p(\cdot)} \leq 1$)

$$\begin{aligned} \left[n \int_{\lambda_{nm}} |f'(t)| dt \right]^{p(x)-p_m} dx &\leq n^{p(x)-p_m} \left[\int_0^1 |f'(t)| dt \right]^{p(x)-p_m} dx \\ &\leq c(p) (2\|f'\|_{p(\cdot)})^{p(x)-p_m} \leq c(p). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из (4.4) и (4.5) имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 |n(Q_n(f, x) - f(x))|^{p(x)} dx &\leq c(p) \sum_{m=1}^n \int_{\lambda_{nm}} \left[n \int_{\lambda_{nm}} |f'(t)| dt \right]^{p_m} dx \\ &= c(p) \sum_{m=1}^n (n|\lambda_{nm}|)^{p_m} \int_{\lambda_{nm}} \left[\frac{1}{|\lambda_{nm}|} \int_{\lambda_{nm}} |f'(t)| dt \right]^{p_m} dx \\ &\leq c(p) \sum_{m=1}^n \int_{\lambda_{nm}} \frac{dx}{|\lambda_{nm}|} \int_{\lambda_{nm}} |f'(t)|^{p_m} dt \\ &= c(p) \sum_{m=1}^n \int_{\lambda_{nm}} |f'(t)|^{p_m} dt = c(p) \int_0^1 |f'(t)|^{q(t)} dt, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где $q(x)$ – ступенчатая функция, для которой $q(x) = p_m$ при $x \in \lambda_{nm}$, $m = 1, \dots, n$. С другой стороны, в силу (2.2)

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f'(t)|^{q(t)} dt &= \int_0^1 \left| \frac{f'(t)}{\|f'\|_{q(\cdot)}} \right|^{q(t)} \|f'\|_{q(\cdot)}^{q(t)} dt \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{f'(t)}{\|f'\|_{q(\cdot)}} \right|^{q(t)} (2\|f'\|_{p(\cdot)})^{q(t)} dt \leq 2^{\bar{p}} \int_0^1 \left| \frac{f'(t)}{\|f'\|_{q(\cdot)}} \right|^{q(t)} dt = 2^{\bar{p}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из (4.6) и (4.7) находим

$$\int_0^1 |n(Q_n(f, x) - f(x))|^{p(x)} dx \leq c(p),$$

или, что то же,

$$\int_0^1 \left| \frac{n(Q_n(f, x) - f(x))}{c(p)^{1/p(x)}} \right|^{p(x)} dx \leq 1.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^1 \left| \frac{Q_n(f, x) - f(x)}{(1 + c(p))^{1/p(x)}/n} \right|^{p(x)} dx \leq 1.$$

Это, в свою очередь, означает, что

$$\|f - Q_n(f)\|_{p(\cdot)} \leq \frac{(1 + c(p))^{1/p}}{n}.$$

Теорема доказана для $f \in W_{p(\cdot)}^1(1)$. Но если $f \in W_{p(\cdot)}$, то $f/\|f'\|_{p(\cdot)} \in W_{p(\cdot)}^1(1)$, поэтому утверждение теоремы 1 вытекает из уже доказанного случая.

Рассмотрим вопрос о приближении функции $f(x) \in W_{p(\cdot)}$ суммами Фурье–Хаара $Q_n(f, x)$ в заданной точке $x \in [0, 1]$. Пусть $x \in \lambda_{nm} = [(m-1)h, mh]$, где $h = |\lambda_{nm}|$. Тогда в силу (4.3) и формулы Ньютона–Лейбница

$$\begin{aligned} f(x) - Q_n(f, x) &= \frac{1}{h} \int_{(m-1)h}^{mh} [f(x) - f(y)] dy = \frac{1}{h} \int_{(m-1)h}^{mh} \int_y^x f'(t) dt dy \\ &= \frac{1}{h} \int_{(m-1)h}^x \int_y^x f'(t) dt dy - \frac{1}{h} \int_x^{mh} \int_x^y f'(t) dt dy \\ &= \frac{1}{h} \int_{(m-1)h}^x f'(t) dt \int_{(m-1)h}^t dy - \frac{1}{h} \int_x^{mh} f'(t) dt \int_t^{mh} dy \\ &= \frac{1}{h} \int_{(m-1)h}^x f'(t)(t - (m-1)h) dt + \frac{1}{h} \int_x^{mh} f'(t)(t - mh) dt. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Для $x \in \lambda_{nm}$, $m = 1, 2, \dots, 2^k$, положим

$$R_n(t, x) = \frac{1}{h} \begin{cases} t - (m-1)h, & t \in ((m-1)h, x], \\ t - mh, & t \in (x, mh), \\ 0, & t \in [0, (m-1)h] \cup [mh, 1]. \end{cases} \quad (4.9)$$

Тогда из (4.8) и (4.9) имеем

$$f(x) - Q_n(f, x) = \int_{(m-1)h}^{mh} f'(t) R_n(t, x) dt. \quad (4.10)$$

Если $p(x) \in \mathcal{P}$ и $p(x) > 1$ при $x \in [0, 1]$, то мы можем ввести сопряженную функцию $q(x) = p(x)/(p(x) - 1)$. Тогда для $x \in \lambda_{nm}$ в силу (4.10) и (2.4) можем записать

$$\sup_{f \in W_{p(\cdot)}(1)} |f(x) - Q_n(f, x)| = \|R_n(*, x)\|_{q(\cdot)}^* = \|R_n(*, x)\|_{q(\cdot)}^*(\lambda_{nm}). \quad (4.11)$$

Кроме того, если $p(x) = p = \text{const}$, то

$$\sup_{f \in W_{p(\cdot)}(1)} |f(x) - Q_n(f, x)| = \left(\int_{\lambda_{nm}} |R_n(t, x)|^q dt \right)^{1/q}, \quad (4.12)$$

где $q = p/(p - 1)$. Отметим еще два случая: $p = 1$ и $p = \infty$. В первом из этих случаев равенство (4.11) приобретает вид

$$\sup_{f \in W_1(1)} |f(x) - Q_n(f, x)| = \max_{t \in \lambda_{nm}} |R_n(t, x)|, \quad (4.12A)$$

а во втором –

$$\sup_{f \in W_\infty(1)} |f(x) - Q_n(f, x)| = \int_{\lambda_{nm}} |R_n(t, x)| dt. \quad (4.12B)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $x \in \lambda_{nm} = [(m - 1)h, mh]$, $q = p/(p - 1)$. Тогда имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \sup_{f \in W_p(1)} |f(x) - Q_n(f, x)| &= \left[\frac{(x - (m - 1)h)^{q+1}}{(q + 1)h^q} + \frac{(mh - x)^{q+1}}{(q + 1)h^q} \right]^{1/q}, \quad 1 < p < \infty, \\ \sup_{f \in W_\infty(1)} |f(x) - Q_n(f, x)| &= \frac{1}{2h} [(x - (m - 1)h)^2 + (mh - x)^2], \\ \sup_{f \in W_1(1)} |f(x) - Q_n(f, x)| &= \frac{1}{h} \max\{x - (m - 1)h, mh - x\}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n = 2^k + j$, $x \in \lambda_{nm}$, тогда в силу (4.9)

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_{nm}} |R_n(t, x)|^q dt &= \frac{1}{h^q} \int_{(m-1)h}^x (t - (m - 1)h)^q dt + \frac{1}{h^q} \int_x^{mh} (mh - t)^q dt \\ &= \frac{(x - (m - 1)h)^{q+1}}{(q + 1)h^q} + \frac{(mh - x)^{q+1}}{(q + 1)h^q}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Сопоставляя (4.12), (4.12A) и (4.12B) с (4.13), приходим к утверждению теоремы.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $1 < p < \infty$, $q = p/(p-1)$, $n = 2^k + j$. Тогда

$$\sup_{f \in W_p(1)} |f(x) - Q_n(f, x)| \leq 2^{-k(1-1/p)} \begin{cases} \left(\frac{1}{2(q+1)} \right)^{1/q}, & 0 \leq x < \frac{j}{2^k}, \\ \left(\frac{1}{(q+1)} \right)^{1/q}, & \frac{j}{2^k} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, если $x \in \lambda_{nm}$, то

$$\frac{(x - (m-1)h)^{q+1}}{(q+1)h^q} + \frac{(mh - x)^{q+1}}{(q+1)h^q} \leq \frac{h}{q+1} = \frac{|\lambda_{nm}|}{q+1}.$$

Поэтому утверждение следствия вытекает из теоремы 2 с учетом равенства (4.2).

ТЕОРЕМА 3. Пусть $p(x) \in \mathcal{P}$ и $p(x) > 1$ для всех $x \in [0, 1]$. Тогда имеет место оценка

$$\sup_{f \in W_{p(\cdot)}(1)} |f(x) - Q_n(f, x)| \leq c(p)n^{1/p(x)-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \in \lambda_{nm}$, $1/p(x) + 1/q(x) = 1$. В силу (4.11) и (2.5) нам достаточно оценить величину $\|R_n(*, x)\|_{q(\cdot)}(\lambda_{nm})$. Покажем, что

$$\|R_n(*, x)\|_{q(\cdot)}(\lambda_{nm}) \leq c(p)n^{1/p(x)-1}. \quad (4.14)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_{nm}} |n^{1/q(x)} R_n(t, x)|^{q(t)} dt &< \int_{\lambda_{nm}} (1 + |n^{1/q(x)} R_n(t, x)|)^{q(t)} dt \\ &\leq \int_{\lambda_{nm}} (1 + |n^{1/q(x)} R_n(t, x)|)^{q(x) + |q(t) - q(x)|} dt. \end{aligned} \quad (4.15)$$

С другой стороны, в силу (4.9)

$$|R_n(t, x)| \leq 1, \quad (4.16)$$

поэтому с учетом (3.3) выводим $(q(x))$ вместе с $p(x)$ удовлетворяет условию (3.3) с некоторой константой $d = d(p)$

$$\begin{aligned} (1 + |n^{1/q(x)} R_n(t, x)|)^{|q(t) - q(x)|} &\leq (1 + n^{1/q(x)})^{|q(t) - q(x)|} \\ &\leq (1 + n^{1/q(x)})^{c(p)/|\ln |t-x||} \leq (1 + n^{1/q(x)})^{c(p)/\ln 1/|\lambda_{nm}|} \leq c(p). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Из (4.15)–(4.17) имеем

$$\begin{aligned} \int_{\lambda_{nm}} |n^{1/q(x)} R_n(t, x)|^{q(t)} dt &< c(p) \int_{\lambda_{nm}} (1 + |n^{1/q(x)} R_n(t, x)|)^{q(x)} dt \\ &\leq c(p) \int_{\lambda_{nm}} (1 + n^{1/q(x)})^{q(x)} dt \leq c(p)|\lambda_{nm}|(1 + n^{1/q(x)})^{q(x)} \leq c(p). \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\int_{\lambda_{nm}} \left| \frac{n^{1/q(x)}}{(c(p))^{1/q(t)}} R_n(t, x) \right|^{q(t)} dt \leq 1.$$

Но тогда

$$\int_{\lambda_{nm}} \left| \frac{R_n(t, x)}{(1 + c(p))^{1/q(\lambda_{nm})} n^{-1/q(x)}} \right|^{q(t)} dt \leq 1,$$

откуда следует, что

$$\|R_n(*, x)\|_{q(\cdot)}(\lambda_{nm}) \leq (1 + c(p))^{1/q(\lambda_{nm})} n^{1/p(x)-1} \leq c(p) n^{1/p(x)-1}.$$

Теорема доказана.

§ 5. Приближение функций суммами Фурье–Хаара в пространстве Лебега с переменным показателем

Задача о приближении функций $f \in L^p([0, 1])$ суммами Фурье–Хаара $Q_n(f)$ в случае постоянного показателя $p \geq 1$ была решена в работе П. Л. Ульянова [17], в которой доказано, что

$$\|f - Q_n(f)\|_p = \left(\int_0^1 |f(x) - Q_n(f, x)|^p dx \right)^{1/p} \leq c(p) \omega\left(f, \frac{1}{n}\right), \quad (5.1)$$

где $c(p) = 4^{1/p}(1 + 2^p)^{1/p}$,

$$\omega(f, \delta)_p = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|f(\cdot + h) - f\|_{p([0, 1-h])} = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \left(\int_0^{1-h} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Заметим, что в случае переменного показателя $p = p(x)$ величина

$$\omega(f, \delta)_{p(\cdot)} = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \|f(\cdot + h) - f\|_{p(\cdot)}([0, 1-h])$$

может оказаться бессодержательной, так как сдвиг $f(x+h)$ функции $f(x) \in L^{p(x)}$ не обязательно принадлежит пространству $L^{p(x)}([0, 1-h])$, и, как следствие, как правило, $\omega(f, \delta)_{p(\cdot)} = \infty$ при $\delta > 0$. Поэтому мы будем пользоваться модулем непрерывности $\Omega(f, \delta)_{p(\cdot)}$, введенным в § 3 (см. (3.13)) и докажем аналог неравенства (5.1) для $f(x) \in L^{p(x)}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $p(x) \in \mathcal{P}$, $f(x) \in L^{p(x)}$. Тогда имеет место оценка

$$\|f - Q_n(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \Omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим для каждого $0 < z \leq 1$ следующий оператор:

$$\Theta_z(f) = \Theta_z(f)(x) = \frac{2}{z} \int_{z/2}^z \frac{dh}{h} \int_0^h f(x+t) dt. \quad (5.2)$$

Покажем, что функция $\Theta_z(f)(x) \in W_{p(\cdot)}^1$. В самом деле, если $f(x) \in L^{p(x)}$, то при $z/2 \leq h \leq z$ интегралы $g_h(x) = \int_0^h f(x+t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt$ образуют систему равностепенно абсолютно непрерывных функций на $[0, 1]$, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется не зависящее от h число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что какова

бы ни была система сегментов $[a_k, b_k] \subset [0, 1]$, $k = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющая условию $\sum_{k=1}^n b_k - a_k < \delta$, будет выполнено неравенство

$$\sum_{k=1}^n |g_h(b_k) - g_h(a_k)| = \sum_{k=1}^n \left| \int_{b_k}^{b_k+h} f(t) dt - \int_{a_k}^{a_k+h} f(t) dt \right| < \varepsilon \frac{z}{2}.$$

Но тогда из (5.2) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\Theta_z(f)(b_k) - \Theta_z(f)(a_k)| &\leq \frac{2}{z} \int_{z/2}^z \frac{1}{h} \sum_{k=1}^n \left| \int_{b_k}^{b_k+h} f(t) dt - \int_{a_k}^{a_k+h} f(t) dt \right| dh \\ &\leq \varepsilon \int_{z/2}^z \frac{dh}{h} < \varepsilon \int_{z/2}^z \frac{dh}{z/2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Тем самым $\Theta_z(f)(x)$ абсолютно непрерывна на $[0, 1]$. Далее заметим, что для почти всех $x \in [0, 1]$

$$(\Theta_z(f))'(x) = \frac{2}{z} \int_{z/2}^z \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) dh.$$

Чтобы убедиться в этом, нам достаточно установить требуемое равенство для правосторонней производной функции $\Theta_z(f)(x)$. С этой целью мы обратимся к (5.2) и запишем

$$\begin{aligned} &\frac{\Theta_z(f)(x + \Delta x) - \Theta_z(f)(x)}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \frac{2}{z} \int_{z/2}^z \left[\frac{1}{h} \int_{x+\Delta x}^{x+\Delta x+h} f(t) dt - \frac{1}{h} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \right] dh \\ &= \frac{2}{z} \int_{z/2}^z \frac{dh}{h} \left[\frac{1}{\Delta x} \int_{x+h}^{x+h+\Delta x} f(t) dt - \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \right] = U_1 - U_2, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где

$$U_1 = \frac{2}{z} \int_{z/2}^z \frac{dh}{h} \frac{1}{\Delta x} \int_{x+h}^{x+h+\Delta x} f(t) dt, \quad (5.4)$$

$$U_2 = \frac{2}{z} \int_{z/2}^z \frac{dh}{h} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt. \quad (5.5)$$

Далее,

$$U_1 = \frac{2}{z} \int_{z/2}^z \frac{f(x+h)}{h} dh + r_1, \quad (5.6)$$

где

$$\begin{aligned} |r_1| &\leq \frac{2}{z} \int_{z/2}^z \frac{dh}{h} \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{x+h}^{x+h+\Delta x} f(t) dt - f(x+h) \right| \\ &\leq \frac{4}{z^2} \int_0^z \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{x+h}^{x+h+\Delta x} f(t) dt - f(x+h) \right| dh \\ &= \frac{4}{z^2} \int_x^{x+z} \left| \frac{1}{\Delta x} \int_y^{y+\Delta x} f(t) dt - f(y) \right| dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{4}{z^2} \int_0^1 \left| \frac{1}{\Delta x} \int_y^{y+\Delta x} f(t) dt - f(y) \right| dy \\
&= \frac{4}{z^2} \int_0^1 \left| \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} f(y+t) dt - f(y) \right| dy \\
&= \frac{4}{z^2} \int_0^1 |s_{\Delta x}(f) - f(y)| dy \rightarrow 0, \quad \Delta x \rightarrow 0,
\end{aligned} \tag{5.7}$$

так как в силу леммы 2 $\|s_{\Delta x}(f) - f\|_1 \rightarrow 0$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Из (5.6) и (5.7) имеем

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} U_1 = \frac{2}{z} \int_{z/2}^z \frac{f(x+h)}{h} dh. \tag{5.8}$$

Кроме того, из (5.5) следует, что для почти всех $x \in [0, 1]$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} U_2 = \frac{2}{z} \int_{z/2}^z \frac{f(x)}{h} dh. \tag{5.9}$$

Из (5.3), (5.8) и (5.9) выводим требуемое равенство, из которого следует, что

$$|(\Theta_z(f))'(x)| = \frac{2}{z} \left| \int_{z/2}^z \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) dh \right|. \tag{5.10}$$

С другой стороны, методом интегрирования по частям находим

$$\begin{aligned}
&\int_{z/2}^z \frac{1}{h} (f(x+h) - f(x)) dh \\
&= \frac{1}{h} \int_{z/2}^h (f(x+t) - f(x)) dt \Big|_{h=z/2}^{h=z} + \int_{z/2}^z \frac{dh}{h^2} \int_{z/2}^h (f(x+t) - f(x)) dt \\
&= \frac{1}{z} \int_{z/2}^z (f(x+t) - f(x)) dt + \int_{z/2}^z \frac{dh}{h^2} \int_{z/2}^h (f(x+t) - f(x)) dt \\
&= I_1(x) + I_2(x).
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Сначала рассмотрим $I_1(x)$. Имеем

$$\begin{aligned}
I_1(x) &= \frac{1}{z} \int_0^z (f(x+t) - f(x)) dt - \frac{1}{2} \frac{1}{z/2} \int_0^{z/2} (f(x+t) - f(x)) dt \\
&= s_z(f)(x) - f(x) - \frac{1}{2} (s_{z/2}(f)(x) - f(x)),
\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_{p(\cdot)} &\leq \|s_z(f) - f\|_{p(\cdot)} + \frac{1}{2} \|s_{z/2}(f) - f\|_{p(\cdot)} \\
&\leq \Omega(f, z)_{p(\cdot)} + \frac{1}{2} \Omega\left(f, \frac{z}{2}\right)_{p(\cdot)} \leq \frac{3}{2} \Omega(f, z)_{p(\cdot)}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Для $I_2(x)$ из (5.11) имеем

$$|I_2(x)| = \left| \int_{z/2}^z \frac{dh}{h^2} \left[\int_0^h (f(x+t) - f(x)) dt - \int_0^{z/2} (f(x+t) - f(x)) dt \right] \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \int_{z/2}^z \frac{dh}{h} \left[(s_h(f)(x) - f(x)) - \frac{z/2}{h} (s_{z/2}(f)(x) - f(x)) \right] \right| \\
&\leq \int_{z/2}^z \frac{dh}{h} (|s_h(f)(x) - f(x)| + |s_{z/2}(f)(x) - f(x)|).
\end{aligned}$$

Отсюда и из (3.13) с учетом (2.3) находим

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_{p(\cdot)} &\leq \left\| \int_{z/2}^z \frac{dh}{h} |s_h(f) - f| \right\|_{p(\cdot)} + \|s_{z/2}(f) - f\|_{p(\cdot)} \\
&\leq c(p) \int_{z/2}^z \frac{dh}{h} \|s_h(f) - f\|_{p(\cdot)} + \|s_{z/2}(f) - f\|_{p(\cdot)} \\
&\leq c(p) \Omega(f, z)_{p(\cdot)} + \Omega\left(f, \frac{z}{2}\right)_{p(\cdot)} \leq (1 + c(p)) \Omega(f, z)_{p(\cdot)}. \tag{5.13}
\end{aligned}$$

Сопоставляя (5.11)–(5.13) с (5.10), получаем ($0 < z \leq 1$)

$$\|(\Theta_z(f))'\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \frac{1}{z} \Omega(f, z)_{p(\cdot)}. \tag{5.14}$$

Это, в частности, означает, что $\Theta_\delta(f)(x) \in W_{p(\cdot)}$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}
|\Theta_\delta(f)(x) - f(x)| &= \left| \frac{2}{\delta} \int_{\delta/2}^\delta \frac{dh}{h} \int_0^h (f(x+t) - f(x)) dt \right| \\
&\leq \frac{2}{\delta} \int_{\delta/2}^\delta |s_h(f)(x) - f(x)| dh,
\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}
\|\Theta_\delta(f) - f\|_{p(\cdot)} &\leq c(p) \frac{2}{\delta} \int_{\delta/2}^\delta \|s_h(f) - f\|_{p(\cdot)} dh \\
&\leq c(p) \frac{2}{\delta} \int_{\delta/2}^\delta \Omega(f, h)_{p(\cdot)} dh \leq c(p) \Omega(f, \delta)_{p(\cdot)}. \tag{5.15}
\end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
\|f - Q_n(f)\|_{p(\cdot)} &\leq \|f - \Theta_{1/n}(f)\|_{p(\cdot)} \\
&\quad + \|\Theta_{1/n}(f) - Q_n(\Theta_{1/n}(f))\|_{p(\cdot)} + \|Q_n(\Theta_{1/n}(f)) - Q_n(f)\|_{p(\cdot)}. \tag{5.16}
\end{aligned}$$

Из (5.15) следует, что

$$\|f - \Theta_{1/n}(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \Omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)}. \tag{5.17}$$

С другой стороны, в работе автора [1] доказано, что если $p(x) \in \mathcal{P}$, то система Хаара $\{\chi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ является базисом пространства $L^{p(x)}$ и, следовательно, для $f \in L^{p(x)}$ имеет место оценка

$$\|Q_n(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \|f\|_{p(\cdot)},$$

откуда, в свою очередь, с учетом (5.17) получаем

$$\begin{aligned} \|Q_n(\Theta_{1/n}(f)) - Q_n(f)\|_{p(\cdot)} &= \|Q_n(\Theta_{1/n}(f) - f)\|_{p(\cdot)} \\ &\leq c(p) \|f - \Theta_{1/n}(f)\|_{p(\cdot)} \leq c(p) \Omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Наконец, из (5.14) и теоремы 1 имеем

$$\begin{aligned} \|\Theta_{1/n}(f) - Q_n(\Theta_{1/n}(f))\|_{p(\cdot)} &\leq \frac{c(p)}{n} \|(\Theta_{1/n}(f))'\|_{p(\cdot)} \\ &\leq \frac{c(p)}{n} \frac{1}{1/n} \Omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)} = c(p) \Omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{p(\cdot)}. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Утверждение теоремы 4 вытекает из (5.16)–(5.19).

В заключение автор выражает признательность рецензенту за полезные замечания.

Список литературы

- [1] И. И. Шарапудинов, “О базисности системы Хаара в пространстве $\mathcal{L}^{p(t)}([0, 1])$ и принципе локализации в среднем”, *Матем. сб.*, **130(172)**:2(6) (1986), 275–283; англ. пер.: I. I. Sharapudinov, “On the basis property of the Haar system in the space $\mathcal{L}^{p(t)}([0, 1])$ and the principle of localization in the mean”, *Math. USSR-Sb.*, **58**:1 (1987), 279–287.
- [2] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, M. Ružička, *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, Lecture Notes in Math., **2017**, Springer, Berlin, Heidelberg, 2011, x+509 pp.
- [3] И. И. Шарапудинов, *Некоторые вопросы теории приближений в пространствах Лебега с переменным показателем*, Итоги науки. Юг России. Матем. монография, **5**, ЮМИ ВНИЦ РАН и РСО-А, Владикавказ, 2012, 267 с.
- [4] И. И. Шарапудинов, “О топологии пространства $\mathcal{L}^{p(t)}([0, 1])$ ”, *Матем. заметки*, **26**:4 (1979), 613–632; англ. пер.: I. I. Sharapudinov, “Topology of the space $\mathcal{L}^{p(t)}([0, 1])$ ”, *Math. Notes*, **26**:4 (1979), 796–806.
- [5] И. И. Шарапудинов, “Приближение функций в $L_{2\pi}^{p(x)}$ тригонометрическими полиномами”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **77**:2 (2013), 197–224; англ. пер.: I. I. Sharapudinov, “Approximation of functions in $L_{2\pi}^{p(x)}$ by trigonometric polynomials”, *Izv. Math.*, **77**:2 (2013), 407–434.
- [6] И. И. Шарапудинов, “О равномерной ограниченности в L^p ($p = p(x)$) некоторых семейств операторов свертки”, *Матем. заметки*, **59**:2 (1996), 291–302; англ. пер.: I. I. Sharapudinov, “Uniform boundedness in L^p ($p = p(x)$) of some families of convolution operators”, *Math. Notes*, **59**:2 (1996), 205–212.
- [7] И. И. Шарапудинов, “Некоторые вопросы теории приближения в пространствах $L^{p(x)}(E)$ ”, *Anal. Math.*, **33**:2 (2007), 135–153.
- [8] И. И. Шарапудинов, “Аппроксимативные свойства средних Валле–Пуссена на классах типа Соболева с переменным показателем”, *Вестник Дагестанского научного центра РАН*, 2012, № 45, 5–13.
- [9] И. И. Шарапудинов, “Приближение гладких функций в $L_{2\pi}^{p(x)}$ средними Валле–Пуссена”, *Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика*, **13**:1(1) (2013), 45–49.

- [10] A. Guven, D.M. Israfilov, “Trigonometric approximation in generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ ”, *J. Math. Inequal.*, **4**:2 (2010), 285–299.
- [11] R. Akgün, “Polynomial approximation of function in weighted Lebesgue and Smirnov spaces with nonstandard growth”, *Georgian Math. J.*, **18**:2 (2011), 203–235.
- [12] R. Akgün, “Trigonometric approximation of functions in generalized Lebesgue spaces with variable exponent”, *Ukrainian Math. J.*, **63**:1 (2011), 1–26; англ. пер. с: *Укр. матем. журн.*, **63**:1 (2011), 3–23.
- [13] R. Akgün, V. Kokilashvili, “On converse theorems of trigonometric approximation in weighted variable exponent Lebesgue spaces”, *Banach J. Math. Anal.*, **5**:1 (2011), 70–82.
- [14] С. О. Чайченко, “Наилучшее приближение периодических функций в обобщенных пространствах Лебега”, *Укр. матем. журн.*, **64**:9 (2012), 1249–1265; англ. пер.: S. O. Chaichenko, “Best approximations of periodic functions in generalized Lebesgue spaces”, *Ukrainian Math. J.*, **64**:9 (2013), 1421–1439.
- [15] Б. С. Кашин, А. А. Саакян, *Ортогональные ряды*, 2-е изд., АФЦ, М., 1999, х+550 с.; англ. пер. 1-го изд.: B. S. Kashin, A. A. Saakyan, *Orthogonal series*, Transl. Math. Monogr., **75**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989, xii+451 с.
- [16] И. М. Соболев, *Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара*, Наука, М., 1969, 288 с.
- [17] П. Л. Ульянов, “О рядах по системе Хаара”, *Матем. сб.*, **63(105)**:3 (1964), 356–391.

Идрис Идрисович Шарапудинов

(Idris I. Sharapudinov)

Дагестанский научный центр РАН, г. Махачкала

E-mail: sharapud@mail.ru

Поступила в редакцию

29.07.2013 и 30.10.2013